

**Kenntnisse über Kegelschnitte mit dem modularen Mathematiksystem der
TI-Nspire™ CX CAS Technologie anschaulich und effektiv erlernen
Teil 2**

Wolfgang Häfner

Auch für den Teil 2 wird die zugehörige Datei Kegelschnitte2.tns zum Download zur Verfügung gestellt.

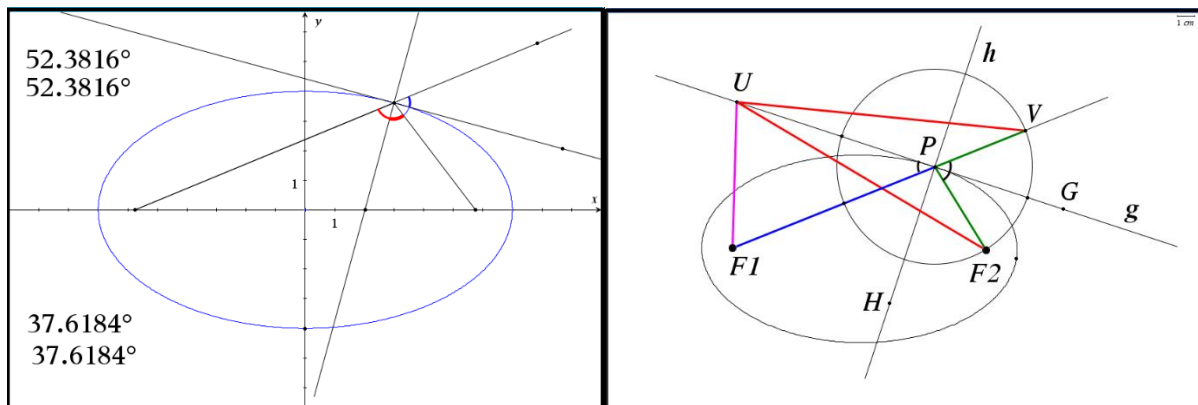
Einige interessante Eigenschaften der Kegelschnitte

Satz:

P sei der Punkt einer Ellipse mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Dann gilt:

Die Halbierende des Nebenwinkels von Winkel $\sphericalangle F_1PF_2$ ist die Tangente an die Ellipse im Punkt P. Die Normale der Ellipse im Punkt P ist Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle F_1PF_2$.



Beweis:

Die Gerade g sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle F_2PV$.

Angenommen es gäbe außer P einen weiteren Punkt U auf g , der ebenfalls ein Ellipsenpunkt wäre, dann müsste die Gleichung $\overline{F_1U} + \overline{UF_2} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$ gelten.

Da g Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_2PV$ und $\overline{F_2P} = \overline{PV}$ gilt, ist g auch Mittelsenkrechte von $\overline{F_2V}$.

Deshalb ist dann Dreieck ΔF_2UV gleichschenkelig, also $\overline{UV} = \overline{UF_2}$.

Daraus folgt $\overline{F_1U} + \overline{UF_2} = \overline{F_1U} + \overline{UV} > \overline{F_1V} = \overline{F_1P} + \overline{PV} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$.

Also gilt $\overline{F_1U} + \overline{UF_2} > \overline{F_1P} + \overline{PF_2}$.

Die Annahme, dass es außer P einen weiteren Ellipsenpunkt U auf g gibt, ist somit falsch.

Die Gerade g ist also Tangente an die Ellipse im Punkt P .

Daraus folgt:

$\sphericalangle F_2PG \cong \sphericalangle GPV$ (Winkelhalbierende)

$\sphericalangle GPV \cong \sphericalangle UPF_1$ (Scheitelwinkel)

$\Rightarrow \sphericalangle UPF_1 \cong \sphericalangle F_2PG$

Da die Gerade h Normale der Ellipse in P ist, gilt

$\sphericalangle F_1PH = 90^\circ - (\sphericalangle UPF_1)$ und $\sphericalangle F_2PH = 90^\circ - (\sphericalangle F_2PG)$

$\Rightarrow \sphericalangle F_1PH \cong \sphericalangle F_2PH$

Die Normale ist also Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_1PF_2$.

Die Punkte F_1 , F_2 , und U sind in der Geometry-Applikation (Problem 2) variabel.

Folgerung:

Ein Lichtstrahl durch einen Brennpunkt einer Ellipse wird an dieser so reflektiert, dass der reflektierte Strahl durch den anderen Brennpunkt geht.

Damit wird dann auch die Bezeichnung dieser beiden Punkte plausibel.

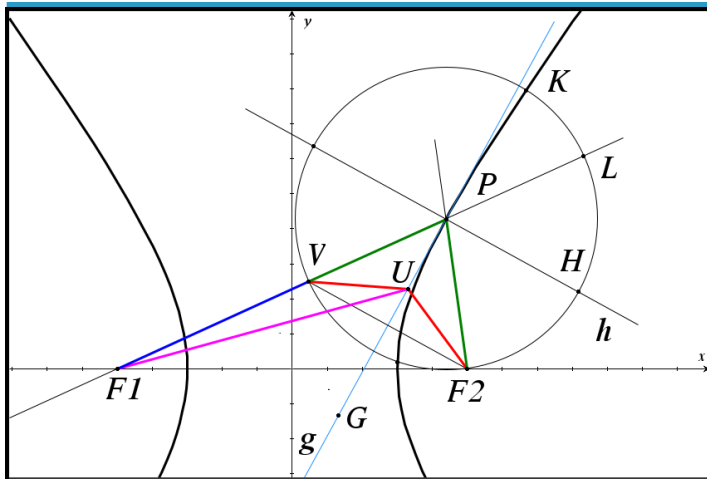
Satz:

P sei ein Punkt einer Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 .

Dann gilt:

Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle F_1PF_2$ ist die Tangente an die Hyperbel im Punkt *P*.

Die Normale der Ellipse im Punkt *P* ist die Halbierende des Nebenwinkels von Winkel $\sphericalangle F_1PF_2$.



Beweis:

Wegen der Symmetrieeigenschaften der Hyperbel genügt es, den Beweis für Hyperbelpunkte im ersten Quadranten des Koordinatensystems zu führen.

Die Gerade g sei die Halbierende des Winkels $\sphericalangle F_1PF_2$.

Angenommen es gäbe außer P einen weiteren Punkt U auf g , der ebenfalls ein Hyperbelpunkt wäre, dann müsste die Gleichung $\overline{F_1U} - \overline{UF_2} = \overline{F_1P} - \overline{PF_2}$ gelten.

Da g Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_1PF_2$ und $\overline{F_2P} = \overline{PV}$ gilt, ist g auch Mittelsenkrechte von $\overline{F_2V}$.

Deshalb ist dann Dreieck ΔF_2UV gleichschenkelig, also $\overline{UV} = \overline{UF_2}$. Die letzte Gleichung gilt natürlich auch, wenn U auf $\overline{F_2V}$ liegt.

Daraus folgt $\overline{F_1U} - \overline{UF_2} = \overline{F_1U} - \overline{UV} < \overline{F_1V} = \overline{F_1P} - \overline{PV} = \overline{F_1P} - \overline{PF_2}$.

Also gilt $\overline{F_1U} - \overline{UF_2} < \overline{F_1P} - \overline{PF_2}$.

Die Annahme, dass es außer P einen weiteren Hyperbelpunkt U auf g gibt, ist somit falsch.

Die Gerade g ist also Tangente an die Ellipse im Punkt P .

Daraus folgt:

$\sphericalangle F_2PG \cong \sphericalangle GPV$ (Winkelhalbierende)

$\sphericalangle GPV \cong \sphericalangle LPK$ (Scheitelwinkel)

$\Rightarrow \sphericalangle LPK \cong \sphericalangle F_2PG$

Da die Gerade h Normale der Ellipse in P ist, gilt

$\sphericalangle F_2PH = 90^\circ - (\sphericalangle F_2PG)$ und $\sphericalangle HPL = 90^\circ - (\sphericalangle LPK)$

$\Rightarrow \sphericalangle F_2PH \cong \sphericalangle HPL$

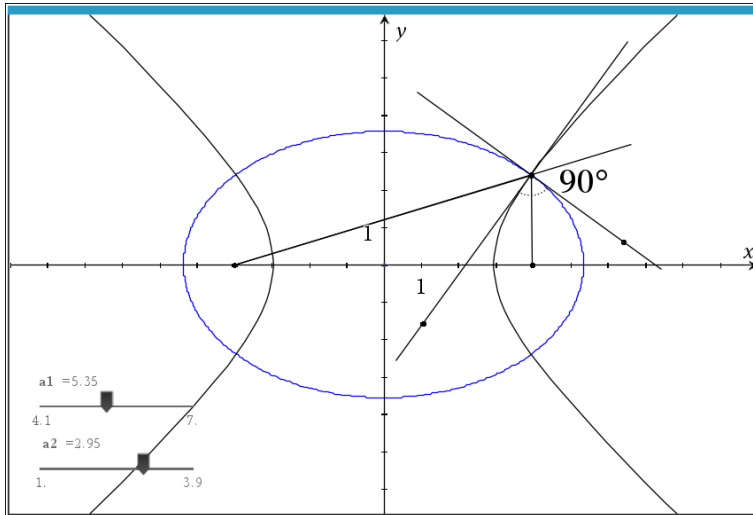
Die Normale ist also Winkelhalbierende von $\sphericalangle F_2PL$ und $\sphericalangle F_2PL$ ist Nebenwinkel von $\sphericalangle F_1PF_2$.

Folgerung:

Ein Lichtstrahl durch einen Brennpunkt einer Hyperbel wird an dieser so reflektiert, als ob der reflektierte Strahl von dem anderen Brennpunkt her käme.

Satz:

Haben eine Ellipse und eine Hyperbel die gleichen Brennpunkte, so schneiden sie sich rechtwinklig.



Ist S ein Schnittpunkt von Ellipse und Hyperbel und haben beide Kegelschnitte die gleichen Brennpunkte, so folgt aus den zuletzt besprochenen Sätzen, dass die Tangente an die Ellipse im Punkt S orthogonal zur Tangente an die Hyperbel im Punkt S ist, weil diese und die Normale der Ellipse im Punkt S die gleichen Geraden sind.

Zur Darstellung dieses Sachverhalts ist hier ein konstanter Abstand der Brennpunkte von 8 Längeneinheiten gewählt.

Damit gilt für eine entsprechende Ellipse

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_1^2 - 4^2} = 1 \quad (b_1^2 = a_1^2 - e^2 = a_1^2 - 4^2)$$

und für eine passende Hyperbel

$$\frac{x^2}{a_2^2} - \frac{y^2}{4^2 - a_2^2} = \frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{a_2^2 - 4^2} = 1 \quad (b_2^2 = e^2 - a_2^2 = 4^2 - a_2^2).$$

Durch die Schieberegler für a_1 und a_2 kann der Sachverhalt für verschiedene Ellipsen und Hyperbeln veranschaulicht werden.

Dabei ist zu beachten, dass $a_1 > e = 4$ und $a_2 < e = 4$ sein muss.

Satz:

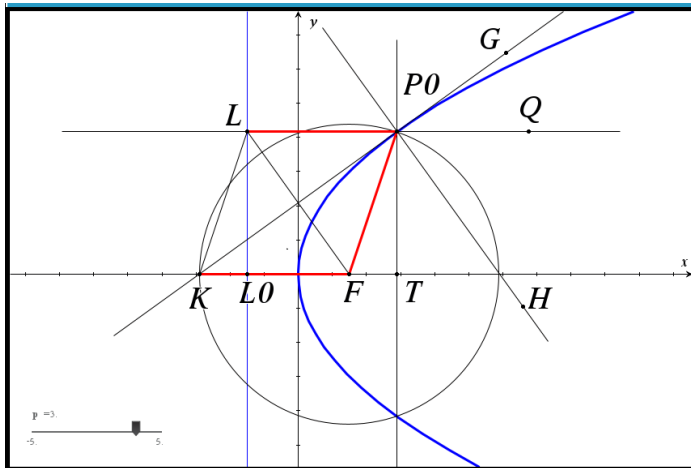
$P_0(x_0|y_0)$ sei der Punkt einer Parabel mit dem Brennpunkt F und der Leitlinie l .

P_0L sei das Lot von P_0 auf die Leitlinie, also L der Lotfußpunkt.

Dann gilt:

Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle LP_0F$ ist die Tangente an die Parabel im Punkt P_0 .

Die Normale der Parabel im Punkt P_0 ist die Halbierende des Nebenwinkels von Winkel $\sphericalangle FP_0L$.



Beweis:

Da P_0 Parabelpunkt ist, gilt $\overline{LP_0} = \overline{P_0F}$. Weil außerdem $\overline{LP_0} = \overline{KF}$ und $\overline{LP_0} \parallel \overline{KF}$ gilt, ist KFP_0L ein Rhombus.

Da im Rhombus die Diagonalen orthogonal sind und LF den Anstieg $-\frac{y_0}{FL_0} = -\frac{y_0}{p}$ hat, ist der Anstieg von KP_0 $m = \frac{p}{y_0}$. Im Teil 1 dieses Beitrags zum Thema Kegelschnitte wurde bereits hergeleitet, dass $\frac{p}{y_0}$ der Anstieg der Tangente an die Parabel im Punkt P_0 ist.

Damit ist KP_0 Tangente an die Parabel im Punkt P_0 .

Weil in einem Rhombus die Diagonalen die Innenwinkel halbieren, ist die Tangente Winkelhalbierende von $\sphericalangle LP_0F$.

Daraus folgt:

$\sphericalangle LP_0K \cong \sphericalangle KP_0F$ (Winkelhalbierende)

$\sphericalangle LP_0K \cong \sphericalangle QP_0G$ (Scheitelwinkel)

$\Rightarrow \sphericalangle KP_0F \cong \sphericalangle QP_0G$

Es sei P_0H die Normale der Parabel im Punkt P_0 .

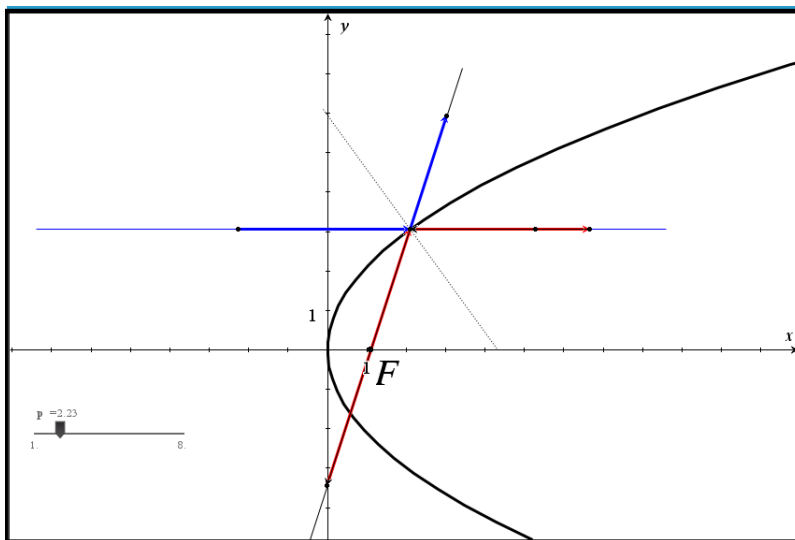
Deshalb ist $\sphericalangle FP_0H = 90^\circ - (\sphericalangle KP_0F)$ und $\sphericalangle HP_0Q = 90^\circ - (\sphericalangle QP_0G)$

und damit $\sphericalangle FP_0H \cong \sphericalangle HP_0Q$.

Der Winkel $\sphericalangle FP_0Q$, der Nebenwinkel von $\sphericalangle LP_0F$ ist, wird von der Normalen halbiert.

Folgerung:

Ein vom Brennpunkt der Parabel ausgehender Lichtstrahl wird so reflektiert, dass er parallel zur Achse der Parabel verläuft.



Satz: Schneiden zwei Parabeln, deren Achsen senkrecht aufeinander stehen, einander in vier Punkten, dann liegen diese vier Punkte auf demselben Kreis.

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Parabelachsen den Koordinatenachsen entsprechen.

Für die Parabeln gelten dann folgende Gleichungen:

$$y^2 = 2 \cdot p_x \cdot (x - d_x) \quad x^2 = 2 \cdot p_y \cdot (y - d_y)$$

Für gemeinsame Punkte beider Parabeln gilt dann

$$x^2 + y^2 = 2 \cdot p_y \cdot (y - d_y) + 2 \cdot p_x \cdot (x - d_x)$$

$$x^2 - 2p_x x + p_x^2 + y^2 - 2p_y y + p_y^2 = p_x^2 + p_y^2 - 2p_x d_x - 2p_y d_y$$

$$(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = p_x^2 + p_y^2 - 2p_x d_x - 2p_y d_y$$

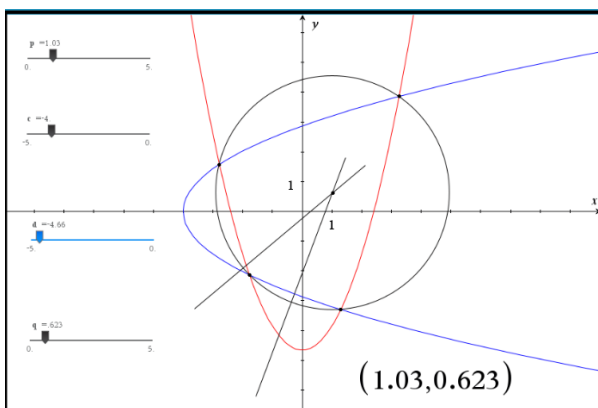
Die Parabeln haben also nur dann gemeinsame Punkte, wenn

$$p_x^2 + p_y^2 - 2p_x d_x - 2p_y d_y \geq 0 \text{ gilt.}$$

Gibt es vier gemeinsame Punkte, dann gilt für diese Punkte die Gleichung

$$(x - p_x)^2 + (y - p_y)^2 = r^2 > 0 \text{ mit } r^2 = p_x^2 + p_y^2 - 2p_x d_x - 2p_y d_y.$$

Damit liegen sie sämtlich auf demselben Kreis ($M(p_x|p_y)$; Radius r).



Inhalt der von einer Ellipse eingeschlossenen Fläche

Mit einem CAS geht das mit einer Eingabe, ohne CAS ist es etwas mehr Aufwand (siehe Anhang).

Zum Umstellen nach y braucht man den Rechner noch nicht:

$$y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \quad (\text{oberer Teil der Ellipse})$$

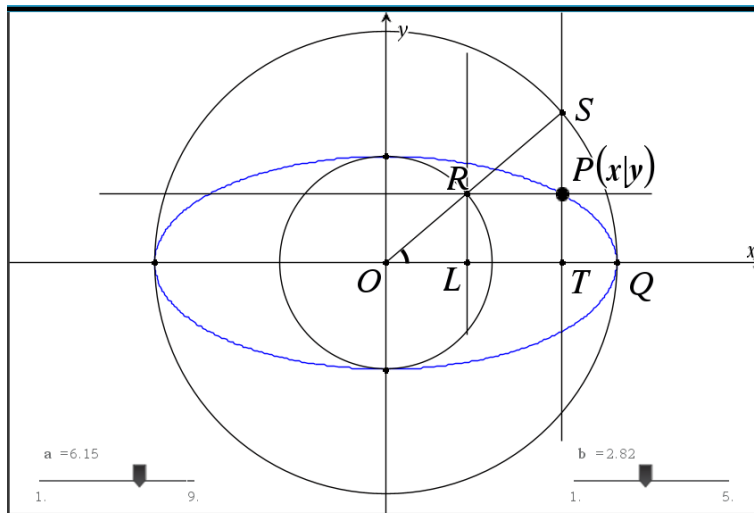
$$2 \cdot \int_{-a}^a \left(b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx \quad a \cdot b \cdot \pi$$

Also gilt: $A = \pi \cdot a \cdot b$

Ist $a = b$ so ist die Ellipse ein Kreis mit $r = a = b$.

Dann ist der Flächeninhalt, wie jeder weiß, $A = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot r \cdot r = \pi r^2$

Anhang



Der grafischen Darstellung entnimmt man:

$$\overline{OS} = a, \quad \overline{OR} = b, \quad \overline{OT} = x, \quad \overline{PT} = \overline{RL} = y, \quad \sphericalangle QOS = t \text{ (Bogenmaß)}$$

$$\sin t = \frac{\overline{RL}}{\overline{OR}} = \frac{y}{b}, \quad \cos t = \frac{\overline{OT}}{\overline{OS}} = \frac{x}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

$$\Rightarrow P(x|y) \text{ ist ein Punkt der Ellipse mit der Gleichung } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Parametergleichung der Ellipse:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t \\ b \cdot \sin t \end{pmatrix}; \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Für den Teil der Ellipse, der im ersten Quadranten des Koordinatensystems liegt, gilt:

$$0 \leq x \leq a$$

$$0 = a \cdot \cos t, \quad t = \frac{\pi}{2} \quad | \quad a = a \cdot \cos t, \quad t = 0$$

$$\frac{\pi}{2} \geq t \geq 0$$

Zuerst berechnen wir den Inhalt der Fläche, die von der Ellipse und den Koordinatenachsen im ersten Quadranten des Koordinatensystems vollständig eingeschlossen wird.

Das Vierfache davon ist der gesuchte Flächeninhalt.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}; \quad 0 \leq x \leq a$$

$$\frac{A}{FE} = \int_0^a \left(b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx$$

$$x = a \cdot \cos t; \quad \frac{dx}{dt} = -a \cdot \sin t; \quad \frac{x^2}{a^2} = \cos^2 t$$

$$\frac{A}{FE} = \int_0^a \left(b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 b \cdot \sqrt{1 - \cos^2 t} \cdot (-a \cdot \sin t) dt$$

$$\frac{A}{FE} = -a \cdot b \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{\sin^2 t} \cdot \sin t dt = -a \cdot b \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt$$

Doppelwinkelformel für den Kosinus:

$$\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2 t$$

$$2 \cdot \sin^2 t = 1 - \cos(2t)$$

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} \cdot (1 - \cos(2t))$$

$$\frac{A}{FE} = -a \cdot b \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2 t dt = -\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (1 - \cos(2t)) dt$$

$$\frac{A}{FE} = -\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_{\frac{\pi}{2}}^0 = -\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \left(0 - \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) \right) = -\frac{1}{2} a \cdot b \cdot \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot a \cdot b$$

Der gesuchte Flächeninhalt ist demnach $A = \pi \cdot a \cdot b$.

Quellen:

1. Frank, Brigitte, „Mathematik 12, B. Kegelschnitte“, Verlag Volk und Wissen, Berlin 1974
2. Andreas Filler, Matthias Ludwig (Hrsg.), „Wege zur Begriffsbildung für den Geometrieunterricht Ziele und Visionen 2020“ Verlag Franzbecker 2013, Vorträge auf der 29. Herbsttagung des Arbeitskreises Geometrie in der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik vom 14. bis 16. September 2012 in Saarbrücken
3. <https://mathekurs.ch/weitere-themen/kegelschnitte/518-ellipse-1/file.html>