Vorschläge zur Einführung des Skalar- und des Vektorproduktes mit Hilfe der TI-Nspire™-CX-CAS-Technologie

Wolfgang Häfner

Dieser Beitrag hat das Ziel, effiziente Vorschläge zur Einführung des Skalar- und des Vektorprodukts vorzustellen, bei denen die TI-Nspire™-CX-CAS-Technologie, so oft es möglich ist, zur Vereinfachung der Vorgehensweise beitragen soll.
Da das Vektorprodukt in den „Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife“ nicht erwähnt wird, möchte ich doch einige Gründe nennen, auf seine Einführung, wenigstens im erhöhten Anforderungsniveau, nicht zu verzichten.

Es gibt einige Probleme, die ohne Anwendung des Vektorprodukts nur umständlicher zu lösen sind.

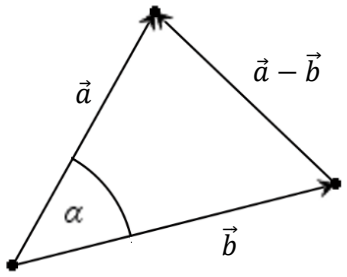
- Flächeninhalt eines von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms bzw. Dreiecks
  $A_P = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right) = |\vec{a} \times \vec{b}|$
  $A_D = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right) = \frac{1}{2} \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$
- Volumen eines von den Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Spats bzw. einer dreiseitigen Pyramide
  $V_{Spat} = A_P \cdot h = A_P \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{c},\vec{h})\right) = \left||\vec{a} \times \vec{b}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos\left(\sphericalangle(\vec{c},\vec{a} \times \vec{b})\right)\right| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
  $V_{Py} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}| = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$
- Einfache Ermittlung eines Normalenvektors einer Ebene

Auch einige Anwendungen in der Physik werden durch die Kenntnis des Vektorprodukts übersichtlicher, z.B.

- Lorentzkraft: $\overrightarrow{F_L} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B}$
- Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter: $\vec{F} = l \cdot \vec{I} \times \vec{B}$

Vorschlag zur Einführung des Skalarprodukts (Variante 1)

Ausgangspunkt ist das Problem der Berechnung des von zwei gegebenen Vektoren eingeschlossenen Winkels. Mit dem Kenntnisstand der Schüler kann zunächst auf den Kosinussatz zurückgegriffen werden.



$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2}{2 \cdot |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|}$$

Berechnung des Zählers bei gegebenen Vektorkoordinaten:

$a:=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}: \quad b:=\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$
⚠ $(\mathrm{norm}(a))^2+(\mathrm{norm}(b))^2-(\mathrm{norm}(a-b))^2$	$2\cdot ax\cdot bx+2\cdot ay\cdot by+2\cdot az\cdot bz$

Damit erhält man dann

$$\cos(\alpha) = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Damit ist das Ausgangsproblem prinzipiell gelöst.

Mit der Umformung der Gleichung in die Form
$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha) = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$
schließt man die Definition des Skalarprodukts an. Dabei ist es unerheblich, welche Seite der Gleichung man für die Definition nutzt und welche Seite als Folgerung betrachtet wird.
Hier sollte man auch auf den zweidimensionalen Fall hinweisen.

Nach einer angemessenen Übungsphase kann die Funktion $dotP$ und die Berechnung des von zwei Vektoren eingeschlossenen Winkels mit Hilfe des CAS behandelt werden:

$\mathrm{dotP}(a,b)$	$ax\cdot bx+ay\cdot by+az\cdot bz$
© $\cos^{-1}\left(\frac{\mathrm{dotP}(a,b)}{\mathrm{norm}(a)\cdot \mathrm{norm}(b)}\right)$	

Nach der Besprechung des Zusammenhangs zwischen Skalarprodukt und der Orthogonalität von Vektoren untersucht man die Eigenschaften der skalaren Multiplikation.
Das geht am einfachsten mit Hilfe des CAS.

$\mathrm{dotP}(a,b)=\mathrm{dotP}(b,a)$	true
$\mathrm{dotP}(r\cdot a,b)=r\cdot \mathrm{dotP}(a,b)$	true
$c:=\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}$
$\mathrm{dotP}(a,b+c)=\mathrm{dotP}(a,b)+\mathrm{dotP}(a,c)$	true
$\mathrm{dotP}(a,\mathrm{dotP}(b,c))$	"Fehler: Ungültiger Datentyp"

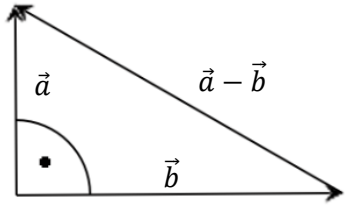
Dabei sollte man auch einige Gesetze händisch überprüfen und alle Gesetze in „üblicher“ Schreibweise notieren.

Da bei dieser Vorgehensweise nicht, wie auch möglich, von einer physikalischen Anwendung ausgegangen wird, sollte man dies nun nachholen:

mechanische Arbeit als Skalarprodukt von Kraft und Weg: $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$.
(konstanter Betrag der Kraft und konstanter Winkel $\sphericalangle(\vec{F}, \vec{s})$ vorausgesetzt)

Im Physikunterricht kann man vielleicht folgende Beispiele ergänzen:
magnetischer Fluss $\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A}$,
Spannung im homogenen elektrischen Feld $U = \vec{E} \cdot \vec{s}$

Vorschlag zur Einführung des Skalarprodukts (Variante 2)
Ausgangspunkt ist das Ziel, zwei gegebenen Vektoren auf Orthogonalität zu untersuchen. Mit dem Kenntnisstand der Schüler kann zunächst auf den Satz des Pythagoras zurückgegriffen werden.



$$\left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2$$
$$0 = |\vec{a}|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2$$

Berechnung der rechten Seite dieser Gleichung:

$a:=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}: \quad b:=\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$
⚠ $(\mathrm{norm}(a))^2+(\mathrm{norm}(b))^2-(\mathrm{norm}(a-b))^2$	$2\cdot ax\cdot bx+2\cdot ay\cdot by+2\cdot az\cdot bz$

Damit erhält man dann
$0 = 2 \cdot a_x \cdot b_x + 2 \cdot a_y \cdot b_y + 2 \cdot a_z \cdot b_z = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$.
Damit ist das Ausgangsproblem prinzipiell gelöst.

Danach definiert man das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$
Hier sollte man auch auf den zweidimensionalen Fall hinweisen.

Um die Möglichkeiten des CAS maximal zu nutzen, sollte dann, nach einer angemessenen Übungsphase, die Funktion $dotP$ zur Berechnung des Skalarprodukts genutzt werden, zunächst um die skalare Multiplikation auf ihre Eigenschaften zu untersuchen.

$\mathrm{dotP}(a,b)$	$ax\cdot bx+ay\cdot by+az\cdot bz$
$\mathrm{dotP}(a,b)=\mathrm{dotP}(b,a)$	true
$\mathrm{dotP}(r\cdot a,b)=r\cdot \mathrm{dotP}(a,b)$	true
$c:=\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} cx \\ cy \\ cz \end{bmatrix}$
$\mathrm{dotP}(a,b+c)=\mathrm{dotP}(a,b)+\mathrm{dotP}(a,c)$	true
$\mathrm{dotP}(a,\mathrm{dotP}(b,c))$	"Fehler: Ungültiger Datentyp"

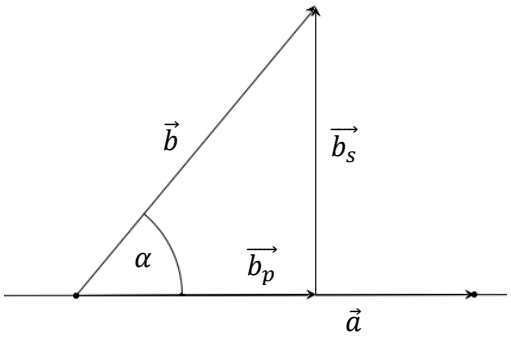
Danach erfolgt die Behandlung folgender Gesetzmäßigkeiten:
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichgerichtete Vektoren, so gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entgegengesetzt gerichtete Vektoren, so gilt $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

$\mathrm{dotP}(a, r \cdot a)$	$(ax^2 + ay^2 + az^2) \cdot r$

Es sei $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$ $(r \in R)$. Dann gilt:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = r \cdot |\vec{a}|^2$
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gleichgerichtet, also r>0, so folgt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot r \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |r \cdot \vec{a}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.
Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ entgegengesetzt gerichtet, also r<0, so folgt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot r \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}| \cdot (-|r|) \cdot |\vec{a}| = (-1) \cdot |\vec{a}| \cdot |r \cdot \vec{a}| = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$.

<u>Zusammenhang von Skalarprodukt und eingeschlossenem Winkel:</u>

$\boldsymbol{\vec{\alpha} = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) < 90°}$

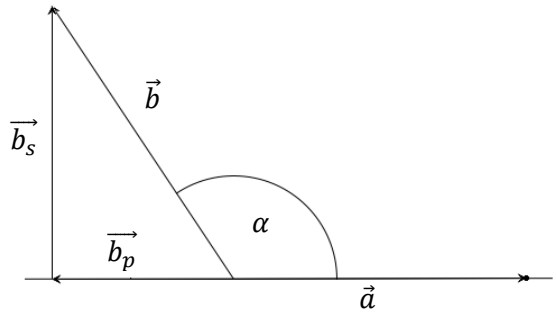


$$\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{b_p}|}{|\vec{b}|} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{b_p}| = |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{b_p} + \overrightarrow{b_s}) = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_s} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p}$$

Da $\vec{a}$ und $\overrightarrow{b_p}$ gleichgerichtet sind, folgt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p} = |\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{b_p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.

$\vec{\boldsymbol{a}} = \sphericalangle(\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}) > \mathbf{90°}$



$\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{b_p}|}{|\vec{b}|} \quad \Rightarrow -|\overrightarrow{b_p}| = |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\overrightarrow{b_p} + \overrightarrow{b_s}) = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p} + \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_s} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p}$

Da $\vec{a}$ und $\overrightarrow{b_p}$ entgegengesetzt gerichtet sind, folgt
$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p} = -|\vec{a}| \cdot |\overrightarrow{b_p}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.

Es gilt also stets $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \overrightarrow{b_p} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$.
Man sollte noch klären, dass die Gleichung natürlich auch gilt, wenn $\alpha = 90°$ bzw. wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektor ist.

Vorschlag zur Einführung des Vektorprodukts
Günstig ist es auch hier, mit einer zielführenden Problemstellung zu beginnen.
Eine Ebene sei durch eine Parametergleichung gegeben. Von einem Punkt, der nicht zur Ebene gehört, soll das Lot auf die Ebene gefällt und der Lotfußpunkt ermittelt werden.
Bei der Besprechung eines Lösungsweges erkennen die Schülerinnen und Schüler, dass man einen Vektor ermitteln muss, der orthogonal zur Ebene und damit orthogonal zu den in der Ebenengleichung verwendeten Spannvektoren ist.
Das Skalarprodukt dieses gesuchten Vektors mit den Spannvektoren ist demnach jeweils Null. Damit ergibt sich folgende Rechnung:

$$a := \begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix} : \quad b := \begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix} : \quad n := \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} nx \\ ny \\ nz \end{bmatrix}$$

$$\text{solve}\left(\begin{cases} \text{dotP}(n,a)=0 \\ \text{dotP}(n,b)=0 \end{cases}, \{nx, ny\}\right) \qquad nx = \frac{(ay \cdot bz - az \cdot by) \cdot nz}{ax \cdot by - ay \cdot bx} \text{ and } ny = \frac{-(ax \cdot bz - az \cdot bx) \cdot nz}{ax \cdot by - ay \cdot bx}$$

Auf Grund der Aufgabenstellung war natürlich klar, dass es unendlich viele Lösungen gibt.
Wir wählen n_z frei und ermitteln daraus n_x und n_y.
Dem Vorschlag n_z mit dem Term $a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x$ zu ermitteln, da sich die Brüche dann kürzen lassen, wird sicherlich zugestimmt.

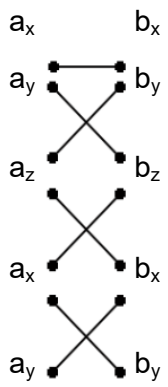
Damit müsste dann $\vec{n} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$ ein Vektor sein, der die Bedingungen erfüllt.

Wir machen die Probe:

$n := \begin{bmatrix} ay \cdot bz - az \cdot by \\ az \cdot bx - ax \cdot bz \\ ax \cdot by - ay \cdot bx \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} ay \cdot bz - az \cdot by \\ az \cdot bx - ax \cdot bz \\ ax \cdot by - ay \cdot bx \end{bmatrix}$
$\mathrm{dotP}(n,a)$	0
$\mathrm{dotP}(n,b)$	0

Die Lösung ist also auch dann richtig, wenn $n_z = a_x b_y - a_y b_x = 0$ ist.

Mit folgendem Schema lässt sich die Berechnung von $\vec{n}$ gut merken, was auch nötig ist, da diese Formel aus bekanntem Grund in der „Mathematisch-naturwissenschaftlichen Formelsammlung“ (IQB) nicht enthalten ist.



Über die Gleichung $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$ definiert man nun das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Außerdem wird den Schülern die zugehörige CAS-Funktion mitgeteilt:

$\mathrm{crossP}(a,b)$	$\begin{bmatrix} ay \cdot bz - az \cdot by \\ az \cdot bx - ax \cdot bz \\ ax \cdot by - ay \cdot bx \end{bmatrix}$

Wie bereits beim Skalarprodukt ist die Überprüfung von Rechengesetzen mit CAS-Hilfe möglich.

Die Gesetze werden besprochen und in üblicher Schreibweise notiert.
Einige Gesetze sollten zu einem geeigneten Zeitpunkt in einer Übungsphase auch händisch überprüft werden.

$\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right)$	$\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}\left(\mathrm{crossP}\left(\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right),\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)$	$\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$
$a:=\begin{bmatrix}ax\\ay\\az\end{bmatrix}:\quad b:=\begin{bmatrix}bx\\by\\bz\end{bmatrix}:\quad c:=\begin{bmatrix}cx\\cy\\cz\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}cx\\cy\\cz\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(a,b)=-\mathrm{crossP}(b,a)$	$\begin{bmatrix}\mathrm{true}\\\mathrm{true}\\\mathrm{true}\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(r\cdot a,b)=r\cdot\mathrm{crossP}(a,b)$	$\begin{bmatrix}\mathrm{true}\\\mathrm{true}\\\mathrm{true}\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(a,r\cdot b)=r\cdot\mathrm{crossP}(a,b)$	$\begin{bmatrix}\mathrm{true}\\\mathrm{true}\\\mathrm{true}\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(a,b+c)=\mathrm{crossP}(a,b)+\mathrm{crossP}(a,c)$	$\begin{bmatrix}\mathrm{true}\\\mathrm{true}\\\mathrm{true}\end{bmatrix}$

<u>Feststellung des Richtungssinns des Vektorprodukts $\vec{a}\times\vec{b}$ bezüglich der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$</u>

Da die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ komplanar sind, kann ein kartesisches Koordinatensystem so gewählt werden, dass die x-Achse und Vektor $\vec{a}$ gleichgerichtet sind und der Vektor $\vec{b}$ parallel zur x-y-Ebene ist.

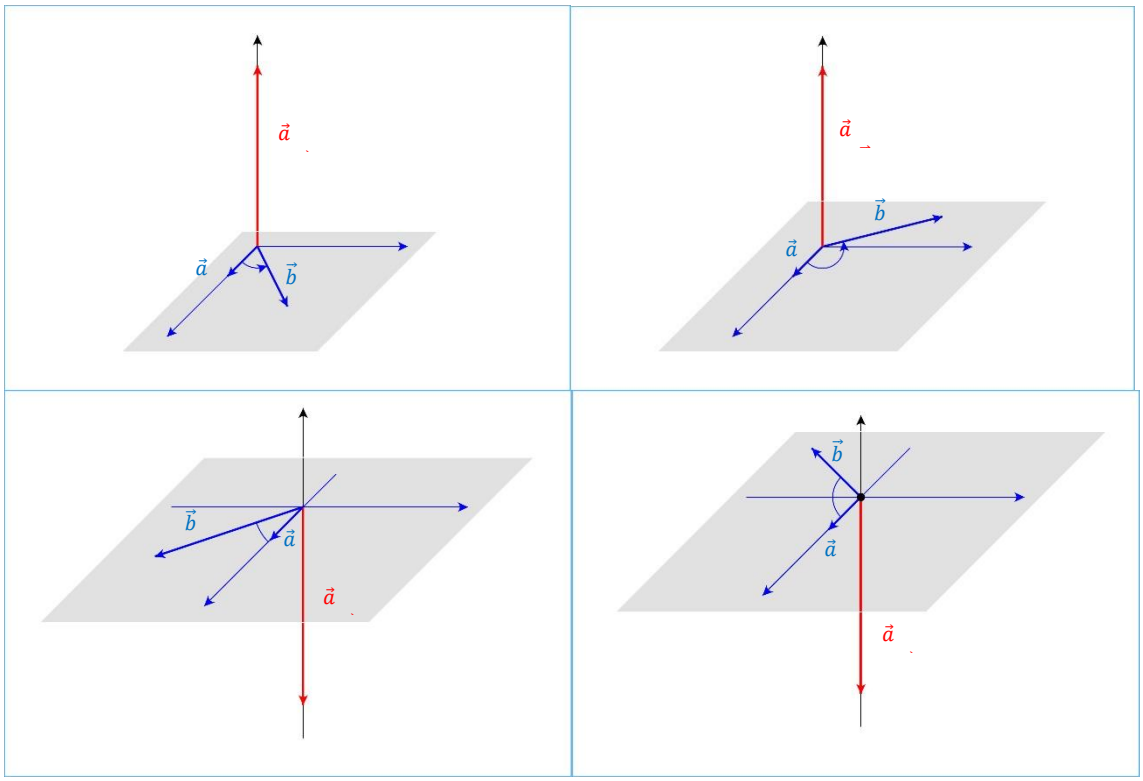
Damit hätten dann $\vec{a}$ und $\vec{b}$ folgende Koordinaten: $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_x\\0\\0\end{pmatrix}, a_x\geq 0;\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_x\\b_y\\0\end{pmatrix}$

Daraus folgt dann $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\0\\a_x\cdot b_y\end{pmatrix}$.

$a:=\begin{bmatrix}ax\\0\\0\end{bmatrix}:\quad b:=\begin{bmatrix}bx\\by\\0\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}bx\\by\\0\end{bmatrix}$
$\mathrm{crossP}(a,b)$	$\begin{bmatrix}0\\0\\ax\cdot by\end{bmatrix}$

Der Richtungssinn des Vektors $\vec{a} \times \vec{b}$ hängt also nur davon ab, ob b_y gleich, größer oder kleiner Null ist.
Für $b_y = 0$ ist $\vec{a} \times \vec{b}$ der Nullvektor.
Für $b_y > 0$ ist $\vec{a} \times \vec{b}$ zur z-Achse gleich-, für $b_y < 0$ zu dieser entgegengesetzt gerichtet.

Nachdem den Schülerinnen und Schülern erklärt wurde, was ein Rechtssystem ist, kann deshalb unter Zuhilfenahme geeigneter Skizzen gefolgert werden, dass $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{a} \times \vec{b}$ in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem bilden.
Die Erkenntnis ist insbesondere für die bereits erwähnten physikalischen Anwendungen des Vektorprodukts von Bedeutung.



<u>Der Betrag des Vektorproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$</u>

Will man an dieser Stelle, was allerdings recht unbefriedigend ist, Unterrichtszeit sparen, so kann man den Schülerinnen und Schülern den betreffenden Sachverhalt mitteilen und ihn dann wenigstens mit dem CAS belegen.

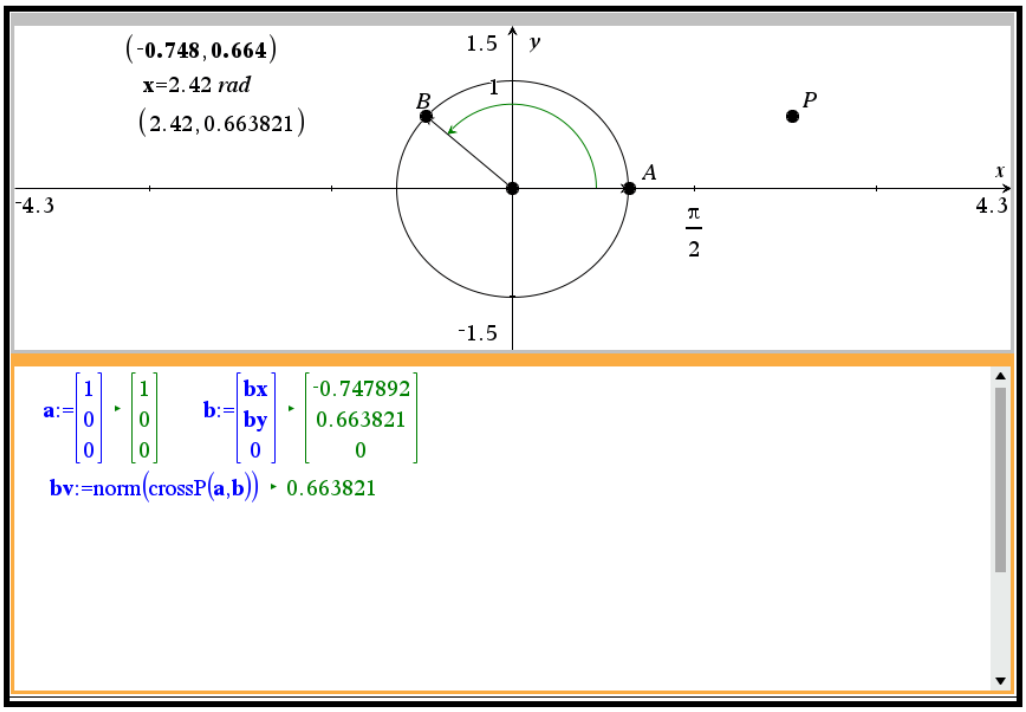
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right)$$

$$\text{norm}(\text{crossP}(a,b)) = \text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b) \cdot \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b)}\right)\right) \qquad \text{true}$$

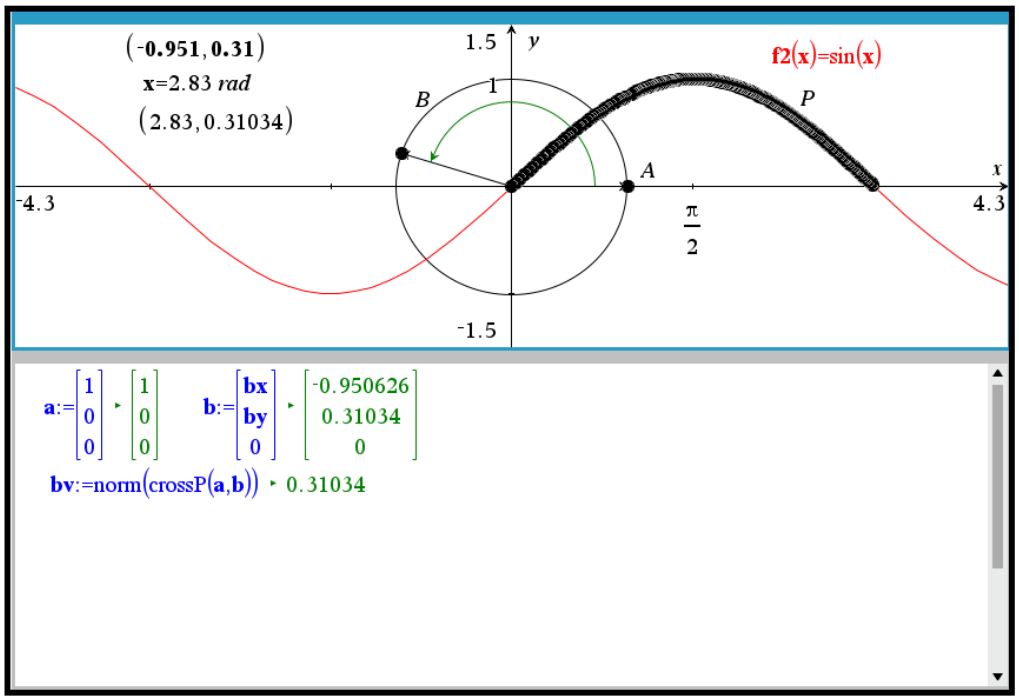
Mit Hilfe einer bereitgestellten oder mit den Schülerinnen und Schülern gemeinsam entwickelten MMS-Anwendung, kann man diese Erkenntnis auch herleiten.

Der Punkt A hat die Koordinaten $A(1|0)$, der Punkt B ist ein beweglicher Punkt auf dem Einheitskreis um den Koordinatenursprung. Die Koordinaten von B werden ermittelt und als Variable b_x und b_y gespeichert. Der Winkel $\sphericalangle(AOB)$ wird gemessen und als Variable x gespeichert.

In der Notes-Applikation wird der Betrag des Vektorprodukts bv der Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ 0 \end{pmatrix}$ ermittelt.
Danach wird in der Graphs-Applikation der Punkt $P(x|bv)$ gezeichnet.



Zur Lösung des Problems ermittelt man die Geometriespur des Punktes P bezüglich B für Winkel x zwischen 0 und π.
Die Vermutung, dass die Geometriespur Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$ ist, kann man durch das Einzeichnen der Funktion erhärten.



Unter der Voraussetzung, dass die Vermutung richtig ist, folgt für die Einheitsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $0° < \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) < 180°$, dass $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)} = 1$ gilt.

Ermittelt man unter Zuhilfenahme des CAS $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)}$ für beliebige Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und $0° < \sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) < 180°$, so erhält man $\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{\sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ und damit $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)$.

$a:=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}: \quad b:=\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$
⚠ $\frac{\text{norm}(\text{crossP}(a,b))}{\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(a,b)}{\text{norm}(a)\cdot\text{norm}(b)}\right)\right)}$	$\sqrt{(ax^2+ay^2+az^2)\cdot(bx^2+by^2+bz^2)}$

Die Gleichung $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right)$ für den Betrag des Vektorprodukts gilt auch für gleich- bzw. entgegengesetzt gerichtete Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, da in diesen Fällen $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$ $(|\vec{a} \times \vec{b}| = 0)$ und $\sin\left(\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\right) = 0$ gilt.

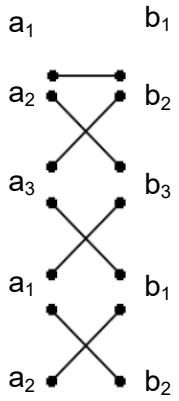
$\text{crossP}(a, r\cdot a)$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Schlussbemerkungen:
Nehmen wir zuletzt einmal den unangenehmsten Fall an, dass die Funktionen $dotP$, $norm$ und $crossP$ im Abitur 2030 nicht mehr zur Verfügung stehen (Prüfungsmodus).

Aber auch dafür gäbe es eine Lösung:

$sp(a,b):=m[1,1] \mid m=a^T\cdot b$	*Fertig*
$a:=\begin{bmatrix} ax \\ ay \\ az \end{bmatrix}: \quad b:=\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} bx \\ by \\ bz \end{bmatrix}$
$\text{dotP}(a,b)=sp(a,b)$	true
$betr(a):=\sqrt{sp(a,a)}$	*Fertig*
$\text{norm}(a)=betr(a)$	true

Allerdings muss man beim Vektorprodukt das “Schema“ verwenden, weshalb man vielleicht der schriftlichen Ermittlung des Vektorprodukts den Vorzug geben sollte. Die Definition von $vp(a,b)$ (siehe unten) ist doch sehr umständlich und fehleranfällig.



$$vp(a,b) := \begin{bmatrix} a[2,1]\cdot b[3,1] - a[3,1]\cdot b[2,1] \\ a[3,1]\cdot b[1,1] - a[1,1]\cdot b[3,1] \\ a[1,1]\cdot b[2,1] - a[2,1]\cdot b[1,1] \end{bmatrix} \qquad \textit{Fertig}$$

$$\mathrm{crossP}(a,b) = vp(a,b) \qquad \begin{bmatrix} \mathrm{true} \\ \mathrm{true} \\ \mathrm{true} \end{bmatrix}$$