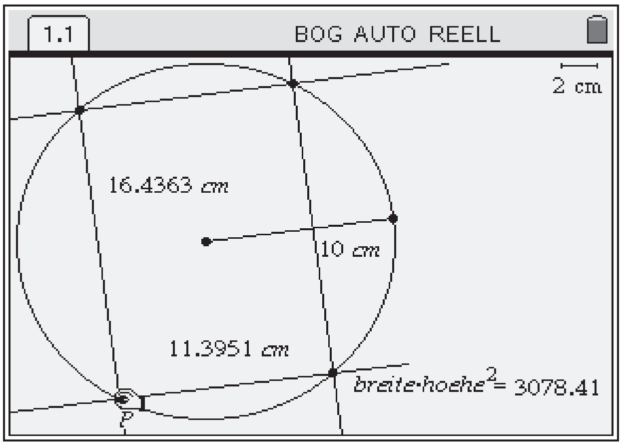
Unterschiedliche Lösungswege für Extremwertaufgaben

Karl-Heinz Keunecke, Altenholz
Angelika Reiß, Berlin

Welcher Balken trägt am meisten?



Steckbrief der Aufgabe
Sekundarstufe I und II
Extremwertwertaufgaben mit geometrischen Nebenbedingungen
Dauer: 4 - 6 Unterrichtsstunden

Notwendige Voraussetzungen:
Schülerinnen und Schüler
- können Sätze am rechtwinkligem Dreieck anwenden
- kennen Bedingungen für Extremwerte (Sekundarstufe II)

Prozessbezogene Kompetenzen, die mit dieser Einheit gefördert werden können:
Schülerinnen und Schüler
- wenden numerische oder algebraische Verfahren zur Problemlösung an
- verwenden verschiedene Werkzeuge sachgerecht
- argumentieren und kommunizieren bei der Problemlösung

Inhaltsbezogene Kompetenzen, die diese Einheit verfolgt:
Schülerinnen und Schüler
- führen geometrische Grundkonstruktionen aus
- übertragen Werte aus der geometrischen Konstruktion in eine Tabelle
- lösen algebraisch eine Extremwertaufgabe

Rolle der Technologie (TI-Nspire™, TI-Nspire™ CAS)
- Visualisieren
- Konstruieren
- Berechnen

Mögliche Zugänge, die von der Technologie unterstützt werden:
- Graphisch/Geometrisch: Konstruktion eines Kreises mit einbeschriebenem Rechteck und deren Veränderungen
- Numerisch: Übertragen gemessener Werte in eine Tabelle
- Algebraisch: Differenzieren, Gleichungen lösen

Empfehlung zur Unterrichtsorganisation:
- Einstieg als gemeinsame Demonstration der Gruppe
- Partnerarbeit

Welcher Balken trägt am meisten?

Aus einem kreisrunden Baumstamm mit dem Durchmesser von 20 cm soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt gesägt werden, der eine möglichst große Last tragen kann.

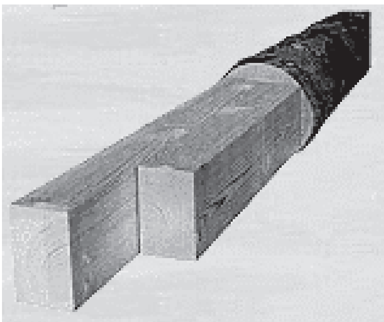
Die Tragfähigkeit eines Balkens ist

1. proportional zum Quadrat seiner Höhe und
2. proportional zu seiner Breite.

Zusatzaufgaben:

1. Entwickeln Sie Formeln, mit denen für einen beliebigen Radius die optimale Höhe und Breite berechnet werden können. Bestimmen Sie daraus das Verhältnis von Höhe und Breite und erläutern Sie Ihr Ergebnis.

2. Ein Mitarbeiter des Sägewerks behauptet, dass man eine größere Tragfähigkeit insgesamt erhält, wenn man aus dem Stamm statt einem zwei optimale Balken sägt. Nehmen Sie dazu Stellung.



1. Lösen mit dem DGS von TI-Nspire™

Nach dem Aufrufen der Applikation **Graphs & Geometry** wird zunächst das Koordinatensystem ausgeblendet (Ansicht, Ebenengeometrie). Damit werden alle Längen automatisch in Längeneinheiten (hier cm) angeben. Dies ist von großer Bedeutung, weil sich dann die konstruierten und gemessenen Größen direkt mit den algebraischen Lösungen vergleichen lassen.

Zunächst wird ein Kreis (Linien, besondere) mit dem Radius 10 cm wie in Abb. 1 konstruiert. Auf dem Handheld sollte dazu der Maßstab verändert werden (z. B. 1 LE = 2 cm Ansicht, Ebenengeometrie)

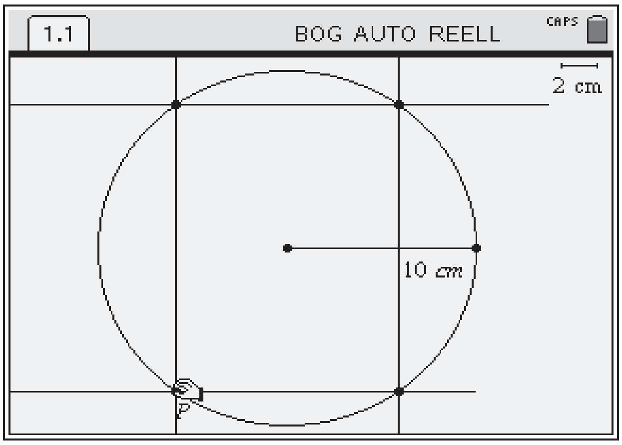


Abb. 1: Konstruktion des einbeschriebenen Rechteckes

Dazu zeichnet man zunächst eine beliebige Strecke und misst deren Länge (Messen). Den angezeigten Wert überschreibt man dann mit 10 cm. Mit Hilfe der beiden Endpunkte der Strecke kann der Kreis (Linien, besondere) konstruiert werden.

Nun erfolgt die Konstruktion des Rechteckes. Konstruieren Sie dazu einen Punkt P (Punkt auf Objekt) auf dem Kreis. Ausgehend vom Punkt P wird eine Sehne des Kreises gezeichnet (hier durch die Konstruktion einer Parallelen zur Strecke (Linien, besondere) und anschließendes Bestimmen der Schnittpunkte (Punkt, Schnittpunkte)). In den Endpunkten errichtet man eine Senkrechte (Linien, besondere), deren Schnittpunkte (Punkt, Schnittpunkte) mit dem Kreis die anderen Eckpunkte des Rechteckes bilden. Mit der Greifhand kann man jetzt P auf dem Kreis bewegen und so die Form des Rechtecks verändern.

Zur Berechnung der Tragfähigkeit werden zunächst die Längen der Rechteckseiten gemessen und dann das Produkt „hoehe² · breite“ bestimmt. (Abb. 2). (Formeln, Werte einsetzen). Das berechnete Produkt positioniert man am besten hinter die Formel. Zur besseren Verständlichkeit wurde hier noch ein Gleichheitszeichen eingefügt.

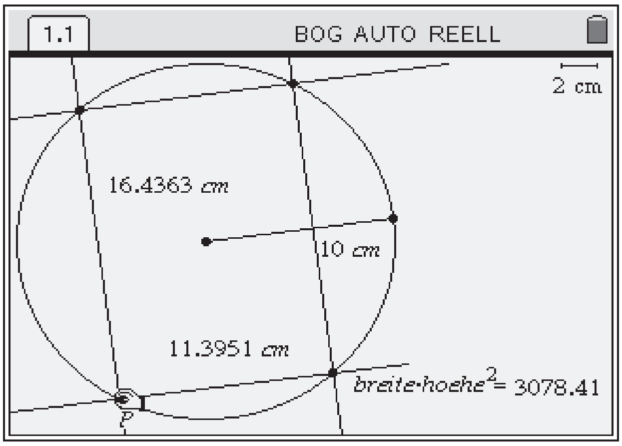


Abb. 2: Berechnung der maximalen Tragfähigkeit

Durch Ziehen des Punktes P wird nun das Rechteck so verändert, dass das angezeigte Produkt einen maximalen Wert anzeigt. Damit können Schülerinnen und Schüler durch systematisches Probieren die Balkenabmessungen Höhe = 16, 5 cm und Breite = 11,4 cm für den tragfähigsten Balken näherungsweise finden.

2. Lösen mit Tabellenkalkulation und Graphik des TI-Npire™

Wenn Punkt P in Abb. 2 auf dem Kreis bewegt wird, so können Länge, Breite und Tragfähigkeit in eine Tabelle übernommen (Werte sammeln) und anschließend gezeichnet werden.

Dazu hat man den in Abb. 2 gemessenen Werten Variablennamen zuzuweisen (Variablen verknüpfen) (siehe Abb. 3).

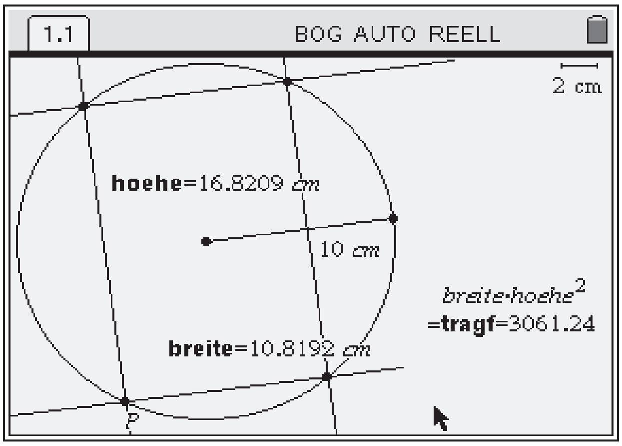
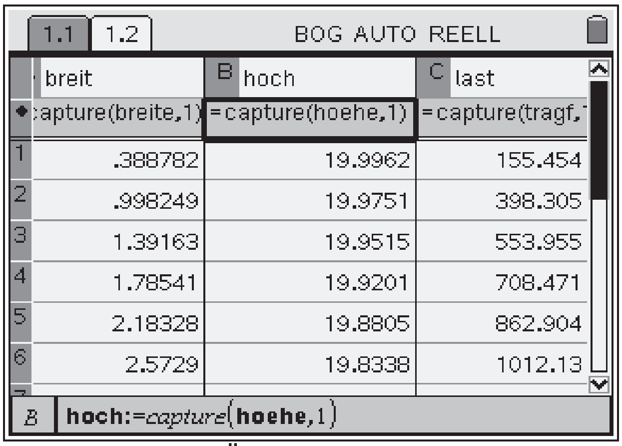


Abb. 3: Variablenzuweisung

Die Werte der Variablen „breite“, „hoehe“, „tragf“ können nun mit der Option „Datenübertragung, automatisch“ beim „Ziehen“ des Punktes P in eine neue Applikation **Lists & Spreadsheet** übertragen werden (Werte sammeln):



	breit	B hoch	C last
◆	:apture(breite,1)	=capture(hoehe,1)	=capture(tragf,1
1	.388782	19.9962	155.454
2	.998249	19.9751	398.305
3	1.39163	19.9515	553.955
4	1.78541	19.9201	708.471
5	2.18328	19.8805	862.904
6	2.5729	19.8338	1012.13

Abb. 4: Automatische Übertragung der Werte von „breite“, „hoehe“, „tragf“ in die Spalten einer Tabelle

Den Verlauf der Tragfähigkeit in Abhängigkeit von der Breite oder Höhe des Stammes kann man erkennen, wenn die Spalte „last“ als Funktion der Spalte „breit“ oder als Funktion der Spalte „hoch“ dargestellt wird (Listen graphisch darstellen) (siehe Abb. 5).

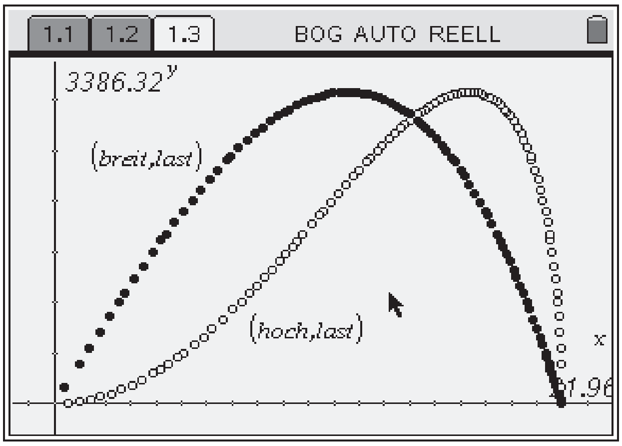


Abb. 5: Graphische Darstellung der Liste „last“
als Funktion der Listen „breit“ und „hoch“

Mit der Spurfunktion lassen sich dann die Werte des Maximums näherungsweise ablesen: breit = 11,5 cm, hoch=16,35 cm und last = 3079,2.

3. Lösen mit dem CAS von TI-Nspire™ CAS

Die algebraische Berechnung besteht zum einen in der Aufstellung des Terms für die Tragfähigkeit als Funktion der Breite (oder der Höhe) und zum anderen in der Berechnung ihres Maximums mit Hilfe der Differenzialrechnung. Die Rechnungen im **Calculator** sind in Abb. 6 dargestellt. Die Ergebnisse sind dann:

$$h = \frac{20\cdot\sqrt{6}}{3} \approx 16{,}33\,;\; b = \frac{20\cdot\sqrt{3}}{3} \approx 11{,}55\,;\, \text{trag} \approx \frac{16000\cdot\sqrt{3}}{9} = 3079{,}2$$

Anhand der algebraischen Lösungen können die Ergebnisse der vorherigen Verfahren überprüft werden. Die Genauigkeit ist in allen Fällen für die praktische Angabe der Balkendicke und -breite ausreichend.

Nebenbedingung

Berechnung der Trägfähigkeit als Funktion der Breite (Zielfunktion)

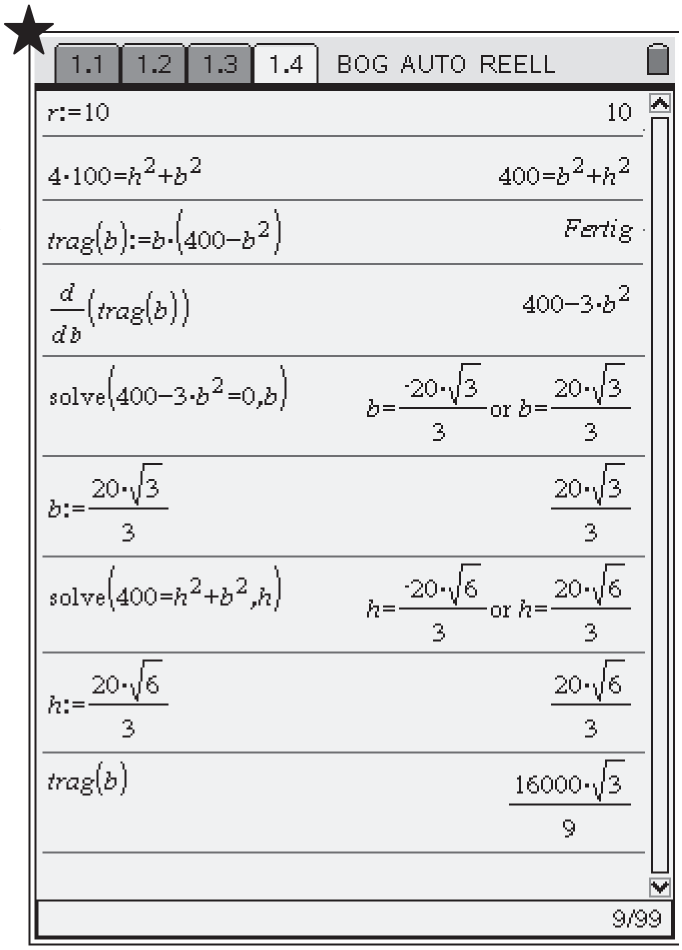


Abb. 6: Algebraische Berechnung des Maximums der Tragfähigkeit

Didaktischer Kommentar

Das „Tragfähigkeitsproblem“ beschreibt exemplarisch eine ganze Klasse von Problemen, deren gemeinsames Merkmal die Ermittlung einer optimalen Lösung unter Beachtung gegebener geometrischer Bedingungen ist. Extremwertprobleme waren schon immer ein zentrales Thema der Mathematik, das sich durch einen hohen Anwendungsbezug auszeichnet. Da der Bezug zur Lebenswelt eine der zentralen Forderungen an den heutigen Mathematikunterricht ist, sollten Problemstellungen dieser Art auch schon in der Mittelstufe – also ohne die Möglichkeiten der Differenzialrechnung – eine große Rolle spielen.

Mit Hilfe Neuer Medien ist dies ohne weiteres möglich, da schon mit einem graphischen Taschenrechner eine Wertetabelle erzeugt und der optimale Wert durch Verfeinerung dieser Tabelle im Prinzip beliebig genau eingeschachtelt werden kann. Auch kann ein Term aufgestellt und der zugehörige Graph erzeugt werden, dessen Maximum oder Minimum sich mit Hilfe des Spurmodus ablesen lässt.

Dynamische Geometriesoftware erlaubt, es das gegebene Problem zu visualisieren, durch „Ziehen“ die Größen zu verändern und so durch systematisches Probieren den gesuchten Wert zu finden.

Stehen den Schülerinnen und Schülern die mathematischen Werkzeuge der Differenzialrechnung zur Verfügung, können die Probleme algebraisch bearbeitet werden.

Dabei können sich die Schülerinnen und Schüler auf die eigentliche Problemstellung konzentrieren, nämlich das Erarbeiten von Nebenbedingung und Zielfunktion, da das Computer-Algebra-System ihnen das Ableiten, das Berechnen von Nullstellen, das Einsetzen von Werten etc. abnimmt.

TI-Nspire™ CAS oder die entsprechende Software ermöglicht es, alle beschriebenen Lösungswege einzuschlagen. Damit ergibt sich der große Vorteil, dass Schülerinnen und Schüler die Erweiterung ihrer mathematischen Kompetenz auf „ihrem“ Rechner umsetzen können, so dass sowohl bezüglich der inhaltlichen als auch der Werkzeugkompetenzen der kumulative Lernprozess verstärkt und deutlich wird.

Wenn Schülerinnen und Schüler diese Verfahren auf ihrem Gerät beherrschen, so liegt es in ihrer Entscheidung, welchen Weg sie zur Lösung einer entsprechenden Aufgabe wählen, so dass differenziertes und individuelles Arbeiten im Unterricht möglich ist.

Es gibt Schülerinnen und Schüler, die immer den graphischen Zugang wählen, andere „rechnen“ lieber und wählen den algebraischen Weg. So können die Lernenden, dadurch dass sie mit den in dieser Ausarbeitung beschriebenen Verfahren vertraut sind, ihrem eigenen Lerntyp entsprechend arbeiten.

Weiter ergibt sich hier eine hervorragende Möglichkeit, mit Schülerinnen und Schülern mathematisches Arbeiten zu reflektieren. So kann diskutiert werden, bei welchen Problemen die grafische Lösung „reicht“ oder ob es Aufgabenstellungen gibt wie die Zusatzaufgabe 1, bei denen eine algebraische Lösung zwingend notwendig ist. „Wann muss etwas bewiesen werden?“, „Wann ist etwas ein Beweis?“ sind ureigene Fragestellungen der Mathematik, auf die an dieser Stelle eingegangen werden kann.

