Energieertrag einer Photovoltaik-Anlage: Eine Anregung für den Mathematikunterricht

Jürgen Enders

Im Sommer 2011 wurde auf unserem Schulgrundstück eine Photovoltaik-Anlage errichtet. Das Solarzellen-Modul ist an einem Mast befestigt und kann nachgeführt werden (Abb.1). Es hat eine Fläche von 51 m² und eine Spitzenleistung von 7,35 kW. Die Anlage ist so aufgebaut, das nur in den Wintermonaten Dezember und Januar zeitweise eine leichte Abschattung durch einen Gebäudeteil erfolgt. Über Wechselrichter wird die gewonnene Energie in das Stromnetz eingespeist und mit derzeit 0,28 € pro kWh (Stand: Februar 2012) vergütet. Dieser Ertrag kommt aber der Schule nicht zugute, da die Stadtwerke die Anlage errichten ließen und auch betreiben.

Abb.1

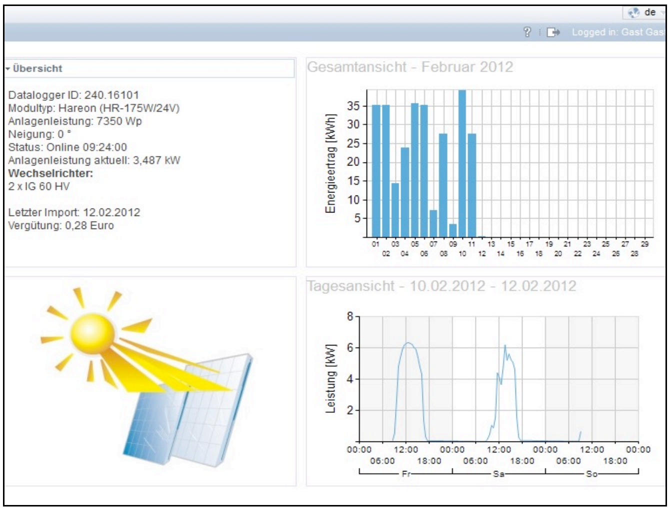

Abb.2

Die Daten der Anlage können von den Lehrkräften unserer Schule im Internet abgerufen werden, wo sie sehr übersichtlich präsentiert werden (Abb.2).

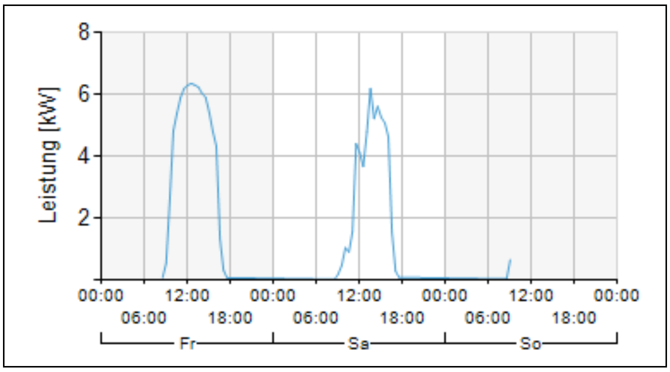

Abb.3

Abbildung 3 zeigt den zeitlichen Verlauf der elektrischen Leistung für 2 Wochentage (Freitag, den 10.02.2012, und Sonnabend, den 11.02.2012). Am Sonnabend war der Himmel zeitweise leicht bewölkt; am Freitag hingegen schien die Sonne ungestört den ganzen Tag. Diesen Tag möchte ich nun näher untersuchen.

Die Anlage überträgt halbstündlich den aktuellen Wert der Leistung und erstellt daraus das Diagramm P(t), einen Polygonzug, aus dem man die Messwerte übernehmen kann (vgl. Abb.4 und Tabelle 1). Dem Säulendiagramm in Abb.2 oben rechts kann man entnehmen, dass am Freitag etwa 40 kWh elektrische Energie E in das Stromnetz eingespeist wurden. Der genaue Wert ist 39,29 kWh.

Wie genau lässt sich dieser Wert aus den vorliegenden Daten ermitteln? Die Darstellung für einen Tag kann so verändert werden, dass man die Messwerte ablesen und in eine Tabelle übertragen kann. Der Verlauf des Graphen ist sehr schön glatt mit einer kleinen Störung im rechten Teil – das ist die oben erwähnte Abschattung.

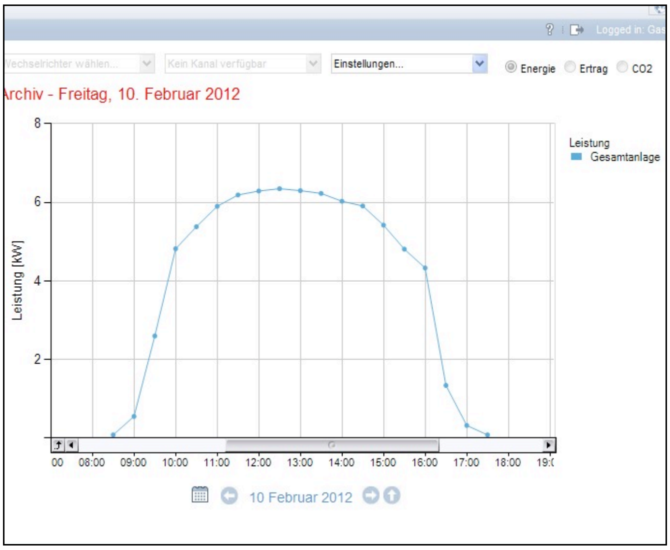

Abb.4

Zeit	8.00	8.30	9.00	9.30	10.00	10.30	11.00
P/kW	0,00	0,08	0,55	2,60	4,82	5,38	5,90
Zeit	11.30	12.00	12.30	13.00	13.30	14.00	14.30
P/kW	6,19	6,29	6,35	6,30	6,23	6,03	5,91
Zeit	15.00	15.30	16.00	16.30	17.00	17.30	18.00
P/kW	5,42	4,81	4,33	1,34	0,32	0,08	0,00

Tabelle 1

Für die Leistung P während eines Zeitraums Δt gilt:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} \Leftrightarrow \Delta E = P \cdot \Delta t$$

Die gesamte Energie ergibt sich durch Summieren:

$$E = \Sigma(\Delta E) = \Sigma(P \cdot \Delta t)$$

Sie wird also durch die Fläche unter dem Graphen der Leistung dargestellt. Die Leistung (auch Energiestrom genannt) ist damit die Änderungsrate, aus der auf den Bestand (die Energie) geschlossen wird. Damit ist die Auswertung der Daten ein wirklichkeitsnahes, praxisorientiertes Beispiel zur Einführung der Integralrechnung.

Berechnung von Ober- u. Untersummen

Bei der Flächenberechnung sind mehrere Ansätze denkbar. Dazu müssen die Daten nach Lists&Spreadsheet übertragen werden (Abb.5, Spalten t und p). In Abbildung 6 wurde damit das Streudiagramm (verbundene dicke Punkte) erstellt. Für die Berechnungen ist es zweckmäßig, eine weitere Spalte p2 einzufügen, in der die Daten aus p durch *shift('p,1)* um 1 nach oben verschoben sind (Abb.7).

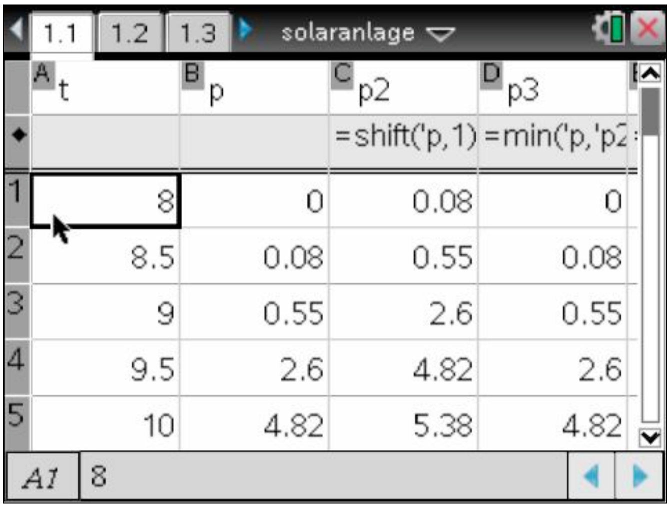

Abb.5

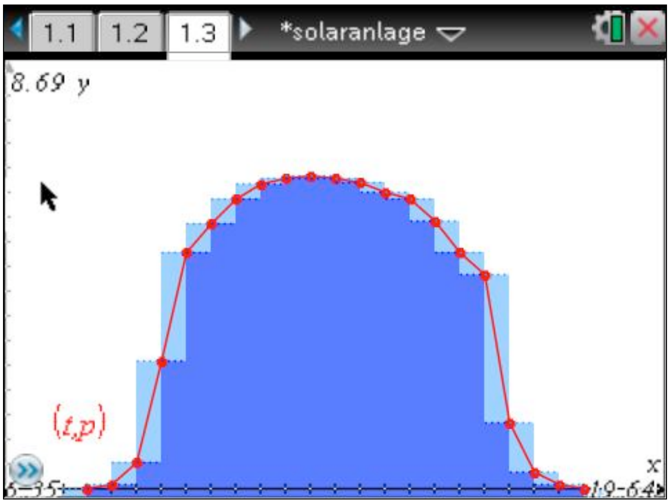

Abb.6

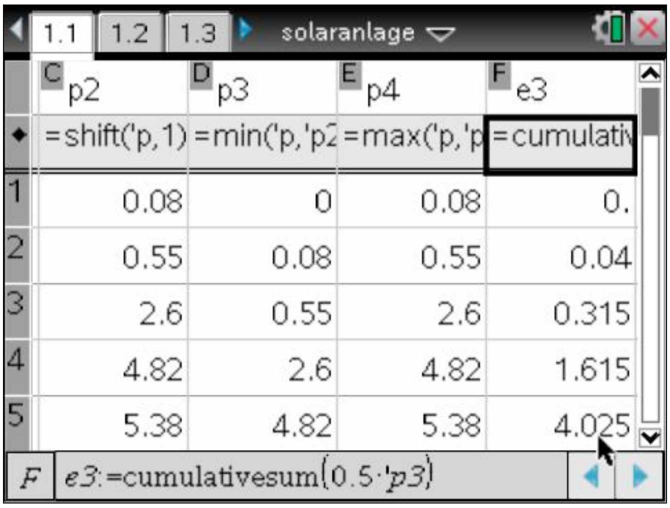

Abb.7

Für die **Untersumme** (dunkle Fläche in Abb.6) wird in p3 zeilenweise das Minimum aus p und p2 abgespeichert (*min('p,'p2)*). In e3 werden dann die einzelnen Rechteckflächen mit der Fläche 0,5·p3 errechnet und zur Gesamtfläche (Gesamtenergie) aufsummiert (*cumulativsum(0,5*'p3)*). Für die **Obersumme** (helle Fläche in Abb.6) werden in p4 das Maximum aus p und p2 und in e4 die Gesamtenergie berechnet.

Man erhält E_U = 36,29 kWh und E_O = 42,64 kWh, erwartungsgemäß sehr schlechte Näherungen für den tatsächlichen Wert E = 39,29 kWh.

Trapezsummen, Mittelwert

Eine bessere Näherung ist zu erwarten, wenn man die **Fläche unter dem Polygonzug** berechnet. Sie setzt sich aus Trapezen zusammen, die sich mit den schon erzeugten Daten leicht errechnen lassen, indem man in einer weiteren Spalte e5 den Mittelwert aus e3 und e4 bildet. Damit erhält man die Näherung E_T = 39,465 kWh. Da die Abweichung zum tatsächlichen Wert lediglich ca. 0,5% beträgt, liegt hier eine sehr gute Annäherung vor, die sich mit dem vorliegenden Datenmaterial auch nicht weiter verbessern lässt. Die geringe Abweichung lässt sich wohl dadurch erklären, dass in der Realität Δt sicher wesentlich kleiner ist als 30 Minuten. Kürzere Zeitintervalle würden zu mehr Daten und zu einem „glatteren“ Polygonzug führen und eine genauere Berechnung ermöglichen. Diese Daten stehen aber nicht zur Verfügung.

Alternativ könnte man auch versuchen, den Polygonzug durch geeignete Funktionen zu glätten oder durch eine Regression zu modellieren. Leider bietet der Taschenrechner keine passende Regression, und so erscheint mir eine bessere Annäherung an den tatsächlichen Wert bei vertretbarem Rechenaufwand nicht sinnvoll.

Autor:
Jürgen Enders
Humboldt-Gymnasium, Bad Pyrmont
aj.enders@t-online.de