

Das Bierschaumexperiment mit dem TI-30X Plus MathPrint™

Das bekannte Bierschaumexperiment wird gern im Unterricht verwendet, um einen exponentiellen Zerfallsvorgang zu demonstrieren, seine mathematische Modellierung zu erläutern und einzuüben. Viele Anregungen dazu sind z. B. im Internet zu finden, wenn man nach diesem Begriff „googelt“.

Es soll hier gezeigt werden, wie der wissenschaftliche Taschenrechner TI-30 X Plus MathPrint™ in diesem Zusammenhang sinnvoll verwendet werden kann, um eine Gleichung des Zerfallsvorgangs zu ermitteln. Dabei soll als bekannt vorausgesetzt werden, dass eine Exponentialfunktion ein geeignetes mathematisches Modell für derartige Zerfallsvorgänge sein kann.



Vergleichen Sie dazu auch den Beitrag „Exponentielle Regression mit dem TI-30X Plus MathPrint“ auf der TI-Materialienseite. In diesem Beitrag wird am Beispiel des Luftdrucks auch auf die Möglichkeit eingegangen, über eine halblogarithmische Darstellung ein Argument für die Annahme eines exponentiellen Zusammenhangs zu finden. Überdies wird dort kurz gezeigt, wie aus dem Ansatz $y' = k \cdot y$ eine Gleichung für exponentiellen Zerfall bzw. exponentielles Wachstum gewonnen wird. Auf diese Aspekte wird im Folgenden nicht eingegangen, jedoch sind Wiederholungen von Erläuterungen zur Bedienung des TI-30 X Plus MathPrint™ nicht ausgeschlossen und wegen der besseren Lesbarkeit des vorliegenden Materials auch gewollt.

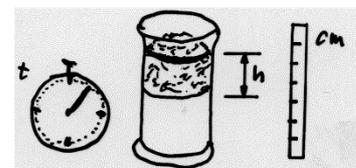
Ich habe gute Erfahrungen damit gesammelt, die folgende Aufgabenstellung nach einer Einführung der Exponentialfunktionen im Unterricht als Hausaufgabe über mehrere Tage zu stellen, z. B. so, dass ein Wochenende dazwischen liegt. Viele Schülerinnen und Schüler haben dann ihre Väter eingespannt. (Ob die dann immer alkoholfreies Bier verwendeten entzieht sich meinem Einfluss.)

Versuchsdurchführung:

In ein zylinderförmiges Glas wird zügig (alkoholfreies) Bier gegossen, so dass sich eine kräftige Schaumsäule bildet. Die Stoppuhr wird sofort in Gang gesetzt, und die absolute Schaumhöhe wird im 30 – Sekunden – Takt gemessen.

Aufgabenstellungen:

- Halten Sie die Messdaten in einer Tabelle fest und stellen Sie den Zusammenhang zwischen Zeit und Schaumhöhe (Differenz zwischen Ober- und Unterkante des Schaumes) graphisch dar. Beschreiben Sie, welche Merkmale des Graphen auf einen exponentiellen Zusammenhang hinweisen könnten.
- Stellen Sie mithilfe einer exponentiellen Regression mit dem TI - 30 X Plus MathPrint eine Gleichung der Zerfallsfunktion auf.
- Speichern Sie diese Regressionsfunktion im TI-30 X Plus MathPrint und notieren Sie die Funktionsgleichung. Beschreiben Sie die Bedeutung der in der Regressionsgleichung vorkommenden Größen.
- Führen Sie eine Fehlerbetrachtung durch.



- e) Bestimmen Sie mit Hilfe der Regressionsgleichung
- die theoretische Schaumhöhe, die nach diesem mathematischen Modell nach 30, 60, ..., 300 s erreicht würden (Tabelle, letzte Zeile ausfüllen und im Diagramm ergänzen)
 - die Schaumhöhe nach 100 s
 - den Zeitpunkt, zu dem die Schaumhöhe 15 mm beträgt,
 - die Halbwertszeit des Schaumzerfalls.

Musterlösungen:

a) Ergebnisse eines Schülerversuchs:

Zeit in s	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
Höhe in mm	95	70	50	45	35	27	23	18	10	7
theor. Höhe	97,3	74,3	56,7	43,3	33,1	25,3	19,3	14,7	11,3	8,6

Grafische Darstellung:

Merkmale des Graphen, die auf einen exponentiellen Zerfall hinweisen können:

- streng monoton fallend,
- die Höhendifferenzen werden mit den äquidistant steigenden Zeiten immer kleiner,
- die Quotienten aufeinanderfolgender Höhen sind annähernd konstant.

0,7368	0,8519
0,7143	0,7826
0,9	0,5556
0,7778	0,7
0,7714	

Mittelwert rund 0,7545

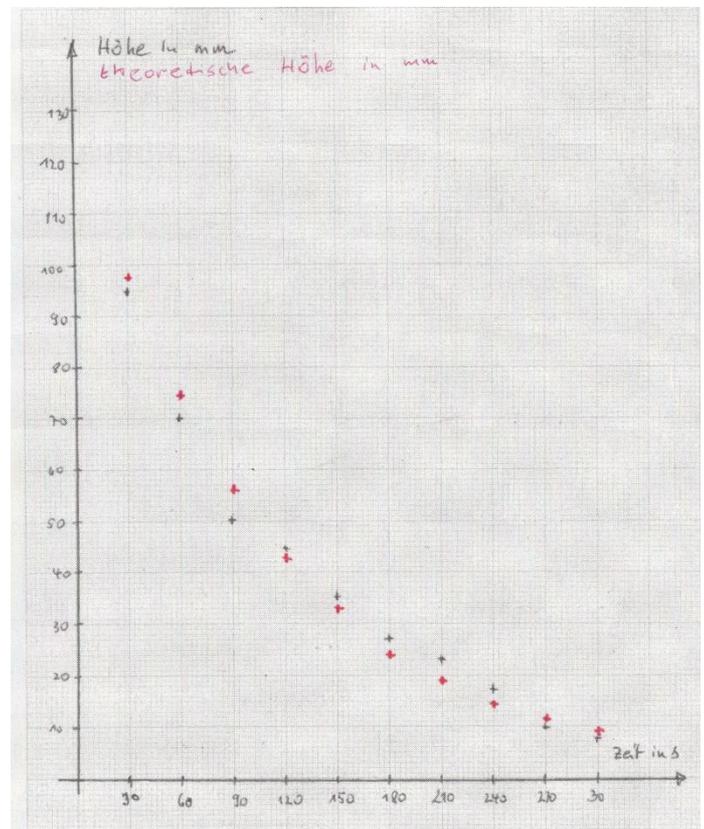
- b) Der TI - 30 X Plus MathPrint™ bietet zwei Möglichkeiten für exponentielle Regression an: (1) $y = a \cdot b^x$ und (2) $y = a \cdot e^{b \cdot x}$

Im vorliegenden Fall liefert der TI - 30 X Plus MathPrint™ für diese Gleichungen

(1) $y \approx 127,38 \cdot 0,9911^x$ mit einem Regressionskoeffizienten von rund $r = -0,9872$.

(2) $y \approx 127,38 \cdot e^{-0,00898 \cdot x}$ mit einem Regressionskoeffizienten von ebenfalls rund $r = -0,9872$.

Da r nahe bei -1 liegt, kann man von einer guten Korrelation zwischen Zeit und Schaumhöhe ausgehen.



- c) Der Faktor 127,38 beschreibt die theoretische Schaumhöhe in Millimeter zum Zeitpunkt $t = 0$.

Die Basis $0,9911 \approx e^{-0,00898}$ gibt an, dass die Schaumhöhe vom Zeitpunkt $t + 1$ noch 99,11% der Schaumhöhe zum Zeitpunkt t (t in Sekunden) beträgt.

- d) Fehlerbetrachtung:

Systematische Fehler: Ungenaue Skaleneinteilung des Lineals; schwieriges Erfassen der Grenzen des Schaumes.

Zufällige Fehler: Reaktionsprobleme beim Stoppen der Zeit oder beim Einhalten der Zeitabstände.

- e) Die theoretischen Schaumhöhen, berechnet mit einer der Regressionsfunktionen, können der Tabelle und der grafischen Darstellung entnommen werden (Eintragungen in roter Farbe).

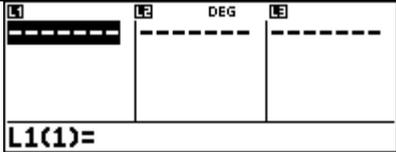
Die Schaumhöhe nach 100 s beträgt ca. 51,9 mm.

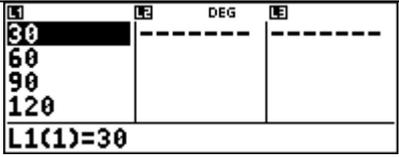
Eine Schaumhöhe von 15 mm wird (theoretisch) nach ca. 238 s erreicht.

Die Halbwertszeit kann z. B. mithilfe der Gleichung $\frac{127,38}{2} = 127,38 \cdot 0,9911^x$ zu $x \approx 76,7$ s berechnet werden.

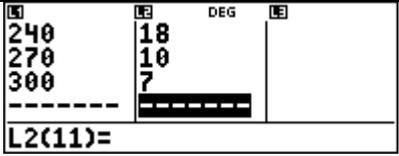
Technische Hinweise zum Einsatz des TI - 30 X Plus MathPrint™

1. Eintragen der Folge der Messzeitpunkte in den Listeneditor

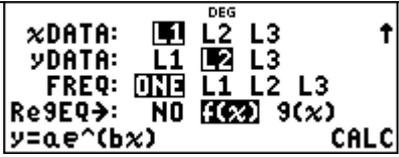
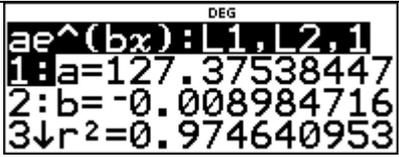
<p>Mit <code>data</code> den Listeneditor öffnen.</p>	
<p>Nochmals <code>data</code> drücken und dann mit den Pfeiltasten auf OPS und Sequence gehen. Mit <code>enter</code> abschließen.</p> <p><code>data data</code>     <code>enter</code></p>	
<p>Mit <code>enter</code> die Liste L1 auswählen.</p>	

<p>Das Startsetup wie nebenstehend ausfüllen und auf SEQUENCE FILL gehen, sowie mit enter abschließen.</p> <p>x^{yzt} $abcd$ 3 0 3 0 0 3 0</p>	
<p>Im Listeneditor ist die Folge der vorgegebenen Zeiten zu erkennen.</p> <p>(Natürlich können diese zehn Zahlen auch von Hand eingetippt werden.)</p>	

2. Eintragen der Schaumhöhen

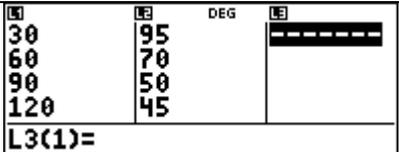
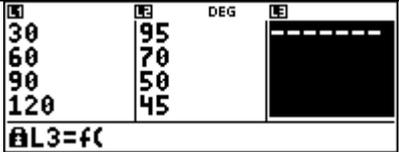
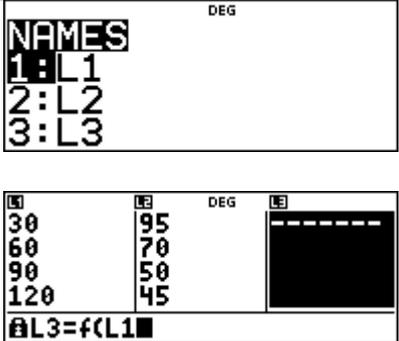
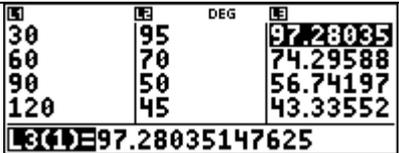
<p>Die abgelesenen Werte der Schaumhöhen müssen von Hand in die Liste L2 eingegeben werden. Der Wechsel zwischen den Zeilen erfolgt mit der Pfeiltaste.</p>	
---	--

3. Ausführen der exponentiellen Regression

<p>Mit 2nd data die Zweitbelegung stat-reg/distr der Taste data wählen und dort mit der Pfeiltaste eine der beiden exponentiellen Regressionen auswählen. Mit enter abschließen.</p> <p>2nd data ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓</p>	
<p>Für xDATA wird die Liste L1, für yDATA die Liste L2, für die Frequenz wird ONE wie vorgeschlagen belassen. Zum Speichern der Regressionsfunktion wird f(x) ausgewählt und mit enter bestätigt. Zum Schluss wird noch CALC gewählt und ebenfalls mit enter bestätigt.</p>	
<p>Nun wird das Ergebnis der Regression angezeigt. Es empfiehlt sich, die Angaben (sinnvoll gerundet) zu notieren, z. B. $f(x) = 127,38 \cdot e^{-0,00898 \cdot x}$.</p>	

<p>Mit der Pfeiltaste nach unten lässt sich eine weitere Angabe anzeigen, der Regressionskoeffizient r, dessen Wert eine Auskunft über die Qualität der Regression gibt. Liegen der Wert von r nahe bei -1 oder 1 kann man von einer guten Korrelation zwischen den untersuchten Größen ausgehen.</p>	
---	--

4. Übertragen der Funktionswerte der Regressionsfunktion in den Listeneditor

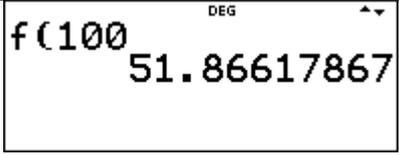
<p>Den Listeneditor mit data öffnen und mit der Pfeiltaste nach rechts zu L3 gehen.</p> <p>data → →</p>	
<p>Nochmals data drücken und dann mit der Pfeiltaste nach rechts auf FORMULA und 1: Add/Edit Frmla gehen.</p> <p>data → 1</p>	
<p>table drücken und 2: f(wählen.</p> <p>table 2</p>	
<p>Nochmals data drücken und dann mit der Pfeiltaste nach unten auf L1 gehen und mit enter abschließen.</p> <p>data 1 enter</p>	
<p>Die Funktionswerte der Funktion f werden für die in der Liste L1 gespeicherten x-Werte angezeigt.</p>	

5. Nutzen von **table** beim Lösen von Aufgaben

Unter „3. Ausführen der exponentiellen Regression“ wird beschrieben, wie die Funktionsgleichung unter $f(x)$ in **table** gespeichert wird. In „4. Übertragen der Funktionswerte der Regressionsfunktion in den Listeneditor“ wird gezeigt, wie die unter $f(x)$ gespeicherte Funktion zum Berechnen von Funktionswerten einer Liste von x -Werten genutzt werden kann.

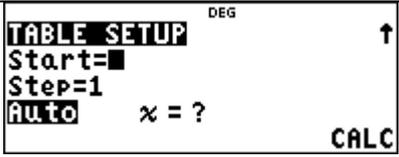
Unabhängig vom Listeneditor können weitere Aufgabentypen, die mit der Funktion $f(x)$ zusammenhängen, rasch gelöst werden.

a) Berechnen einzelner Funktionswerte

Mit 2nd mode (quit) den Listeneditor verlassen	
Mit table 2 : f (die Funktion f aufrufen. Gegebenenfalls mit enter abschließen.	
Den x -Wert eingeben und mit enter abschließen. So kann z. B. die Schaumhöhe nach 100 s berechnet werden. 1 0 0 enter	

b) Bestimmen von x -Werten zu gegebenen Funktionswerten

Mit table 1 : Add/Edit Func wählen.	
Es wird die Funktion f mit ihrer Gleichung angezeigt.	

<p>Mit der Pfeiltaste nach unten gehen. Hier kommt eine Vorlage zur Eingabe einer weiteren Funktion $g(x)$. Wenn dies nicht gebraucht wird, geht man nochmals mit der Pfeiltaste nach unten.</p>	
<p>Es öffnet sich das TABLE SETUP. Hier können der Startwert für x und die Schrittweite (Step) und ggf. auch einzelne x-Werte angegeben werden.</p>	
<p>In der Aufgabenstellung auf Seite 1 wird nach dem Zeitpunkt gefragt, zu dem die Schaumhöhe 15 mm beträgt. Aus der Tabelle ist zu entnehmen, dass dies vermutlich im Intervall [210 s; 240 s] der Fall ist. Entsprechend wird das TABLE SETUP mit dem Start = 210 und Step = 1 eingerichtet. Mit den Pfeiltasten „blättert“ man in der Tabelle, bis man zu einem guten Näherungswert gelangt. Analog lässt sich die Halbwertszeit ermitteln.</p>	 <p>Nach etwa 238 s ist mit einer Schaumhöhe von 15 mm zu rechnen.</p>

6. Nachtrag 1

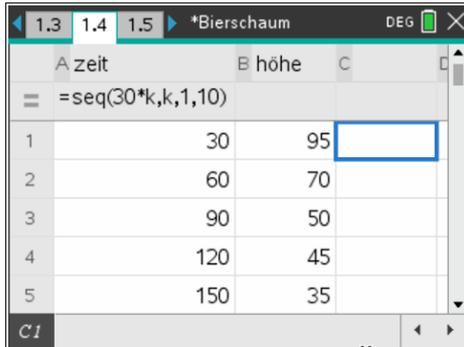
Auf Seite 2 wurden die Quotienten zweier im 30-Sekundenabstand aufeinanderfolgender Schaumhöhen und deren Mittelwert mit $m \approx 0,7545$ aufgeführt.

Geht man von einem exponentiellen Zusammenhang aus, so lässt sich damit und mit dem Anfangswert der Schaumhöhe von 95 mm auch eine Funktionsgleichung der Form $y = a \cdot b^x$ angeben:

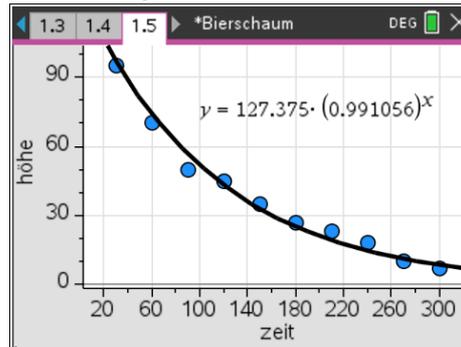
$h(t) = 95 \cdot 0,7545^{\frac{t-30}{30}}$ ist ein Modell für die Höhe des Bierschaumes in mm, wobei t die Zeit t in Sekunden ist.

7. Nachtrag 2

Steht den Schülern ein TI-Nspire CAS zur Verfügung, so lassen sich die Untersuchungen rascher und anschaulicher vornehmen, wie die folgenden Screenshots andeuten:



	A zeit	B höhe	C
=			=seq(30*k,k,1,10)
1		30	95
2		60	70
3		90	50
4		120	45
5		150	35



Tabellieren in Lists&Spreadsheets

Exponentielle Regression und Graph in Data&Statistics

8. Nachtrag 3

Hier noch Erfahrungsberichte von Kollegen der T3-Arbeitsgruppe:

Hans-Ulrich Lampe: „Nach meiner Erfahrung war es immer schwer, den Schaumstand exakt abzulesen, da der Schaum in der Mitte eher absinkt und am Glasrand aber „klebt“. Ich habe folgendes versucht: eine kreisrunde, leichte Papierscheibe wird auf den Schaum gelegt und gilt als Schaumhöhenmarkierung. Was auch gut funktionierte war, den Zerfall indirekt zu messen, indem die Zunahme des Bierpegels im Glas gemessen wird.“

Hubert Langlotz: „Man sollte am besten ein relativ zylinderförmiges Hefeweizenglas nehmen.“

Sebastian Rauh: „Bei genauerer wissenschaftlicher Betrachtung sind Zweifel am Modell „Exponentialfunktion“ angebracht. Hier ist die Änderung nicht proportional zum Bestand, da sich u.a. die nebeneinanderliegenden Blasen beeinflussen. Diese Modellierung kann keine Vorhersagen machen, sondern lediglich die einzelnen Messpunkte gut beschreiben. (Vgl. auch: > <http://www.thomas-wilhelm.net/Vortraege/Bierschaumzerfall.pdf>)“

Autor:

Dr. Wilfried Zappe

