Schwingungsgleichung eines elektromagnetischen Reihenschwingkreises

Gerald Kaiser

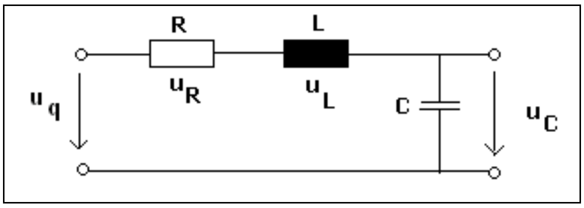

Abb.1

Gegeben ist ein elektrischer Serienschwingkreis mit R = 10 Ω, L = 2 mH und C = 2µF. Es ist die Differentialgleichung für den Strom i(t) aufzustellen. Für die erzwungene Schwingung wird eine sinusförmige Wechselspannung

$$u_q(t) = u \cdot \sin(\omega \cdot t) = 20 \cdot \sin(2000 \cdot t)$$

angelegt. Es sollen dabei drei Fälle untersucht werden: (1.) Freie ungedämpfte Schwingung; (2.) Freie gedämpfte Schwingung; (3.) Erzwungene Schwingung. Die Lösungen der einzelnen Fälle sollen auch grafisch dargestellt werden.

Aufstellen der Differentialgleichung (DGL):

Aus dem 2.Kirchhoffschen Gesetz (Maschenregel) erhält man den Ansatz für die Differentialgleichung:

$$u_L + u_R + u_C - u_q = 0$$

Für die einzelnen Spannungen an der Spule, am Widerstand und am Kondensator gelten die Beziehungen:

$$u_L = L \cdot \frac{di(t)}{dt}; \quad u_R = R \cdot i(t); \quad u_C = \frac{1}{C} \cdot q(t)$$

Einsetzen in die Maschenregel und anschließendes differenzieren der DGL nach der Zeit t führt auf:

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + \frac{1}{C} \cdot q(t) = u_q(t)$$

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{L \cdot C} \cdot \frac{dq(t)}{dt} = \frac{1}{L} \cdot \frac{du_q(t)}{dt}$$

Ersetzt man

$$\frac{R}{2L} = \delta\,; \quad \frac{1}{L \cdot C} := \omega_0^2 \quad \text{und} \quad \frac{dq(t)}{dt} = i(t),$$

so erhält man die Schwingungsgleichung in der üblichen Form. Dabei handelt es sich um eine lineare inhomogene DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{du_q(t)}{dt}$$

Freie Schwingung

Der Kondensator wird bei offenem Schalter auf die Spannung u_q = u aufgeladen. Zum Zeitpunkt t = 0s wird der Schalter geschlossen und der Kondensator beginnt sich zu entladen.

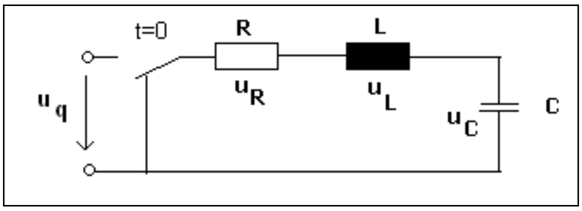

Abb. 2

Es fließt ein Strom i(t). Bei einer freien Schwingung ist die Summe der drei Spannungen null. Dies führt zur DGL

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0 \qquad (1)$$

Eine freie Schwingung wird durch eine lineare homogene Differentialgleichung 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben. Es gelten dabei die Anfangsbedingungen i(0)=0 bzw, für t=0:

$$0 + L \cdot \frac{di(0)}{dt} + u = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{di(0)}{dt} = -\frac{u}{L}$$

Sieht man vom Vorzeichen ab (Umkehrung der Stromrichtung), gelten die Anfangsbedingungen: i(0) = 0 bzw.

$$\frac{di(0)}{dt} = \frac{u}{L}$$

Freie ungedämpfte Schwingung:

Eine freie ungedämpfte Schwingung tritt auf, wenn der ohmsche Widerstand R = 0 (und somit die Abklingkonstante δ = 0) ist. Dies führt zur DGL:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot i(t) = 0$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung mit Hilfe des TI-Nspire™ ist in den Abbildungen 3, 4 und 5 dargestellt.

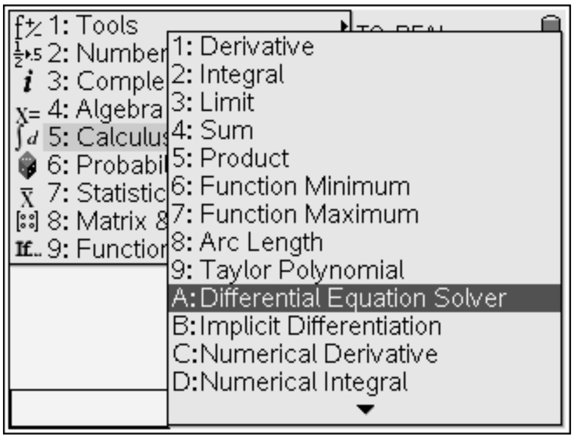

Abb. 3

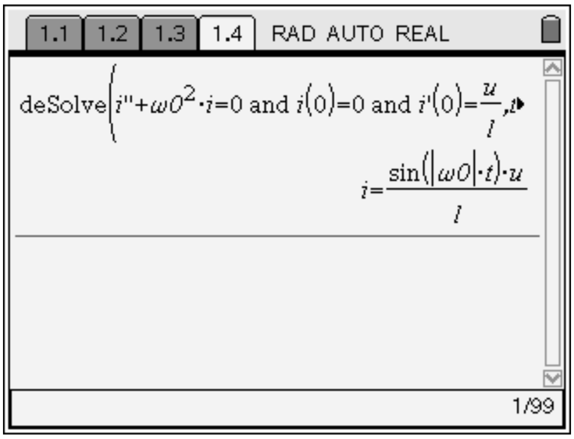

Abb. 4

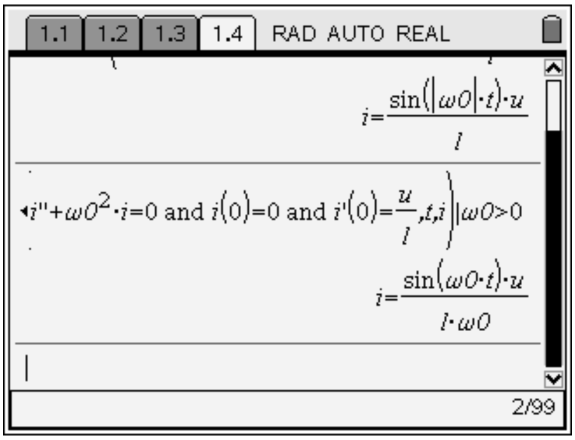

Abb. 5

Die Lösung der DGL ergibt den Strom

$$i(t) = \frac{U}{\omega 0 \cdot L} \cdot \sin\left(\omega 0 \cdot t\right)$$

Für die grafische Darstellung werden die Werte für ω_0, U, L und C abgespeichert.

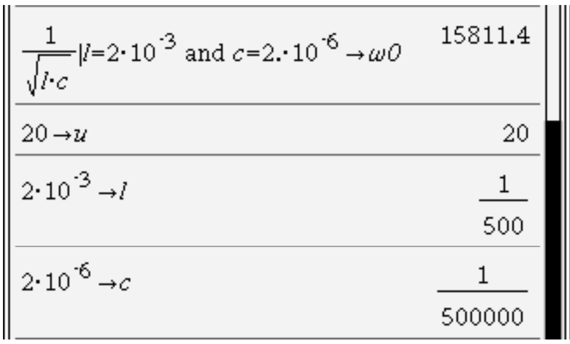

Abb. 6

Die Grafische Darstellung der freien ungedämpften Schwingung wird in den Abb. 7 und 8 gezeigt.

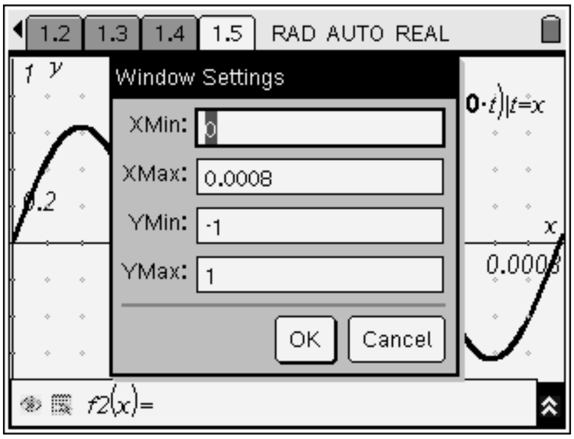

Abb. 7

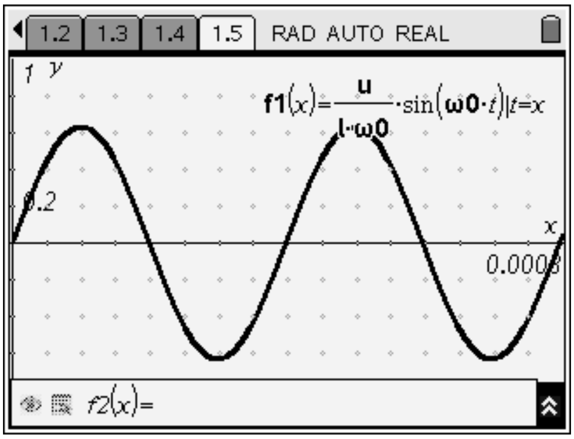

Abb. 8

Freie gedämpfte Schwingung:

Für die freie gedämpfte Schwingung werden in der Differentialgleichung nach (1) zwei Fälle unterschieden

a) $\delta \neq \omega 0$ (Schwingfall)
b) $\delta = \omega 0$ (Aperiodischer Grenzfall)

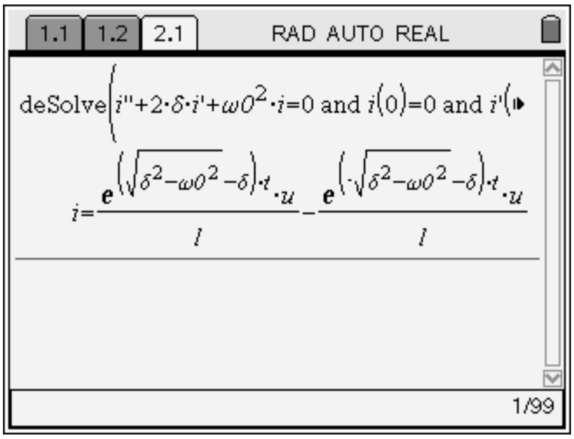

Abb. 9

Um sofort auf die gewünschten Lösungen zu kommen, ist es besser vor der Lösung der Differentialgleichung die Werte für die Abklingkonstante δ und die Eigenfrequenz ω0 abzuspeichern.

Zu a) Schwingfall: $\delta \neq \omega 0$

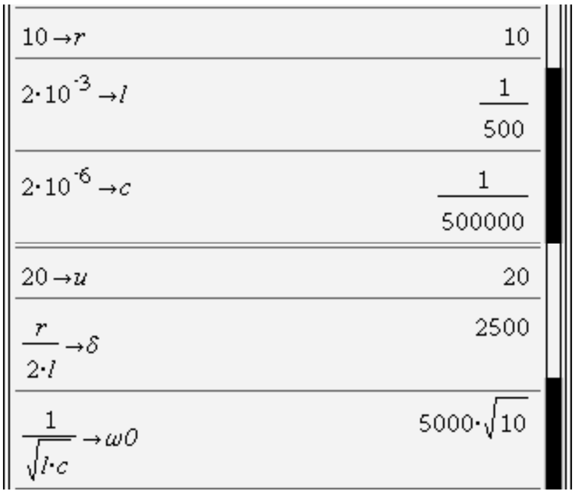

Abb. 10

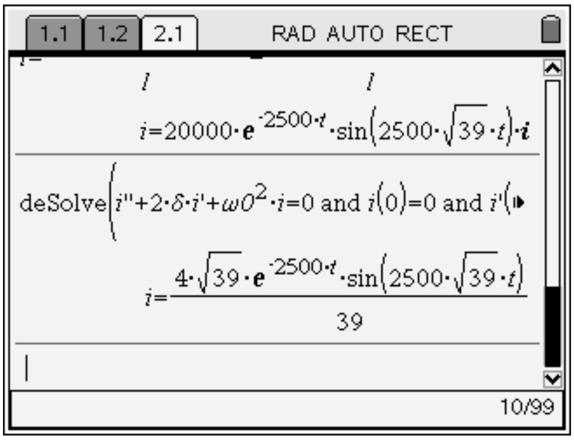

Abb. 11

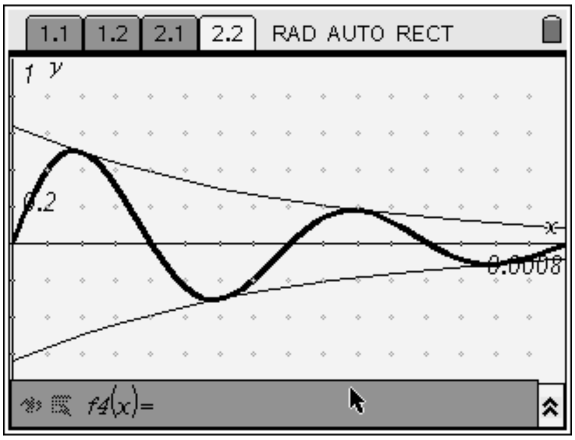

Abb. 12

Die Lösung der DGL liefert den Strom i(t) im Schwingkreis.

$$i(t) = \frac{4\sqrt{39}}{39} \cdot e^{-2500t} \cdot \sin\left(2500\sqrt{39} \cdot t\right) = 0.64 \cdot e^{-2500t} \cdot \sin(15612.5 \cdot t)$$

Aus dieser Lösung extrahiert man noch die Gleichungen für die Hüllkurven:

$$H(t) = \pm\frac{4\sqrt{39}}{39} \cdot e^{-2500t}$$

Zu b) Aperiodischer Grenzfall: δ=ω0

Einfachheitshalber speichern wir δ unter ω0 ab. Normalerweise müßte man eine der Größen (elektrischer Widerstand R oder Induktivität L oder Kapazität C) abändern.

$$\delta = \omega 0$$

$$\frac{R}{2 \cdot L} = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

Man könnte hier natürlich auch noch den Kriechfall behandeln, der dann auftritt, wenn die charakteristische Gleichung zwei reelle Lösungen besitzt. Daraus ergibt sich dann auch der Zusammenhang zwischen der Abklingkonstanten δ und der Eigenfrequenz ω0.

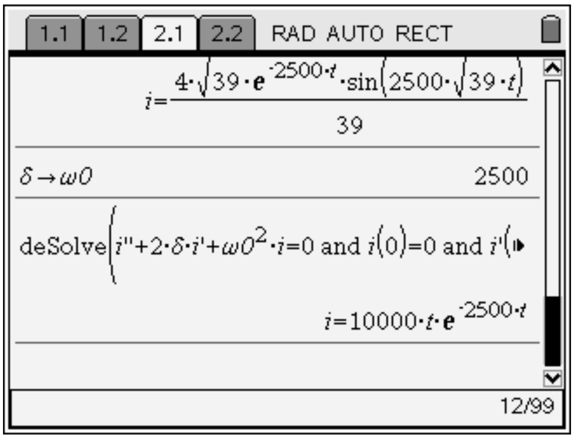

Abb. 13

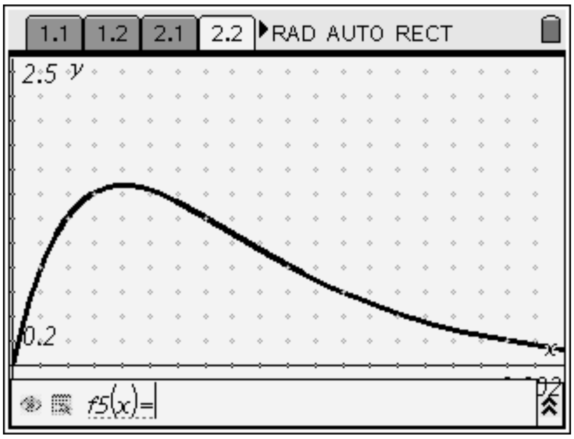

Abb. 14

Die Lösung der DGL liefert den Strom i(t) für den aperiodischen Grenzfall.

$$i(t) = 1000 \cdot t \cdot e^{-2500t}$$

Erzwungene Schwingung:

Am Schwingkreis liegt nun eine sinusförmige Erregerspannung

$$u_q(t) = u \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Diese Schwingungsform wird durch eine lineare inhomogene DGL 2.Ordnung mit konstanten Koeffizienten beschrieben:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{di(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot i(t) = \frac{u \cdot \omega}{L} \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

mit i(0)=0 bzw. $\frac{di(0)}{dt}$=0.

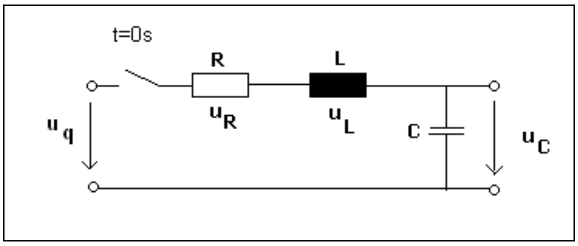

Abb. 15

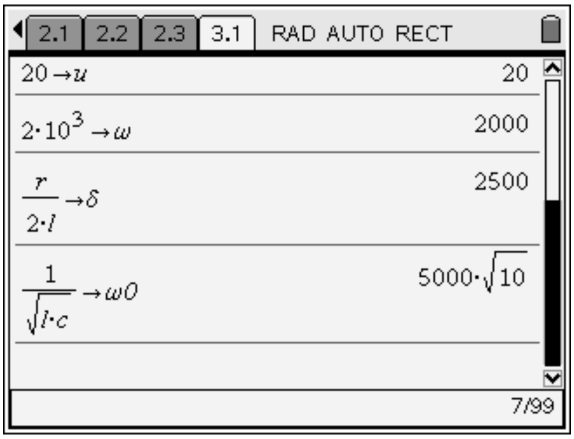

Abb. 16

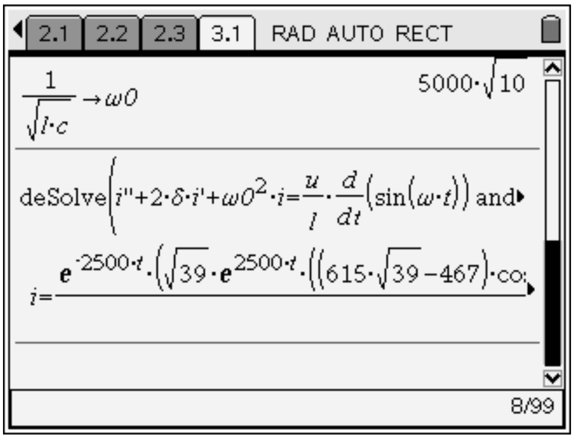

Abb. 17

Wenn die Störfunktion eine trigonometrische Funktion ist, ist die spezielle Lösung (wie bei jedem Computeralgebrasystem) wesentlich komplizierter als bei einer händischen Berechnung.

$$\begin{aligned} i(t) = {} & 0.08 \cdot e^{-2500t} \cdot \sin(15612.5t - 1.73) + 0.02 \cdot \sin(2000t + 1.22) - 0.02 * \sin(2000t - 1.43) \\ & - 0.02 * \cos(2000t - 1.43) + 0.02 * \cos(2000t) + 0.02 * \cos(33324.99t + 3.00) \\ & + 0.02 * \sin(33324.99t + 1.43) \end{aligned}$$

In der ersten Grafik kann man sehr gut den Einschwingvorgang erkennen. In der zweiten Grafik sind der flüchtige Anteil (Teil der Gleichung mit der Exponentialfunktion) und der stationäre Anteil getrennt dargestellt.

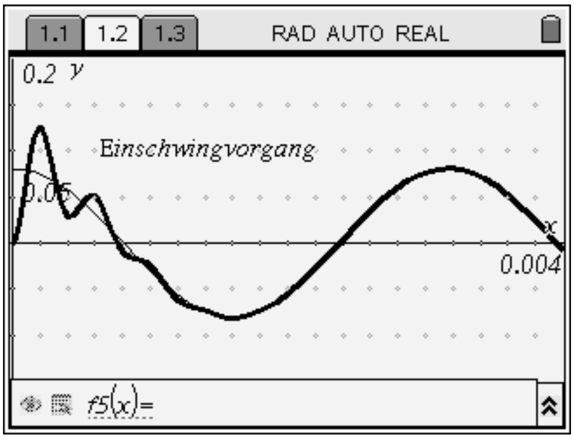

Abb. 18

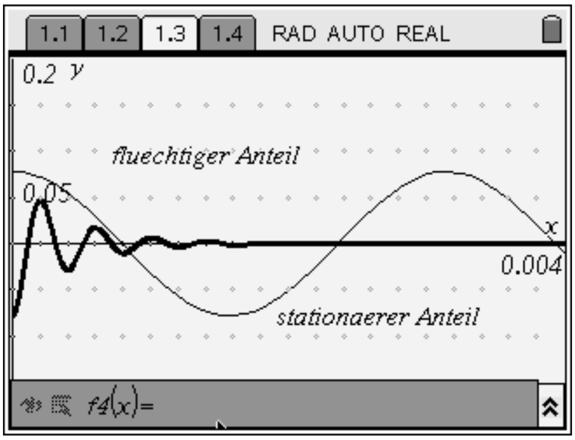

Abb. 19

Da der stationäre Anteil (entspricht der partikulären Lösung der DGL) in ungewohnter Form dargestellt ist, kann man eine Kontrolle durchführen. Dazu wird der Ansatz

$$i_p(t) = a \cdot \sin(\omega \cdot t) + b \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

in die DGL eingesetzt:

$$\frac{d^2 ip(t)}{dt^2} + 2\delta \cdot \frac{dip(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot ip(t) = \frac{1}{L} \cdot \frac{du_q(t)}{dt}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem, das nach den Koeffizienten a und b gelöst wird.

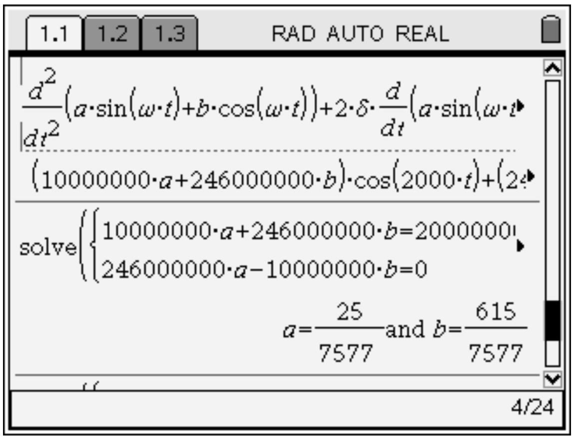

Abb. 20

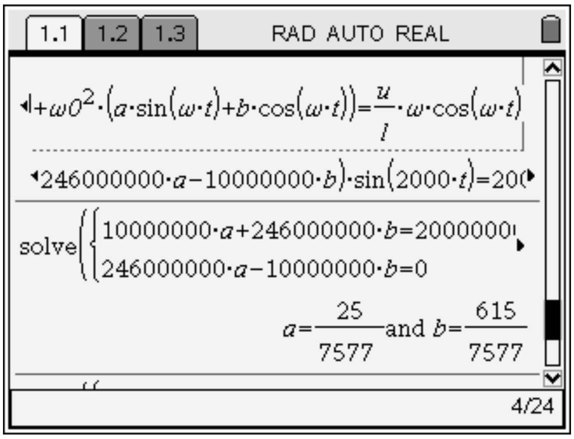

Abb. 21

Die Koeffizienten werden in den Ansatz eingesetzt und man erhält die partikuläre Lösung. Dass die beiden Lösungen (vordefinierte desolve - Funktion vom TI-Nspire[TM] und die ermittelte Lösung) übereinstimmen wird durch einen grafischen Vergleich gezeigt. Zu diesem Zweck ändert man die Linienart der vorher gezeichneten stationären Lösung auf punktiert. Anschließend legt man die ermittelte Funktion ip(t) über die vorher gezeichnete Funktion.

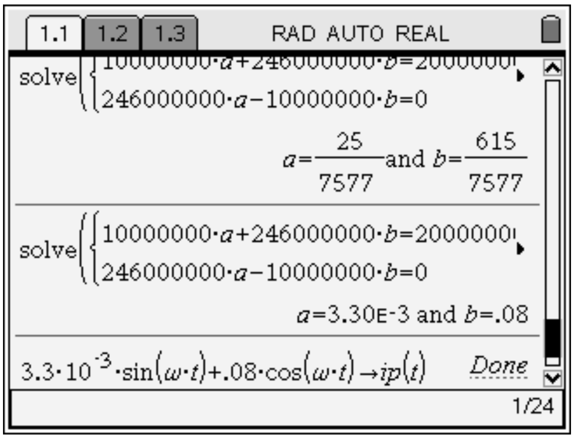

Abb. 22

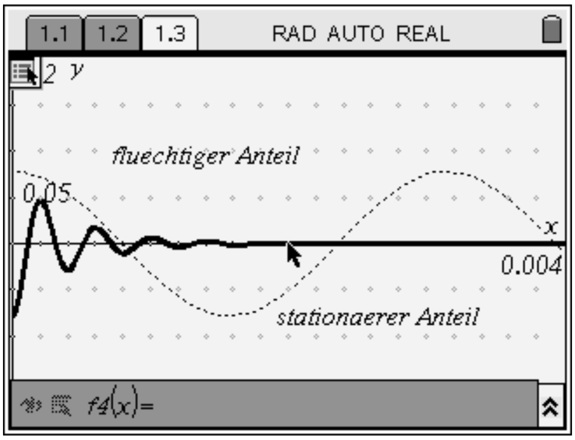

Abb. 23

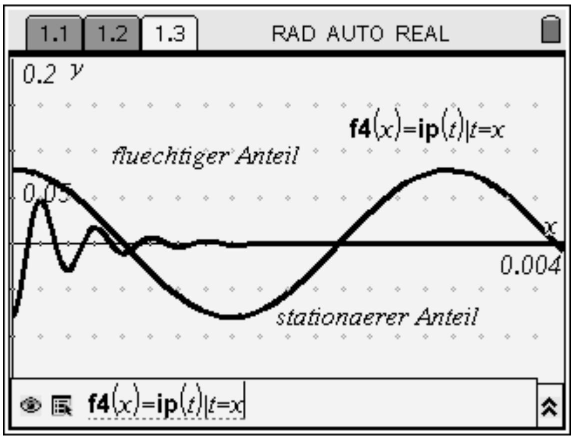

Abb. 24

Man kann sehr gut erkennen, dass die beiden Funktionen identisch sind.

Autor:
Dr. Gerald Kaiser, Kapfenberg (Österreich)
HTBL Kapfenberg