Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben mit Winkelfunktionen – kein Problem bei Nutzung des MMS der TI-Nspire™ CX CAS Technologie

Wolfgang Häfner

Nachdem die systematische Behandlung goniometrischer Gleichungen im Unterricht nicht mehr explizit gefordert wurde, kam es auch zwangsläufig dazu, dass Kurvendiskussionen und Extremwertaufgaben mit Winkelfunktionen immer weniger eine Rolle spielten.
Und auch durch die Bildungsstandards und Lehrpläne wurde ich in dieser Auffassung nicht wesentlich korrigiert. Auch in den Poolaufgaben des IQB wurde ich nicht fündig.
Bei einer Recherche in meinen alten Unterlagen stieß ich auf eine Vielzahl entsprechender Aufgaben.
Der folgende Beitrag soll deshalb dazu anregen, die eine oder andere Kurvendiskussion bzw. Extremwertaufgabe mit Winkelfunktionen im Unterricht zu besprechen. Es sind wirklich interessante Aufgaben dabei und man muss es ja auch nicht übertreiben. Und mit den Möglichkeiten des MMS der TI-Nspire™ CX CAS Technologie ist das auch alles machbar.

Beginnen wir mit einigen Kurvendiskussionen (Periodizität, Nullstellen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte, eventuell Schnittpunkt mit der y-Achse).

Damit man es nicht von Anfang an stets mit unendlich vielen Lösungen einer Gleichung zu tun hat, sollte man die Kurvendiskussion damit beginnen, die Funktion auf Periodizität zu untersuchen. Bei einer periodischen Funktion genügt es, die Eigenschaften in einem Intervall zu untersuchen, welches eine Periode umfasst. Die Ergebnisse werden, wenn möglich, als Vielfache von π angegeben, aber zusätzlich immer auch ein rationaler Näherungswert für eine Darstellung des Graphen auf Papier.

Aufgabe 1
$f(x) = 2\sin(x) + \sin(2x)$
Es gilt $f(x + 2\pi) = f(x)$
2π ist also eine Periode der Funktion und wir untersuchen die Funktion deshalb erst einmal im Intervall $[0{,}2\pi]$.
Ich verwende in den Beispielen sowohl die Funktion ‚solve' als auch die Funktion ‚zeros', bevorzuge aber ‚zeros', weil die Ergebnisdarstellung als Liste Vorteile für die weitere Rechnung bringt.

Nullstellen in $[0\,;2\pi]$:
$f(x) = 0\ (0 \le x \le 2\pi)$
$x_{01} = 0, x_{02} = \pi, x_{03} = 2\pi$
Alle Nullstellen
$x_{0k} = k \cdot \pi\ \ (k \in Z)$
Lokale Extrempunkte:
$f'(x) = 2\cos(2x) + 2\cos(x)$
$f''(x) = -4\sin(2x) - 2\sin(x)$

$f'(x) = 0\ \ (0 \le x \le 2\pi)$
$x_1 = \frac{\pi}{3} \approx 1{,}05; x_2 = \pi; x_3 = \frac{5}{3}\pi \approx 5{,}24$
$f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -3\sqrt{3} < 0 \ \Rightarrow\ \frac{\pi}{3}\ ist\ lokale\ Maximumstelle.$
$f''\left(\frac{5\pi}{3}\right) = 3\sqrt{3} > 0 \ \Rightarrow\ \frac{5\pi}{3}\ ist\ lokale\ Minimumstelle.$
$f''(\pi) = 0$
Dieses Ergebnis lässt bezüglich der Frage, ob π Extremstelle ist, keine Aussage zu.

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{3} \approx 2{,}6 \qquad f\left(\frac{5}{3}\pi\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3} \approx -2{,}6$

Hoch – und Tiefpunkte in $[0\,;2\pi]$

$H\left(\frac{\pi}{3} \mid \frac{3}{2}\sqrt{3}\right); \quad T\left(\frac{5}{3}\pi \mid -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

Alle Hochpunkte und Tiefpunkte:

$H_k\left(\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \mid \frac{3}{2}\sqrt{3}\right); \quad T_k\left(\frac{5}{3}\pi + k \cdot 2\pi \mid -\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \quad (0 \le x \le 2\pi)$

$x_{w_1} = 0; \quad x_{W_2} \approx 1{,}82; \quad x_{w_3} = \pi; \quad x_{w_4} \approx 4{,}46; \quad x_{w_5} = 2\pi$

$f'''(x) = -8\cos(2x) - 2\cos(x)$

$f(x_{w_1}) = -10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_1}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_2}) = 7{,}5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_2}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_3}) = -6 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_3}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_4}) = 7{,}5 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_4}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_5}) = -10 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_5}$ ist eine Wendestelle.

Da außerdem $f'(x_{w_3}) = 0$ gilt, ist $x_{w_3} = \pi$ sogar ein Sattelpunkt.

Wendepunkte (Sattelpunkt) in $[0\,;2\pi]$:

$W_1(0|0) \qquad W_2(1{,}82|\frac{3}{8}\sqrt{15}) \qquad S(\pi|0) \qquad W_4\left(4{,}46 \mid -\frac{3}{8}\sqrt{15}\right) \qquad W_5(2\pi|0)$

bzw.

$W_1(0|0) \qquad W_2(1{,}82|1{,}45) \qquad S(\pi|0) \qquad W_4(4{,}46 \mid -1{,}45) \qquad W_5(2\pi|0)$

Alle Wendepunkte:

$W_{1_k}(k \cdot 2\pi|0) \qquad W_{2_k}(1{,}82 + k \cdot 2\pi \mid 1{,}45) \qquad W_{4_k}(4{,}46 + k \cdot 2\pi \mid -1{,}45) \qquad (k \in Z)$

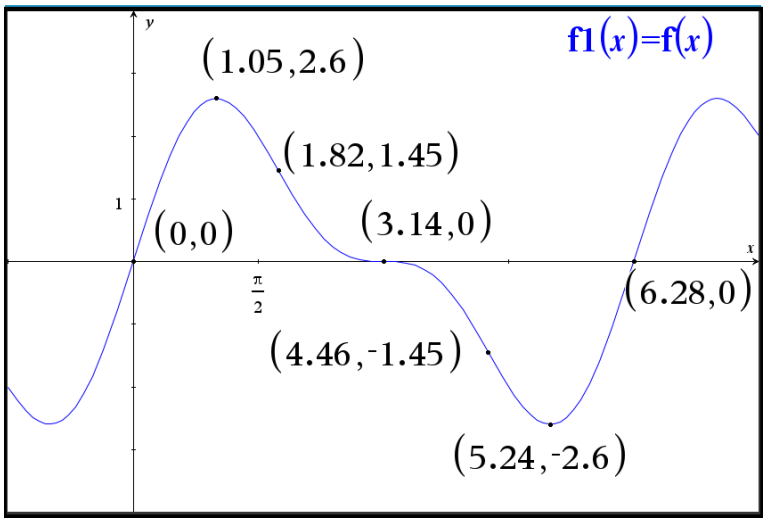
Alle Sattelpunkte:

$S_k\big((2k+1) \cdot \pi \mid 0\big) \qquad (k \in Z)$

$f(x):=2\cdot\sin(x)+\sin(2\cdot x)$	*Fertig*
$f(x+2\cdot\pi)=f(x)$	true
$\text{solve}(f(x)=0,x)\mid 0\le x\le 2\cdot\pi$	$x=0$ or $x=\pi$ or $x=2\cdot\pi$
$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$2\cdot\cos(2\cdot x)+2\cdot\cos(x)$
$a2f(x):=\frac{d}{dx}(a1f(x))$	*Fertig*
$a2f(x)$	$-4\cdot\sin(2\cdot x)-2\cdot\sin(x)$

$\text{zeros}(a1f(x),x)\|0\le x\le 2\cdot\pi$	$\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}$
$\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}$	$\{1.0472,3.14159,5.23599\}$
$a2f\left(\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}\right)$	$\{-3\cdot\sqrt{3},0,3\cdot\sqrt{3}\}$
$f\left(\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}\right)$	$\left\{\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2},0,\frac{-3\cdot\sqrt{3}}{2}\right\}$
$f\left(\left\{\frac{\pi}{3},\pi,\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}\right)$	$\{2.59808,0.,-2.59808\}$
$\text{zeros}(a2f(x),x)\|0\le x\le 2\cdot\pi$	$\left\{0,\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\cdot\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right),2\cdot\pi\right\}$
$\text{zeros}(a2f(x),x)\|0\le x\le 2\cdot\pi$	$\{0.,1.82348,3.14159,4.45971,6.28319\}$
$a3f(x):=\frac{d}{dx}(a2f(x))$	*Fertig*
$a3f(x)$	$-8\cdot\cos(2\cdot x)-2\cdot\cos(x)$
$a3f\left(\left\{0,\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\cdot\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right),2\cdot\pi\right.\right.$	$\left\{-10,\frac{15}{2},-6,\frac{15}{2},-10\right.$
$f\left(\left\{0,\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\cdot\pi}{2}-\sin^{-1}\left(\frac{1}{4}\right),2\cdot\pi\right.\right.$	$\left\{0,\frac{3\cdot\sqrt{15}}{8},0,\frac{-3\cdot\sqrt{15}}{8},0\right.$
$\left\{0,\frac{3\cdot\sqrt{15}}{8},0,\frac{-3\cdot\sqrt{15}}{8},0\right.$	$\{0.,1.45237,0.,-1.45237,0.\ \}$

Bei dieser Kurvendiskussion, wie auch bei den nachfolgenden Beispielen, ist selbstverständlich auch die Bearbeitung mit ‚Graph analysieren' möglich.



Aufgabe 2

$f(x) = \cos^2(x) + \sin(x) - \frac{1}{4}$

Es gilt $f(x + 2\pi) = f(x)$

2π ist eine Periode der Funktion. Die Untersuchung der Funktion erfolgt zuerst jeweils im Intervall $[0,2\pi]$.

Nullstellen in $[0\,;2\pi]$:

$f(x) = 0\ (0 \le x \le 2\pi)$

$x_{01} \approx 3{,}67, x_{02} \approx 5{,}76$

Alle Nullstellen:

$x_{0k_1} \approx 3{,}67 + k \cdot 2\pi; \quad x_{0k_2} \approx 5{,}76 + k \cdot 2\pi \quad (k \in Z)$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$f(0) = 0{,}75 \quad S_y(0 \mid 0{,}75)$

Lokale Extrempunkte:

$f'(x) = (1 - 2 \cdot \sin x) \cdot \cos x$

$f''(x) = \sin x \cdot (2\sin(x) - 1) - 2 \cdot \cos^2 x$

$f'(x) = 0 \quad (0 \le x \le 2\pi)$

$x_1 = \frac{\pi}{6} \approx 0{,}52; \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \approx 1{,}57; \quad x_3 = \frac{5}{6}\pi \approx 2{,}62; \quad x_4 = \frac{3}{2}\pi \approx 4{,}71$

$f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3/2 < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6}\ ist\ lokale\ Maximumstelle.$

$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}\ ist\ lokale\ Minimumstelle.$

$f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) = -\frac{3}{2} < 0 \Rightarrow \frac{5}{6}\pi\ ist\ lokale\ Maximumstelle.$

$f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 3 > 0 \Rightarrow \frac{3}{2}\pi\ ist\ lokale\ Minimumstelle.$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3}{4} \quad f\left(\frac{5}{6}\pi\right) = 1 \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{5}{4}$

Hoch- und Tiefpunkte in $[0\,;2\pi]$:

$H_1\left(\frac{\pi}{6} \mid 1\right); \quad H_2\left(\frac{5}{6}\pi \mid 1\right); \quad T_1\left(\frac{\pi}{2} \mid \frac{3}{4}\right); \quad T_2\left(\frac{3}{2}\pi \mid -\frac{5}{4}\right)$

Alle Hoch- und Tiefpunkte:

$H_{k_1}\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \mid 1\right); \quad H_{k_2}\left(\frac{5}{6}\pi + k \cdot 2\pi \mid 1\right)$

$T_{k_1}\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \mid \frac{3}{4}\right); \quad T_{k_2}\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \mid -\frac{5}{4}\right)$

Wendepunkte:

$f''(x) = 0 \quad (0 \le x \le 2\pi)$

$x_{w_1} \approx 1; \quad x_{W_2} \approx 2{,}14; \quad x_{w_3} \approx 3{,}78; \quad x_{w_4} \approx 5{,}65$

$f'''(x) = (8\sin(x) - 1) \cdot \cos x$

$f(x_{w_1}) \approx 3.1 \neq 0 \Rightarrow x_{w_1}$ ist eine Wendestelle.

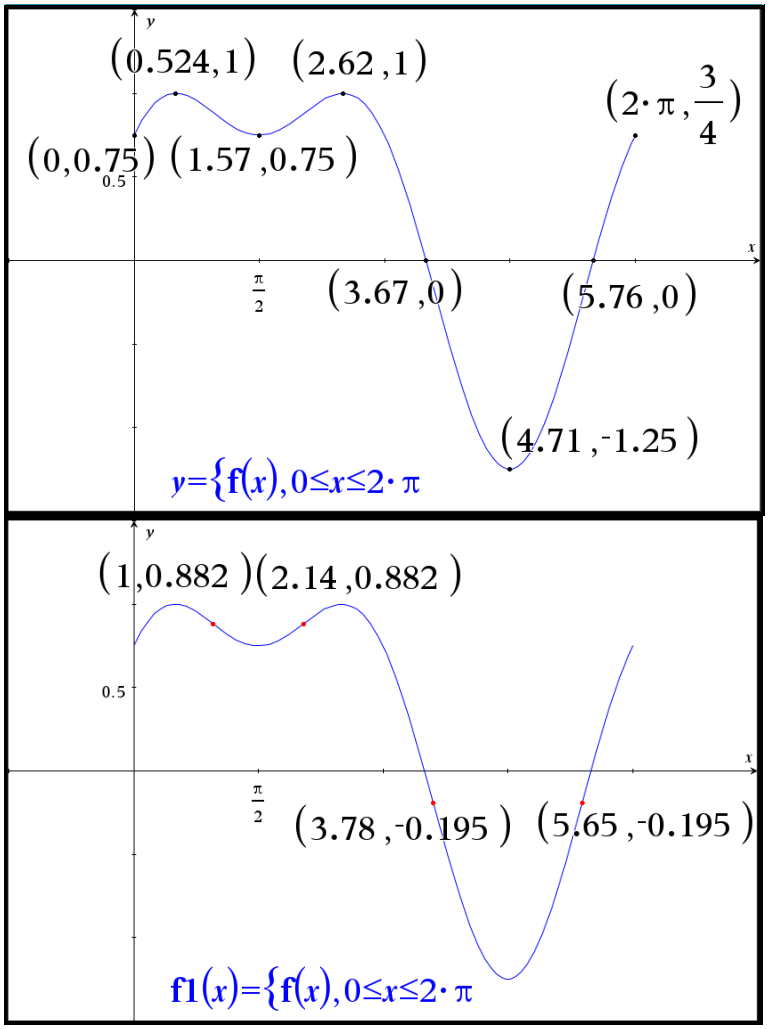
$f(x_{w_2}) \approx -3{,}1 \neq 0 \Rightarrow x_{w_2}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_3}) \approx 4{,}6 \neq 0 \Rightarrow x_{w_3}$ ist eine Wendestelle.

$f(x_{w_4}) \approx -4{,}6 \neq 0 \Rightarrow x_{w_4}$ ist eine Wendestelle.

Wendepunkte in $[0\,;2\pi]$:
$W_1(1 \mid 0{,}88)$ $W_2(2{,}14 \mid 0{,}88)$ $W_3(3{,}78 \mid -0{,}19)$ $W_4(5{,}65 \mid -0{,}19)$
Alle Wendepunkte:
$W_1(1 + k \cdot 2\pi \mid 0{,}88)$ $W_2(2{,}14 + k \cdot 2\pi \mid 0{,}88)$
$W_3(3{,}78 + k \cdot 2\pi \mid -0{,}19)$ $W_4(5{,}65 + k \cdot 2\pi \mid -0{,}19)$

$f(x):=(\cos(x))^2+\sin(x)-\frac{1}{4}$	*Fertig*
$f(x+2\cdot\pi)=f(x)$	true
$f(0)$	$\frac{3}{4}$
⚠ $\text{zeros}(f(x),x)\mid 0\le x\le 2\cdot\pi$	$\{3.66519,5.75959\}$
$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$(1-2\cdot\sin(x))\cdot\cos(x)$
$a2f(x):=\frac{d}{dx}(a1f(x))$	*Fertig*
$a2f(x)$	$\sin(x)\cdot(2\cdot\sin(x)-1)-2\cdot(\cos(x))^2$
$\text{zeros}(a1f(x),x)\mid 0\le x\le 2\cdot\pi$	$\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{6},\frac{3\cdot\pi}{2}\right\}$
$\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{6},\frac{3\cdot\pi}{2}\right\}$	$\{0.523599,1.5708,2.61799,4.71239\}$
$a2f\left(\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{6},\frac{3\cdot\pi}{2}\right\}\right)$	$\left\{\frac{-3}{2},1,\frac{-3}{2},3\right\}$
$f\left(\left\{\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{6},\frac{3\cdot\pi}{2}\right\}\right)$	$\left\{1,\frac{3}{4},1,\frac{-5}{4}\right\}$
⚠ $\text{zeros}(a2f(x),x)\mid 0\le x\le 2\cdot\pi$	$\{1.00297,2.13863,3.77646,5.64832\}$
$a3f(x):=\frac{d}{dx}(a2f(x))$	*Fertig*
$a3f(x)$	$(8\cdot\sin(x)-1)\cdot\cos(x)$
$a3f(\{1.0029669538663,2.1386256997235,3.7764595247233,5.648318436046\})$	$\{3.08944,-3.08944,4.62524,-4.62524\}$
$f(\{1.0029669538663,2.1386256997235,3.7764595247233,5.648318436046\})$	$\{0.882303,0.882303,-0.194803,-0.194803\}$



Aufgabe 3

$f(x) = x + \cos x$

$f'(x) = 1 - \sin x \qquad f''(x) = -\cos x \qquad f'''(x) = \sin x$

Die Funktion ist nicht periodisch, weil ein Summand die lineare Funktion $y = x$ ist.

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$x_0 \approx -0{,}74$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$f(0) = 1 \quad S_y(0 \mid 1)$

lokale Extrempunkte:

$f'(x) = 0$

$x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$

$f''\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi\right) = 0$

Das Ergebnis lässt bezüglich der Frage, ob x_k Extremstellen sind, keine Aussage zu. Eventuelle handelt es sich auch um Wendestellen.

Wendepunkte:

$f''(x) = 0$

$x_{w_k} = (2n-1)\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + n\cdot\pi = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi; \quad k \in Z$

$f'''(x_{w_k}) = -(-1)^n \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x_{w_k}$ sind Wendestellen, also auch alle $x_k = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi.$

An diesen Stellen sind sogar Sattelpunkte, da die erste Ableitung dort Null ist.
(siehe Untersuchung auf Extrempunkte).
Damit steht dann auch fest, dass die Funktion keine lokalen Extrempunkte besitzt.
Jeder zweite Wendepunkt ist ein Sattelpunkt.

$f\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi + cos\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot\pi\right) = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi + 0 = \frac{\pi}{2} + k\cdot\pi$

Wendepunkte, die keine Sattelpunkte sind:

$W_k\left(-\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \mid \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) \quad k \in Z$

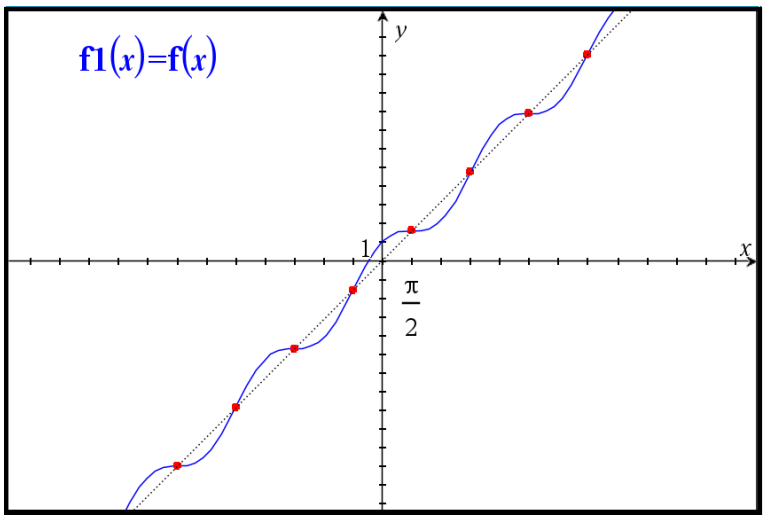
Sattelpunkte:

$S_k\left(\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \mid -\frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) \quad k \in Z$

$f(x):=x+\cos(x)$	*Fertig*
⚠ $\text{solve}(f(x)=0,x)$	$x=-0.739085$
$f(0)$	1
$a1f(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a2f(x):=\frac{d}{dx}(a1f(x))$	*Fertig*
$a3f(x):=\frac{d}{dx}(a2f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$1-\sin(x)$
$a2f(x)$	$-\cos(x)$
$a3f(x)$	$\sin(x)$
$\text{zeros}(a1f(x),x)$	$\left\{2\cdot n1\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right\}$
$a2f\left(\left\{2\cdot n1\cdot\pi+\frac{\pi}{2}\right\}\right)$	$\{0\}$
$\text{zeros}(a2f(x),x)$	$\left\{\frac{(2\cdot n2-1)\cdot\pi}{2}\right\}$
$a3f\left(\left\{\frac{(2\cdot n3-1)\cdot\pi}{2}\right\}\right)$	$\left\{-(-1)^{n3}\right\}$
$f\left(\left\{\frac{(2\cdot n3-1)\cdot\pi}{2}\right\}\right)$	$\left\{\frac{(2\cdot n3-1)\cdot\pi}{2}\right\}$

Die nächste Eingabe liefert die Liste für das Streudiagramm der Wendepunkte.

$$l:=\text{seq}\left(\frac{(2\cdot k-1)\cdot\pi}{2},k,-4,4\right) \qquad \left\{\frac{-9\cdot\pi}{2},\frac{-7\cdot\pi}{2},\frac{-5\cdot\pi}{2},\frac{-3\cdot\pi}{2},\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\cdot\pi}{2},\frac{5\cdot\pi}{2},\frac{7\cdot\pi}{2}\right\}$$



Die letzte Aufgabe ist natürlich auch ohne weiteres ohne Hilfsmittel lösbar.
Das gilt bei dem geforderten Kenntnisstand der SuS für die ersten beiden Kurvendiskussionen und die nachfolgen Extremwertaufgaben nur teilweise.

Bei Extremwertaufgaben ist es üblich die Ergebnisse im Gradmaß und nicht im Bogenmaß anzugeben. Damit hierbei keine Fehler auftreten, schauen wir uns nun einige Rechner-eingaben an.

Dokumenteinstellung ‚Grad‘:

$\frac{d}{dx}(\sin(x))$	$\frac{\pi\cdot\cos(x)}{180}$
$\left(\frac{d}{dx}(\sin(x))\right)^r$	$\cos(x)$
$af(x):=\left(\frac{d}{dx}(\sin(x))\right)^r$	*Fertig*
$\text{solve}\left(af(x)=\frac{1}{2},x\right)\mid 0\le x\le 360$	$x=60$ or $x=300$
$af(180)$	-1

Folgerungen:
Die Ableitung sollte man also; auch wenn die Dokumenteinstellung ‚Grad‘ ist; im Bogenmaß durchführen.

$$\left(\frac{d}{dx}(\sin(x))\right)^r$$

Weiterhin ist es nützlich nur die Lösungen einer Gleichungen zu ermitteln, die Elemente des Definitionsbereichs der Zielfunktion sind.

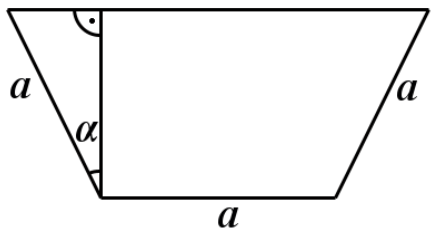
$$\text{solve}\left(af(x)=\frac{1}{2},x\right)\left|0\le x\le 360\right.$$

Ist die Dokumenteinstellung ‚Bogenmaß', so werden die im Bogenmaß ermittelten Ergebnisse durch die Division durch 1° im Gradmaß ausgegeben.
Werden Winkel in der Dokumenteinstellung ‚Bogenmaß' im Gradmaß eingegeben, dann in der Form $\mathbf{30}°$ und nicht, wie in der Dokumenteinstellung ‚Grad' möglich, einfach nur $\mathbf{30}$.

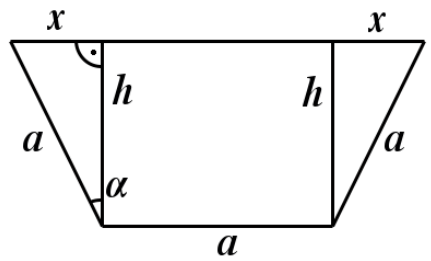
Dokumenteinstellung ;Bogenmaß':

$\frac{d}{dx}(\sin(x))$	$\cos(x)$
$af(x):=\frac{d}{dx}(\sin(x))$	*Fertig*
$\text{solve}\left(af(x)=\frac{1}{2},x\right)\left\|0\le x\le 2\cdot\pi\right.$	$x=\frac{\pi}{3}$ or $x=\frac{5\cdot\pi}{3}$
$\frac{\left\{\frac{\pi}{3},\frac{5\cdot\pi}{3}\right\}}{1°}$	$\{60,300\}$
$\frac{\text{zeros}\left(af(x)-\frac{1}{2},x\right)\left\|0\le x\le 2\cdot\pi\right.}{1°}$	$\{60,300\}$
$af(300°)$	$\frac{1}{2}$

Extremwertaufgaben
Aufgabe 4
Wie groß muss der Winkel α sein, damit das gleichschenklige Trapez (siehe Zeichnung) maximalen Flächeninhalt hat. (a ist konstant)



Lösung:



$A(x,h) = \frac{(2x+a)+a}{2} \cdot h = (a+x) \cdot h;$

Nebenbedingungen:
$x = a \cdot \sin\alpha\,; \qquad h = a \cdot \cos\alpha$

Zielfunktion:
$A(\alpha) = (a + a \cdot \sin\alpha) \cdot a \cdot \cos\alpha$
$A(\alpha) = a^2 \cdot (1 + \sin\alpha) \cdot \cos\alpha$

Definitionsbereich der Zielfunktion:
$[0\,; 90°)$

$A'(\alpha) = a^2 \cdot \cos^2\alpha - a^2 \cdot \sin\alpha \cdot (\sin(\alpha) + 1)$
$A''(\alpha) = -a^2 \cdot (4\sin(\alpha) + 1) \cdot \cos\alpha$

$A'(\alpha) = 0$
$\alpha = 30°$
$A''(30°) = \frac{-3a^2\sqrt{3}}{2} < 0$
$\Rightarrow \quad \alpha = 30°$ ist Maximumstelle

Bei einem Winkel von $\alpha = 30°$ ist der Flächeninhalt maximal.

Lösung bei Dokumenteinstellung ‚Bogenmaß‘:

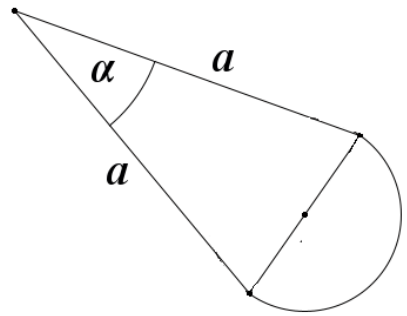
$f(x) := a^2 \cdot \cos(x) \cdot (1+\sin(x))$	*Fertig*
$a1f(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a2f(x) := \frac{d}{dx}(a1f(x))$	*Fertig*
$a1f(x)$	$a^2 \cdot (\cos(x))^2 - a^2 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x)+1)$
$a2f(x)$	$-a^2 \cdot (4 \cdot \sin(x)+1) \cdot \cos(x)$

⚠ $\text{solve}(a1f(x)=0,x)\|a>0 \text{ and } 0\le x<\frac{\pi}{2}$	$x=0.523599 \text{ and } a>0.$
$\frac{0.52359877559831}{1°}$	30.
$a1f(30°)$	0
$a2f(30°)$	$\frac{-3\cdot a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$

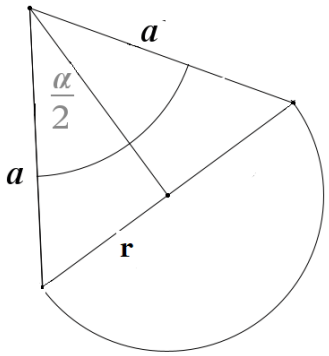
Lösung bei Dokumenteinstellung ‚Gradmaß':

$f(x):=a^2\cdot\cos(x)\cdot(1+\sin(x))$	*Fertig*
$a1f(x):=\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^r$	*Fertig*
$a2f(x):=\left(\frac{d}{dx}(a1f(x))\right)^r$	*Fertig*
$a1f(x)$	$a^2\cdot\left((\cos(x))^2-\sin(x)\cdot(\sin(x)+1)\right)$
$a2f(x)$	$-a^2\cdot(4\cdot\sin(x)+1)\cdot\cos(x)$
⚠ $\text{solve}(a1f(x)=0,x)\|a>0 \text{ and } 0\le x<90$	$x=30. \text{ and } a>0.$
$a2f(30)$	$\frac{-3\cdot a^2\cdot\sqrt{3}}{2}$

Aufgabe 5:
Einem gleichschenkligen Dreieck werde an der Basis ein Halbkreis angesetzt, dessen Durchmesser der Länge der Basis entspricht. Die Länge a der Schenkel des Dreiecks ist vorgegeben. Wie groß ist der Winkel, den die Schenkel einschließen, zu wählen, damit der Flächeninhalt der zusammengesetzten Figur maximal wird.



Lösung



$A(\alpha, r) = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot r^2$

Nebenbedingung.
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a} \quad \Rightarrow \quad r = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

Zielfunktion:
$A(\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \sin\alpha + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a^2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$
$A(\alpha) = \frac{1}{2}a^2 \cdot \left(\sin(\alpha) + \pi \cdot \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)$

Definitionsbereich der Zielfunktion:
$(0° ; 180°)$

$A'(\alpha) = \frac{1}{4}a^2 \cdot \left(\pi \cdot \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\alpha\right)$
$A''(\alpha) = \frac{1}{4}a^2 \cdot \left(2\pi \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 2 \cdot \sin(\alpha) - \pi\right)$

$A'(\alpha) = 0$
$\alpha \approx 147{,}5°$

$A''(147{,}5°) \approx -0{,}9a^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 147{,}5°$ ist Maximumstelle.

Der Winkel sollte eine Größe von etwa 147,5° haben.

Dokumenteinstellung ‚Bogenmaß‘:

$f(x) := \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \left(\sin(x) + \pi \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)$	*Fertig*
$a1f(x) := \frac{d}{dx}(f(x))$	*Fertig*
$a2f(x) := \frac{d}{dx}(a1f(x))$	*Fertig*

$a1f(x)$	$\frac{a^2\cdot\left(\pi\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)+\cos(x)\right)}{2}$
$a2f(x)$	$\frac{a^2\cdot\left(2\cdot\pi\cdot\left(\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2-2\cdot\sin(x)-\pi\right)}{4}$
$\text{solve}(a1f(x)=0,x)\|0\le x\le\pi$	$0\le x\le\pi$ and $a=0$ or $x=\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)$
$\frac{\pi-\tan^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)}{1°}$	147.518
$a2f(147.518°)$	$-0.931048\cdot a^2$

Dokumenteinstellung ‚Gradmaß‘:

$f(x):=\frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\left(\sin(x)+\pi\cdot\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2\right)$	*Fertig*
$a1f(x):=\left(\frac{d}{dx}(f(x))\right)^r$	*Fertig*
$a2f(x):=\left(\frac{d}{dx}(a1f(x))\right)^r$	*Fertig*
$\text{solve}(a1f(x)=0,x)\|0<x<180$	$0<x<180$ and $a=0.$ or $x=147.518$
$a2f(147.518)$	$-0.931048\cdot a^2$

Literatur:
Mathematik, Lehrbuch für die Klasse 12
Verlag Volk und Wissen Berlin, 1981