C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

A R B E I T S M A T E R I A L I E N

BAND 4

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

mit den Themen:

Terme und Termumformungen 2

Reelle Zahlen

Satz von Pythagoras

Vorwort

Liebe Schülerinnen, liebe Schüler:

Ihr habt für den Mathematikunterricht einen Taschencomputer (**TC**) zur Verfügung, der euch helfen kann, Mathematik noch besser zu verstehen und der viel unnötige Rechen- und Zeichenarbeit abnehmen wird. Dieses Lernmaterial ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra für diesen Zweck für euch erarbeitet worden. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus bisherigen Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines Taschencomputers geeignet sind.
Durch den Einsatz des Taschencomputers kann die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert werden. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird. Daher sind die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu diesem Themenheft für euch gibt es auch noch entsprechend entwickelte Handreichungen für die Lehrer.

Dieses vierte Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Terme und Termumformungen 2**
2. **Reelle Zahlen**
3. **Satz von Pythagoras**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Anknüpfend an eure Vorkenntnisse wird die Multiplikation von Summen erarbeitet. Hier geht es zunächst um eine Flächenteilung und unterschiedliche Berechnungsweisen. Der sich daraus ergebende mathematische Gehalt liefert eine Möglichkeit, Produkte von Summen zu berechnen.
Mit den Rechnerbefehlen „expand“ und „factor“ macht ihr erneut weitere Entdeckungen.
Mithilfe von Veränderungen quadratischer Flächen lernt ihr die binomischen Formeln als Spezialfälle für das Ausmultiplizieren von Summen kennen. Im Folgenden werden die Kenntnisse durch geometrische Veranschaulichungen und vielfältiges Üben gesichert und vertieft. Der TC kommt beim Vergleichen komplexer Terme, in denen die binomischen Formeln eine Rolle spielen, und bei der Erweiterung auf höhere Potenzen (Pascalsches Dreieck) zum Tragen.
Die Sicht auf Terme, wie sie in den zurückliegenden Stunden beispielsweise zur Berechnung von Flächeninhalten entwickelt wurde, wird nun erweitert, indem Terme als Funktionsterme aufgefasst werden, die eine Zuordnung von einzugebenden auf auszugebende Werte leisten. Dabei wird besonders die Möglichkeit des Rechners genutzt, die Entwicklung des funktionalen Denkens zu fördern.

Bei der Einführung der Quadratwurzel lernt ihr das Heron-Verfahren kennen, mit dem die Frage geklärt wird, wie man ohne eine Quadratwurzeltaste Wurzeln berechnen kann. Dabei steht das Heron-Verfahren als

Rechner-Algorithmus im Mittelpunkt. Als weiteres Verfahren wird auch das Intervallhalbierungsverfahren thematisiert. Mit der Irrationalität werden „neuartigen“ Zahlen geschaffen und euer bisheriger Zahlenbereich erweitert. Abschließend lernt ihr Regeln für das Rechnen mit Wurzeln kennen und formt Terme um, die Wurzeln enthalten.

Über die Frage nach der Diagonalenlänge im Rechteck wird mit einer Zerlegungsfigur eine Formel – die „Diagonalenformel“ – begründet, die den Satz von Pythagoras impliziert.
Die Umkehrung dieses Satzes wird dir empirisch über dynamisches Experimentieren mit der Pythagorasfigur erschlossen und im Kontext der Überprüfung von Rechtwinkligkeit und der Suche nach pythagoreischen Zahlentripeln verwendet. Das Aufgabenmaterial stellt vielfältige Vernetzungen zu anderen Themen und Fertigkeiten her. Dabei lernt ihr auch historische Bezüge kennen.

Den Abschluss bilden einige sogenannte Kopfübungen und Aufgaben zum Basiswissen. In diesem Teil findet ihr Aufgaben – Kopfübungen –, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionale Zusammenhänge sowie Daten und Zufall wiederholen. Hier findet ihr neben diesen einfachen Aufgaben, für den Fall, dass ihr wenig Erinnerung habt, auch komplexere Aufgaben – Basiswissen –, wenn ihr testen möchtet, wie viel ihr noch könnt. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen euch, durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, ihr erinnert euch an eure mathematischen Kenntnisse und mobilisiert eure Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig entwickelt ihr so eine hohe mathematische Kompetenz und erhaltet euch ein gutes Basiswissen. Diese Aufgaben sind aber auch als hervorragende, vorbereitende Wiederholung für die nächste Unterrichtseinheit gedacht.

Die Autoren dieses Themenheftes wünschen euch mit dem Taschencomputer und diesem Heft viel Erfolg!

Bergkirchen im August 2008

INHALTSVERZEICHNIS

Terme und Termumformungen 2

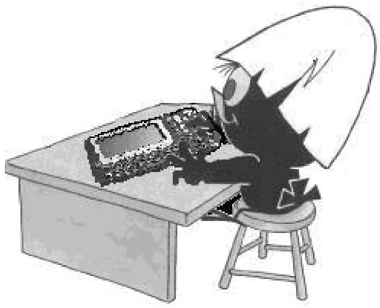
Reelle Zahlen

Satz von Pythagoras

Training

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



© PAGOT

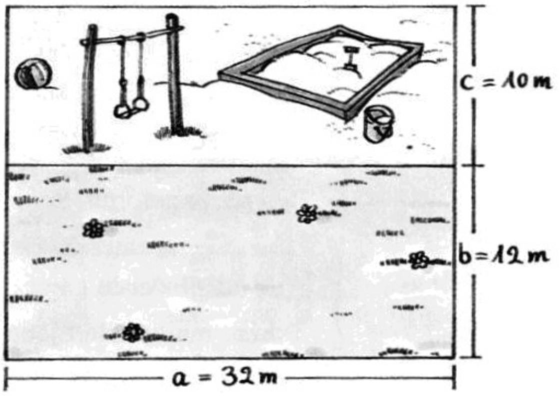
Terme und Termumformungen 2

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Klasse	1.1. Produkt von Summen – geom. Betrachtung	Blatt: 1.1	Datum:

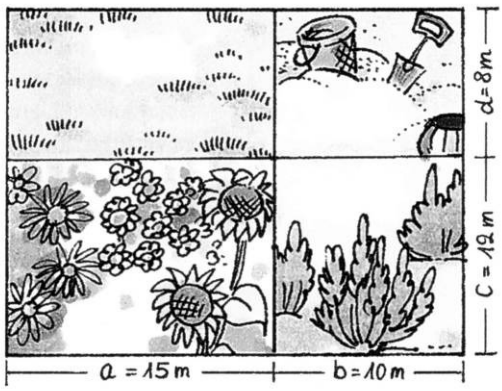
Aufgabe 1[1]

Der Garten der Familie Müller hat die Form eines Rechtecks. Er besteht aus zwei Teilrechtecken.



Klaus und Klara haben die Größe des Gartens berechnet:
Klaus: $A = a \cdot (b + c)$
Klara: $A = a \cdot b + a \cdot c$
Erkläre wie sie vorgegangen sind.

Der Garten der Familie Meier hat die Form eines Rechtecks. Er besteht aus vier Teilrechtecken.

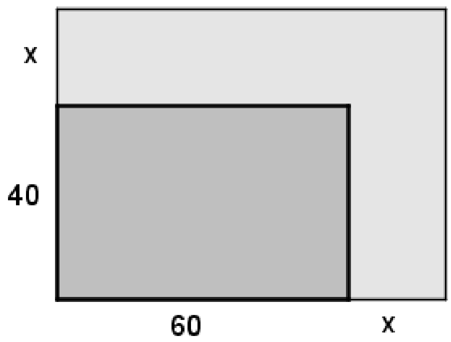


Thomas und Bärbel haben die Größe des Gartens berechnet:
Thomas: $A = (a + b) \cdot (c + d)$
Bärbel: $A = a \cdot c + b \cdot c + a \cdot d + b \cdot d$
Erkläre wie sie vorgegangen sind.

Aufgabe 2

Es ist ein rechteckiges Grundstück mit 60 m Länge und 40 m Breite gegeben. Das Grundstück soll durch Verlängern der beiden Seiten um 1 m, 2 m, 3 m, … vergrößert werden.

a) Berechne den Flächeninhalt für eine Seitenverlängerung von 1, 2, …, 10 Metern und stelle die Wertepaare in einer Tabelle dar.
b) Finde zwei verschiedene Terme zur Berechnung des Flächeninhalts in Abhängigkeit von x.
c) Durch die Verlängerung der Seiten vergrößert sich die ursprüngliche Fläche.
Finde einen Term für die Veränderung des Flächeninhalts.
d) Ist dieser Term schon im Term aus Aufgabenteil b) enthalten?



Alle Längenangaben in Meter

[1] Elemente der Mathematik 8, 978-3-507-87208-0, Schroedel

Klasse	1.2. Produkte von Summen – Rechteckdiagramme	Blatt: 1.2	Datum:

Aufgabe 1[1]

Die folgende Aufgabe mit Lösung stammt aus einem amerikanischen Mathematikbuch. Lies sie dir in Ruhe durch. Verstehst du alles? Wozu dient wohl das Rechteckdiagramm?

EXAMPLE 1
Multiply x – 3 and x + 4.
The following diagram is helpful in illustrating the solution:

	x	4
x	x^2	$4x$
-3	$-3x$	-12

Solution:

$(x-3)\cdot(x+4) = x^2 - 3x + 4x - 12$
$= x^2 + x - 12$

Löse auf die gleiche Weise die folgenden Aufgaben. Zeichne jedes Mal ein Rechteckdiagramm wie im amerikanischen Beispiel:

a) $(x + 5)\cdot(x + 12)$ b) $(3\cdot x + y)\cdot(y - 4\cdot x)$ c) $(2\cdot x + 4)\cdot(3\cdot x + 7)$ d) $(2\cdot x - 7)\cdot(5\cdot x + 1)$

e) Welche Summen sollen hier miteinander multipliziert werden? Wie lauten die Ergebnisse?

	x	8
$3x$	$3x^2$	$24x$
-2	$-2x$	-16

	4	$3x$
$8x$	$32x$	$24x^2$
$-2y$	$-8y$	$-6xy$

	$3b$	7
$3b$	$9b^2$	$21b$
-7	$-21b$	-49

Aufgabe 2[1]

Die Rechnungen mit den Rechteckdiagrammen kann man auch wie im folgenden Beispiel systematisch darstellen:

Bsp:

	3	$-4\cdot x$
$2\cdot x$	$6\cdot x$	$-8\cdot x^2$
4	12	$-16\cdot x$

$(2\cdot x + 4)\cdot(3 - 4\cdot x) = 6\cdot x - 8\cdot x^2 + 12 - 16\cdot x$

Vervollständige die folgenden Rechteckdiagramme, finde die richtige Aufgabenstellung und stelle deine Lösung systematisch dar:

		2
x	x^2	
		6

	$3\cdot x$	5
	$12\cdot x^2$	
		-20

	y	
	y^2	
$3\cdot x$		$36\cdot x$

		-3
$5\cdot p$	$25\cdot p^2$	
		9

	n	
n		$-2\cdot n$
		8

		$-b^2$
a		
	$a\cdot b$	$-b^2$

[1] Neue Wege 8, 978-3-507-85504-5, Schroedel 8

Klasse	1.3. Produkte von Summen – Übungen ohne TC	Blatt: 1.3	Datum:

Aufgabe 1

Multipliziere aus und fasse ohne Hilfsmittel soweit wie möglich zusammen:

a) $(r + 10) \cdot (s + 5)$

b) $(\frac{1}{2} \cdot x + 2) \cdot (10 \cdot x - 20)$

c) $(0{,}7 \cdot y - 4) \cdot (2 \cdot y - 5)$

d) $(8 - v) \cdot (w + 6)$

e) $(6 \cdot a - 7 \cdot b) \cdot (4 \cdot a + 3 \cdot b)$

Aufgabe 2

Ergänze die Lücken:

a) $(\quad + 1) \cdot (y + 2) = a \cdot y + \quad + 2 \cdot a + 2$

b) $(x^2 - 1) \cdot (y + \quad) = x^2 \cdot y - y + \quad - 3$

c) $(x + 3) \cdot (x - \quad) = x^2 + x - 6$

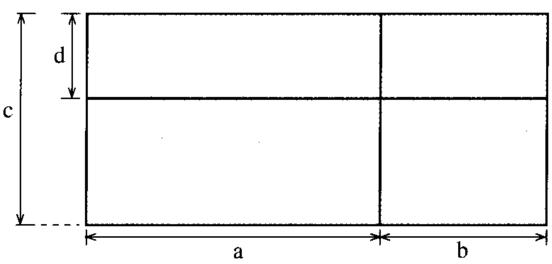
Aufgabe 3[1]

a) Erkläre am nebenstehenden Bild:
$(a + b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d + b \cdot c - b \cdot d$

b) Begründe, warum bei dieser Überlegung nur positive Zahlen sinnvoll sind.

c) Begründe, warum bei dieser Überlegung nur $d < c$ sinnvoll ist.

d) Entwirf ein ähnliches Bild zu der folgenden Gleichung
$(a - b) \cdot (c - d) = a \cdot c - a \cdot d - b \cdot c + b \cdot d$



Aufgabe 4

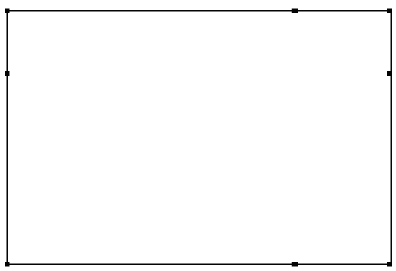
Stelle jeweils das Produkt als Summe dar und veranschauliche die Aufgaben geometrisch:

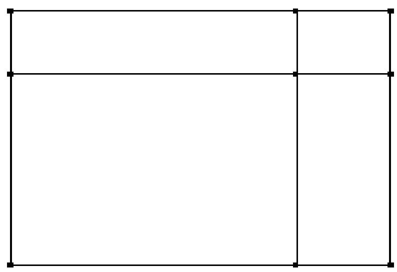
a) $(a + b) \cdot (c + d)$

b) $(a - b) \cdot (c + d)$

Aufgabe 5

Lehrer Lempel sagt:
"Produkte von Summen werden zu Summen von Produkten"





Erkläre anhand des Bildes, was er damit meint.

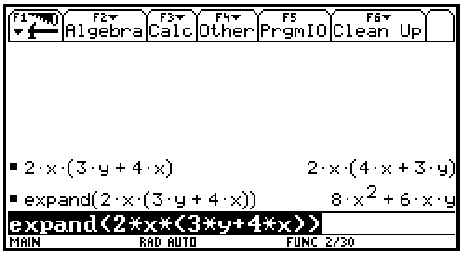
[1] Elemente der Mathematik 8, 3-507-87122-X, Schroedel

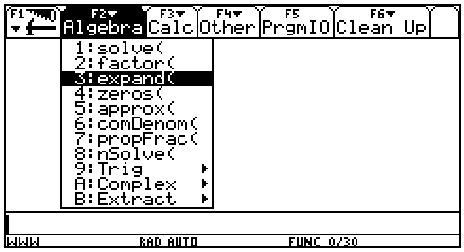
Klasse	1.4. Produkte von Summen – expand und factor	Blatt: 1.4	Datum:

Aufgabe 1

Klaus hat mit seinem Rechner eine Summe ausmultipliziert.

a) Die erste Ausgabe erfüllt nicht seine Erwartungen.
Erläutere, welche Umformungen der Rechner vorgenommen hat.
b) Kontrolliere den zweiten Versuch von Klaus.
c) Erkläre die Wirkung des Befehls expand.

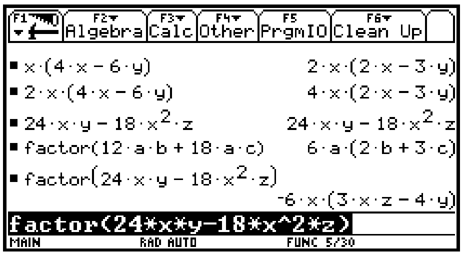


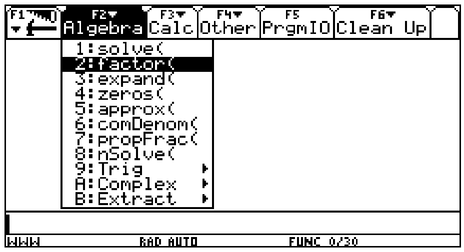


Aufgabe 2

Klaus hat mit seinem Rechner experimentiert.

a) In den ersten Ausgaben hat der Rechner „eigenmächtig" ausgeklammert. Erkläre, welches Ziel damit verfolgt wird.
b) Kontrolliere den letzten Versuch von Klaus.
c) Erkläre die Wirkung des Befehls factor.





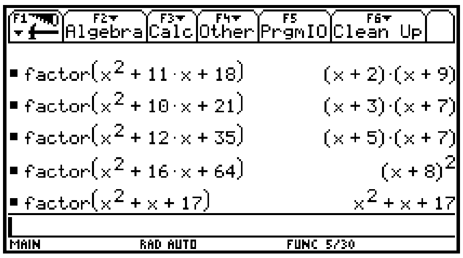
Aufgabe 3

Wende den expand-Befehl auf folgende Terme an:

a) (a + 4) · (a + 3)
b) (x + 2) · (x – 3)
c) (y – 2) · (y + 3)
d) (2 m + n) · (n – 3)
e) (a + b) · (c + d)

Aufgabe 13

Erkläre die Umformung, die der Taschencomputer durchgeführt hat!



Betrachte das letzte Beispiel im Bild des Rechners. Was ist hier los?

Klasse	1.5. Produkte von Summen – Übungen	Blatt: 1.5.1	Datum:

Aufgabe 1

Löse zunächst die Klammern schriftlich auf und vergleiche anschließend mit dem Ergebnis deines Taschencomputers.

a) $(x + 7) \cdot (y + 4)$
b) $(a - 1) \cdot (b - 8)$
c) $(- x + y) \cdot (2 + a)$
d) $(x - 2) \cdot (y + 1)$
e) $(a - b) \cdot (10 - a)$
f) $(9 \cdot x - 4 \cdot y) \cdot (6 \cdot z + 3)$
g) $(x^2 + y^2) \cdot (7 + z + t)$
h) $(a + b + c) \cdot (a - b)$
i) $(6 \cdot x + 3) \cdot (4 \cdot x + y - 2)$
j) $(- x + 8 \cdot y) \cdot (- y + 3 \cdot x - 7)$

Aufgabe 2

Löse die Klammern auf.
Bearbeite jeweils eine Aufgabe händisch und kontrolliere dann mit dem Rechner.

a) $(2 \cdot x + 1) \cdot (3 \cdot x - y + 2)$
b) $(6 \cdot a - 8 \cdot b + 10 \cdot c) \cdot (4 \cdot a - 2 \cdot b)$
c) $(a + 1) \cdot (b + 2) \cdot (c + 3)$
d) $(x + 4) \cdot (5 + y) \cdot (2 - 2 \cdot z)$

Aufgabe 3

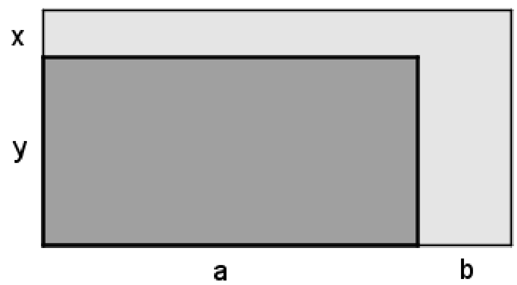
Überprüfe die Lösungen der folgenden Aufgaben.
Berichtige die Fehler und beschreibe, welche Art von Fehler gemacht wurde.

a) $(2 \cdot x + 4) \cdot (3 \cdot x + 7) = 6 \cdot x^2 + 14 \cdot x + 28$
b) $(4 \cdot x + 1) \cdot (y - 5) = 4 \cdot x \cdot y + y - 5$
c) $(8 \cdot x - 3 \cdot y) \cdot (x - y) = 8 \cdot x + 11 \cdot x \cdot y - 3 \cdot y^2$
d) $(a + b) \cdot (2 \cdot a - 3 \cdot b) = 2 \cdot a^2 - 3 \cdot b^2$

Aufgabe 4

Lernprotokoll

a) Stelle für die nebenstehende Figur Terme zur Berechnung der beiden Teilflächen und der Gesamtfläche auf.
   Versuche dabei, falls möglich, für jede Fläche sowohl eine Darstellung mit Klammertermen als auch eine klammerfreie Version zu entwickeln.
b) Welche Rechenregeln, Hilfsmittel und Rechnerbefehle konnten dir bei der Lösung helfen?
c) Welche Fehler passieren häufig bei der Bearbeitung einer solchen Aufgabe?
d) Entwirf ein Bild zu der Gleichung:
   $(a - b) \cdot (c + d) = a \cdot c + a \cdot d - b \cdot c - b \cdot d$

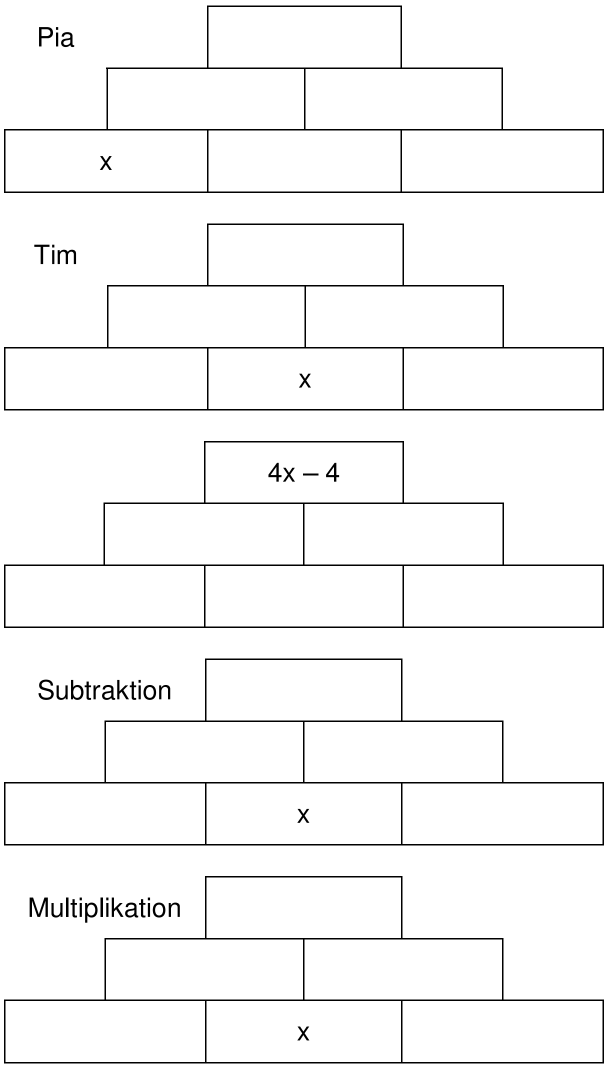


Klasse	1.5. Produkte von Summen – Übungen	Blatt: 1.5.2	Datum:

Aufgabe 5

In jedem Stein steht die Summe der Terme der beiden darunter stehenden Steine. Der Term in der Spitze soll immer weitestgehend zusammengefasst werden.
In den unteren drei Steinen stehen drei aufeinander folgende Zahlen.

a) Fülle Pias und Tims untere Reihe auf und baue ihre Mauern.
b) Vergleiche Pias und Tims Terme im Spitzenstein. Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede haben sie? Begründe.
c) Vervollständige entsprechend die dritte Zahlenmauer.
d) Durch welche Zahl ist der Term in der Spitze in allen drei Termmauern teilbar? Begründe.



e) Ersetze die Addition durch
   (1) Subtraktion
   (2) Multiplikation.
   Erkläre die Besonderheit des Spitzensteins bei der Subtraktion.
   Für welche Werte von x steht bei der Multiplikation im Spitzenstein 0? Begründe.
   Untersuche Pias Behauptung: „Bei der Multiplikationsmauer bekommt man das Produkt aus einer Quadratzahl und der um 1 verminderten Quadratzahl.“

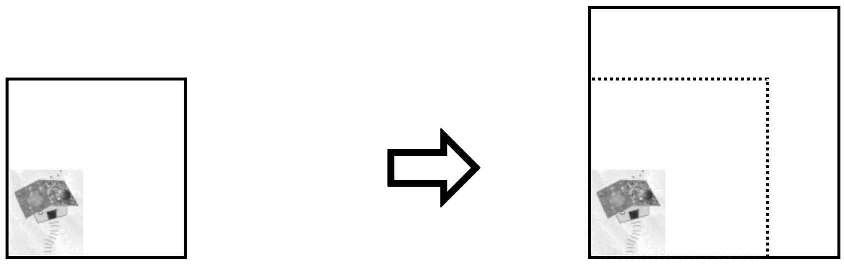
Klasse	2.1. Binomische Formeln – Einführung	Blatt: 2.1	Datum:

Aufgabe 1

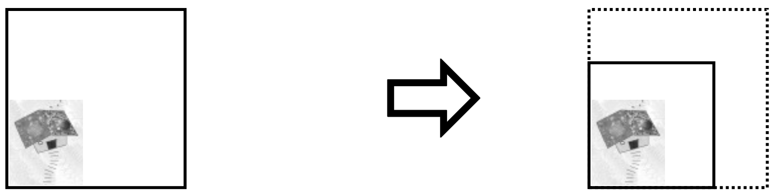
Wegen baulicher Maßnahmen müssen die quadratischen Grundstücke der Familien Thamm, Bauer und Diercks verändert werden.
Bei Familie Thamm wird das Grundstück auf der einen Seite um einen 3 m breiten Streifen verkürzt und dafür auf der anderen Seite um einen 3 m breiten Streifen verlängert.
Bei Familie Bauer wird das Grundstück sowohl in der Länge als auch in der Breite um 3 m vergrößert.
Bei Familie Diercks wird das Grundstück sowohl in der Länge als auch in der Breite um 3 m verkürzt.

a) Ordne die Grundstücksveränderungen der Familien den Abbildungen zu.
b) Stelle für jede Grundstücksveränderung einen Term zur Flächeninhaltsberechnung auf.
c) Untersuche, wie sich der Flächeninhalt im Vergleich zur ursprünglichen Grundstücksgröße verändert.

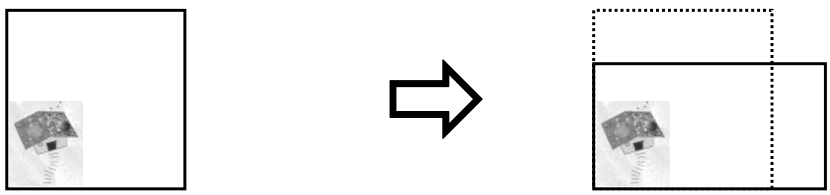
I)



II)



III)



Aufgabe 2

Schreibe als Summe. Gib jeweils an, welche binomische Formel benutzt werden kann. Überprüfe danach mit dem TC.
Veranschauliche an ausgewählten Beispielen den Term als Grundstücksflächenveränderung (wie in Aufgabe 1).

a) $(x + 1)^2$
b) $(y - 7)^2$
c) $(a - 9) \cdot (a + 9)$
d) $(5 - x)^2$
e) $(19 - y) \cdot (19 + y)$
f) $(13 + b)^2$
g) $(7\,x + 5)^2$
h) $(4\,a - 9) \cdot (4\,a + 9)$
i) $(5 - 6\,y)^2$
j) $(x - 0{,}8)^2$
k) $(x - 3\,y)^2$
l) $(-\,5\,b - 7)^2$
m) $(0{,}5\,x + 3\,b)^2$
n) $(\frac{1}{3}\,y + 4)^2$
o) $(-\,6\,u + 5\,v) \cdot (5\,v + 6\,u)$

Klasse	2.2. Binomische Formeln – Faktorisieren	Blatt: 2.2	Datum:

Aufgabe 1

Ordne, falls möglich, dem Produkt aus Spalte A den entsprechenden Term aus Spalte B zu.

A	
1	$(a-4)^2$
2	$(klim-bim)^2$
3	$(a+4)(a-4)$
4	$(a+5)(a+5)$
5	$(a+1)^2$
6	$(a+3)(a+3)$
7	$(a-1)^2$
8	$(a+5)(a+4)$
9	$(a+3)^2$
10	$(a+3)(b+4)$

B	
a	a^2+6a+9
b	$a^2+9a+20$
c	a^2+25
d	a^2+6a+8
e	$klim^2-bim^2$
f	a^2-16
g	$ab+7a+12$
h	a^2-2a+1
i	a^2-6a-9
k	$a^2-8a+16$

Aufgabe 2

Hier kannst du die binomischen Formeln rückwärts rechnen. Doch passe auf: Nicht in allen Fällen ist dies möglich. Finde diese „schwarzen Schafe“, in dem du zu jeder binomischen Formel den faktorisierten Term ergänzt. Die Buchstaben bei den „schwarzen Schafen“ ergeben eine europäische Hauptstadt.

$100-y^2$ (**L**)

$25x^2-15xy+3y^2$ (**A**)

$0{,}81a^2-1{,}8ab+b^2$ (**O**)

$\frac{1}{16}u^2-\frac{9}{25}v^2$ (**N**)

$0{,}01x^2+0{,}2x+1$ (**F**)

$x^2+3x+1{,}5$ (**S**)

$36a^2-60ab+25b^2$ (**G**)

$a^2+6ab+9b^2$ (**E**)

$0{,}36x^2-y^2$ (**D**)

$25a^2+49b^2$ (**R**)

$49x^2+14xy+4y^2$ (**I**)

x^2+xy+y^2 (**P**)

Aufgabe 3

Übertrage in dein Heft und fülle die Lücken (□ ; △ ; ○) aus.

a) $\square^2+16x+\triangle=(x+8)^2$

b) $x^2+\square+y^2=(\triangle+y)^2$

c) $121-22w+w^2=(\square+\triangle)^2$

d) $x^2+\frac{2}{3}xy+\triangle=(x+\square)^2$

e) $100r^2+\square+81s^2=(\triangle+\bigcirc)^2$

f) $\square-\frac{vw}{2}+\triangle=(w-\bigcirc)^2$

Aufgabe 4

Benutze die binomischen Formeln, um günstig zu rechnen.

a) $17\cdot 23=$

b) $59\cdot 61=$

c) $35^2=$

d) $21\cdot 23=$

e) $81^2=$

f) $99^2=$

g) Finde weitere Aufgaben, bei denen die binomischen Formeln Rechenvorteile bieten.

Klasse	2.3. Binomische Formeln – geom. Betrachtung	Blatt: 2.3	Datum:

Aufgabe 1[1]

a) Ersetze $\square$ durch einen Term, so dass sich der entstehende Term als Ergebnis einer binomischen Formel schreiben lässt.

(1) $x^2 + 2xy + \square$

(2) $u^2 + 10u + \square$

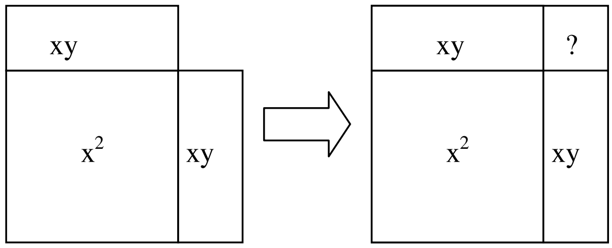
(3) $4a^2 - 12ab + \square$

(4) $m^2 - 2mn + \square$

(5) $p^2 + 4p + \square$

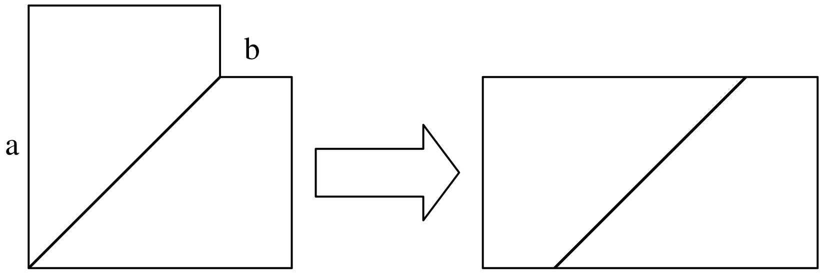
(6) $9u^2 - 24uv + \square$

b) Erläutere das Bild.



Aufgabe 2[1]

Die linke Fläche wird zerschnitten und neu zusammengelegt. Damit lässt sich eine binomische Formel veranschaulichen. Begründe, welche.



[1] Elemente der Mathematik 8, 978-3-507-87208-0, Schroedel

Klasse	2.4. Binomische Formeln – Ausblicke	Blatt: 2.4	Datum:

Aufgabe 1

Wie wachsen Quadratzahlen?

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8
Quadratzahl	1	4	9	16	25	36	49	64

Drei Schüler äußern ihre Vermutungen über das Wachstum der Quadratzahlen und wie man eine neue Quadratzahl erhält:

Nico: „Man nehme die Differenz der letzten zwei Quadratzahlen, addiere dazu 2 und die letzte Quadratzahl.“

Ilona: „Man addiere die letzte und die neue Zahl; das Ergebnis wird zu der letzten Quadratzahl addiert.“

Oliver: „Man multipliziere die neue Zahl mit 2, ziehe vom Ergebnis 1 ab und addiere die letzte Quadratzahl hinzu.“

a) Überprüfe die Vermutungen am Beispiel der Zahlen 16 und 17.

b) Wenn man etwas beweisen will, reicht das Rechnen eines Beispiels nicht aus. Wir müssen mit „irgendwelchen Zahlen“, also **Variablen**, arbeiten. In den Vermutungen ist teilweise von den letzten zwei Quadratzahlen und der neuen Zahl die Rede. Es gibt dann drei Möglichkeiten, diese zu bezeichnen. Fülle die Tabelle aus.

	vorletzte Zahl	letzte Zahl	neue Zahl
(A)		n - 1	n
(B)		n	
(C)			n + 2

c) Begründe, dass die Vermutung und das Ergebnis von Nico in der Version (A) so lauten:

$$(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 + (n-1)^2 = \ldots = n^2$$

Führe die Umformungen durch und gib Begründungen für die einzelnen Umformungsschritte.

d) Stelle auch die Vermutungen von Ilona und Oliver in der Version (A) dar und beweise sie mit dem TC.

e) Stelle die Vermutungen von Nico, Ilona und Oliver in den Versionen (B) und (C) als Formel dar und beweise sie mit dem TC.

f) Olivers Vermutung in der Version (B) liefert folgende Anleitung für das Wachstum der Quadratzahlen:

„Die nächste Quadratzahl ist um das „Doppelte der letzten Zahl plus 1“ größer als die letzte Quadratzahl.“

Schreibe diese Eigenschaft als Formel. Welche bekannte Formel verbirgt sich hier?

Aufgabe 2

Schreibe mithilfe des TC jeweils als Summe: $(a + b)^2$, $(a + b)^3$, $(a + b)^4$, $(a + b)^5$, $(a + b)^6$.
Das folgende Schema nennt man Pascalsches Dreieck.
Was fällt dir auf? Ergänze das Dreieck um drei weitere Zeilen und schreibe $(a + b)^7$ als Summe.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Klasse	2.5. Binomische Formeln – Übungen	Blatt: 2.5	Datum:

Aufgabe 1

Faktorisiere zunächst schriftlich und vergleiche **anschließend** mit dem Ergebnis deines TC.

a) $u^2 - v^2$
b) $r^2 - 121 \cdot s^2$
c) $1 - 16 \cdot a^2$
d) $u^4 - v^4$
e) $x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$
f) $x^2 - 14 \cdot x + 49$
g) $25 - 10 \cdot x + x^2$
h) $169 - 26 \cdot a + a^2$

Aufgabe 2

Ordne äquivalente Terme einander zu. Die richtigen Lösungen ergeben ein Wort.

$(3 - 2 \cdot x)^2$ U
$(-3 + 4 \cdot x)^2$ K
$(x + y) \cdot (x - y)$ N
$(3 \cdot x + y)^2$ I
$(3 \cdot x - y)^2$ T
$x^2 - y^2$ O
$(3 \cdot x + 2 \cdot y)^2$ S
$(3 \cdot x - y) \cdot (3 \cdot x + y)$ M
$(2 \cdot x + 3 \cdot y)^2$ E
$(x - 3 \cdot y)^2$ G

Wähle aus deinen Zuordnungen ein Beispiel aus und gib dafür eine geometrische Deutung an.

Aufgabe 3

Fülle die Lücken aus. Überprüfe dein Ergebnis **anschließend** mit dem Taschencomputer.

a) $x^2 + \quad + y^2 = (x + y)^2$
b) $a^2 + 12 \cdot a + \quad = (a + 6)^2$
c) $\quad - 2 \cdot r + r^2 = (1 - r)^2$
d) $4 \cdot x^2 + \quad + 9 \cdot y^2 = (2 \cdot x + 3 \cdot y)^2$
e) $x^2 - 8 \cdot x + \quad = (x + \quad)^2$
f) $64 \cdot k^2 - \quad + t^2 = (\quad - t)^2$

Aufgabe 3

Faktorisiere zunächst schriftlich und vergleiche **anschließend** mit dem Ergebnis deines TC.

a) $16 \cdot x^2 + 80 \cdot x \cdot y + 100 \cdot y^2$
b) $9 \cdot a^2 - 48 \cdot a \cdot b + 64 \cdot b^2$
c) $49 \cdot r^2 + 126 \cdot r \cdot s + 81 \cdot s^2$
d) $u^2 - 22 \cdot u \cdot v + 121 \cdot v^2$
e) $16 \cdot a^2 + b^2 - 8 \cdot a \cdot b$
f) $400 \cdot x^2 - 81 \cdot y^2$

Aufgabe 4

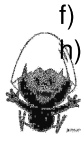
Finde für die folgenden Summen die richtige Zerlegung der Form $(x + a) \cdot (x + b)$.
Überprüfe dein Ergebnis **anschließend** mit dem Taschencomputer.

a) $x^2 + 9x + 18$
b) $x^2 + 10x + 21$
c) $x^2 + 16x + 63$
d) $x^2 + 15x + 26$
e) $x^2 - 4x - 21$
f) $x^2 - 3x - 21$

Aufgabe 5

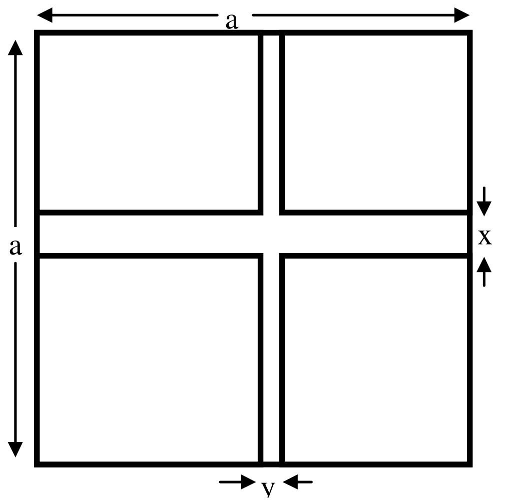
Klammere zunächst aus und wende dann eine binomische Formel an.
Überprüfe dein Ergebnis **anschließend** mit dem Taschencomputer.

a) $7 \cdot a^2 + 14 \cdot a \cdot b + 7 \cdot b^2$
b) $8 \cdot a^2 - 98 \cdot b^2$
c) $45 \cdot x^2 - 30 \cdot x \cdot y + 5 \cdot y^2$
d) $24 \cdot a^2 - 120 \cdot a \cdot b + 150 \cdot b^2$
e) $108 \cdot x^2 + 252 \cdot x \cdot y + 147 \cdot y^2$
f) $980 \cdot u^2 - 320 \cdot v^2$
g) $11 \cdot a^2 + 44 \cdot a \cdot b + 44 \cdot b^2$
h) $1600 \cdot x^2 - 2400 \cdot x \cdot y + 900 \cdot y^{2+}$



Klasse	3. Funktionale Zusammenhänge	Blatt: 3.1	Datum:

Aufgabe 1



Im Land Allupstee soll ein quadratisch angelegter Stadtpark mit Seitenlängen a gestaltet werden. Zwei Wege der Breite x bzw. y sollen sich im Stadtpark kreuzen.

a) Finde einen Term, der den Flächeninhalt der Grünfläche beschreibt und erstelle eine Funktion **Gflaeche**, mit dem man den Flächeninhalt der Grünfläche in Abhängigkeit von a, x und y berechnen kann.

b) Berechne mithilfe dieser Funktion den Flächeninhalt für a = 75 m, x = 1,5 m und y = 0,9 m.

c) Berechne Flächeninhalte für Grünflächen mit a = 75 m, deren Wege gleich breit sind. Stelle dazu eine Wertetabelle auf.

d) Finde einen Term, der den Flächeninhalt der Wege beschreibt und erstelle dazu eine Funktion mit dem Namen **Wflaeche**.

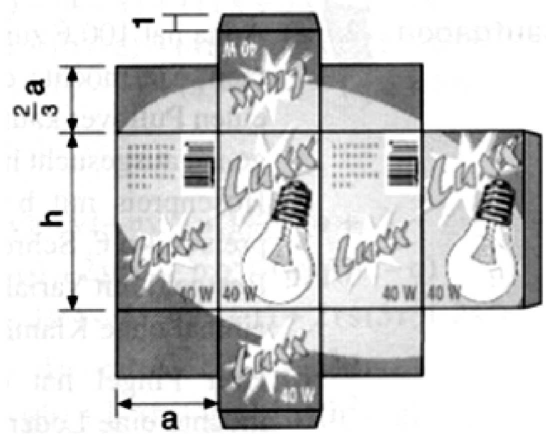
e) Sabrina erstellt für die beiden Funktionen Wflaeche(45,x,2x) und Wflaeche(100,x,0.9x) jeweils eine Tabelle. Beschreibe, was Sabrina damit untersuchen kann. Stelle die Werte der Tabelle auch graphisch dar.

f) In diesem Land gibt es eine Verordnung, die besagt, dass ein Stadtpark nur den Namen Stadtpark tragen darf, wenn höchstens 4,7 % der Parkfläche von Wegen eingenommen wird. Für einen Park mit a = 50 m hat der Planer Rudi Ratlos die Breite der Wege so festzulegen, dass der eine Weg anderthalb mal breiter ist als der andere und die wichtige Verordnung gerade noch eingehalten wird. Hilf ihm.

Klasse	3. Funktionale Zusammenhänge	Blatt: 3.2	Datum:

Aufgabe 2[1]

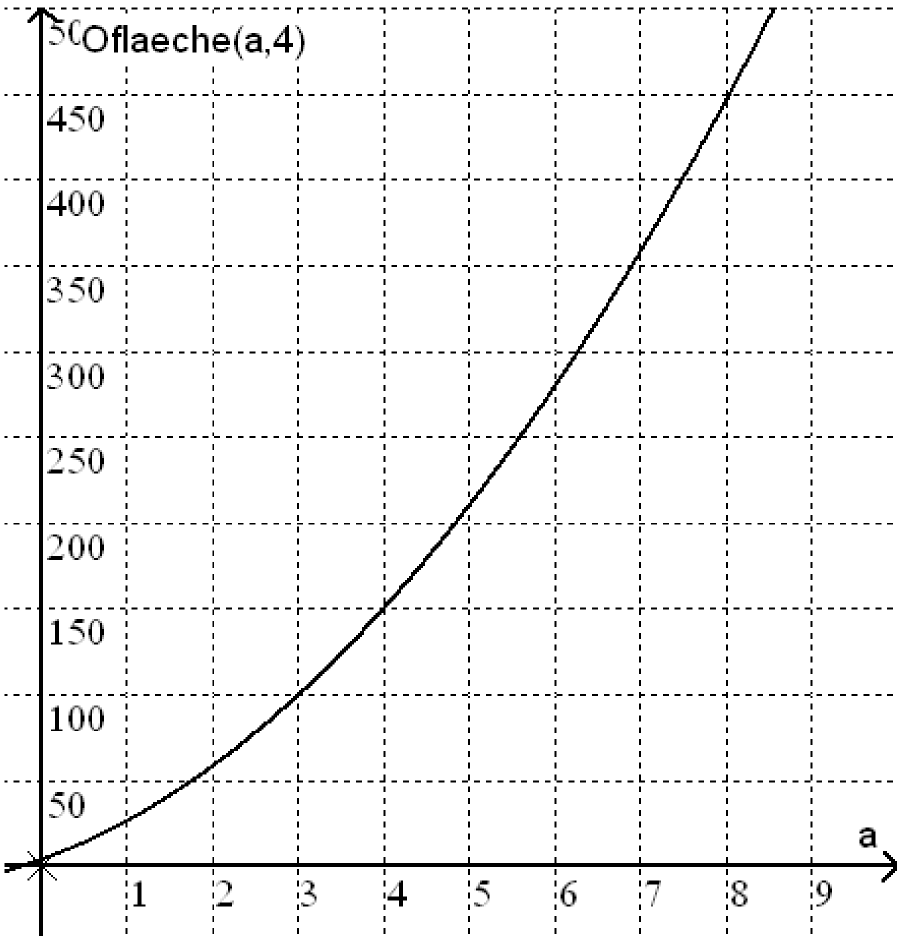
Glühlampen und deren Kartons gibt es in mehreren Größen. Rechts siehst du das Netz.



a) Stelle eine Funktion Oflaeche(a,h) für die benötigte Papiermenge auf. Vernachlässige dabei die Abschrägungen an den Laschen, d. h. berechne auch diese als Rechtecke.

b) Vervollständige die Tabelle.

a in cm	1	2	2,7	3,5	4	4,8	6
h in cm	3	3	3,7	4	5	5	7
Oflaeche(a,h) in cm^2							



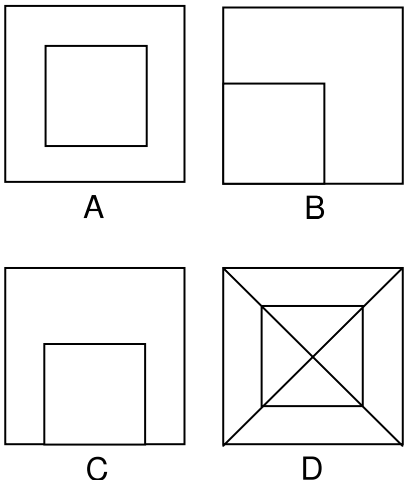
Der Graph gehört zu Oflaeche(a,4).

a) Erläutere die Bedeutung des Terms.
b) Welchen Oberflächeninhalt hat der Karton bei einer Kantenlänge von a = 8 cm?
c) Der Oberflächeninhalt soll weniger als 350 cm² betragen. Gib mögliche Kantenlängen an.

[1] Elemente der Mathematik 8, 3-507-87122-X, Schroedel

Klasse	3. Funktionale Zusammenhänge	Blatt: 3.3	Datum:

Aufgabe 3



Aus einem Quadrat der Seitenlänge a wird ein kleineres der Seitenlänge b herausgeschnitten. Für den Flächeninhalt der jeweiligen Restflächen wurden folgende Funktionen aufgestellt:

1: $\text{flaeche1}(a,b) = (a-b)\cdot a + (a-b)\cdot b$

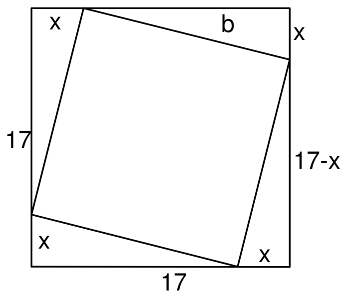
2: $\text{flaeche2}(a,b) = 4\cdot\left(\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a-b}{2}\right)$

3: $\text{flaeche3}(a,b) = a\cdot(a-b) + 2b\cdot\frac{a-b}{2}$

4: $\text{flaeche4}(a,b) = 2a\cdot\frac{a-b}{2} + 2b\cdot\frac{a-b}{2}$

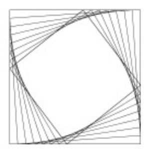
a) Ordne die Terme den nebenstehenden Figuren zu.
b) Die Seitenlänge a betrage 7 cm. Setze für b Werte ein und stelle deine Ergebnisse in einer Tabelle zusammen. Stelle die Werte der Tabelle auch graphisch dar.

Aufgabe 4



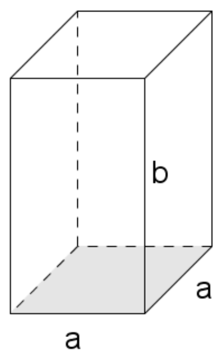
Seitenlänge x	Seitenlänge b	Flächeninhalt A
0	17	17^2
1	$17-1$	$17^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(17-1)$
2	$17-2$	$17^2 - 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(17-2)$
3		
…		
7,5		
…		
x		

a) Begründe, dass das innere Viereck immer ein Quadrat ist.
b) Erkläre die Terme in den Spalten.
c) Ergänze die Tabelle.
d) Zeichne den Graphen der Funktion A: Seitenlänge x → Flächeninhalt A(x).
e) Bei welcher Länge der Seite x hat das innere den kleinsten Flächeninhalt?



Aufgabe 5

Gegeben ist der nebenstehende Quader mit quadratischer Grundfläche.



a) Erstelle die beiden Funktionen V(a,b) und O(a,b) für das Volumen V und die Oberfläche O des Quaders.
b) Der Rechner liefert die folgenden Ergebnisse:

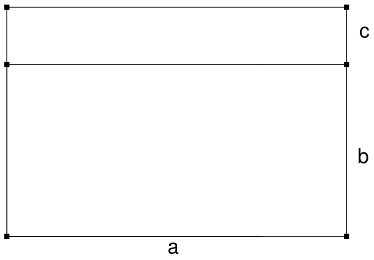
$$\frac{V(a,3b)}{V(a,b)} = 3\,,\quad V(a,3b) - V(a,b) = 2a^2\cdot b$$

Interpretiere diese beiden Rechnerausgaben.
c) Untersuche mit dem TC und begründe anschließend: Wie verändern sich das Volumen V und die Oberfläche O, wenn

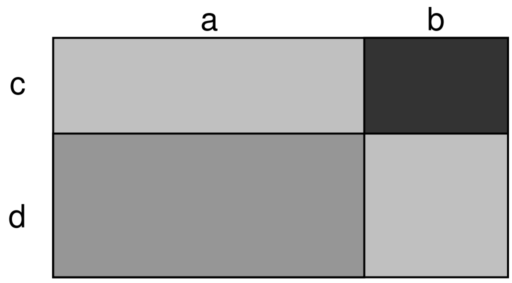
c1) nur a verdoppelt wird,
c2) nur b verdoppelt wird,
c3) a und b verdoppelt werden,
c4) a um 20 % verkürzt und b um 20 % vergrößert werden,
c5) a halbiert und b verdoppelt werden?

Wissensspeicher

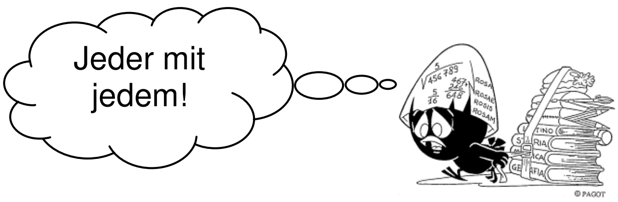
Multiplizieren von Summen



$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$



$$(a+b)\cdot(c+d) = ac + ad + bc + bd$$



Beim Ausmultiplizieren algebraischer Summen musst du jeden Summanden der einen Klammer mit jedem Summanden der anderen Klammer multiplizieren.

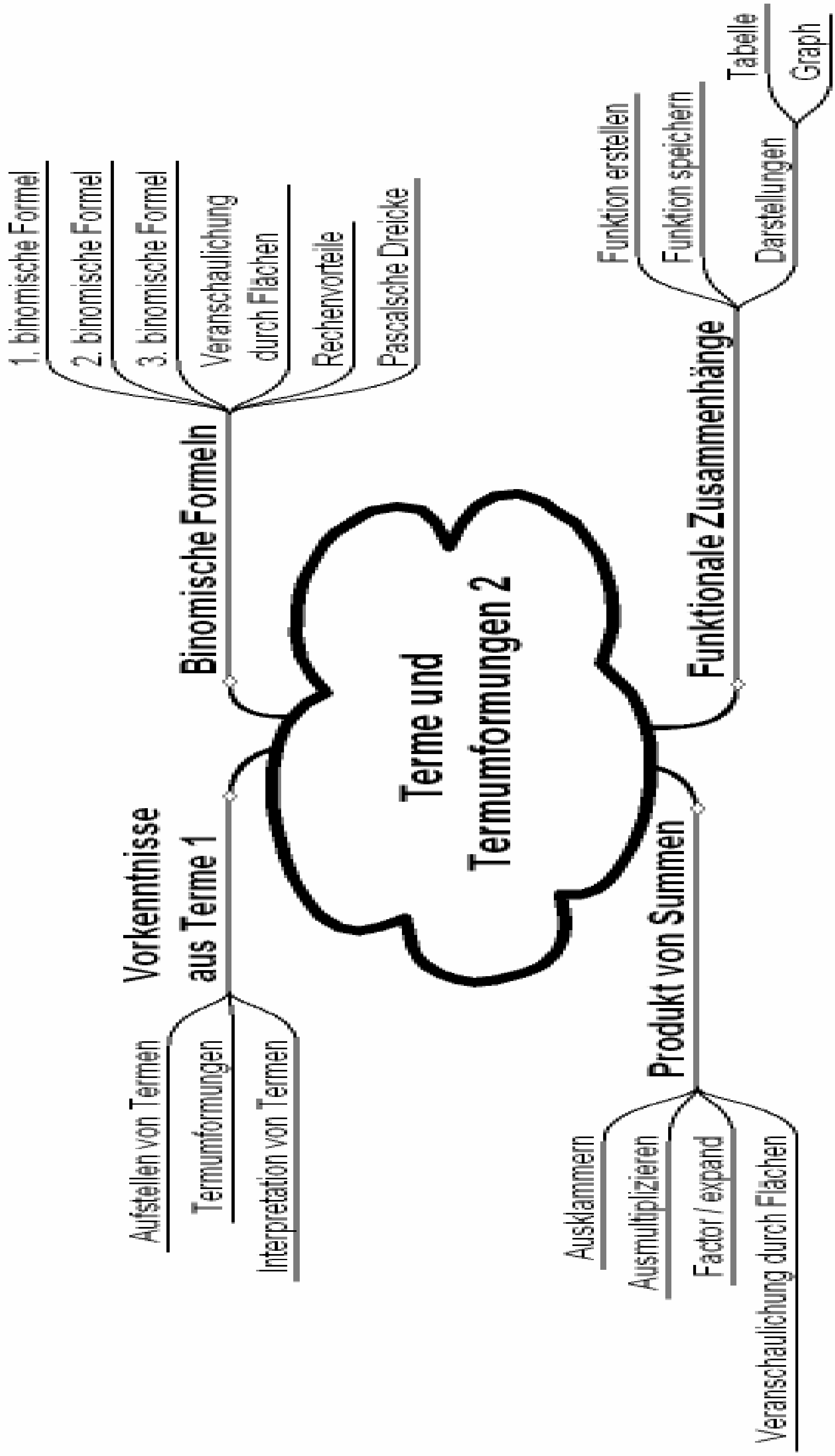
Von links nach rechts in der obigen Gleichung werden aus Produkten Summen. Mit dem Befehl expand kannst du diese Arbeit an den Taschencomputer weitergeben.
Von rechts nach links werden aus Summen Produkte. Der Befehl factor des Rechners faktorisiert die Summen für dich.

Binomische Formeln

Sind die zu multiplizierenden Summen gleich, so bekommt man einen berühmten Spezialfall:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	Erste binomische Formel
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	Zweite binomische Formel
$(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$	Dritte binomische Formel

Das kannst du jetzt:



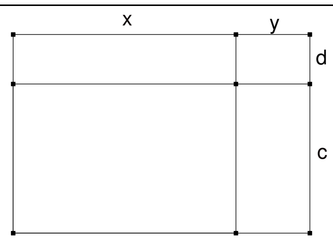
Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Terme und Termumformungen 2" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollst du bestimmte Fertigkeiten auch rechnerfrei erwerben und beherrschen. Diese Fertigkeiten wirst du in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachweisen müssen.
Du sollst:

1. Anhand von Kommutativ- und Assoziativgesetz die Möglichkeit zum Zusammenfassen in Termen erkennen. Dabei sollen die Terme nicht mehr als drei Summanden enthalten. Diese Summanden sollen wiederum aus nicht mehr als drei Faktoren bestehen (siehe Beispiele).
2. Das Distributivgesetz zum Ausmultiplizieren und Ausklammern benutzen. Dabei sollte sich die Komplexität an Beispiel 2 orientieren.
3. Zu einfachen zusammengesetzten Flächen verschiedene Terme aufstellen und deren Gleichwertigkeit auch algebraisch nachweisen.
4. Terme in ihrer Struktur erkennen, deuten und vergleichen (Termstrukturkompetenz).
5. Die binomischen Formeln zum Ausmultiplizieren und Faktorisieren benutzen. Dabei sollte sich die Komplexität an Beispiel 4 orientieren.

Beispiele:

1.	Fasse die folgenden Terme so weit wie möglich zusammen. a) $3 \cdot x + 2 - x$	 b) $y^2 + 3 \cdot x^2 - x \cdot 2x$
2.	Multipliziere aus: a) $2 \cdot (x - 1)$ c) $(x + 1) \cdot (y - 3)$ Klammere aus: a) $3 \cdot a - 9$	 b) $x \cdot (x + 1)$ d) $(a + b + 5) \cdot (x + 7)$ b) $a - b \cdot a$
3.	Gib zur Flächenberechnung zwei Terme an und weise ihre Gleichwertigkeit nach.	
4.	Multipliziere aus: a) $(x - 1)^2$ Verwandle in ein Produkt: a) $a^2 + 6 \cdot a + 9$	 b) $(y - 3)^2$ b) $4 \cdot x^2 - 24 \cdot x\,y + 9 \cdot y^2$

CAS – Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollst du am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Terme in den TC eingeben und die Ausgabe des TC nachvollziehen können (automatische Termumformung des TC).
2. Terme in den TC eingeben und das Distributivgesetz mithilfe der Befehle **expand** und **factor** anwenden. Dies erfordert ein verständiges Umgehen mit diesen beiden Befehlen.
3. Flächen- und Volumenformeln als Funktionen definieren und diese zur Berechnung nutzen. Damit wird schrittweise die Fertigkeit weiterentwickelt, Funktionen mithilfe eines Terms zu definieren und zu verwenden.

Beispiele:

	Eingabe	Ausgabe
1.	$4 \cdot a + 5 \cdot a$	$9 \cdot a$
	$-(-b - a)$	$a + b$
	$2 \cdot x - 5 \cdot (-2 \cdot x + 3 \cdot y) + 2 - y$	$12x - 16y + 2$ Bemerkung: Hier muss nicht der expand-Befehl zum Ausmultiplizieren verwendet werden.
2.	expand$(2 \cdot (x - 4))$	$2 \cdot x - 8$
	expand$((2 - x) \cdot (x - 4))$	$-x^2 + 6 \cdot x - 8$
	factor$(21 + 3 \cdot x)$	$3 \cdot (x + 7)$
	factor$(-x^2 + 6 \cdot x - 8)$	$(2 - x) \cdot (x - 4)$
3.	$2 \cdot x + 2 \cdot y \rightarrow A(x,y)$ $A(2,4)$ $A(m,5 \cdot m)$	Done 12 $12 \cdot m$

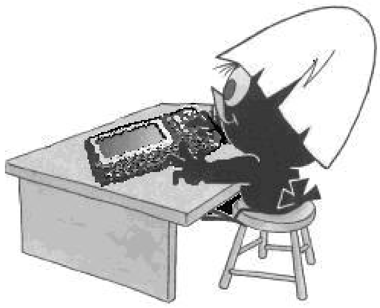
Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• einen Faktor mit einer Summe multiplizieren $-7 \cdot (2 \cdot x - 3) = -14 \cdot x + 21$			
• aus einer Summe gemeinsame Faktoren ausklammern $(15 \cdot x - 21 \cdot x \cdot y) = 3 \cdot x \cdot (5 - 7 \cdot y)$			
• die Gleichwertigkeit von Termen überprüfen $a \cdot b \cdot (3 \cdot x + 4)$ und $3 \cdot a \cdot b \cdot x + 5 \cdot b$			
• eine Summe mit einer Summe multiplizieren $(a - 5) \cdot (b + 3) = a \cdot b + 3 \cdot a - 5 \cdot b - 15$			
• zur Berechnung von Flächeninhalten Terme aufstellen			
• mit den Befehlen **expand** und **factor** umgehen			
• alle drei binomischen Formeln nennen			
• binomische Formeln „vorwärts und rückwärts“ anwenden $(3 \cdot x - 5 \cdot b)^2 \rightleftarrows 9 \cdot x^2 - 30 \cdot b \cdot x + 25 \cdot b^2$			
• binomische Formeln geometrisch darstellen und erläutern			
• unvollständige Terme zu binomischen Formeln ergänzen $x^2 + \quad x \cdot y + 9 \cdot y^2$			
• die binomischen Formeln erweitern (Pascalsches Dreieck)			
• zu einem Flächenproblem einen Funktionsterm erstellen $(a + x) \cdot (a - x)$ $\boxed{\text{STO}\blacktriangleright}$ flaeche(a,x)			
• zu einem gegebenen Funktionsterm das zugehörige Flächenproblem finden			
• zu einer Funktion mit einer Variablen eine Wertetabelle erstellen			

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



© PAGOT

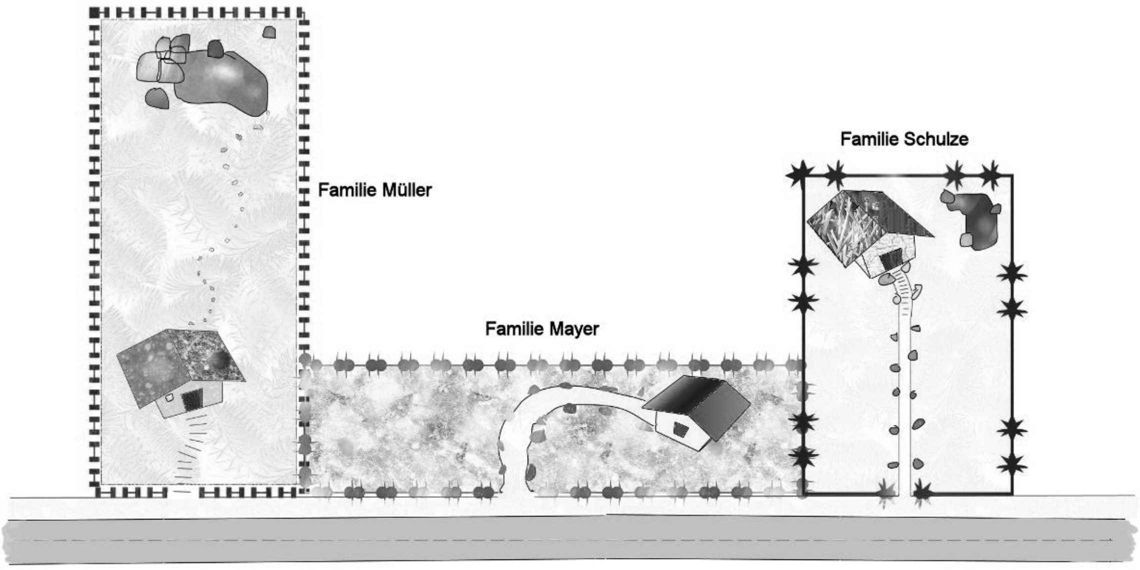
Reelle Zahlen

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Klasse	1. Einführung der Quadratwurzel	Blatt: 1.1	Datum:

Aufgabe 1

Jeder Grundstückseigentümer muss für die Straßenreinigung eine Gebühr bezahlen.
Die Grundstücke der Familien haben folgende Maße: Familie Müller 12,5 m x 50 m, Familie Mayer 34 m x 8,5 m und Familie Schulze 12,5 m x 32,72 m.



Häufig wird diese Gebühr nach der folgenden Gebührenordnung ermittelt.

Auszug aus der Gebührenordnung einer Stadt:

§1 Die Kosten für die Straßenreinigung werden wie folgt berechnet: Jedes Grundstück wird in ein quadratisches Grundstück verwandelt, wobei der Flächeninhalt gleich bleiben soll. Die Gebühren eines Grundstückes richten sich unabhängig von der Form ausschließlich nach der Seitenlänge eines gleich großen Quadrates.

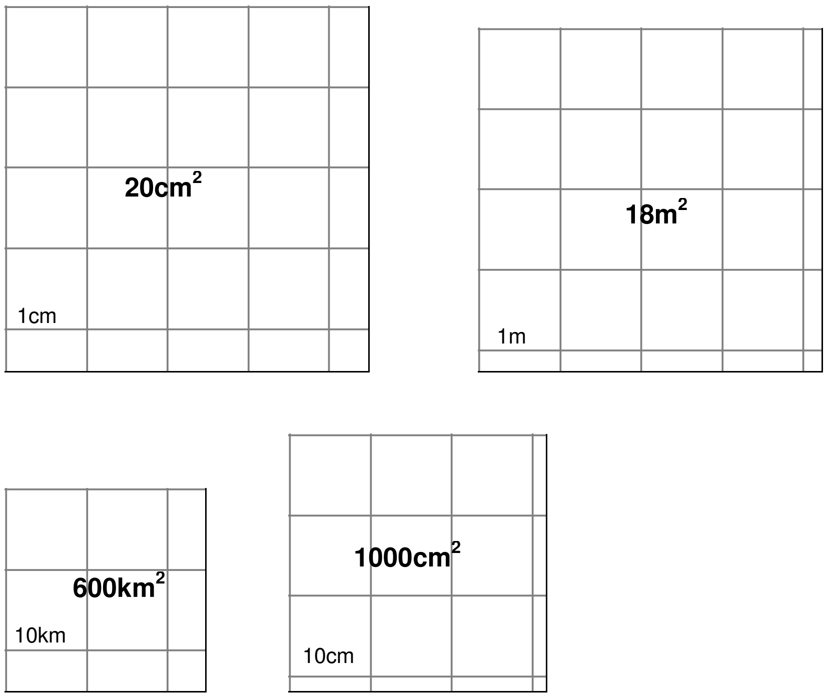
§2 Im Jahr 2007 sind pro Meter Quadratseite 32,75 € (einschließlich Mehrwertsteuer) zu entrichten.

Berechne für die einzelnen Familien die jährlichen Straßenreinigungsgebühren.

Klasse 8	1. Einführung der Quadratwurzel	Blatt: 1.2	Datum:

Aufgabe 2

Schätze die Seitenlänge des Quadrates mit dem angegebenen Flächeninhalt ab:



Aufgabe 3

Bestimme die Wurzeln. Einige kannst du exakt bestimmen, andere nur schätzen.

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{400}$ c) $\sqrt{1{,}69}$ d) $\sqrt{0{,}01}$ e) $\sqrt{0{,}9}$ f) $\sqrt{\frac{9}{144}}$

Aufgabe 4

Gib mit einer kurzen Begründung an, zwischen welchen aufeinander folgenden natürlichen Zahlen die Wurzeln liegen.
Bsp.: $4 < \sqrt{22} < 5$, denn $4^2 = 16$ und $5^2 = 25$.

a) $\sqrt{30}$ b) $\sqrt{72}$ c) $\sqrt{125}$ d) $\sqrt{450}$ e) $\sqrt{\frac{7}{18}}$

Klasse 8	2. Näherungsverfahren	Blatt: 2.1	Datum:

Aufgabe 1

Viele Quadratwurzeln kann man nicht einfach im Kopf berechnen, Rechner liefern jedoch sofort auf Knopfdruck Ergebnisse auch mit vielen Nachkommastellen. Hier lernt ihr, mit welchem Verfahren man solche Werte erhalten kann.

Im Comic ist der Anfang eines Verfahrens zur Berechnung von $\sqrt{6}$ beschrieben.

a) Veranschauliche den Inhalt der Sprechblasen durch passende Rechtecke.

b) Übertrage die obigen Seitenlängen in die gegebene Tabelle und setze diese um zwei Schritte fort.

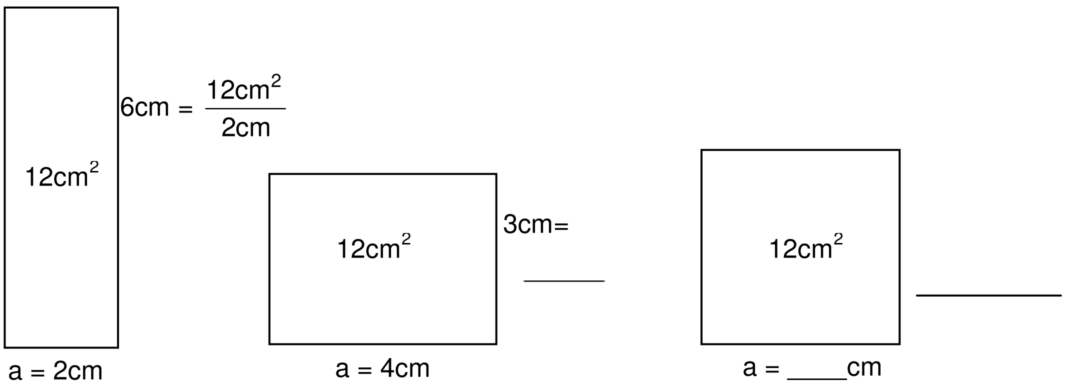
Seite a	Seite b	Flächeninhalt
2	3	6
…	…	6

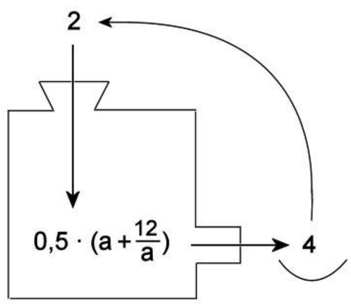
c) Überlege dir mit deinem Tischpartner, wie genau du $\sqrt{6}$ mit diesem Verfahren berechnen kannst und ob es einen exakten Wert für $\sqrt{6}$ gibt.

Klasse 8	2. Näherungsverfahren	Blatt: 2.2	Datum:

Aufgabe 2 **Heron-Verfahren**

Du hast gesehen, dass das auf Blatt 2.1 durchgeführte Verfahren schon nach wenigen Schritten eine gute Näherung für eine Wurzel liefert. Es trägt den Namen Heron-Verfahren und wird bei Taschenrechnern zur näherungsweisen Berechnung von Wurzeln verwendet. Hierzu ist aber eine Formel erforderlich, die du im Folgenden nachvollziehen und veranschaulichen sollst.

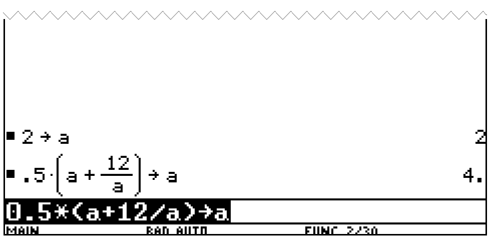




Rechne mit der „Iterationsmaschine" und protokolliere die Rechnungen:

Aufgabe 3

Rechts siehst du eine Durchführung des Heron-Verfahrens mit dem TC.
Gib die ersten zwei Zeilen in deinen TC ein und drücke anschließend immer nur ENTER.
Nach wie vielen Schritten ändert sich die Anzeige der Nachkommastellen nicht mehr?



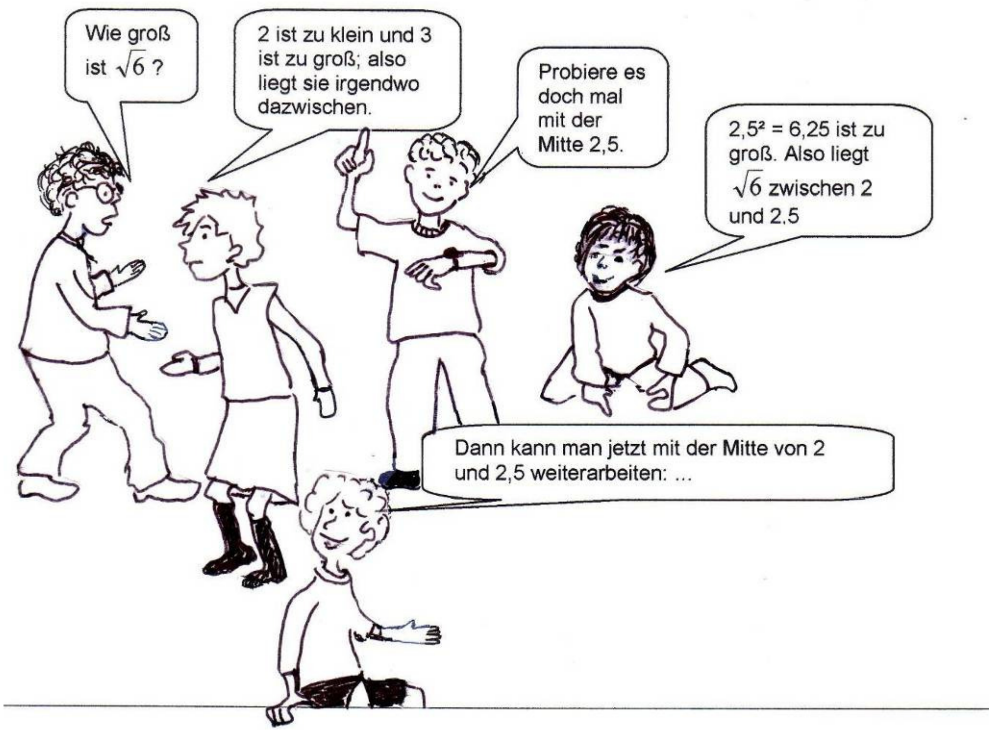
Aufgabe 4

a) Untersuche, wie sich andere Werte für a auf die Anzahl der Schritte zur Berechnung der Wurzel auswirken.

b) Berechne mit dem TC und dem Heron-Verfahren folgende Wurzeln: $\sqrt{15}, \sqrt{52}, \sqrt{2}, \sqrt{4}$

Klasse 8	2. Näherungsverfahren	Blatt: 2.3	Datum:

Aufgabe 1



In diesem Comic ist der Anfang eines anderen Verfahrens zur Berechnung von $\sqrt{6}$ beschrieben.

a) Übertrage die Zahlenfolge aus dem Comic in die gegebene Tabelle und setze diese um zwei Schritte fort.

$\sqrt{6}$ liegt zwischen … denn …		
Erster Wert	Zweiter Wert	Probe
2	3	$2^2 = 4$ und $3^2 = 9$
2	2,5	$2^2 = 4$ und $2{,}5^2 = 6{,}25$
…	…	…

b) Vergleiche dieses sogenannte Intervallhalbierungsverfahren mit dem Heron-Verfahren.

Aufgabe 2

Die Näherungsverfahren liefern Dezimalbrüche mit vielen Nachkommastellen als Näherungswerte für Wurzeln. Solche Dezimalbrüche können auch als Brüche geschrieben werden. Hier sollst du noch einmal wiederholen, welche Dezimalbrüche beim Umwandeln von Brüchen entstehen können. Dazu ist es nötig, die folgenden Aufgaben nicht mit dem Rechner, sondern schriftlich zu berechnen.

a) Wandle schriftlich $\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6};\ \frac{3}{7};\ \frac{4}{15};\ \frac{169}{20}\right)$ in eine Dezimalzahl um. Notiere die Unterschiede, die du bei den Dezimalzahlen beobachten kannst.

Zusatzaufgabe:

b) Beim schriftlichen Dividieren von zwei natürlichen Zahlen können unterschiedliche Reste auftreten. Wie viele verschiedene Reste können bei der Division durch 7 (13; n) höchstens auftreten?

Klasse 8	3. Irrationalität	Blatt: 3	Datum:

Aufgabe 1

Ein Beweis für „$\sqrt{2}$ *ist irrational*“ ist durcheinander geraten. Bringe die Teile wieder in die richtige Reihenfolge und erkläre die einzelnen Schritte.

$2 \cdot q^2 = p^2$

Annahme: $\sqrt{2}$ ist rational.

Jede natürliche Zahl kann als Produkt von Primzahlen geschrieben werden.

$2 = \frac{p^2}{q^2}$

Damit ist die Annahme „$\sqrt{2}$ *ist rational*“ nicht mehr haltbar, also ist $\sqrt{2}$ irrational.

In q^2 gibt es ebenfalls ein bestimmte Zahl von doppelt auftretenden Primzahlen.

$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

Aber in $2 \cdot q^2$ steht eine 2, die keinen Partner hat.

Wegen $p^2 = p \cdot p$ gibt es in p^2 eine bestimmte Zahl von doppelt auftretenden Primzahlen.

Primfaktorzerlegung:

$15 = 3 \cdot 5$
$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$
$15^2 = (3 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 5) = 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Es gilt:
Jede natürliche Zahl kann eindeutig in ein Produkt von Primzahlen zerlegt werden.

a) Benutze den Beweis als Modell für einen Beweis, dass $\sqrt{6}$ eine irrationale Zahl ist.
b) Begründe, an welcher Stelle dieser Beweis bei $\sqrt{4}$ versagt.

Aufgabe 2[1]

Kreuze an, welche Eigenschaft die jeweilige Zahl besitzt.

	Natürlich	ganz	rational	irrational	reell
$\frac{7}{5}$			X		X
2					
$\sqrt{2}$					
0,3333…					
- 8					
$\sqrt{\frac{36}{25}}$					
$-\sqrt{16}$					

Aufgabe 3

Ergänze die Aussagen durch die Worte „immer“, „manchmal“ oder „nie“.

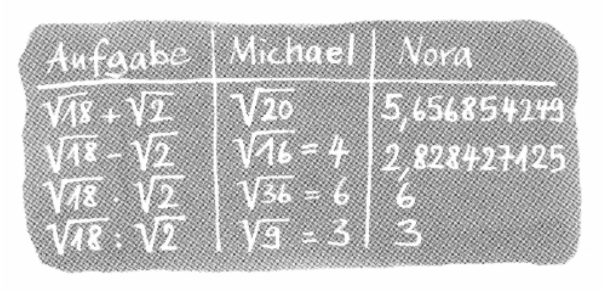
a) Eine reelle Zahl ist … eine rationale Zahl.
b) Eine irrationale Zahl ist … eine reelle Zahl.
c) Die Wurzel aus einer Zahl ist … eine irrationale Zahl.

[1] NW 8, S. 116, 978-3-507-85504-5

Klasse 8	4. Rechnen mit Quadratwurzeln	Blatt: 4	Datum:

Aufgabe 1[1]

Michael und Nora haben versucht, mit Wurzeln zu rechnen. Dabei ist das nebenstehende Tafelbild entstanden.
Arbeite mit einem Partner zusammen.



a) Beurteilt die Richtigkeit der Ergebnisse. Begründet eure Meinung.
b) Erfindet selbst ähnliche Aufgaben und löst diese.
c) Erarbeitet Regeln, die für das Rechnen mit Wurzeln gelten könnten.

Aufgabe 2

Berechne im Kopf.

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}$ b) $\sqrt{75}:\sqrt{3}$ c) $\sqrt{\frac{9}{16}}$ d) $\sqrt{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{48}$ e) $\sqrt{0{,}144}\cdot\sqrt{10}$

Aufgabe 3

Vereinfache unter Anwendung der Wurzelgesetze.

a) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$ b) $\sqrt{5z}\cdot\sqrt{20z}$ c) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab^2}$ d) $\sqrt{x^2y}:\sqrt{y}$ e) $\frac{\sqrt{x^3y^2}}{\sqrt{x}}$

Aufgabe 4

Berechne mithilfe des TC. Begründe, wie das Ergebnis zustande gekommen sein könnte. Schreibe dazu Zwischenschritte auf.

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt{18}+\sqrt{2}$

c) $\sqrt{18}\ -\sqrt{2}$ d) $\sqrt{a^2\cdot b}$

Aufgabe 5

Vereinfache.

a) $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ b) $\sqrt{12}-\sqrt{3}$ c) $\sqrt{18}-3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{49x}+\sqrt{36x}$

e) $\sqrt{2}-\sqrt{18}+\sqrt{50}$ f) $\sqrt{121a}-\sqrt{9b}+\sqrt{49b}-\sqrt{25a}$

Aufgabe 6

Berechne mithilfe des TC. Begründe, wie das Ergebnis zustande gekommen sein könnte. Schreibe dazu Zwischenschritte auf.

a) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ b) $\sqrt{6}:\sqrt{2}$ c) $10:\sqrt{5}$ d) $\frac{1}{3\sqrt{6}}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{10}}$

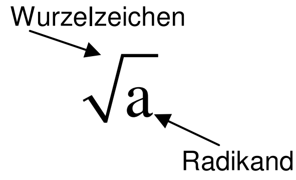
[1] EdM 8, S. 104, 978-3-507-87208-0

Wissensspeicher

Quadratwurzel

Unter einer **Quadratwurzel** aus a (kurz: **Wurzel** aus a) versteht man diejenige nichtnegative Zahl, die mit sich selbst multipliziert die Zahl a ergibt.

Schreibweise: $\sqrt{a}$.



Die Zahl unter dem Wurzelzeichen heißt **Radikand.**

Das Bestimmen der Quadratwurzel heißt **Wurzelziehen** (**Radizieren**).

Beachte: Die Quadratwurzel einer Zahl ungleich Null ist immer positiv.

$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a;\ a \geq 0$

$\left(\sqrt{5}\right)^2 = 5$

Beispiele:

$\sqrt{144} = 12$, denn $12^2 = 144$ und $12 \geq 0$

$\sqrt{0{,}04} = 0{,}2$, denn $0{,}2^2 = 0{,}04$ und $0{,}2 \geq 0$

$\sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$, denn $\left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$ und $\frac{3}{5} \geq 0$

$\sqrt{0} = 0$, denn $0^2 = 0$ und $0 \geq 0$

Das Heron-Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$.

Beispiel: $\sqrt{8}$

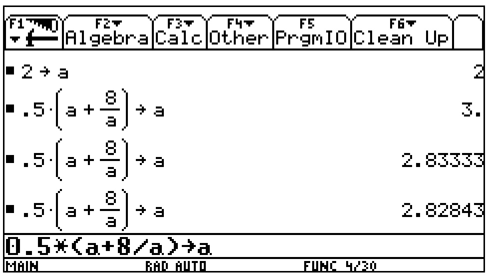
Breite x	Länge $\frac{8}{x}$	Mittelwert
2	4	3
3	2,66667	2,83333
2,83333	2,82353	2,82843
2,82843	2,82842	2,82843
2,82842	2,82843	2,82843

Geometrische Darstellung des Heron-Verfahrens:

1. Starte mit einem Rechteck mit dem Flächeninhalt A = 8 (FE), z. B. mit der Breite 2 (LE) und Länge 4 (LE).
2. Verwandle das Rechteck in ein flächengleiches Rechteck. Neue Breite: Mittelwert aus „alter“ Breite und Länge. Neue Länge: Flächeninhalt dividiert durch neue Breite
3. Verwandle dieses Rechteck erneut in ein flächengleiches Rechteck wie in 2.

   usw.

Die Zahlen in der Tabelle sind gerundet. Es wurde aber mit der maximalen Rechnergenauigkeit weiter gerechnet.



Eine Möglichkeit, mit dem Voyage 200 das Heron-Verfahren geschickt umzusetzen.

Intervallhalbierungsverfahren

Das Intervallhalbierungsverfahren ist ein weiteres Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von $\sqrt{a}$.
Beispiel: $\sqrt{8}$

linke Intervallgrenze x	rechte Intervallgrenze y	Mittelwert aus x und y	Wo liegt $\sqrt{8}$?
2	3	2,5	$2{,}5^2 = 6{,}25 < 8$
2,5	3	2,75	$2{,}75^2 = 7{,}5625 < 8$
2,75	3	2,875	$2{,}875^2 \approx 8{,}27 > 8$
2,75	2,875	2,8125	$2{,}8125^2 \approx 7{,}91 < 8$
2,8125	2,875	2,84375	$2{,}84375^2 \approx 8{,}09 > 8$

Man benötigt im Vergleich zum Heron-Verfahren viel mehr Iterationsschritte für eine Genauigkeit von z. B. vier Dezimalstellen.

Reelle Zahlen

– **Rationale Zahlen**

sind Zahlen, die sich mit Brüchen angeben lassen. Gibt man sie als Dezimalbrüche an, so sind sie abbrechend oder periodisch.

$0{,}5 \;;\; 3 \;;\; -7 \;;\; \frac{4}{9} \;;\; 0{,}\overline{7} \;;\; 0{,}12\overline{45}$

– **Irrationale Zahlen**

lassen sich nicht als Bruch darstellen. Als Dezimalbruch geschrieben sind sie nicht abbrechend und auch nicht periodisch.

$\sqrt{2} \;;\; \sqrt{13} \;;\; 4+\sqrt{6} \;;\; 0{,}101001000100001\ldots$

Wurzelgesetze

Summen und Wurzeln

$2\sqrt{8}+3\sqrt{8}=(2+3)\sqrt{8}=5\sqrt{8}$

Für $x \geq 0$ gilt das Distributivgesetz:
$a\sqrt{x}+b\sqrt{x}=(a+b)\sqrt{x}$

Produkte und Wurzeln

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 12}=\sqrt{36}=6$

Für $x \geq 0$ und $y \geq 0$ gilt:
$\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}=\sqrt{x\cdot y}$

Quotienten und Wurzeln

$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}=\sqrt{\frac{24}{6}}=\sqrt{4}=2$

Für $x \geq 0$ und $y > 0$ gilt:
$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x}{y}}$

Teilweises Wurzelziehen

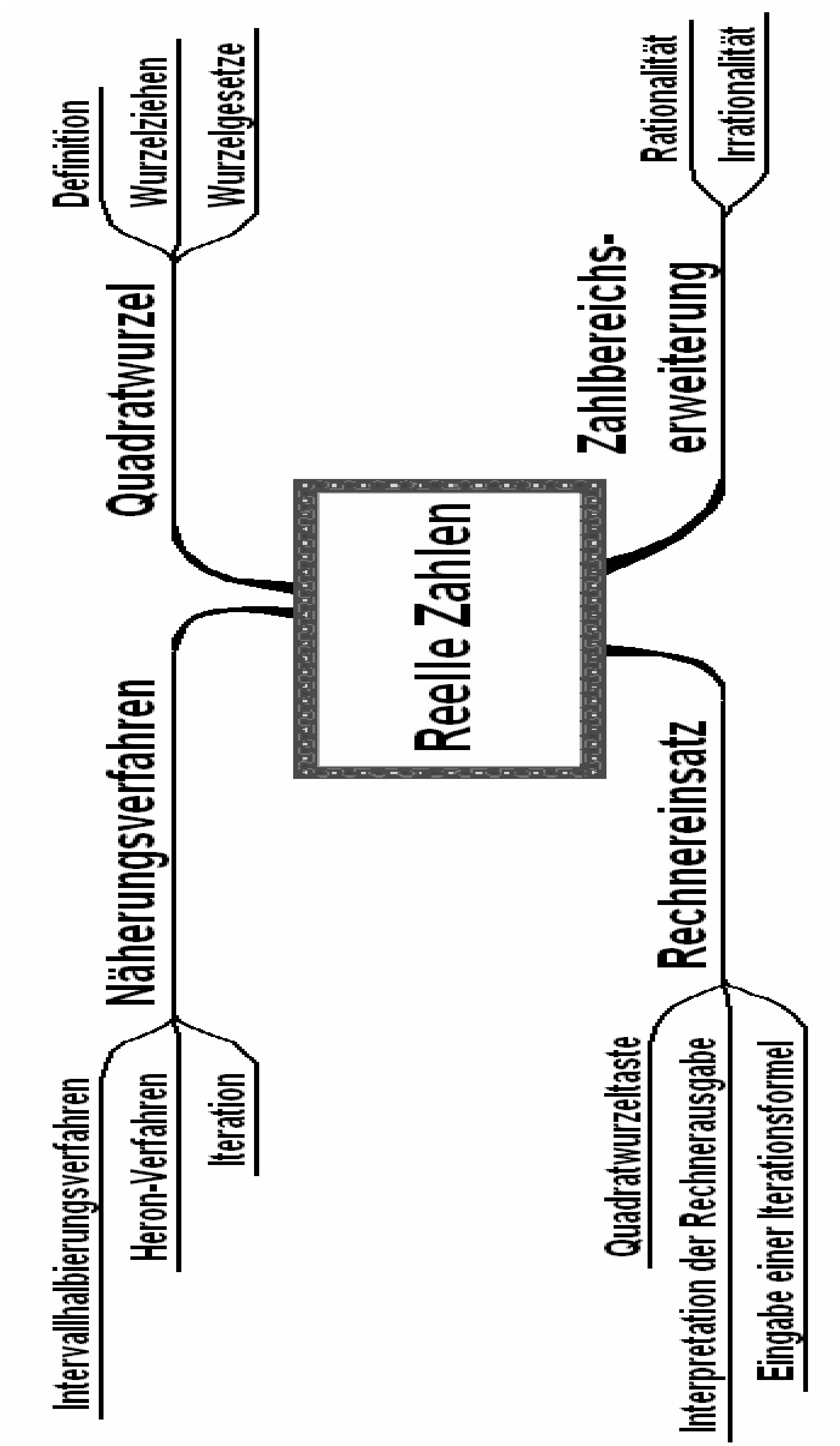
$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

Für $x \geq 0$ gilt:
$\sqrt{16\cdot x}=4\cdot\sqrt{x}$

Rationalmachen des Nenners

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}}{3}$

Das kannst du jetzt:



Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Reelle Zahlen" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollst du bestimmte Fertigkeiten auch rechnerfrei erwerben und beherrschen. Diese Fertigkeiten wirst du in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachweisen müssen.
Du sollst:

1. Berechnen von Wurzeln einfacher Quadratzahlen im Kopf, z. B. $\sqrt{81}$; $\sqrt{\frac{1}{4}}$; $\sqrt{0{,}01}$.
2. Abschätzen von Wurzeln, z. B. $\sqrt{13}$ liegt zwischen 3 und 4, da $3^2 < 13 < 4^2$.
3. Anwenden des Zusammenhangs zwischen Quadrieren und Wurzelziehen, z. B. $\sqrt{3^2}$; $\sqrt{(-1)^2}$.
4. Vereinfachen einfacher Wurzelterme mithilfe der Regeln für Produkt und Quotient, z. B. $\sqrt{3b}$; $\sqrt{12b}$; $\frac{\sqrt{20\,xy^3}}{\sqrt{5\,xy}}$.

CAS - Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollst du am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Berechnen von Quadratwurzeln.
2. Bestimmen von Näherungswerten für Quadratwurzeln mit dem Intervallhalbierungs- und dem Heron-Verfahren.

Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• von einem Quadrat bei gegebenem Flächeninhalt die Seitenlänge abschätzen $A = 300 \text{ cm}^2$, dann ist $17 \text{ cm} < a < 18 \text{ cm}$			
• ein Rechteck schrittweise in ein Quadrat mit gleichem Flächeninhalt umwandeln			
• Wurzeln mit einem Näherungsverfahren berechnen und in einer Tabelle darstellen (Heron- oder Intervallhalbierungsverfahren)			
• Wurzeln mit dem TC berechnen			
• über eine Endziffernbetrachtung begründen, dass bestimmte Wurzeln wie z. B. $\sqrt{2}$ irrationale Zahlen sind			
• Beispiele für irrationale und rationale Zahlen angeben sowie begründen			
• erklären, was ein Widerspruchsbeweis ist			
• Wurzelterme mithilfe der Wurzelgesetze vereinfachen			
• Umformungen von Wurzeltermen mithilfe der Wurzelgesetze begründen			

Calimero

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

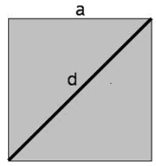
Satz von Pythagoras

Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler

Klasse	1. Erarbeitung	Blatt: 1.1	Datum:

Aufgabe 1

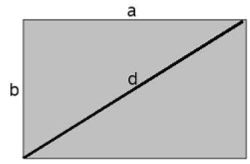
Ein Quadrat hat die Kantenlänge a = 5 cm.
Wie lang ist die Diagonale?



a = 5 cm

Aufgabe 2

Ein Rechteck hat die Kantenlängen a = 5 cm und b = 3 cm.
Wie lang ist die Diagonale?

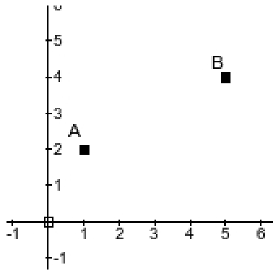


a = 5 cm, b = 3 cm

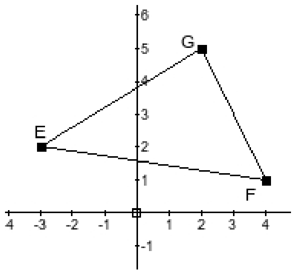
Aufgabe 3

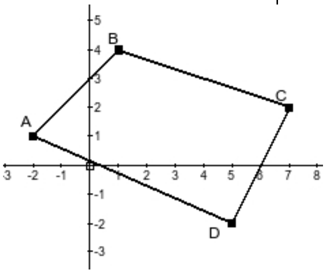
In der Antike beschäftigte man sich u. a. mit der Frage, wie man bestimmte Objekte „addieren“ könnte, so z. B. bei Quadraten.
Unten sind zwei gleich große Quadrate gegeben.
Ist die Seitenlänge a LE, dann ist der Flächeninhalt a^2 FE.
Bilde aus diesen beiden Quadraten ein neues Quadrat.
Welche Seitenlänge muss dann dieses Quadrat haben?

Aufgabe 4



a) Berechne jeweils die Abstände der Punkte A und B vom Ursprung.
b) Berechne den Abstand der Punkte A und B.
c) Betrachte die beiden Abbildungen unten und berechne hier die Längen der Seiten des Dreiecks EFG und des Vierecks ABCD.
A (- 2 | 1); B (1 | 4); C (7 | 2); D (5 | - 2) E (- 3 | 2); F (4 | 1); G (2 | 5)





d) Stelle eine Formel auf, mit der man den Abstand zweier beliebiger Punkte A (x_A | y_A) und B (x_B | y_B) berechnen kann. Der Abstand hängt dann von den vier Koordinaten der Punkte ab.
Erstelle das Makro „abstand (x_A,y_A,x_B,y_B)“ und überprüfe es mit den Daten aus c).

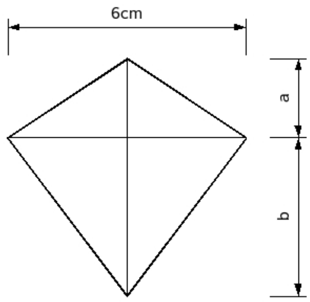
Klasse	1. Erarbeitung	Blatt: 1.2	Datum:

Aufgabe 5

a) Berechne den Abstand der folgenden Punkte vom Ursprung des Koordinatensystems. Die Längeneinheit ist 1 cm: P (2 | 3), Q (- 3 | 2), R (4 | - 1), S (- 2 | - 3).
b) Drei der vorgenannten Punkte liegen gleich weit vom Ursprung entfernt. Nenne die Koordinaten von mindestens zwei weiteren Punkten, die ebenso weit entfernt vom Ursprung liegen. Nenne auch einen Punkt, der dieselbe Entfernung zum Ursprung aufweist wie R.

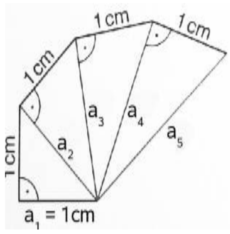
Aufgabe 6

a) Berechne den Umfang und den Flächeninhalt des abgebildeten Drachenvierecks. Dabei seien a = 2 cm und b = 4 cm.
b) Prüfe, ob sich der Umfang ändert, wenn a = 0 cm und b = 6 cm ist.
Und wie steht es mit dem Flächeninhalt des geänderten Drachens?



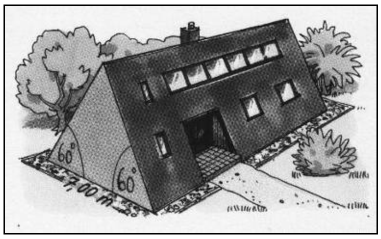
Aufgabe 7

a) Berechne die Längen der Strecken a_1, a_2, a_3, a_4 und a_5.
b) Schreibe die Längen der Strecken in Form von Wurzeln. Was fällt auf?
Nenne die Länge der Strecke a_{16} ohne zu rechnen.
Wie lautet die Berechungsformel für die n-te Länge a_n?



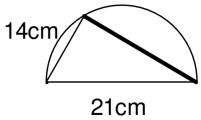
Aufgabe 8[1]

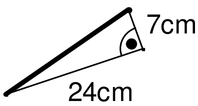
In einer Feriensiedlung werden "Nurdachhäuser" errichtet.
Wie hoch ist ein Haus?
Wie groß die Giebelfläche?
Die Basislänge beträgt 7 m.

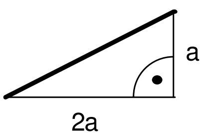


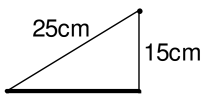
Aufgabe 9

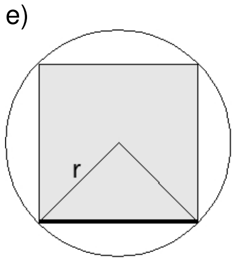
Berechne die Länge der dick eingezeichneten Strecken.

a)


b)


c)


d)


e)


[1] EdM 9, S.137, 3-507-87123-8

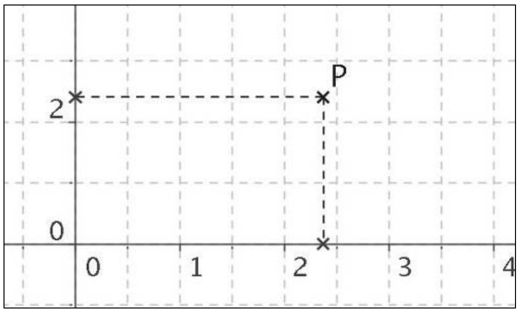
Klasse	1. Erarbeitung	Blatt: 1.3	Datum:

Aufgabe 10

Der Ort eines Punktes P (x | y) in einem Achsenkreuz ist durch seine Koordinaten x und y bestimmt. Wenn man die Werte für x und y nicht festlegt, dann kann P „irgendwo“ liegen. Wenn man genaue Werte angibt, dann liegt der Punkt an genau einem bestimmten Ort.

a) Wenn man fordert, dass immer $y - x = 0$ sein soll, dann liegt der Punkt auf einer Geraden durch den Ursprung. Beschreibe diese Kurve genauer!

b) Wie sehen die Ortslinien zu $x + y = 0$ und $x^2 + y^2 = r^2$ aus?
Wie ändert sich die Ortslinie, wenn man den Wert von r in $x^2 + y^2 = r^2$ verändert?
Betrachte insbesondere auch $r < 0$.
Erkläre deine Beobachtungen mithilfe des Satzes von Pythagoras.



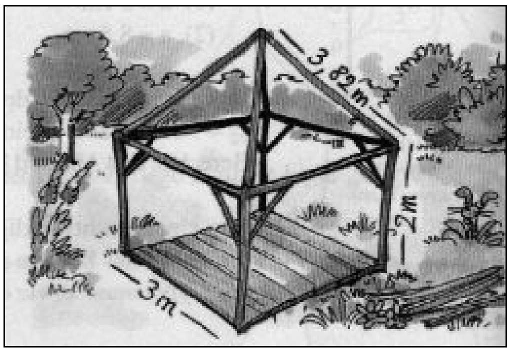
Aufgabe 11[1]

Für diese Aufgabe brauchst du Anschauungsmaterial. Zum Beispiel Plastikmodelle eines Quaders und einer Pyramide. Dein Lehrer hält sie für dich bereit.
Es kann schon mal passieren, dass der Strohhalm in die Getränkepackung hineinrutscht.

- Woran liegt das?
- Wie lang sollte der Halm mindestens sein, damit er nicht hineinrutscht? Betrachte ggf. einen Plastikquader.
- Überlege, warum der mitgelieferte Strohhalm nicht länger ist.

Aufgabe 12[2]

Kuno baut sich einen Gartenpavillon. Einen Plan hat er sich gemacht und die Balken schon zurechtgeschnitten (siehe Abbildung). Jetzt befürchtet er, dass der Pavillon höher als die umliegenden Bäume wird, die etwa 5 m hoch sind. Das gefällt ihm nicht und er überlegt, die Balken zu kürzen. Ist das notwendig?

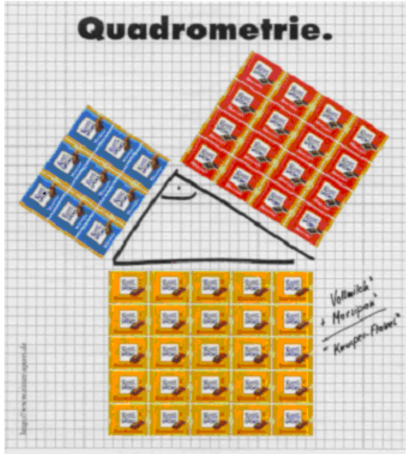


[1] NW 9, S.172, 3-507-85459-7
[2] EdM 9, S.146, 3-507-87123-8

Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.1	Datum:

Wochenplanarbeit

Zeitraum: 3 Unterrichtsstunden plus Hausaufgabenzeit (3 x 30 Minuten)
Inhaltliche Ziele: Du sollst in flächigen und räumlichen Figuren unbekannte Längen berechnen, indem du geeignete rechtwinklige Dreiecke als Teil der gegebenen Figuren findest. Dazu sind anschauliche Skizzen eine wichtige Hilfe.
Du sollst den Rechner einsetzen, um Berechnungen zu vereinfachen, Zeichnungen anzufertigen und Zuordnungen mithilfe des Satzes des Pythagoras grafisch darzustellen.
Lösungen zu allen Aufgaben liegen am Lehrertisch aus.
Kontrolle: Die Blätter „Aufgabensammlung“, „Wochenplanarbeit“ und „Lernlogbuch“ legst du zu deiner Aufgabenbearbeitung ins Heft. Das Heft wird am Ende auf Übersichtlichkeit und Vollständigkeit kontrolliert.



Pflichtaufgaben		
Typ	Aufgabe / Thema	erledigt am
☺ 20 Min	Längen 1a: I oder II und III oder IV	
☺ 15 Min	Sport 1	
☺ ☺ 20 Min	Flächen 1a: Figuren I oder II und Figur III	
☺ 15 Min	Körper 2a	
☺ ☺ 15 Min	Körper 3	
☺ ☺ 20 Min	Rechner & Koordinaten 1a und 1b	
☺ 15 Min	Rechner & Koordinaten 2a	
Wahlaufgaben (mindestens drei aus verschiedenen Bereichen)		
Typ	Aufgabe / Thema	erledigt am
☺ 20 Min	Längen 1b	
☺ ☺ 20 Min	Längen 2	
☺ ☺ ☺ 20 Min	Flächen 1b	
☺ ☺ 20 Min	Flächen 2a	
☺ ☺ 15 Min	Körper 1	
☺ ☺ 20 Min	Körper 2b	
☺ 10 Min	Körper 4	
☺ ☺ ☺ 20 Min	Rechner & Koordinaten 2c	
☺ 15 Min	Rechner & Koordinaten 2b	
☺ ☺ 20 Min	Rechner & Koordinaten 3	
Zusatzaufgaben (freiwillig)		
Typ	Aufgabe / Thema	erledigt am
☺ 20 Min	Sport 2	
☺ ☺ 20 Min	Längen 3	
☺ ☺ ☺ 20 Min	Flächen 1c	
☺ 20 Min	Flächen 2b	
☺ ☺ ☺ 15 Min	Körper 5	
☺ ☺ ☺ 30 Min	Rechner & Koordinaten 4	
☺ ☺ 20 Min	Weitblick 1	
☺ ☺ 20 Min	Weitblick 2	

Erläuterungen zu „Typ“:
Aufgabentyp (☺ = Basisaufgabe; ☺ ☺ = Erweiterungsniveau ☺ ☺ ☺ = anspruchsvolle Aufgabe) und ungefähre Zeitvorgabe

Name: ______________________________ Deine Unterschrift: ______________________________

Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.2	Datum:

Lernlogbuch

Datum, Ort (S/H), Dauer von - bis	was gemacht	mit wem	wie ist´s gelaufen / wie hat´s geklappt	
			Symbol + / O / -	kurze Begründung
Name:				

Erläuterungen zur Spalte „Datum, Ort (S/H), Dauer“:
S = Arbeit im Unterricht, H = Arbeit als Hausaufgabe; Dauer von - bis: genaue Uhrzeit angeben

Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.3	Datum:

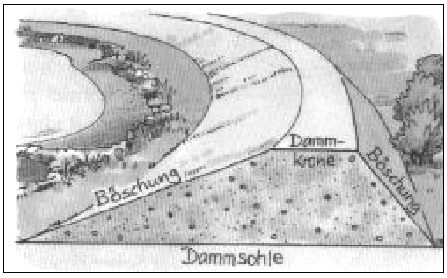
Aufgabensammlung „Längen“

Aufgabe 1[1]

a) In einem rechtwinkligen Dreieck sind jeweils zwei Angaben bekannt.
Berechne die Unbekannten.

	I)	II)	III)	IV)
Kathete a	5 cm		7 cm	
Kathete b	12 cm	3,6 cm		
Hypotenuse c		3,9 cm		13 cm
Flächeninhalt A			84 cm^2	30 cm^2

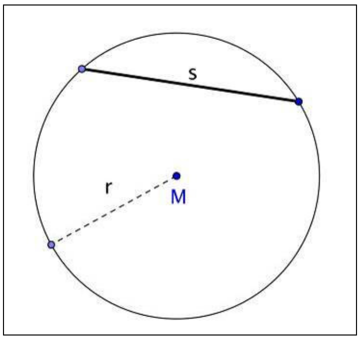
b) Das Bild zeigt den Querschnitt eines 3 m hohen Schutzwalls an einem Fluss. Die Böschungen sind 4 m und 8,5 m lang und die Dammkrone 2,6 m. Berechne die Breite der Dammsohle.



Aufgabe 2

a) Welchen Abstand hat die Sehne s vom Mittelpunkt des Kreises?
b) Welche Länge hat eine Sehne, die den Abstand a vom Mittelpunkt hat?
c) Wie groß ist der Kreisradius, wenn eine Sehne der Länge s den Abstand a vom Mittelpunkt hat?

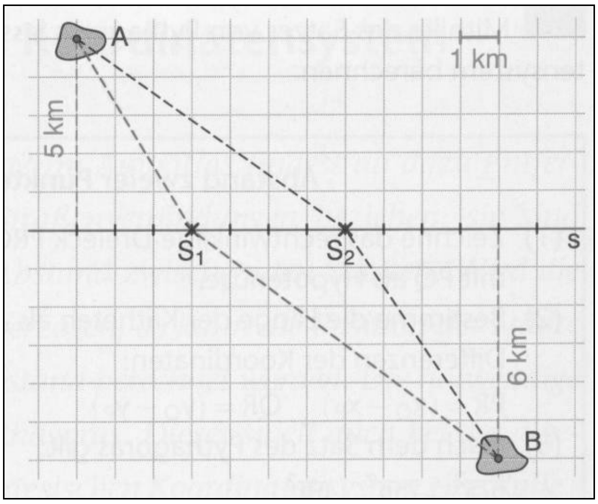
Tipp: Mach dir zu b) und c) unbedingt eine Skizze von der Situation!



Aufgabe 3[1]

Die Orte A und B sollen einen gemeinsamen Anschluss an die Schnellstraße s erhalten. Die Zufahrtsstraßen können geradlinig gebaut werden. Zur Diskussion stehen die beiden Anschlussstellen S_1 und S_2.

a) Berechne für beide Fälle die Gesamtlänge der Zufahrtsstraßen. Vergleiche.
b) Gibt es eine andere Anschlussstelle, für die die Gesamtlänge möglichst klein ist? Vergleiche diese minimale Länge mit den in a) berechneten Längen.



Tipp: Wenn du bei b) für die Gesamtlänge eine Formel für den Rechner findest, kommst du mit einer Grafik oder der Wertetabelle schneller und genauer zum Ziel!

[1] EdM 9, 3-507-87123-8

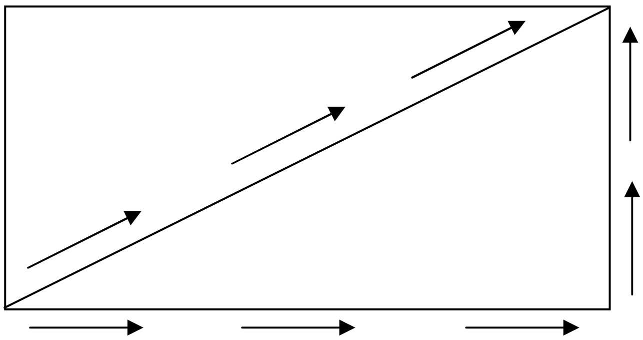
Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.4	Datum:

Aufgabensammlung „Sport“

Aufgabe 1

Ein rechteckiger Sportplatz ist 100 m lang und 50 m breit.
Mathus startet direkt zur gegenüberliegenden Ecke. Mathine läuft an der Außenlinie entlang.

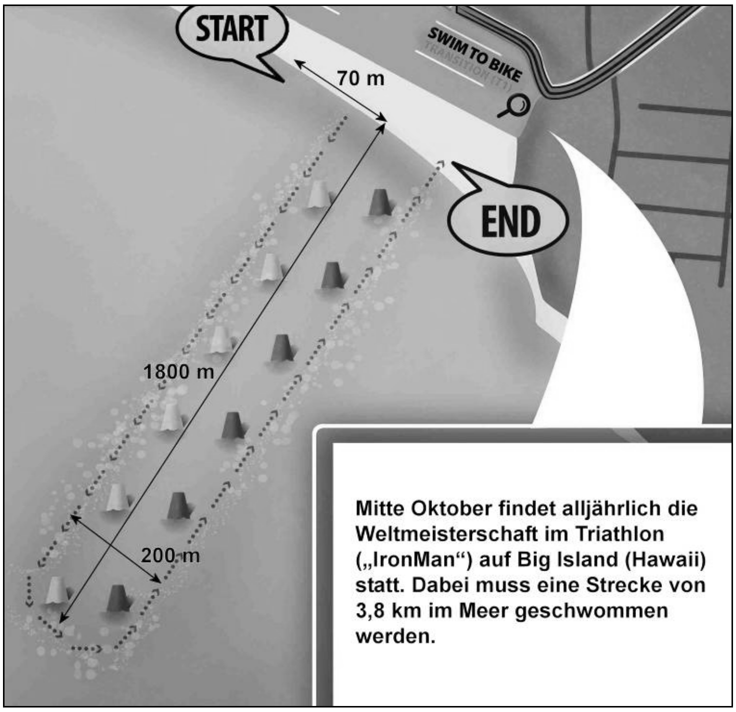
a) Wie viel Prozent des Weges spart Mathus?
b) Wo begegnen sie sich, wenn Mathus Mathine entgegenläuft?



Aufgabe 2

Die Teilnehmer starten gleichzeitig von der 70 m langen Startlinie in der Bucht (häufig über Tausend Menschen). Nachdem sie die beiden Wendebojen passiert haben, gehen sie im Ziel wieder an Land.

a) Wie lang ist die Schwimmstrecke auf der Ideallinie? Zeichne vier alternative Strecken und berechne deren Länge.
b) Welche Strecke legt ein Schwimmer zusätzlich zurück, der links außen startet, zunächst 1500 m geradeaus schwimmt und dann Kurs auf die erste Wendeboje nimmt?

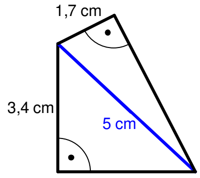


Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.5	Datum:

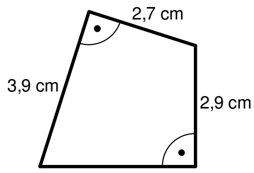
Aufgabensammlung „Flächen“

Aufgabe 1[1]

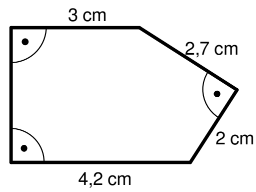
a) Berechne jeweils den Umfang und den Flächeninhalt.



I

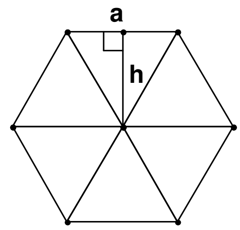


II

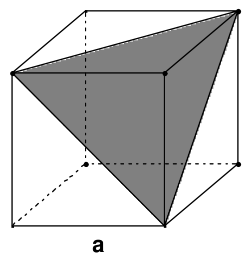


III

b) Bestimme im gleichseitigen Sechseck die Höhe **h** in Abhängigkeit der Kante **a**.
Wie lautet die Formel für die Kante **a** in Abhängigkeit der Höhe **h**?
Bestimme den Flächeninhalt des Sechsecks.

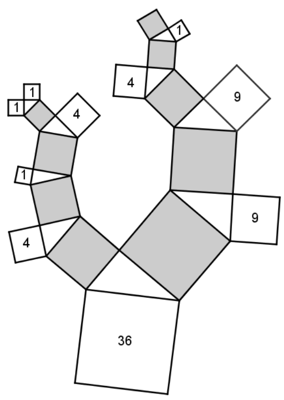


c) Bestimme den Flächeninhalt des im Würfel aufgespannten Dreiecks. (Allgemeine Lösung)

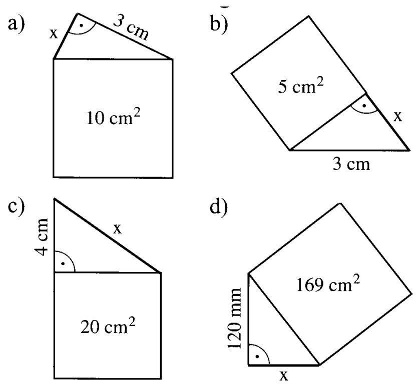


Aufgabe 2

a) Für manche Quadrate ist der Flächeninhalt angegeben.
Bestimme die Flächeninhalte der restlichen Quadrate.



b) Berechne jeweils die Länge x.



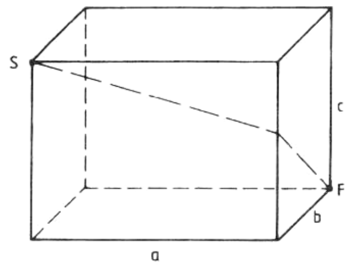
[1] EdM 9, 3-507-87123-8

Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.6	Datum:

Aufgabensammlung „Körper“

Aufgabe 1

Gegeben sei ein quaderförmiger Körper mit a = 20 cm, b = 10 cm und c = 15 cm. Auf dem Eckpunkt S sitzt eine Spinne, auf F eine Fliege. Die Spinne will auf kürzestem Weg – auf den Begrenzungsflächen des Körpers laufend – zur Fliege gelangen.

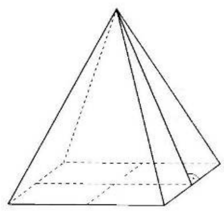


Aufgabe 2[1]

a) Der Louvre in Paris ist ein weltberühmtes Kunstmuseum. Als Haupteingang dient eine moderne 21,6 m hohe Pyramide mit quadratischer Grundfläche, dessen Seite 35,4 m lang ist. Die Außenfläche wird regelmäßig von Fensterputzern gereinigt.
Wie groß ist diese Fläche?

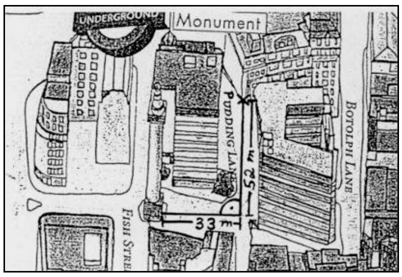
b) Berechne die Höhe einer quadratischen Pyramide, bei der alle Außenkanten die Länge a = 10 cm haben.

Tipp: Benutze die schematische Pyramidenzeichnung rechts als Hilfe. Du kannst dir auch weitere Hilfslinien einzeichnen.



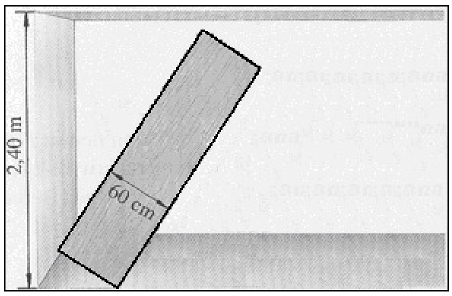
Aufgabe 3

Beim großen Brand von London im September 1666 wurden $\frac{4}{5}$ der City vernichtet. Als Mahnmal wurde ein Säule (genannt Monument) errichtet, deren Höhe genau der Entfernung vom Fuß der Säule zu der Stelle entspricht, an der das Feuer ausbrach (einer Bäckerei in der Pudding Lane). Ein Londonbesucher misst die noch zugänglichen Strecken. Bestimme damit die Höhe der Säule.



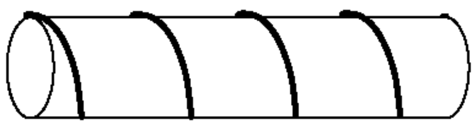
Aufgabe 4

Mathus und Mathine haben auf dem Fußboden einen Schrank zusammengebaut. Nun wollen sie ihn aufrichten und an die Wand stellen. Mathine ruft erleichert: „Uff! Gerade noch einmal Glück gehabt!“ Wie hoch ist der Schrank?



Aufgabe 5

Eine Schnur ist symmetrisch um einen Stab gewickelt. Die Schnur windet sich genau 4-mal um den Stab. Der Umfang des Stabes ist 4 cm und die Länge des Stabes ist 12 cm.
Wie lang ist die Schnur?

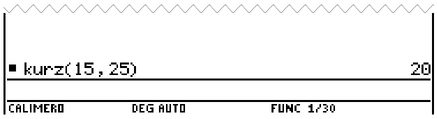


[1] NW 9, 3-507-85459-7

Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.7	Datum:

Aufgabensammlung „Rechner & Koordinaten“

Aufgabe 1



a) Felix berechnet die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks mit seinem Rechner. Was hat er gemacht?
Erstelle ein Makro **lang** zur Berechnung der längsten Seite (Hypotenuse).

b) Untersuche, was passiert, wenn man die Reihenfolge der Eingaben der gegebenen Größen in den Makros **lang** und **kurz** vertauscht. Erkläre, was du beobachtest. Warum benötigt man kein zweites Makro zur Berechnung der zweiten kurzen Seite (Kathete)?

c) Was wird mit **kurz(5,x)** berechnet? Welche Werte für *x* sind nur sinnvoll?
Mit **kurz(x,25)** wird eine Zuordnung beschrieben:
Jeder Kathete x in einem rechtwinkligen Dreieck mit … wird … zugeordnet.
Vervollständige den Satz.
Erstelle eine Grafik der Zuordnung und beschreibe sie. Setze für die „*25*“ in **kurz(x, 25)** andere Werte ein, erstelle die zugehörigen Grafiken und vergleiche.

Aufgabe 2

a) Berechne den Abstand der Punkte zum Ursprung:
P (7 | 5) ; Q (6 | - 2) ; R (4 | 10) ; S (- 8 | - 6)
(Schaue dir die Zahlen an: Zwei Ergebnisse solltest du im Kopf ausrechnen können!)

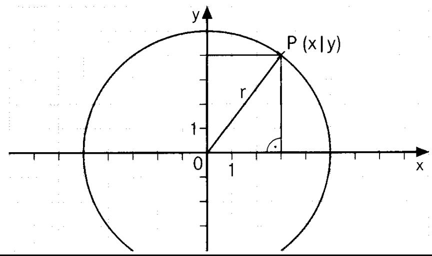
b) Berechne den Abstand zwischen den Punkten:
A (2 | 5) und B (7 | 10) ; C (3 | - 2) und D (- 3 | 2) ; E (7 | 8) und F (7 | - 8)
(Ein Ergebnis ist sehr einfach anzugeben!)

d) Schau dir die nebenstehende Information an.
Gib 6 verschiedene Punkte an, die auf dem Kreis um den Ursprung mit Radius 10 liegen.

Mit dem Satz des Pythagoras lassen sich auch Kreise im Koordinatensystem beschreiben.

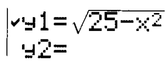
Für jeden Punkt P (x|y), der vom Ursprung den Abstand r hat, gilt $x^2 + y^2 = r^2$.

Daher ist $x^2 + y^2 = r^2$ die **Gleichung des Kreises** um den Ursprung mit dem Radius r.



Aufgabe 3[1]

Kreise auf dem TC



a) Michaela hat in den TC die Gleichung rechts eingegeben und erhält als Bild einen Halbkreis um 0 mit dem Radius 5 (Bild 1). Erkläre dies?

b) Welche Gleichung muss sie zusätzlich eingeben, um den passenden unteren Halbkreis (Bild 1) zu erhalten?

c) Matthias hat die Gleichungen wie Michaela eingegeben und erhält Bild 3. Woran liegt das?

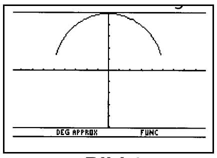


Bild 1

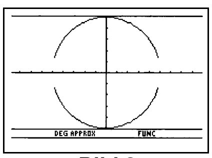


Bild 2

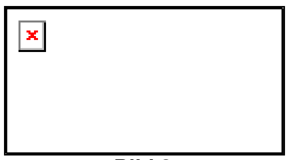
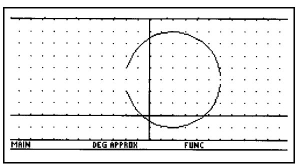


Bild 3

Aufgabe 4

Für Fortgeschrittene:
Zeichne die fünf olympischen Ringe auf dem TC.



Zeichen auf dem TC einen Kreis um den Mittelpunkt M (2 | 3) und dem Radius 4.
Stelle dazu die passende Kreisgleichung auf und löse nach y auf.

[1] NW 9, 3-507-85459-7

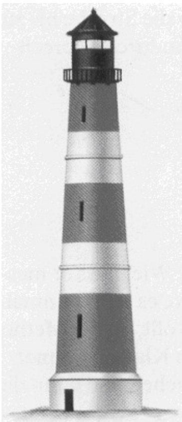
Klasse	2. Anwendungen	Blatt: 2.8	Datum:

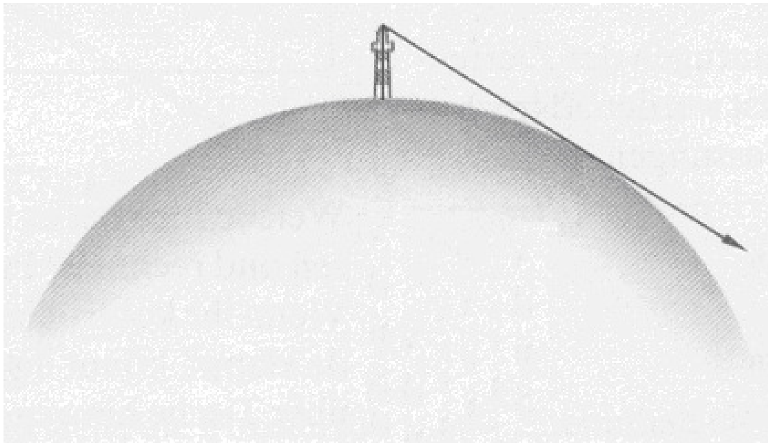
Aufgabensammlung „Weitblick“

Aufgabe 1

Wie weit kann man von einem 45 m hohen Leuchtturm über die freie See blicken?

Tipp 1: Stelle dir die Erde als Kugel vor.
Tipp 2: Stelle dir den Sehstrahl als eine Tangente an den Kreis vor. Der Erdradius (6370 m) ist dann eine Senkrechte dazu.





Aufgabe 2[1]

Je höher man über dem Erdboden steht, desto weiter kann man sehen. Aber wegen der Erdkrümmung kann man leider selbst bei klarstem Wetter nur bis zum Horizont sehen. Für die Sichtweite in Abhängigkeit von der Höhe gibt es eine Formel:

$\text{sicht}(h) = \sqrt{h^2 + 12740 \cdot h}$, alle Angaben in km

a) Stelle eine Tabelle für die Sichtweite aus verschiedenen Höhen auf (Augenhöhe, Aussichtsturm, Fernsehturm, Flugzeug, Satellit).
b) Leite die Formel selbst her.
c) Mathus behauptet: „Wenn ich von einem 50 m hohen Turm 25 km weit sehen kann, dann sehe ich von einem 100 m hohem Turm 50 km weit.“
Was meinst du dazu?
d) Leichter kann man sich eine sogenannte Faustformel merken $\text{sicht}(h) = \sqrt{12740 \cdot h}$
Berechne deine Tabellenwerte damit neu. Erkläre, warum die Abweichungen so gering sind.

[1] NW 8, 978-3-507-85504-5

Klasse	3. Umkehrung des Satzes von Pythagoras	Blatt: 3.1	Datum:

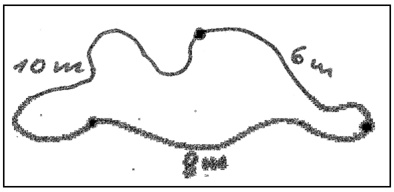
Aufgabe 1[1]

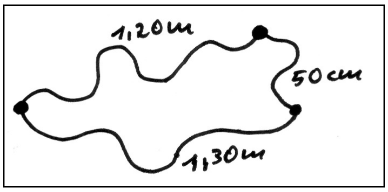
Entscheide, ob das Dreieck mit den angegebenen Seitenlängen spitzwinklig oder stumpfwinklig ist. Verändere – wenn möglich – eine Seitenlänge so, dass sie ganzzahlig bleibt und das Dreieck rechtwinklig wird.

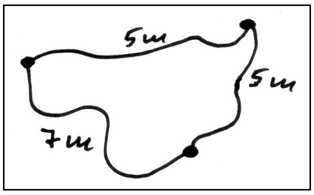
a) a = 4 cm ; b = 4 cm ; c = 5 cm
b) a = 10 m ; b = 5 cm ; c = 13 cm
c) a = 9 cm ; b = 15 cm ; c = 11 cm

Aufgabe 2[1]

Mit welchen Schnüren lässt sich ein rechtwinkliges Dreieck aufspannen?







Aufgabe 3[1]

Konstruiere die Dreiecke mit den Seitenlängen (a | b | c):

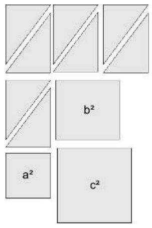
(8 | 15 | 7) (11 | 12 | 16) (2,5 | 6 | 6,5) (14 | 14 | 20)

Welche Dreiecke sind rechtwinklig? Überprüfe rechnerisch.

[1] Neue Wege 8, 978-3-507-85504-5

Klasse	3. Umkehrung des Satzes von Pythagoras	Blatt: 3.2	Datum:

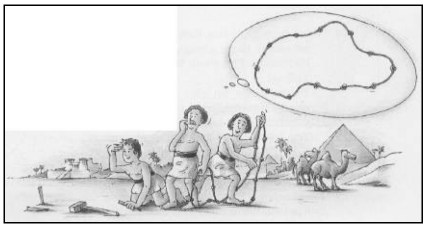
Aufgabe G1



Für diese Aufgabe liegen die elf rechts abgebildeten Figuren bereit.

a) Lege aus allen 11 Figuren gleichzeitig zwei flächengleiche Quadrate.
b) Zeige anhand deiner Lösung aus a) die Gültigkeit des Satzes von Pythagoras.

Aufgabe G2[1]



In der Abbildung rechts wird auf die so genannten „Harpedonapten" im alten Ägypten angesprochen. Diese Leute sorgten damals dafür, dass für die Landvermessung großflächig rechte Winkel angelegt werden konnten.

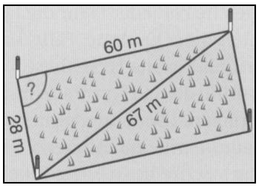
a) Betrachte den Cartoon genau, beachte dabei die Anzahl der Knoten im Seil. Zeige mithilfe einer Paketschnur, wie die Harpedonapten wohl einen rechten Winkel konstruiert haben müssen. Kontrolliere mit dem Tafeldreieck.
b) Recherchiere die genaue Bedeutung des Begriffs „Harpedonapten". Was findest du sonst noch über sie heraus?

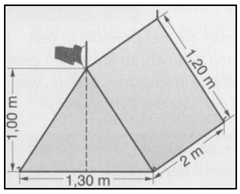
Aufgabe G3

a) Überprüfe, ob das Dreieck ABC mit a = 6 cm, b = 8 cm und c = 10 cm rechtwinklig ist. Begründe.
b) Man nennt das Zahlentripel (6 | 8 | 10) aus natürlichen Zahlen pythagoreisches Zahlentripel. Ebenso ist (3 | 4 | 5) ein solches Zahlentripel. Entscheide, ob hier pythagoreische Zahlentripel vorliegen:
(9 | 12 | 15) , (15 | 20 | 25) , (12 | 16 | 22) , (2 | 4 | 6)
c) Vervollständige zu pythagoreische Zahlentripeln:
(8 | 15 |) , (| 30 | 34) , (24 | | 26) , (14 | 48 |)
d) Finde weitere pythagoreische Zahlentripel. Welche Gesetzmäßigkeiten kannst du entdecken?

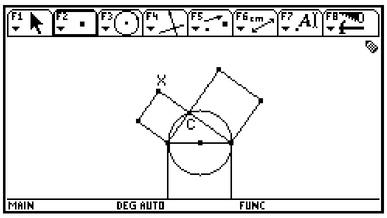
Aufgabe G4[2]

Überprüfe jeweils, ob die Maße stimmen können:





Aufgabe G5



Lasse dir die Datei „pyth2" auf deinen Rechner überspielen und öffne sie mit dem Geometrieprogramm.

a) Was passiert mit dem Punkt X, wenn C auf dem Halbkreis wandert? Beschreibe anhand einer Skizze möglichst genau die Kurve, auf der sich X bewegt.
b) Beschreibe auch die Kurven, auf denen sich die anderen Quadratecken bewegen. Fertige auch hier Skizzen an.

Aufgabe G6

Handwerker benutzen häufig einen Zollstock und eine 1 m-Latte, um rechte Winkel anzulegen. Besorge dir einen Zollstock und finde selbst heraus, wie die Konstruktion vorzunehmen ist. Beschreibe.

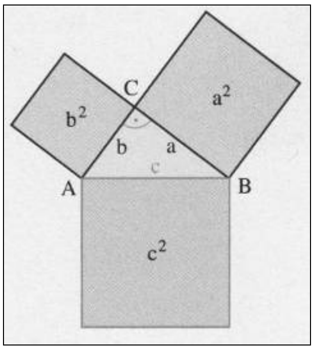
[1] MN 9, 3-14-123939-8
[2] NW 9, S.154, 3-507-85459-7

Wissensspeicher

Satz von Pythagoras

Wenn das Dreieck ABC rechtwinklig ist, dann ist der Flächeninhalt des Hypothenusenquadrates gleich der Summe der Flächeninhalte der Quadrate über den beiden Katheten.

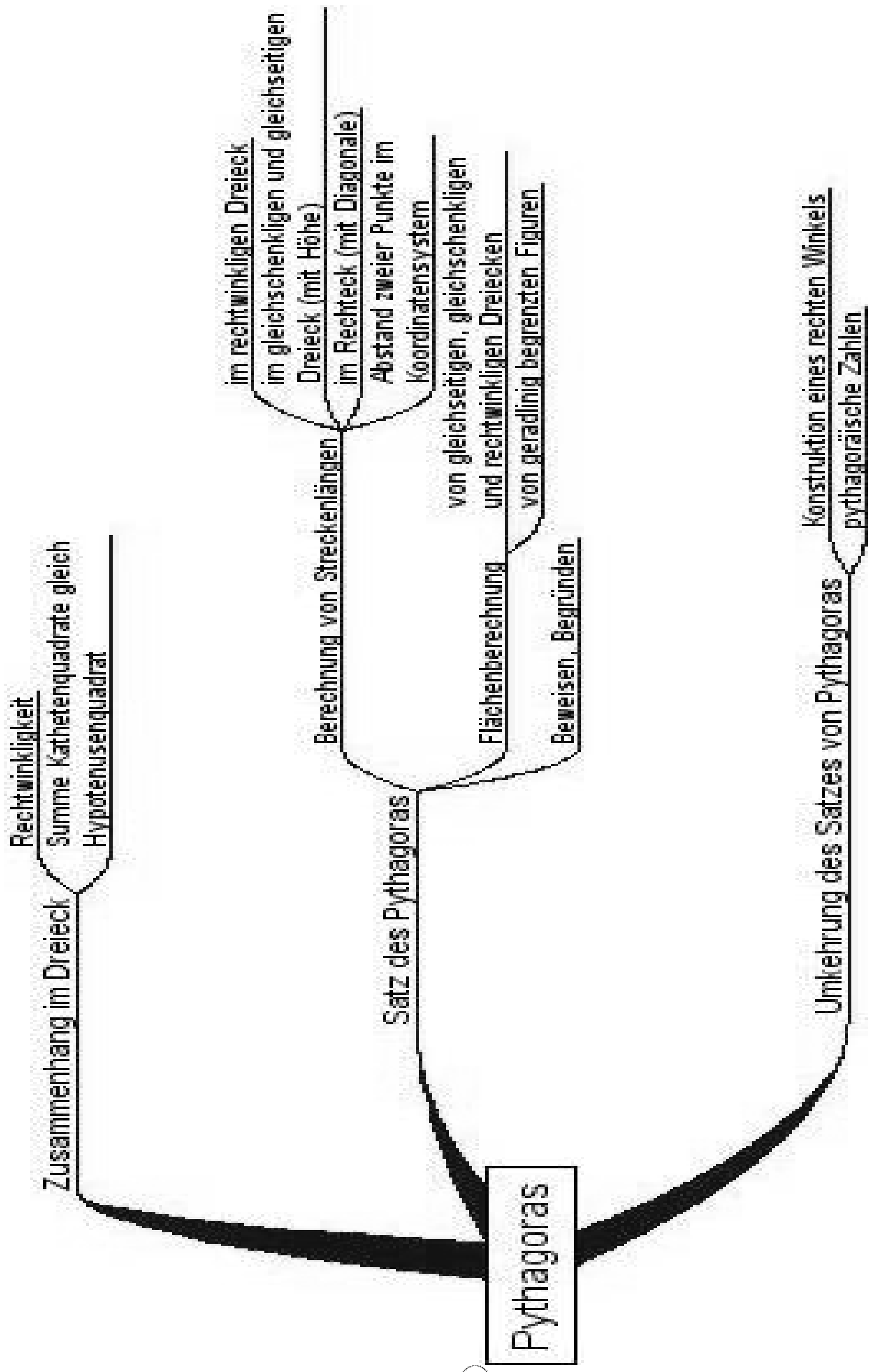
$$c^2 = a^2 + b^2 \text{ für } \gamma = 90°$$



Kehrsatz des Satzes von Pythagoras

Für jedes Dreieck ABC gilt: Wenn $c^2 = a^2 + b^2$, dann $\gamma = 90°$.

Das kannst du jetzt:



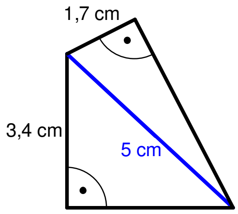
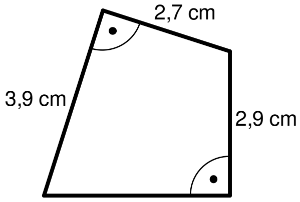
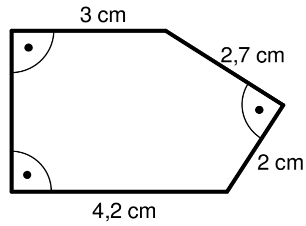
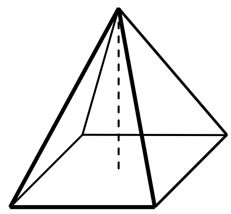
Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Satz von Pythagoras" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollst du bestimmte Fertigkeiten auch rechnerfrei erwerben und beherrschen. Diese Fertigkeiten wirst du in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachweisen müssen.
Du sollst:

1. In einfachen Fällen die Gleichung zum Satz von Pythagoras nach einer Größe umstellen können.
2. Flächen in rechtwinklige Teildreiecke zerlegen, um den Satz von Pythagoras anwenden zu können.
3. In Körpern rechtwinklige Dreiecke erkennen, um den Satz von Pythagoras anwenden zu können.

Beispiele:

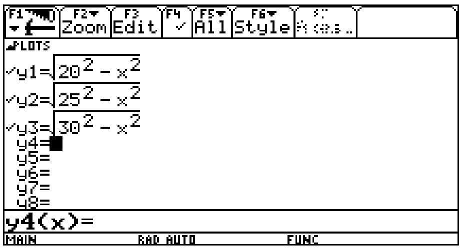
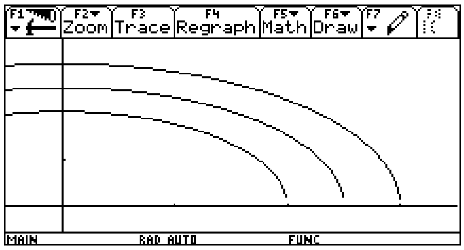
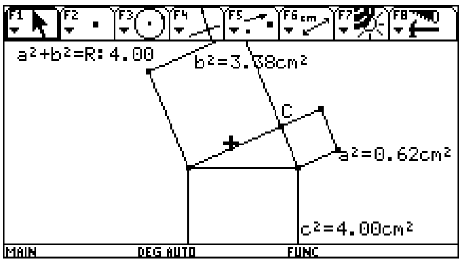
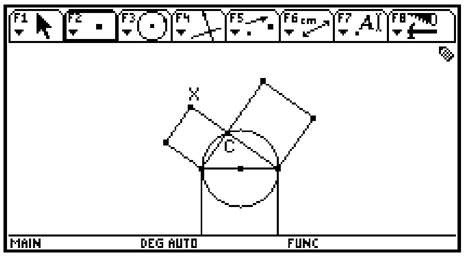
1.	In einem rechtwinkligen Dreieck mit dem rechten Winkel bei Punkt C ist die Seite a = 6 cm und die Seite c = 10 cm lang. Berechne die Länge der Seite b.	
2.	Berechne jeweils den Flächeninhalt:   	
3.	Eine Pyramide hat eine quadratische Grundfläche. Die Pyramide ist 12 m hoch und die Grundkante hat eine Länge von 6 m. Berechne die Länge der Seitenkante.	

CAS - Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollst du am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

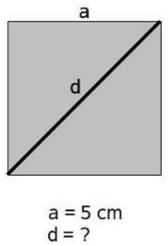
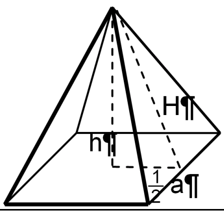
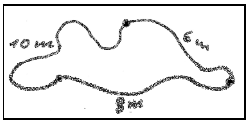
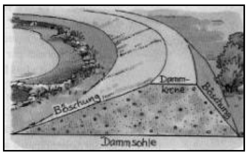
1. Gleichungen in den TC eingeben, mithilfe des Rechners lösen und das Ergebnis nachvollziehen können.
2. Abstandformeln als Makros definieren und diese zur Berechnung nutzen. Damit wird schrittweise die Fertigkeit weiterentwickelt, Funktionen mithilfe eines Terms zu definieren und zu verwenden.
3. Verständig mit Kreisgleichungen auf dem Rechner umgehen und diese für experimentelle Untersuchungen nutzen.
4. Window-Einstellungen situationsbezogen vornehmen können.
5. Dynamische Geometriesoftware für Entdeckungen nutzen.

Beispiele:

<table>
<tr><td>1</td><td colspan="2">solve($s = 2\cdot\sqrt{r^2 - a^2}$,a)</td></tr>
<tr><td>2</td><td colspan="2">$\sqrt{(6370 + h)^2 - 6370^2}$ → w(h)</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">$\sqrt{36 - x^2}$ → y1(x)</td></tr>
<tr><td>4</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>5</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• Diagonalen in Rechtecken und Quadraten berechnen  d = $\sqrt{5^2 + 5^2}$			
• Abstände von Punkten zum Ursprung im Koordinatensystem berechnen P (5 | 3); d = $\sqrt{5^2 + 3^2}$			
• Abstände zwischen Punkten im Koordinatensystem berechnen P (5 | 3); Q (10 | 6); d = $\sqrt{5^2 + 3^2}$			
• den Satz von Pythagoras ohne Verwendung einer Formel wiedergeben			
• den Satz von Pythagoras zur Berechnung in Flächen und Körpern verwenden 			
• pythagoräische Zahlentripel bilden und erkennen (3 | 4 | 5) ; $3^2 + 4^2 = 5^2$			
• mithilfe pythagoräischer Zahlentripel rechte Winkel überprüfen und konstruieren[1] 			
• den Satz von Pythagoras in Anwendungssituationen zur Berechnung verwenden[2] 			

[1] Neue Wege 8; S. 198; 978-3-507-85504-5
[2] EdM 9, S.143, 3-507-87123-8

Das sollst du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Berechne $45 \cdot 8$.

b) Nenne die Quadratzahl von 13.

c) Nenne drei Alltagsgegenstände, die ein Prisma als Körperform haben!

d) Schneiden sich die Winkelhalbierenden eines Dreiecks im Mittelpunkt des Umkreises?

e) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit aus einem Skatblatt (32 Karten) eine Dame zu ziehen?

f) Gilt der Satz von Pythagoras für ein Dreieck mit den Seitenlängen 6, 8 und 10?

g) Zwei Figuren heißen kongruent zueinander, wenn … .

h) Benni kauft 4 Konzertkarten für 320 €. Später gibt er eine wieder zurück. Wie viel hat er letztendlich bezahlt?

i) Klammere aus: $25\,w + 35\,w^2$.

j) Gib die Maße eines Rechtecks mit dem Flächeninhalt 36 cm^2 an.

Aufgabe 2

a) Die Seiten eines Rechtecks sind 6 cm und 8 cm lang. Gib die Seitenlänge eines flächengleichen Quadrats an.

b) In einer Klasse sind 24 Kinder. Das Verhältnis Jungen zu Mädchen ist 3 : 5. Wie viele Jungen sind in der Klasse?

c) Die Wahrscheinlichkeit, aus 1.000 Losen einen Gewinn zu ziehen, beträgt 4 %. Wie viele Gewinnlose sind es?

d) Entscheide begründet: Gibt es ein rechtwinklig-gleichseitiges Dreieck?

e) Ergänze zu einem pythagoreischen Tripel:

$12 \quad \square \quad 13$ $\qquad\qquad$ $10 \quad 24 \quad \square$

f) Berechne:

$\frac{1}{4}+1\frac{3}{8}$ $\qquad\qquad$ $\frac{22}{51}\cdot\frac{17}{66}$ $\qquad\qquad$ $(-4{,}5)+2{,}5\cdot 2$

g) 3 % sind 1,50 €. Gib den Grundwert G an.
Gib an, wie viel 7 % von 7 € sind.
Gib in % an: 45 kg von 30 kg.

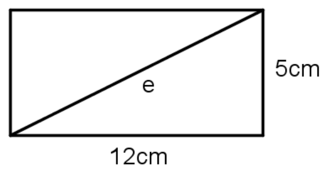
h) Gib eine Formel zur Berechnung der Höhe eines gleichseitigen Dreiecks an.

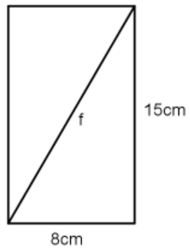
Aufgabe 3

a) 3 % Rabatt sind 7,50 €. Wie teuer ist die Ware?

b) Die Seite eines Rechtecks misst 4,5 cm, sein Umfang beträgt 20 cm. Wie lang ist die zweite Seite?

c) Berechne jeweils die Diagonale.





d) Berechne:

$2{,}5 : 0{,}05$ $\qquad$ $0{,}2 \cdot 0{,}4$ $\qquad$ $(-1) + 1 \cdot (-1) : 1$

e) Skizziere ein rechtwinkliges Dreieck, so dass gilt: $r^2 + s^2 = t^2$

f) Um welche Zuordnung handelt es sich bei $y = 0{,}4x - 7$?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel eine 1 oder eine 6 zu würfeln?

h) Entscheide begründet, ob sich mit den angegebenen Seitenlängen ein rechtwinkliges Dreieck ergibt:

a = 8 m $\qquad$ b = 10 m $\qquad$ c = 6 cm $\qquad$ k = 5 cm $\qquad$ l = 7 cm $\qquad$ m = 5 cm

Aufgabe 4

a) Die Länge einer Quadratseite beträgt a cm. Wie berechnet man die Länge der Diagonale?

b) Klammere aus:

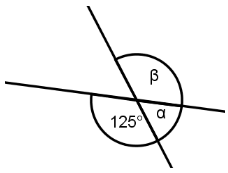
$15\,x + 35\,x^2$ $\qquad$ $28a-42a^2-7a^3$.

c) Wandle um:

0,1 t (kg) $\qquad$ $0{,}8\ m^2\ (dm^2)$ $\qquad$ $320\ mm^3\ (cm^3)$

d) Ein rechtwinkliges Dreieck hat die Kathete r = 24 m und Hypotenuse t = 25 m. Berechne die andere Kathete s und den Flächeninhalt des Dreiecks.

e) Wie groß sind die Winkel α und β ?



f) Vereinfache:

$\sqrt{98} : \sqrt{2}$ $\qquad$ $\sqrt{100x^2 + 21x^2}$ $\qquad$ $\sqrt{3}\left(2\sqrt{75} - 4\sqrt{12}\right)$

g) Berechne für ein gleichschenkliges Dreieck ABC mit den Schenkeln $a = b$ und der Höhe h_c den Flächeninhalt: $\qquad$ a = 17 cm , h_c = 15 cm.

h) Welche Fehler wurden gemacht?

$9\,a + 9\,b = 9\,a\,b$ $\qquad$ $3\,x^2 + 4\,x = 7\,x^2$ $\qquad$ $2\,a + 3\,a^2 = 5\,a^3$

Aufgabe 5

a) Berechne:

$\frac{4}{5}$ von 85 € $\frac{5}{7}$ von 63 kg $\frac{2}{3}$ von 90 t

b) Fasse soweit wie mögliche zusammen:

$7\sqrt{ax}+3\sqrt{bx}+2\sqrt{ax}$ $9\sqrt{7}-6+3\sqrt{7}+3-\sqrt{7}$.

c) Das Schwimmbecken des Freibades soll mithilfe gleich starker Pumpen gefüllt werden. 2 Pumpen benötigen 72 Stunden. Wie viele Stunden brauchen 8 dieser Pumpen?

d) Wende das Distributivgesetz an:

$x\,(a+b)$ $(x-y)\cdot(-5)$ $15\,k\,(12\,q-1)$

$8\,a^2+4\,a$ $10\,p\,q+15\,p^2\,q-2\,p\,q^2$ $9\,u^4+10\,u^3$.

e) Setze das richtige Zeichen ein (< , > , =):

$\frac{4}{9}\square 0{,}5$ $\frac{2}{3}\square 0{,}6$ $\frac{3}{4}\square 0{,}75$ $\frac{5}{6}\square 0{,}84$.

f) Eine Münze wird zweimal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, genau einmal Wappen zu werfen?

g) Gib an, wie man den Mittelpunkt des Inkreises bei einem Dreieck erhält.

h) Berechne:

$(-17)-(+31)-(-23)$ $-21\cdot 15$ $-17:\left(-2\frac{5}{6}\right)$.

Aufgabe 6

a) Stelle jeweils einen Term auf:

Addiere x zur Summe der Zahlen 25 und y.

Multipliziere die Summe der Zahlen a und b mit deren Differenz.

b) Gib den Term jeweils in Wortform an: $x+2\cdot 8$ $(x+2)\cdot 8$

c) Berechne. Kürze, wenn möglich:

$\frac{5}{9}\cdot 9$ $\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{8}$ $5\frac{1}{3}:6$ $2\frac{2}{7}:1\frac{1}{3}$

d) Ordne der Größe nach: $\sqrt{12}$; $3{,}4$; $\sqrt{10}$; $\frac{7}{2}$; 4 .

e) Vereinfache:

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{12}$ $5\sqrt{2}\cdot\sqrt{32}$ $\sqrt{2}\cdot\left(2+\sqrt{8}\right)$

f) Berechne mithilfe der binomischen Formel:

81^2 98^2

g) Eddi Raser spart für ein neues Mountainbike und legt Woche für Woche 12 € zurück. Nach 30 Wochen hat er das Geld zusammen. Wie lange müsste er sparen, wenn er wöchentlich nur 9 € spart?

h) Fülle die Lücken aus:

$a^2+6ab+\square=\left(a+\square\right)^2$ $64k^2-\square+t^2=\left(\square+t\right)^2$ $1+r+\square=\left(1+\square\right)^2$.

Aufgabe 7

a) Multipliziere: $(5a-6b)\cdot(5a-6b)$.

b) Berechne: $1\frac{1}{2}:\frac{1}{2}$.

c) Berechne: $\sqrt{72}:\sqrt{2}$.

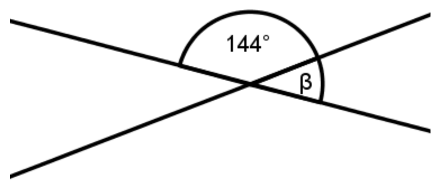
d) Die Seiten eines Quadrates wurden verdoppelt. Wie verändert sich der Umfang?

e) Gib die beiden ganzen Zahlen an, zwischen denen $\sqrt{6}$ liegt.

f) Berechne 60 % von 60 kg.

g) Wie groß ist der Winkel β?

h)



i) Eine Taxifahrt kostet 3 € Grundgebühr und 0,50 € pro gefahrenen Kilometer. Wie weit kann man mit 10 € fahren?

j) Die Seitenlänge eines Würfels wird verdoppelt. Wie ändert sich das neue Volumen?

k) Berechne: $\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{20}+\sqrt{5}\right)$.

Aufgabe 8

a) Wie heißt die kleinste Zahl, die durch 2, 3 und 7 teilbar ist?

b) Die menschliche Lunge besteht aus etwa 100.000.000 Lungenbläschen, von denen jedes eine Oberfläche von 1 mm^2 aufweist. Wie groß ist die Oberfläche der Lunge in m^2?

c) Berechne: $\frac{4}{5}$ von 85 €.

d) Berechne: $83-(-97)+(-25)$.

e) Stelle einen Term auf: Vermindere das Dreifache einer Zahl um die Summe aus dieser Zahl und 10.

f) Multipliziere und fasse zusammen: $(3a+2b)\cdot(4b-2a)$.

g) Wandle den Summenterm in einen Produktterm um: $16x^2+24xy+9y^2$.

h) Ergänze: $\square+10x+25=\left(\square+\square\right)^2$.

i) Peter wirft 30-mal einen Würfel und erhält 12-mal eine 5. Gib die relative Häufigkeit an.

Aufgabe 9

a) Berechne:

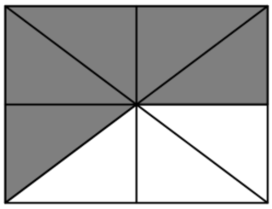
$-63+37$ $\qquad$ $(-3)\cdot 5\cdot(-12)$

40 % von 40 € $\qquad$ $-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}$

b) Ordne von klein nach groß: 0,1 ; 0,03 ; 0,11.

c) Was ist größer: $\frac{5}{8}$kg oder 630 g?

d) Wie groß ist der Anteil der gekennzeichneten Fläche in %?



e) Verwandle in km: 5.700 dm.

f) Ergänze: $(\square - 3y)^2 = \diamond - 9xy + \bigcirc$

g) Berechne:

$(3x-2)\cdot(-2)$ $\qquad$ $\left(\frac{2}{3}x+\frac{1}{4}\right)^2$

$\frac{3}{8}:\frac{27}{32}$ $\qquad$ $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x\right)^2$.

Aufgabe 10

a) Rechne in die kleinere Einheit um:

9 min 17 s $\qquad$ 7 kg 43 g $\qquad$ 23 t 9 kg

b) Berechne:

$\frac{29}{30}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}$ $\qquad$ $4\frac{1}{3}-\left(-4\frac{5}{6}\right)$ $\qquad$ $21:\left(-\frac{7}{9}\right)$

c) Multipliziere:

$\left(\frac{1}{2}x+1\right)\cdot\left(\frac{2}{3}y-\frac{3}{4}\right)$ $\qquad$ $(3a+4b)\cdot(2s-3z)$

d) Wende das Distributivgesetz an:

3 x (2 x – 1) $\qquad$ 12 a b – 20 a c $\qquad$ (6 – 9 x) · 3

e) Wie viel Cent sind $\frac{3}{5}$ von 1 €?

f) Runde auf Zehntel: 4,1199.

g) Berechne:

(- 1) – 1 $\qquad$ (- 1) – (- 1) $\qquad$ (- 1) + (- 1)

h) Welchen Winkel bilden Minuten- und Stundenzeiger um 14.00 Uhr?

Aufgabe 11

a) Faktorisiere mithilfe der binomischen Formeln:

$k^2 - 625$ $x^2 + 14x + 49$ $169 - 26a + a^2$

b) Entscheide begründet, ob man ein Dreieck aus den gegebenen Längen konstruieren kann:

a = 6 cm	b = 7cm	c = 10 cm
a = 9 cm	b = 15 cm	c = 5 cm
a = 12 cm	b = 5 cm	c = 7 cm

c) Wahr oder falsch? Begründe.

(i) Alle natürlichen Zahlen sind rationale Zahlen.

(ii) Die Wurzel aus einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst.

d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, aus einem Skatkartenspiel (32 Karten) ein As zu ziehen?

e) Gib an, bei welchen Dreiecken die Mittelpunkte von Um- und Inkreis zusammenfallen?

f) Multipliziere und vereinfache:

$5 \cdot (2a + 3b) + 3 \cdot (4a - b) - (-8a + 2b)$

$(-4a - 5b) \cdot (-2b + 3a)$

g) Ergänze:

$\square + 16x + \square = (x + 8)^2$

$(2a + \square)^2 = \square + \square + 100$

Das ist dein Basiswissen

Aufgabe 1

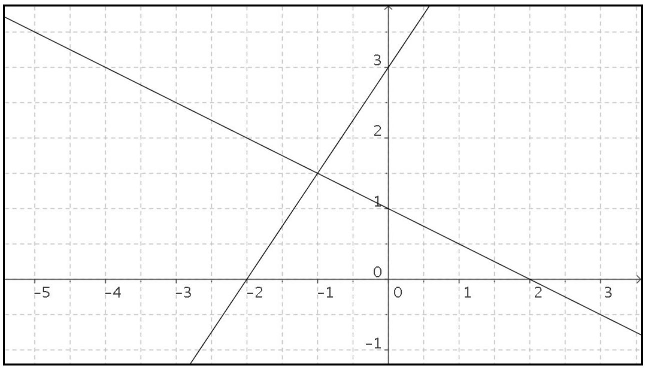
Tim hat zur Lösung der Gleichung $x + 1 = 2x - 3$ die folgende Tabelle erstellt:

x	x + 1	2 x – 3
2	3	1
3	4	3
4	5	5
5	6	7

a) Lies die Lösung der Gleichung ab.

b) Verändere diese Gleichung so, dass die Lösung $x = 3$ ist.

c) Zur Lösung einer anderen Gleichung hat er die rechts abgebildete Graphik erstellt.
Wie lautet die Lösung jetzt?



Aufgabe 2

Es gilt: $3x + 2 = 1 + 2x$

Wer hat Recht? Prüfe durch Einsetzen und markiere:

	Tim:	Sina:	Elena:	Christoph:	Meike:
	$x = 2$	$x = 1$	$x = -1$	$x = -\frac{1}{5}$	$x = 3$
Richtig/Falsch:					

Aufgabe 3

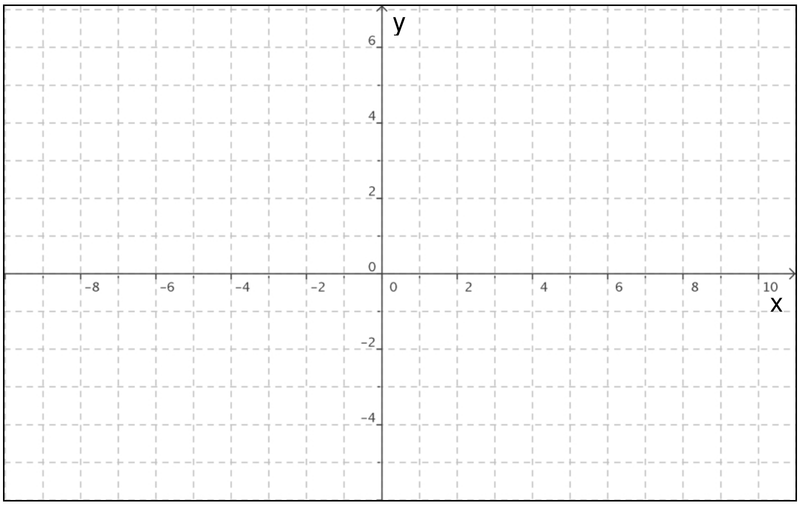
Löse nach x auf: $4x - 7 = 5$

Aufgabe 4

Skizziere die folgenden Graphen:

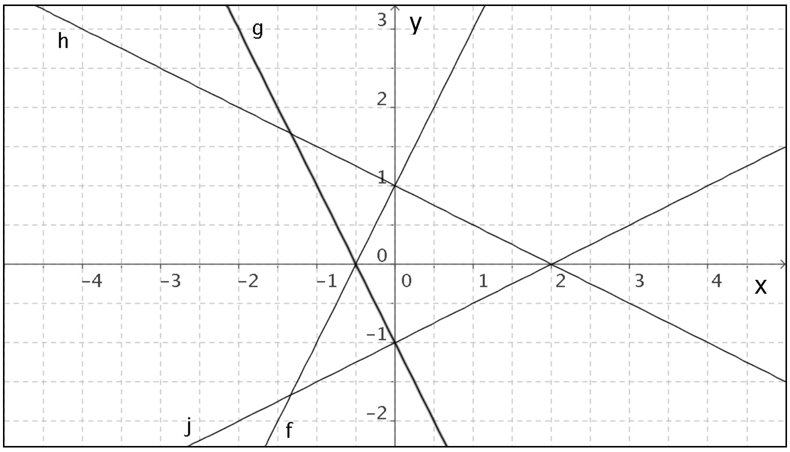
a) $y = 2x - 3$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$



Aufgabe 5

Gib die zu den abgebildeten Graphen zugehörigen Funktionsgleichungen an.



f(x) =

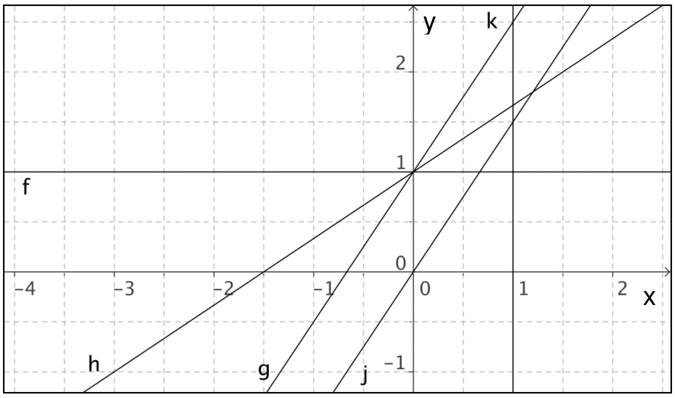
g(x) =

h(x) =

j(x) =

Aufgabe 6

Ordne den Graphen die Funktionsgleichungen zu. Nicht für jeden Graph ist eine Funktion angegeben, und nicht für jede Funktion ist ein Graph angegeben!



$y = \frac{3}{2}x + 1$ gehört zu:

$y = \frac{2}{3}x$ gehört zu:

$y = \frac{2}{3}x + 1$ gehört zu:

$y = 1$ gehört zu:

$y = \frac{3}{2}x$ gehört zu:

Aufgabe 7

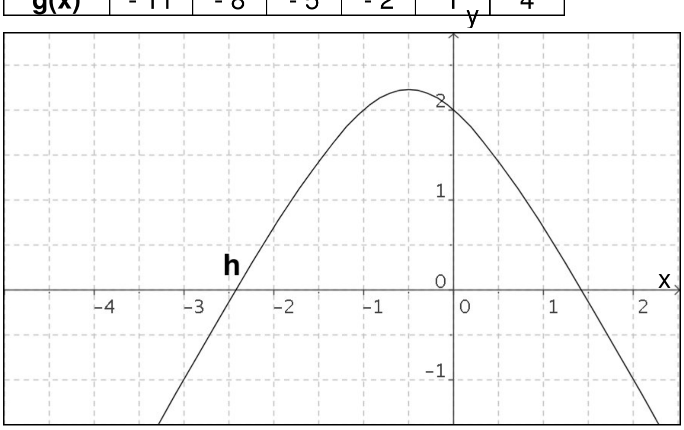
Es seien drei Funktionen f, g und h auf unterschiedliche Weise dargestellt:

(i) $f(x) = 3x - 4$

(ii)

x	- 2	- 1	0	1	2	3
g(x)	- 11	- 8	- 5	- 2	1	4

(iii)



a) Es sei jeweils x = 2. Welche Werte nehmen f(x), g(x) und h(x) jeweils an?

b) Für f, g und h sei jetzt jeweils der Funktionswert 2. Welchen Wert hat jeweils x?

Aufgabe 8

Löse die Gleichung. Notiere Zwischenschritte

a) $4x - 3 = 7$

b) $-\frac{1}{2}x + 1 = \frac{3}{2}x - 3$

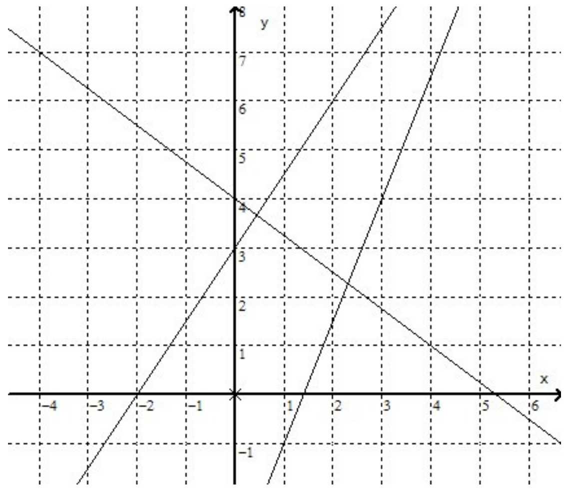
Aufgabe 9

Löse $4 + 2x = x^3$ graphisch oder tabellarisch.

Dokumentiere deinen Lösungsweg.

Aufgabe 10

Gib zu den nebenstehenden Geraden die zugehörigen Gleichungen an.



Aufgabe 11

Nach einem Fußballspiel verlassen die 20000 Besucher das Stadion durch 4 Ausgänge. Gehe davon aus, dass dies gleichmäßig erfolgt. Durch jeden der Ausgänge gehen pro Minute 300 Zuschauer.
Betrachte die Funktion *Zeit nach dem Spiel (in min)* → *Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind.*

a) Vervollständige die Wertetabelle:

Zeit nach dem Spiel (in min)	0	1	2	5
Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind				

b) Erstelle eine Gleichung für diese Funktion.

c) Bestimme, wann das Stadion leer ist.

Aufgabe 12

Ein Abwassertank wird leer gepumpt. Durch die Gleichung y = - 6,5 x + 75 kann die noch im Tank vorhandene Abwassermenge berechnet werden, wobei x für die vergangene Zeit in Minuten und y für die Abwassermenge in Kubikmeter steht.

a) Erläutere die Bedeutung der Zahlenwerte 6,5 und 75.

b) Bestimme die zur vollständigen Entleerung nötige Zeit.

c) Bestimme die Zeit, die benötigt wird, um 40 Kubikmeter abzupumpen.

Aufgabe 13

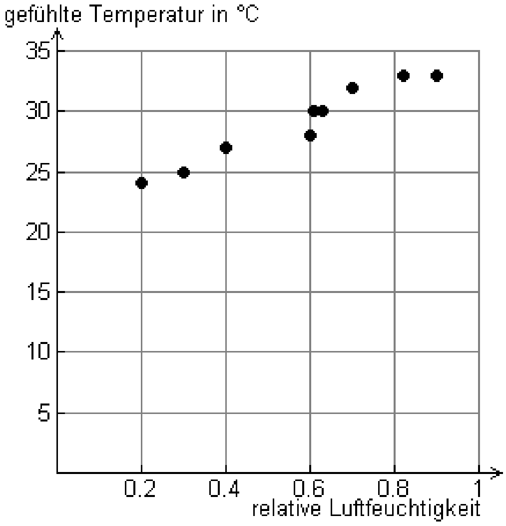
Relative Luftfeuchtigkeit	0.2	0.3	0.4	0.6	0.605	0.61	0.7	0.81	0.9
gefühlte Temperatur in °C	24.5	25	27	28	30	30	32	33	33

An schwülen Tagen kommt es den meisten Menschen wärmer vor, als es tatsächlich ist. Bei einer Umfrage war die tatsächliche Außentemperatur 27 °C und die relative Luftfeuchtigkeit variierte von 0,2 bis 0,95.

a) Formuliere eine Prognose:
Welche Temperatur würde bei einer Außentemperatur von 27 °C und einer relativen Luftfeuchtigkeit von 0,5 empfunden?

b) Bestimme die Gleichung einer Ausgleichsgeraden.

c) Was bedeutet der Schnittpunkt mit der y-Achse?



Aufgabe 14

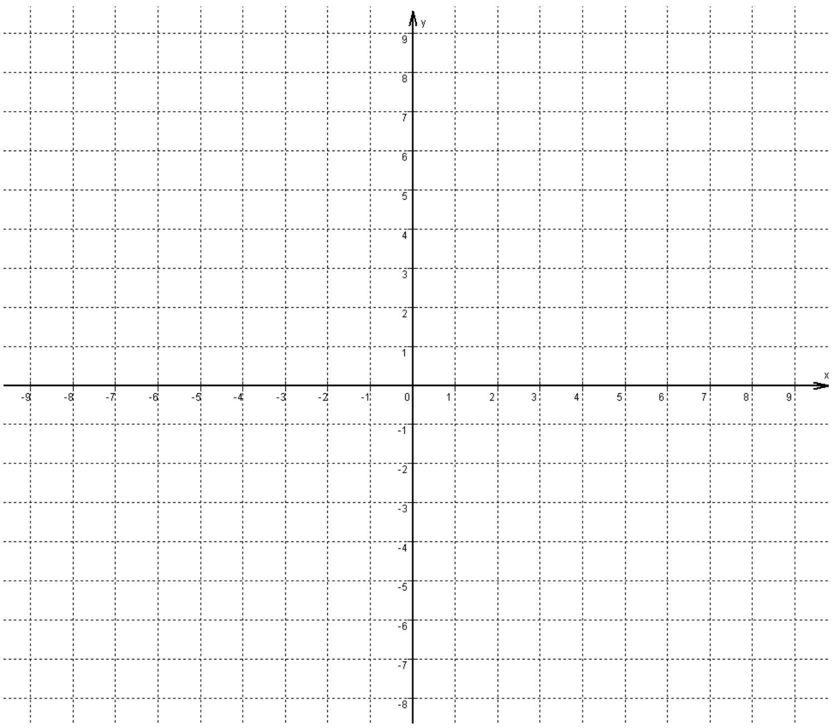
Die Geradenschar $f(x, m) = m \cdot x + 4 + m$ soll untersucht werden.

a) Zeichne drei Geraden der Schar in nebenstehendes Koordinatensystem.

b) Beschreibe die Schar und begründe deine Vermutung.

c) Was bedeutet $f(3, m)$? Verdeutliche dies in der Skizze.

d) Welche Gerade der Schar verläuft durch den Punkt P(2 | 16)?



Aufgabe 15

Timo hat das Makro nnn(a, b) in seinen V200 eingegeben:

a) Was berechnet das Makro?

b) Erläutere die Ausdrücke nnn(6, 9) und nnn(0, 2) sowie deren Ergebnisse.

Aufgabe 16

a) Löse das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x - \ \ y &= 4 \\ \text{und } 2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x - \square\, y &= 4 \\ \text{und } 2x + 4y &= 0 \end{aligned}$$

Ergänze in der ersten Gleichung eine Zahl vor dem y so, dass das Gleichungssystem keine Lösung hat.

c) Lässt sich in der ersten Gleichung eine Zahl vor dem y so ergänzen, dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat? Begründe deine Aussage.

Aufgabe 17

Der Umfang eines Rechtecks beträgt 28,8 cm. Der Flächeninhalt wird um 17,35 cm^2 kleiner, wenn die eine Seite um 4,5 cm verlängert und die andere um 3,5 cm verkürzt wird.
Gib ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Seitenlängen an.

Aufgabe 18

Erstelle eine Wertetabelle für $x = -3, -2, \ldots, 3$, zeichne den Graphen und begründe, ob eine Funktion vorliegt:

a) $|y + x| = 1$ b) $y + |x| = 1$

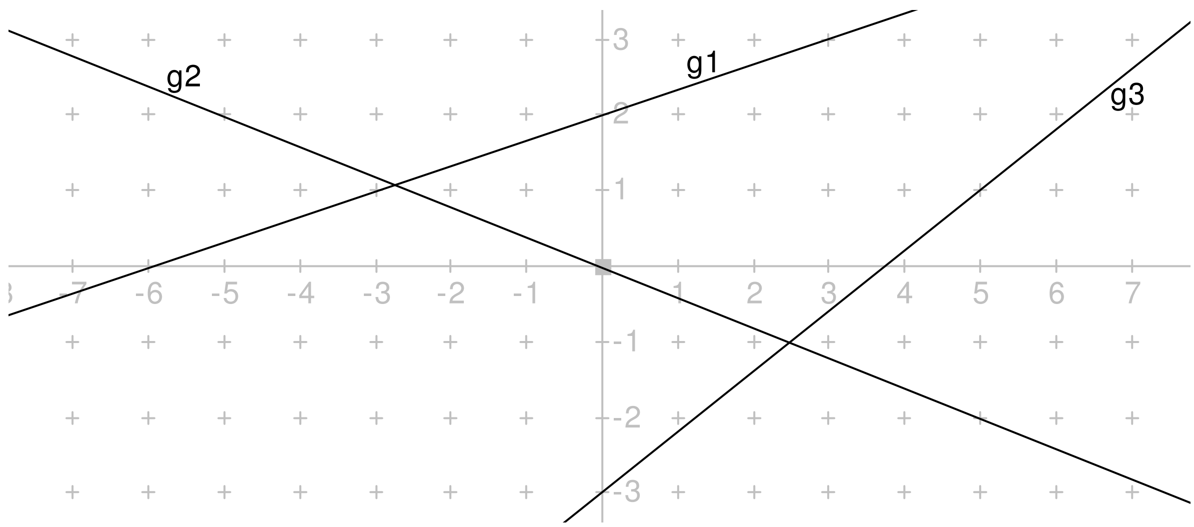
Aufgabe 19

Zeichne die Graphen folgender Funktionen verschiedenfarbig in ein gemeinsames Koordinatensystem:

a) $y = 2x - 3$ b) $y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ c) $y = -x$ d) $y = -0{,}6x - 0{,}5$ e) $y = \frac{x}{2} + 2$

Aufgabe 20

Lies die Gleichungen der unten gezeichneten Geraden ab.



Aufgabe 21

a) Zeichne eine Gerade mit der Steigung 0 und gib deren Gleichung an.

b) Zeichne eine Gerade, für die keine Steigung definiert ist und gib ihre Gleichung an.

Aufgabe 22

Die Gerade g soll die Gleichung $y = \frac{2}{47}x - \frac{5}{97}$ haben.

a) Gib die Gleichung für eine Gerade h an, die parallel zu dieser Geraden g ist.

b) Gib die Gleichung für eine Gerade k an, die g auf der y-Achse schneidet.

Aufgabe 23

a) Entscheide rechnerisch, ob der Punkt P(27 | 25) auf der Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{1}{3}x + 36$ liegt.

b) Eine Gerade geht durch die Punkte P(3 | 4) und Q(10 | 2). Ermittle ihre Gleichung.

Aufgabe 24

Nach einem Fußballspiel verlassen die 60000 Besucher das Stadion durch 5 Eingänge. Gehe davon aus, dass dies gleichmäßig erfolgt. Durch jeden der Eingänge gehen pro Minute 300 Zuschauer. Betrachte die Funktion *Zeit nach dem Spiel (in min) → Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind.*

a) Vervollständige die Wertetabelle:

Zeit nach dem Spiel (in min)	0	1	5
Anzahl der Zuschauer, die noch im Stadion sind			

b) Erstelle eine Gleichung für diese Funktion.

c) Bestimme, wann das Stadion leer ist.

Aufgabe 25

Die Geradenschar $f(x, m) = m \cdot x + 4 + m$ soll untersucht werden.

a) Zeichne einige Geraden der Schar.

b) Beschreibe die Schar und begründe deine Vermutungen.

c) Was bedeutet f(3, m)? Verdeutliche dies in der Skizze.

d) Welche Gerade der Schar verläuft durch den Punkt P(2 | 16)?

Aufgabe 26

Der Zusammenhang zwischen Temperaturangaben in Celsius und Fahrenheit ist linear. Wasser gefriert bei 32 °F und kocht bei 212 °F.

a) Skizziere die zugehörigen Punkte in einem °C,°F-Diagramm und berechne die Funktionsgleichung, die den Zusammenhang beschreibt.

b) Gib die Tabelle in 2 °C-Schritten von 4 °C bis 14 °C an.

c) Beschreibe die Änderungsrate.

Aufgabe 27

Die Entfernung zwischen München und Hannover beträgt ca. 480 km. Mit einem Flugzeug wird die Strecke Hannover – München bei Gegenwind in 2,5 Stunden zurückgelegt, der Rückflug München – Hannover bei Rückenwind in 2 Stunden.

a) Berechne die Geschwindigkeit des Flugzeuges bezüglich des Bodens bei Rücken- und bei Gegenwind.

b) Die Geschwindigkeit bezüglich des Bodens setzt sich zusammen aus der Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges und der Windgeschwindigkeit, es gilt:

$$\begin{array}{l}\textit{Geschwindigkeit bzgl. des}\\ \textit{Bodens bei Rückenwind}\end{array} = \begin{array}{l}\textit{Eigengeschwindigkeit}\\ \textit{des Flugzeuges}\end{array} + \textit{Windgeschwindigkeit}$$

$$\begin{array}{l}\textit{Geschwindigkeit bzgl. des}\\ \textit{Bodens bei Gegenwind}\end{array} = \begin{array}{l}\textit{Eigengeschwindigkeit}\\ \textit{des Flugzeuges}\end{array} - \textit{Windgeschwindigkeit}$$

Bestimme die Eigengeschwindigkeit des Flugzeuges unter der Annahme, dass die Eigen- und die Windgeschwindigkeit auf dem Hin- und dem Rückflug konstant und gleich sind.

Aufgabe 28

Bestimme die Werte für a, für die das LGS genau eine Lösung hat. Begründe!

$$\begin{array}{rl} & x - a y = 4\\ \wedge & 2x + 4y = 0\end{array}$$

Aufgabe 29

Zwei Teesorten kosten 10,50 € (Sorte 1) bzw. 13,50 € (Sorte 2) pro 250 g.
Bestimme, wie viel Gramm jeder Sorte man für eine 250 g-Packung zusammenmischen muss, die 12,50 € kosten soll.

Calimero