

Lineare Regression Teil 4 - Gleichung einer Potenzfunktion erstellen durch doppeltlogarithmische Darstellung

In diesem Beitrag wird ein Vorgehen dargestellt, mit dem man durch Logarithmieren Daten, die zu einer Potenzfunktion führen in einen linearen Zusammenhang bringen kann. Dabei leistet das Verfahren der linearen Regression gute Dienste. Verwendet wird dabei der TI-30X Prio MathPrint™.

Überblick über Windstärken

Windstärke und Windgeschwindigkeit sind wichtige meteorologische Faktoren, die uns helfen, das Wetter und seine Auswirkungen besser zu verstehen. Die Windstärke wird oft in der (nicht metrischen) Beaufort-Skala gemessen, die von 0 (Windstille) bis 12 (Orkan) reicht. Die Windgeschwindigkeit wird u.a. in Kilometern pro Stunde (km/h) gemessen. Die Daten sind wegen der leichten Auswertbarkeit in der Tabelle etwas vereinfacht, für die zu den Windstärken gehörenden Windgeschwindigkeiten sind hier Mittelwerte angegeben. In der Beaufort-Skala werden Intervalle für die Windgeschwindigkeiten angegeben, z. B. Windstärke 1 mit 1 km/h bis 5 km/h (siehe Anhang).

Windstärke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Windgeschwindigkeit	3	8	16	24	34	44	56	68	82	96	110	125

Der hier tabellarisch ausgewiesene Zusammenhang *Windgeschwindigkeit* → *Windstärke* kann durch eine Potenzfunktion mathematisch modelliert werden, wenn man die Windstärke 0 weglässt. Im Folgenden wird gezeigt, warum das durch eine doppeltlogarithmische Darstellung möglich ist und wie man die Funktionsgleichung mit Unterstützung des TI-30X Prio MathPrint™ finden kann.

Linearisierung der Potenzfunktion durch doppeltlogarithmische Darstellung:

Die Gleichung einer Potenzfunktion zur Beschreibung dieser Daten kann z. B. durch Logarithmieren sowohl der x -Werte als auch der y -Werte gefunden werden. Durch eine solche Darstellung wird der Zusammenhang linearisiert und es können eine Regressionsgerade und der Korrelationskoeffizient bestimmt werden.

Die Linearisierung verschafft die Möglichkeit, über eine Regressionsgerade die Gleichung der Potenzfunktion zu finden und die Qualität der Näherung durch den Korrelationskoeffizienten zu quantifizieren.

Mathematische Grundlagen

Gleichung einer Potenzfunktion: $y = b \cdot x^a$

Beide Seiten logarithmieren: $\ln(y) = \ln(b \cdot x^a)$ mit $x > 0$ und $y > 0$

Logarithmengesetze anwenden: $\ln(y) = \ln(b) + a \cdot \ln(x)$

Dies ist eine Geradengleichung $y = m \cdot x + n$ für den Zusammenhang $\ln(x) \rightarrow \ln(y)$

Damit können die Koeffizienten in $y = b \cdot x^a$ angegeben werden:

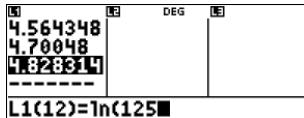
Die Variable a kommt als Steigung $a = m$ in der Gleichung der Regressionsgeraden vor. Der Faktor b ergibt sich aus dem y -Achsendurchgang der Regressionsgeraden $\ln(b) = n$, also zu $b = e^n$.

Funktionsgleichung mit Unterstützung des TI-30X Prio MathPrint™ finden

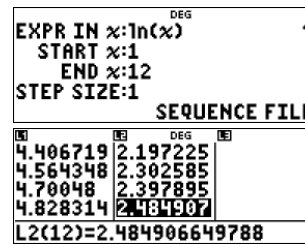
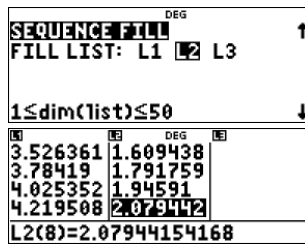
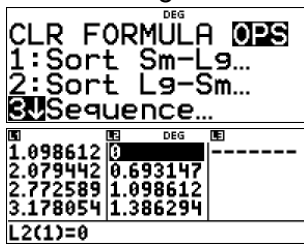
Windstärke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Windgeschwindigkeit	3	8	16	24	34	44	56	68	82	96	110	125

Die natürlichen Logarithmen der Tabellenwerte werden unter **[data]** in den Listen L1 bzw. L2 eingegeben:

Liste L1: Logarithmen der Windgeschwindigkeiten, z. B. für Windgeschwindigkeit 3 km/h wird eingegeben: $\ln(3)$ (Die schließende Klammer kann man auch weglassen, also $\ln(3$ eingeben.) Der Rechner zeigt einen dezimalen Näherungswert 1,098612 in der Zelle L1(1) an.



Liste L2: Logarithmen der Windstärken als Zahlenfolge

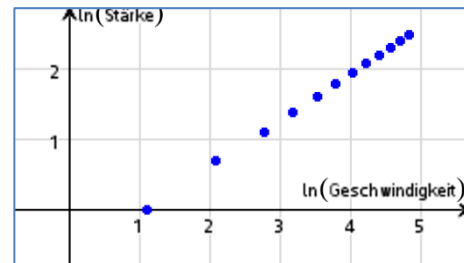


Die so tabellierten Werte können nun zunächst genutzt werden, um eine *doppeltlogarithmische Darstellung* zu erzeugen.

Die nebenstehende Abbildung zeigt die Darstellung der Werte

$$\ln(\text{Windgeschwindigkeit}) \rightarrow \ln(\text{Windstärke}).$$

Die Linearisierung ist deutlich zu erkennen. Schon an dieser Stelle ließe sich eine Geradengleichung z. B. über die Zwei-Punkte-Form bestimmen, die diesen Zusammenhang näherungsweise beschreibt.



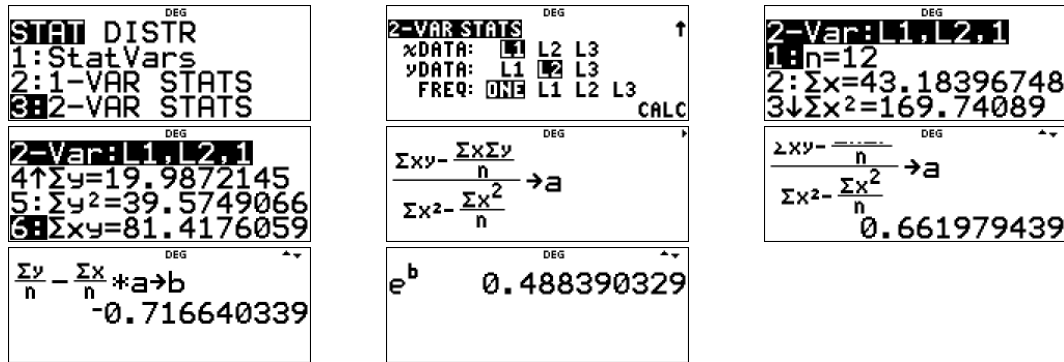
Es soll jedoch gezeigt werden, wie die Gleichung der besten Näherungsgerade durch lineare Regression mit dem Taschenrechner gefunden wird.

Regressionsgerade

Für die Regressionskoeffizienten der Regressionsgeraden $\ln(y) = a \cdot \ln(x) + \ln(b)$ gelten folgende Formeln:

$$(1) a = \frac{\sum \ln(x) \cdot \ln(y) - \frac{\sum \ln(x) \cdot \sum \ln(y)}{n}}{\sum (\ln(x))^2 - \frac{(\sum \ln(x))^2}{n}} \quad (2) d = \frac{\sum \ln(y)}{n} - \frac{\sum \ln(x)}{n} \cdot a$$

Da die Logarithmen der x- und y-Werte unter L1 und L2 gespeichert sind, können die vom Rechner in der Zwei-Variablenstatistik angezeigten Kenngrößen verwendet werden, so wie es die folgenden Screenshots zeigen:



Die Gleichung der Regressionsgeraden ist $\hat{y} \approx 0,66198x - 0,71664$.

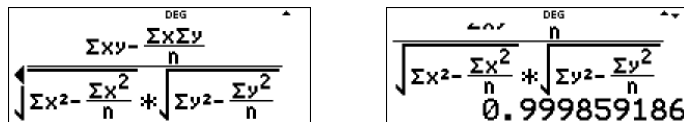
Die Gleichung der Potenzfunktion ist nach den Erläuterungen auf Seite 1:

$$y \approx 0,48839 \cdot x^{0,66198}$$

Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\sum \ln(x) \cdot \ln(y) - \frac{\sum \ln(x) \cdot \sum \ln(y)}{n}}{\sqrt{\left(\sum (\ln(x))^2 - \frac{(\sum \ln(x))^2}{n}\right) \cdot \left(\sum (\ln(y))^2 - \frac{(\sum \ln(y))^2}{n}\right)}}$$

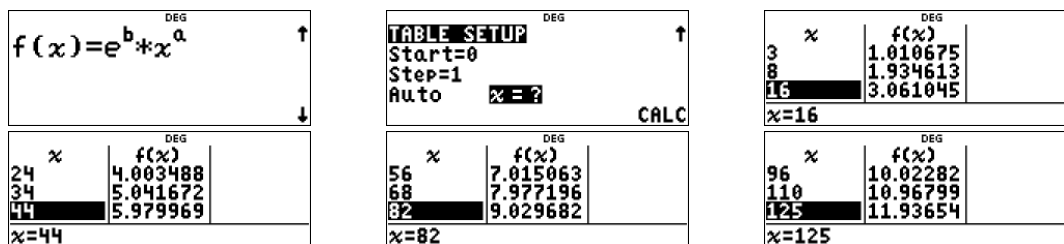
Da die Logarithmen der x- und y-Werte unter L1 und L2 gespeichert sind, können die vom Rechner in der Zwei-Variablenstatistik angezeigten Kenngrößen verwendet werden, so wie es die folgenden Screenshots zeigen:



Es liegt wegen $r \approx 1$ eine hohe positive Korrelation zwischen den Variablen $\ln(x)$ und $\ln(y)$ vor. Der Zusammenhang zwischen $\ln(x)$ und $\ln(y)$ lässt sich sehr gut durch eine steigende Gerade modellieren.

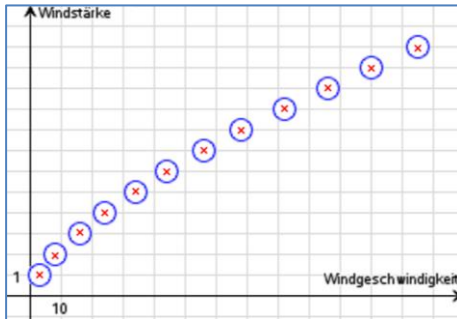
Vergleich der gegebenen Daten mit den Werten der Modellfunktion:

Die Modellfunktion wird unter `table` definiert. Für die Berechnung der Werte wird im TABLE SETUP die Anwendung `x = ?` aktiviert.



y: Windstärke	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x: Windgeschwindigkeit	3	8	16	24	34	44	56	68	82	96	110	125
Gerundete Werte der Modellfunktion	1,0	1,9	3,1	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	11,9

Wie wegen $r \approx 1$ erwartet, ergibt die Modellfunktion sehr gute Näherungswerte. Auch die symbolische grafische Darstellung gibt diese sehr gute Näherung anschaulich wieder.



Anhang

Die Beaufort-Skala:

Windstärken				
Beaufort	Bezeichnung	km/h	kn	m/s
0	Windstille	0 bis 1	0 bis <1	0,0 bis <0,3
1	leiser Zug	1 bis 5	1 bis <4	0,3 bis <1,6
2	leichte Brise	6 bis 11	4 bis <7	1,6 bis <3,4
3	schwache Brise	12 bis 19	7 bis <11	3,4 bis <5,5
4	mäßige Brise	20 bis 28	11 bis <16	5,5 bis <8,0
5	frische Brise	29 bis 38	16 bis <22	8,0 bis <10,8
6	starker Wind	39 bis 49	22 bis <28	10,8 bis <13,9
7	steifer Wind	50 bis 61	28 bis <34	13,9 bis <17,2
8	stürmischer Wind	62 bis 74	34 bis <41	17,2 bis <20,8
9	Sturm	75 bis 88	41 bis <48	20,8 bis <24,5
10	schwerer Sturm	89 bis 102	48 bis <56	24,5 bis >28,5
11	orkanartiger Sturm	103 bis 117	56 bis <64	28,5 bis >32,7
12	Orkan	über 117	64 u. mehr	32,7 u. mehr

kachelmannwetter.com

(Quelle: Kachelmannwetter.com)

Quellenangabe

<https://wetterkanal.kachelmannwetter.com/woher-kommt-die-beaufortskala/> (zuletzt eingesehen am 27.05.2025)

Autor:

Dr. Wilfried Zappe