Schwingende Ellipsen: Plotten einer Ellipse

Jede Ellipse, die im Ursprung zentriert ist, kann in folgender Form ausgedrückt werden

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

wobei ± a und ± b die x- und y-Achsenabschnitte der Ellipse darstellen.

Um eine Ellipse grafisch darzustellen, muss der obige Ausdruck zunächst nach y aufgelöst werden, um Folgendes zu erhalten:

$$y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Diese Gleichung wird in zwei Teilen eingegeben, einem Ausdruck für den positiven Teil (obere Hälfte der Ellipse) und einem für den negativen Teil (untere Hälfte der Ellipse).

In dieser Aufgabe werden Sie den Ultraschallsensor verwenden, um die Position und die Geschwindigkeit eines schwingenden Pendels aufzuzeichnen. Sie werden feststellen, dass die Darstellung der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Position elliptisch ist und dass Sie ihn mit der Standardgleichung einer Ellipse modellieren können.

ZIELE

- Die Position und die Geschwindigkeit eines schwingenden Pendels in Abhängigkeit von der Zeit aufzeichnen.
- Die Daten zu Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Position als Phasendiagramm darstellen.
- Zu dem Phasendiagramm eine passende Ellipsengleichung bestimmen.

MATERIALIEN

TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld

TI Bluetooth®-Adapter
Vernier Go Direct Motion Detector (GDX-MD)

Kugel für das Pendel
Stativ
Schnur
Metermaß

DURCHFÜHRUNG

1. Zuerst müssen Sie den Go Direct Bewegungssensor entweder über ein USB-Kabel oder über Bluetooth mit dem TI-Nspire™ CX II-T Handheld verbinden.

Wenn Sie ein USB-Kabel verwenden:

- Schließen Sie das Kabel an die Buchse oben rechts am TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld und an die Buchse am Go Direct-Bewegungsmelder an.

- Schalten Sie den TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld ein und starten Sie die Vernier DataQuest-App. Wenn Sie die Home-Taste auf dem TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld drücken, ist Vernier DataQuest das grüne Symbol unten rechts. Navigieren Sie zu diesem Symbol und wählen Sie es aus.

- Wählen Sie im Menü [menu] die Option "1: Neues Experiment".

- Fahren Sie unten mit Schritt 2 fort.

Wenn Sie Bluetooth verwenden:

- Drücken Sie die Taste des Vernier Go Direct Bewegungssensors. Die rote LED sollte anfangen zu blinken.

- Schalten Sie den TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld ein und starten Sie die Vernier DataQuest-App. Wenn Sie die Home-Taste auf dem TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld drücken, ist Vernier DataQuest das grüne Symbol unten rechts. Navigieren Sie zu diesem Symbol und wählen Sie es aus.

- Wählen Sie im Menü [menu] die Option "1: Neues Experiment".

  - Wenn Ihr DataQuest-Bildschirm einen Entfernungswert [m] anzeigt und Ihr Bewegungssensor eine grün blinkende LED hat, können Sie das Experiment starten. Fahren Sie mit Schritt 2 fort. Andernfalls müssen Sie Ihren Sensor drahtlos mit dem TI-Nspire™ CX II-T CAS Handheld verbinden. Dies wird „Koppeln" genannt.

a. Klicken Sie auf “Bluetooth-Sensor Hinzufügen”.

b. Es sollte eine Liste der verfügbaren Sensoren angezeigt werden.

c. Wählen Sie Ihren Sensor aus. Jeder Sensor hat eine Seriennummer. Wenn mehr als ein Sensor in der Liste erscheint, überprüfen Sie die Seriennummer, die auf dem Sensorgehäuse aufgedruckt ist.

d. Wählen Sie “Verbinden”. Wenn die Verbindung hergestellt ist, sollte die LED am Temperatursensor grün blinken und der Name und die Seriennummer des Sensors oben auf dem Bildschirm angezeigt werden.

e. Wählen Sie “OK” zum Beenden

2. Die Vernier DataQuest-App sollte nun einen Entfernungswert (in Metern) anzeigen. Bewegen Sie Sie Ihre Hand vom Sensor weg und zum Sensor hin und beobachten Sie, ob sich der Messwert ändert. Beachten Sie, dass der Bewegungsmelder nicht richtig funktioniert, wenn Sie sich dem Objekt weniger als etwa 0,2 Meter nähern.

3. Hängen Sie die Pendelkugel an einer etwa 80 cm langen Schnur an einem Stativ auf. Richten Sie die Halterung so aus, dass die Unterseite der Pendelkugel die Tischplatte um einige Zentimeter überragt. Positionieren Sie den Ultrschallsensor etwa 1 m vom Pendel entfernt, so dass er auf das Pendel zeigt. Achten Sie darauf, dass der Sensor nicht von den Schwingungen des Pendels beiflusst wird.

4. Damit die Entfernungsdaten von der Neutralposition des Pendels aus gemessen werden, müssen Sie den Bewegungssensor auf Null stellen. Lassen Sie dazu das Pendel gerade nach unten hängen, ohne es zu bewegen.
   a. Vergewissern Sie sich, dass die Kugel ruhig hängt, und entfernen Sie Ihre Hände von der Kugel.
   b. Wählen Sie im Menü “1: Experiment” ► “9: Sensoren Einrichten” ► “Bewegung” ► “Nullstelle” (unten links auf der Seite).

5. Üben Sie das Schwingen der Kugel, in dem Sie diese etwa 15 cm aus der Neutralposition zurückziehen und dann loslassen, so dass die Kugel in einer Linie direkt zu dem Bewegungssensor schwingt.

6. Wenn der Pendelkörper richtig schwingt, starten Sie die Datenerfassung, indem Sie in der App auf den grünen Pfeil klicken. Die Datenerfassung läuft 5 Sekunden lang.

7. Wenn die Datenerfassung abgeschlossen ist, werden Position-Zeit-Diagramm und Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm angezeigt. Betrachten Sie das Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm; es sollte annähernd sinusförmig sein und auf Null zentriert sein. Wenn Sie sich nicht sicher sind, fragen Sie Ihren Lehrer, ob Sie die Datenerfassung wiederholen müssen. Um die Datenerfassung zu wiederholen, gehen Sie zu Schritt 5.

8. Richten Sie das Geschwindigkeit-Position-Diagramm manuell ein.
   a. Fügen Sie eine Seite "Graphs" ein.
   b. Wählen Sie im Menü "3:Graph-Eingabe/Bearbeitung" ► "6: Streudiagramm".
   c. Fügen Sie in s1 mit Hilfe der Taste [var] für x **run1.position** und für y **run1.geschwindigkeit** ein.
   d. Wählen Sie im Menü "4: Fenster/Zoom" ►"9: Statistik", um alle Daten anzuzeigen. Sie sollten nun ein Geschwindigkeit-Position-Diagramm sehen.

(Hinweis: Wenn Sie den Sensor während der weiteren Berbeitung ausstellen möchten, dann drücken Sie am Sensor ca. 3 sec die ON-Taste).

ERGEBNISTABLLE

linker *x*-Achsenabschnitt	rechter *x*- Achsenabschnitt	*a*

oberer *y*- Achsenabschnitt	unterer *y*- Achsenabschnitt t	*b*

AUSWERTUNG

1. Während die Graphen von Position und Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit sinusförmig sind, ist der Graph der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Position elliptisch. Der Graph der Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Position wird als Phasendiagramm bezeichnet. Ihr Phasendiagramm hat mehrere x- und y-Achsenabschnitte. Um die Parameter für Ihr Ellipsenmodell zu bestimmen, müssen Sie einige Durchschnittswerte für diese Achsenabschnitte ermitteln. Eine Möglichkeit, dies zu tun, besteht darin, einen typischen Schnittpunkt unter den verfügbaren zu wählen. Wählen Sie im Menü "5: Spur" ►"1: Grafikspur"g. Verwenden Sie die Tasten ► und ◄, um den Cursor entlang der Geschwindigkeits-/Positionskurve zu bewegen. Bestimmen Sie den linken und den rechten x-Achsenabschnitt und notieren Sie ihn in der Ergenbistabelle. Bestimmen Sie auf gleiche Weise den oberen und unteren y-Achsenabschnitt und tragen Sie diese Werte in Ihre Ergebnistabelle ein.
2. Ermitteln Sie den Mittelwert der absoluten Werte der x-Achsenabschnitte und tragen Sie diesen Wert als a in Ihre Ergebnistabelle ein.
3. Ermitteln Sie den Mittelwert der absoluten Werte der y-Achsenanschnitte und tragen Sie diesen Wert als b in Ihre Ergebnistabelle ein.

4. Geben Sie die beiden Hälften Ihrer Ellipsengleichung ein. Die eine Hälfte ist die positive Funktion $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ während die andere Hälfte ein vorangestelltes Minuszeichen hat.
   a. Wählen Sie im Menü "3: Graph" ⏎► "1: Funktion".
   b. Geben Sie die positive Hälfte Ihrer Modellgleichung in die Eingabezeile ein (ersetzen Sie a und b durch die oben ermittelten Werte):
      f1(*x*) = b*sqrt(1–x^2/a^2)
   c. Geben Sie die negative Hälfte Ihrer Modellgleichung in die Eingabezeile ein (ersetzen Sie a und b durch die oben ermittelten Werte):
      f2(*x*) = – *f1*(*x*)

AUFGABEN

1. Wie gut stimmen die Kurven der Modellellipsen und die der Datenpunkte überein?
2. An welchem Punkt der Schwingung des Pendels ist seine Geschwindigkeit am größten? Wo ist die Geschwindigkeit gleich Null? Wie hängen diese Werte mit den x- und y-Achsenabschnitten zusammen?
3. Wie würden sich die Daten ändern, wenn die Amplitude (der größte Abstand von der Mittelstellung) der Pendelschwingung vergrößert würde? Würde sich diese Änderung auf die Werte der Konstanten a und b auswirken? Wenn ja, wie?

ERWEITERUNG

Zeigen Sie, wie der algebraische Ausdruck $y = \pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ aus der Ellipsengleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ abgeleitet werden kann.