

Der kürzeste Weg – ein geometrisches Optimierungsproblem

Katrin Eilers

Problemstellung:

Schwimmwettkampf mit „Köpfchen“

Beim *Spieletag für Körper und Geist* sollen die Parallelklassen beim Wetschwimmen gegeneinander antreten. Während des Durchquerens des Beckens muss ein zuvor an einer beliebigen Stelle entlang der Absperrleine befestigter Ring abgeholt werden. Jede Klasse bestimmt die Position für den Ring selbst. Gesucht wird also der Punkt, an dem der Ring befestigt wird, so dass der Weg für die Schwimmer minimal wird.

Das Schwimmbad ist im Rahmen des Wettkampfes zweigeteilt. *Klasse A* startet von *Block 2* und muss das *Ziel 1* oben rechts erreichen, *Klasse B* startet von *Block 7* und muss das *Ziel 2* unten rechts erreichen. Die Absperrleine befindet sich zwischen *Block 4 und 5* (vgl. Abbildung 1) und dient somit gleichzeitig als Spiegellachse.

Modellbildung und Mathematisierung:

Sucht man den kürzesten Weg zwischen zwei Punkten S und Z, der jedoch über einen dritten Punkt R führen muss, dessen Lage beliebig auf einer Geraden b zu ändern ist, so führt konstruktiv eine Achsenspiegelung zum Ergebnis.

Würden die beiden Punkte S und Z auf verschiedenen Seiten der Geraden b liegen (in Abbildung 2 entsprechend S' und Z), so wäre der Schnittpunkt der Geraden S'Z und b der gesuchte Punkt R. Man erhält also den Punkt R, indem man S an b spiegelt, mit Z verbindet und den Schnittpunkt bestimmt. Es ist der kürzeste Weg gefunden, da $|SR| = |S'R|$. Analog kann man Z spiegeln.

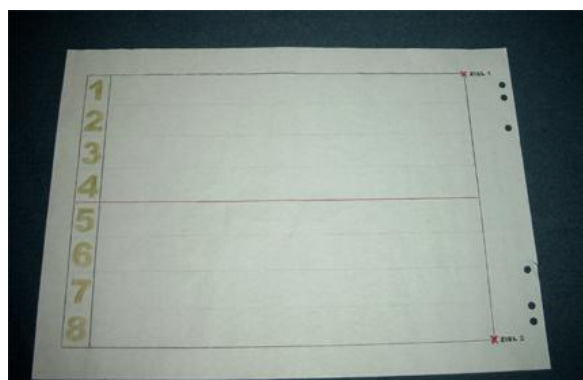


Abb. 1

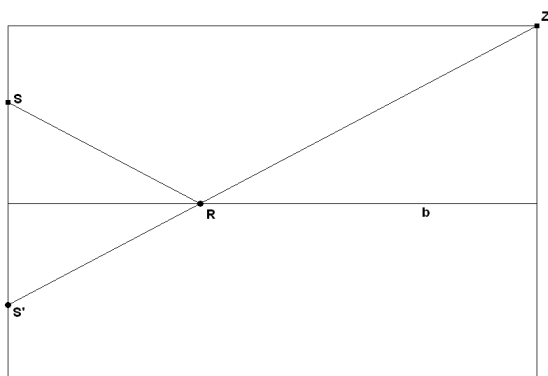


Abb. 2

Ein möglicher Unterrichtsverlauf:

Der Stundenverlauf sollte problemorientiert gestaltet werden, so dass am Anfang das oben geschilderte Problem steht, visuell z.B. durch ein Plakat oder eine Skizze unterstützt. Das Problem soll zunächst in ein geeignetes mathematisches Modell und schließlich in eine formale Beschreibung transferiert werden. Im Rahmen des Problemlösens ist es zunächst wichtig, den Schüler und Schülerinnen Zeit zu geben, das Problem zu verstehen, ggf. Fragen zu klären und erste Vermutungen aufzustellen. Insbesondere sollte das Problem klar herausgestellt werden. Erste Vermutungen können hierbei zur Motivation mit Punkten auf dem Plakat markiert werden.

Es wird vermutlich zu den ersten Ideen der Schüler und Schülerinnen gehören, den kürzesten Weg mithilfe des Messens zu bestimmen. Dieser handlungsorientierte Zugang kann auf verschiedenen Wegen erfolgen: händisch mit Linealen, Fäden und Maßbändern auf vorbereiteten Plakaten, aber auch mit dynamischer Geometrie-Software auf dem PC bzw. Voyage™200. Für den TI-84 Plus ist die Flash-Applikation GeoMaster™ verfügbar, die mithilfe des Zugmodus ein experimentelles Ergebnis ermöglicht.

GeoMaster™ wird zunächst über **[APPS]** aufgerufen, ggf. wird eine neue Datei geöffnet (**NEW FILE**). Über die **[GRAPH]**-Taste (**[F5]**) ist die Menü-Leiste aufrufbar: Über **[Y=]**[F1] für **[FILE]**, **[WINDOW]**[F2] für **[DRAW]**, **[ZOOM]**[F3] für **[MEAS]**, **[TRACE]**[F4] für **[TRFM]** und **[GRAPH]**[F5] für **[MISC]** sind die einzelnen Menüs anwählbar (Abbildung 3).



Abb. 3

Zur besseren Vergleichbarkeit werden die Koordinaten der Startblöcke und der Ziele festgelegt. Im Beispiel hier werden folgende Werte verwendet:

Block 2: (-40|15), *Block 7:* (-40|-15),
Ziel 1: (40|25), *Ziel 2:* (40|-25), *Absperrleine:* $y = 0$.

Die Eingabe der Punkte erfolgt über **[F2][DRAW] 1:POINT [ENTER]**. Mit den Cursorstasten sind die jeweiligen Punkte anwählbar, die aktuellen x- und y-Koordinaten der Cursorposition werden angezeigt, mit **[ENTER]** wird der Punkt festgelegt. Der voreingestellte Zeichenbereich mit $-47 \leq x \leq 47$ und $-31 \leq y \leq 31$ liefert ganzzahlige Koordinaten für die Cursorposition.

Die Absperrleine wird über **[GRAPH], [F2][DRAW] 2:LINE [ENTER]** angewählt und zwei Punkte im Koordinatensystem mit **[ENTER]** bestätigt, um die Lage der Leine festzusetzen. In der Abbildung wurden die Punkte $P_1(-47|0)$ und $P_2(47|0)$ gewählt. Der Ring (Punkt R) kann über den Befehl **POINT ON OBJECT** im Menü **[F2][DRAW]** an die Absperrleine fixiert werden. Der Punkt lässt sich dann durch Anklicken mit **[ENTER]** anwählen und auf der Linie bewegen. Die Verbindung der Punkte von Start bzw.

Ziel und dem Ring erfolgt über [F2][DRAW] und 3:SEGMENT und der Auswahl der gewünschten Punkte.

Die Länge der Strecken zwischen *Block 2* und dem variablen Punkt *R* auf der Absperrleine, sowie zwischen *R* und dem *Ziel 1* lassen sich mithilfe von GeoMaster™ messen und addieren (Abbildung 4). Im Menü [F3][MEAS] wählt man hierzu den Befehl 1:Distance/Length aus und wählt die gesuchten Strecken aus. Die angezeigten Werte lassen sich über die Cursortasten an die gewünschte Position verschieben. Ebenfalls über das Menü [F3][MEAS] lässt sich die Summe der zwei Strecken berechnet. Man wählt 4:Calculate aus, bestätigt den ersten Wert, gibt dann das Additionszeichen ein, bestätigt den zweiten Wert und lässt sich das Ergebnis durch [STO] anzeigen. Durch Variation des Punktes *R* entlang der Absperrleine lässt sich nun die aktuelle gesamte Schwimmstrecke direkt ablesen.

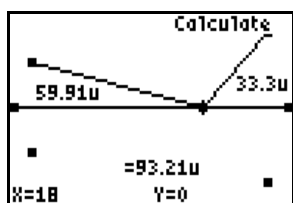


Abb. 4

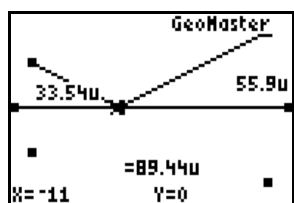


Abb. 5

Der optimale Punkt für den kürzesten Weg wird somit experimentell durch Verschieben ermittelt (Abbildung 5). Erfolgt die Darstellung sowohl für Klasse A als auch für Klasse B, so ist eine Achsenspiegelung erkennbar und kann als möglicher Weg zur Problemlösung herausgestellt und anschließend mittels GeoMaster™ angewendet werden (Abbildung 6).

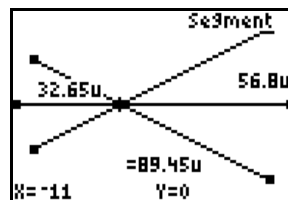


Abb. 6

Die Autorin:

Katrin Eilers
 Gymnasium Großburgwedel
 E-Mail: keilers@vr-web.de