

Vorbemerkungen

Es wird ein Kurzbericht zu einer projektartig angelegten Unterrichtsreihe zum Modellieren innerhalb eines Analysis-Grundkurses vorgestellt. Die grundlegenden Fertigkeiten (Ableitungen, Bestimmen von Funktionen aus Nebenbedingungen) waren den Schülerinnen und Schülern aus Klasse 11 bekannt aber nicht gleichermaßen routinisiert präsent. Auf der inhaltsbezogenen Ebene diente die Einheit der Wiederholung und Einführung neuer Verfahren im Themenkreis Interpolation, auf der prozessorientierten Ebene standen Modellieren, Argumentieren, Darstellen und Präsentieren im Vordergrund. Der Rahmen war so gestaltet, dass der Kurs eine Forschungs- und Entwicklungsabteilung für Mathematisierungen darstellte und durchweg selbsttätig bezüglich der Inhalte und Organisationsformen arbeiten sollte. Der Lehrer war als Experte für mathematische Spezialprobleme ständiger Ansprechpartner und Koordinator. Die Lerngruppe war damit durchweg Motor des Geschehens, der Lehrer bündelte, fasste zusammen und sicherte den Überblick. Intensive, teilweise lang andauernde Gruppenarbeitsphasen wechselten sich mit ebenso intensiven, längeren, sach- und problembezogenen Gesprächsphasen im Plenum ab. Über diese Grobstruktur hinaus gab es keine kleinteiligere Vorbereitung des Ablaufs, denn die Ideen, Probleme und Bearbeitungen der Schüler sollten die weiteren Wege und teilweise auch methodischen Ausgestaltungen bestimmen. Den Schülern stand ein GTR zur ständigen Verfügung (TI-84 Plus).

Projektverlauf und Durchführung

Die Aufgabe

Ein Designer konstruiert in freier Skizze eine Vasenform oder er stellt ein reales Modell her. Für die computergestützte, industrielle Fertigung (CAD) soll die Form durch eine geeignete Kurve beschrieben werden



Abb. 1

Vorüberlegungen

Im Plenum wurden zunächst gemeinsam Vorüberlegungen angestellt und dokumentiert:

- Die Vase hat einen Sockel. Soll der berücksichtigt werden, was realistisch wäre, oder soll er zunächst weggelassen werden wegen des Aufwandes? Es wird entschieden, ihn zuerst einmal wegzulassen.
- Damit man als Lösung eine Funktion erhält, wird die Höhe in Richtung der x-Achse abgetragen, der Boden liegt dann auf der Y-Achse.

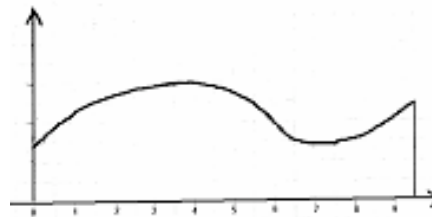


Abb. 2

Erste Ideen und Lösungen

1. Idee: Man liest einige Punkte ab und bestimmt das Interpolationspolynom. Das Bestimmen eines solchen Polynoms ist Hausaufgabe. Da über die Art der Skalierung im Vorfeld nichts erörtert wird, gibt es verschiedene, teilweise schwer vergleichbare Lösungen. Die vielleicht naheliegende Skalierung 1 Einheit $\hat{=}$ 1cm wird nicht von allen benutzt. Exemplarisch werden hier zwei Lösungen vorgestellt (Angaben in cm):

Silke:

x	0	3,5	7,5	9,5
y	1,6	3	1,4	2,4

$$f_1(x) = 0,027x^3 - 0,404x^2 + 1,483x + 1,6$$

Insa:

x	0	2,5	5	7
y	1,5	2,5	1,5	3

$$f_1(x) = 0,059x^3 - 0,605x^2 + 1,542x + 1,5$$

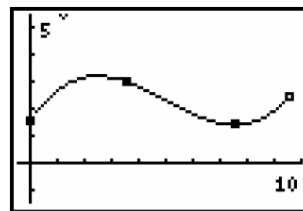


Abb. 3: Silke

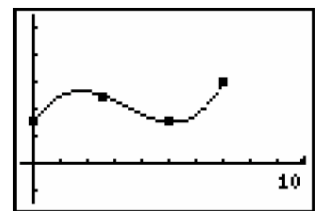


Abb. 4: Insa

Aufgrund der unterschiedlichen Skalierung lassen sich beide Lösungen schlecht vergleichen (vgl. Abb. 3 / Abb. 4); ein entsprechendes 'Umrechnen' liefert:

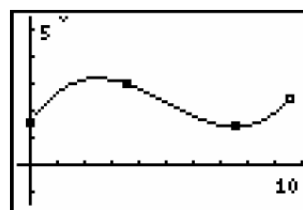


Abb. 5: Silke

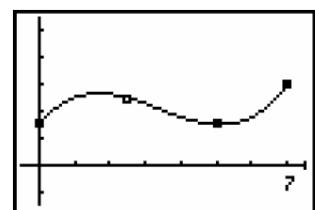


Abb. 6: Insa

Um herauszufinden, ob diese Modelle zur realen Vase passen, wird eine auf Displaygröße gestauchte Skizze der Vase hergestellt und entsprechend auf das Display gelegt. Der Vergleich zeigt, dass beide Modelle nicht passen. Die Hochpunkte sind an der falschen Stelle, die Form stimmt nicht. Außerdem wird festgestellt, dass die Funktionsgraphen nicht genau durch die Punkte verlaufen, was aber als Rundungsproblem des GTR (Grafik ungenauer als Numerik) erkannt wird. Es ist schon jetzt klar, dass es keine exakte Lösung des Problems geben kann, weil an vielen Stellen Ungenauigkeiten nicht zu vermeiden sind. Dies gilt unabhängig davon, wie genau die Messgeräte sind. So wird z.B. gerundet bei

- dem Übergang von der Vase zur Skizze,
- beim Ablesen der Punkte (vgl. Silke (0|1,6) und Insa (0|1,5)),
- beim Berechnen der Koeffizienten (GTR).

Wie kann das Modell verbessert werden? Schnell ist klar, dass mehr Information verarbeitet werden muss und dies heißt hier in allgemeiner Übereinstimmung: Mehr Punkte ablesen. Dahinter steht die stillschweigend gemachte, nicht hinterfragte, sehr einleuchtende Annahme: *Je mehr Punkte man abliest, desto besser passt die gefundene Funktion.*

Schon hier wird erfasst, dass bei hoher Anzahl von Punkten die Gefahr von Eingabefehlern und Unübersichtlichkeit rapide wächst (30 Punkte: 930 Eingaben; allgemein: n Punkte: n·(n+1) Eingaben). Also muss wohl probiert und abgewogen werden.

Silkes Hinweis, dass sie ja nicht irgendwelche Punkte abgelesen hat, sondern versucht hat, die besonderen, charakteristischen zu benutzen, führt zu einer Alternative: Es sollen weitere charakteristische Elemente der Kurve benutzt werden, also: Statt „viel Gleiches“ lieber „punktuell tiefere Eigenschaften“. Es soll also nicht nur die Lage der Punkte beachtet werden, sondern auch das Änderungsverhalten der Kurve. Damit ergeben sich zwei Arbeitsprogramme und es werden entsprechend zwei Gruppen gebildet, die jeweils an einem Programm arbeiten:

Gruppe A: Es werden mehr Punkte ausgelesen und entsprechende Interpolationspolynome bestimmt (n Punkte: Polynom vom Grad n-1).

Gruppe B: Es werden charakteristische Punkte ausgelesen und dann nach Anzahl der notwendigen Bedingungen entsprechende Polynome in Ansatz gebracht.

Beide Gruppen teilen sich jeweils selbständig in zwei Untergruppen auf, um effektiver arbeiten zu können und beschließen, sich gegenseitig zu beraten und zu informieren. Um eine gute Vergleichbarkeit zu erreichen, wird die Skalierung von Silke von allen übernommen.

In den Teilgruppen aus A werden folgende Messwerte abgelesen:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	9,5
1,6	2,3	2,65	2,9	2,95	2,75	1,95	1,4	1,55	2,1	2,4

A	B	C	D	E	F	G
---	---	---	---	---	---	---

0	1	2	3	3,5	4	5
1,6	2,3	2,7	2,9	3	2,9	2,7

H	I	J	K	L	M	N
5,5	6	7	7,5	8	9	9,5
2,3	1,8	1,4	1,4	1,6	2,2	2,4

Die Gruppe B1 arbeitet mit verschiedenen Ansätzen, sie benutzt Silkes Punkte und zusätzlich ausgewählte Extrem- und Wendepunkte. Die Gruppe B2 kommt zu keinen präsentier- und dokumentierbaren Ergebnissen.

Die Auswertung findet im Plenum statt, die Gruppen berichten gegenseitig, formulieren Fragen und erläutern Probleme, die bei der Bearbeitung entstanden sind.

Gruppe A: Es gibt einige Überraschungen und Irritationen: **(1.)** Die reduzierte Matrix hat nicht das erwartete Aussehen.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,45.. & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7,179.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,001.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,018.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,131.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0,604.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1,737.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2,982.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2,734.. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Die letzten beiden Zeilen liefern jeweils 1 = 0, was bedeuten würde, dass es gar keine solche Funktion gibt. Dies widerspricht der bisher gemachten Erfahrung, dass zu n Punkten immer ein Polynom (n-1)-ten Grades existiert. Eine Nachfrage an den Experten (Lehrer) bestätigt diese theoretische Erkenntnis.

Was nun? Das Problem muss bei der Bearbeitung mit dem GTR liegen. In Folge der teilweise sehr großen Zahlen in dem LGS wird es wohl zu Rundungen kommen, die dann zu der falschen reduzierten Matrix führen. Eine Überprüfung mit leistungsfähigerer Technik bestätigt dies. Da der Lerngruppe kein CAS zur Verfügung steht, wird beim Experten entsprechend nachgefragt. Mit einem CAS (VoyageTM200) erhält man tatsächlich die erwartete Gestalt der reduzierten Matrix und als Lösungsfunktion:

$$f(x) = -0,0000092037771692171 \cdot x^{10} + 0,00046060405524026 \cdot x^9 + 0,0098661650946068 \cdot x^8 + 0,11808763189605 \cdot x^7 - 0,86514573002445 \cdot x^6 + 3,997456003767 \cdot x^5 - 11,567993945896 \cdot x^4 + 20,055228204679 \cdot x^3 - 18,806318164896 \cdot x^2 + 7,778100765292 \cdot x + 1,6$$

(2.) Beim Skizzieren dieser Funktion ergeben sich wieder Besonderheiten, die wiederum Folge von Rundungsfehlern sind, oder auch nicht?! In Abhängigkeit der Anzahl an Dezimalstellen erhält man sehr unterschiedliche Kurvenverläufe:

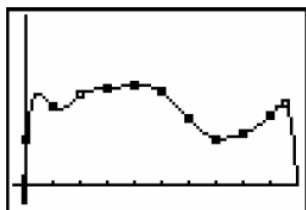


Abb. 7: alle Stellen

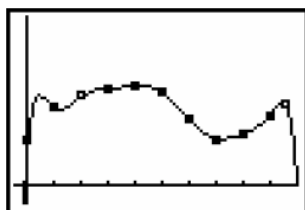


Abb. 8: 12 Stellen

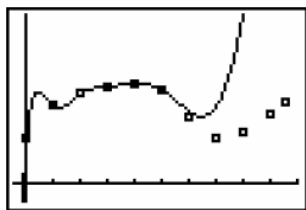


Abb. 9: 8 Stellen

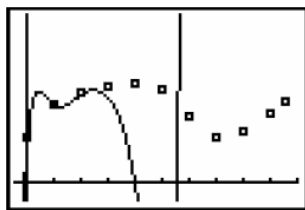


Abb. 10: 4 Stellen

Je höher die Exponenten, desto stärker wirken sich auch minimale Rundungsfehler aus ($2^{10}=1024$; $1,99^{10}=973,93\dots$)! Aber unabhängig davon gibt es einen störenden, unerwarteten 'Buckel' zwischen den ersten beiden Punkten! Dieser scheint unabhängig von der Eingabegenauigkeit zu sein und muss seine Ursache also im mathematischen Hintergrund haben. Die anfängliche, stillschweigend gemachte, von keinem hinterfragte Annahme „Je mehr Punkte, desto besser approximiert das Interpolationspolynom die gewünschte Kurve“ hat sich als falsch entpuppt!

Haben wir hier nur Pech gehabt, ist das hier also ein Sonderfall, oder tritt dieses Phänomen regelmäßig auf? Können wir die Art und Weise des Auftretens antizipieren und dann vielleicht auch vermeiden? Zur selbständigen Überprüfung wird als Hausaufgabe die sukzessive Bestimmung der Interpolationspolynome zu A(0|0), B(1|1), C(2|3), D(3|4), E(5|5) und F(8|6) aufgegeben. Hier erleben die Schüler dann, wie bei Hinzunahme von E Schwankungen entstehen, die bei F noch größer werden. Die Besprechung führt dann zu der neuen Einsicht:

Je mehr Punkte interpoliert werden, desto größer können die Schwankungen werden, sie sind allerdings nicht in Größe und Art antizipierbar.

Gruppe B: Zuerst werden der Hochpunkt (3,5|3) und der Tiefpunkt (7,5|1,4) benutzt, was auch Silkes Absicht entsprach: Aufgrund der zwei zusätzlichen Bedingungen ($f(3,5) = 0$ und $f(7,5) = 0$) ergibt sich eine Funktion fünften Grades:

$$f(x) = 0,001x^5 + 0,032x^4 - 0,293x^3 + 0,962x^2 - 0,570x + 1,6$$

Diese Funktion passt noch schlechter; der zusätzliche Wendepunkt stört erheblich (vgl. Abb. 11).

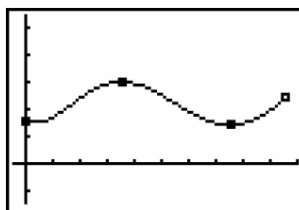


Abb. 11

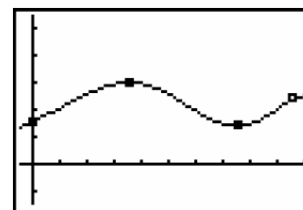


Abb. 12

Der Wendepunkt soll in (0|1,6) liegen, also zusätzliche Bedingung: $f'(0)=0$. Die Lösungsfunktion

$$f(x) = -0,00015x^6 + 0,004x^5 + 0,027x^4 + 0,052x^3 + 0,450x + 1,6$$

passt besser (vgl. Abb. 12), ist aber noch nicht überzeugend. Es wird ein zweiter Wendepunkt bei (5,9|...) angenommen, was dann zu folgender Lösungsfunktion führt:

$$f(x) = -0,000037x^7 + 0,001x^6 + 0,0094x^5 + 0,041x^4 - 0,092x^3 + 0,713x + 1,6$$

Immer noch nicht perfekt. Jetzt könnte man noch die Steigung in (0|1,6) definieren ...

Zwischenergebnis 1

Gruppe A: Interpolationspolynome stellen ein schlechtes Verfahren zur Approximation einer Kurve dar, weil es sowohl schnell zu technischen Problemen (Rundungen, Matrizenrechnung) als auch zu mathematischen Problemen (Schwankungen) kommt. Während hier die Technik noch kein konstitutives Problem darstellt, wenn CAS zur Verfügung steht, bleibt das mathematische Problem unausweichlich bestehen, also: Mehr Mathematik und bessere Technik!

Gruppe B: Die Berücksichtigung charakteristischer Punkte liefert zwar halbwegs akzeptable Ergebnisse, allerdings weiß man vorher nichts über die Güte des Ergebnisses, man muss immer wieder probieren und korrigieren, erhält zwischenzeitlich sogar schlechtere Ergebnisse.

Eine Systematik muss her!

Nach der Präsentation und Diskussion der einzelnen Gruppenergebnisse wurde einsichtig, dass beide Vorgehensweisen nicht optimal sind. Beim Vergleichen bezüglich der Vor- und Nachteile wurde aber für alle deutlich, dass man voneinander lernen kann, das Ganze ist mehr als die Summe der Teile, Gruppenarbeit allein reicht nicht, es muss auch Phasen des gemeinsamen Informierens, Vergleichens und Reflektierens geben. Es war also lohnend gewesen, sich arbeitsteilig intensiv mit den einzelnen, unterschiedlichen Strategien zu beschäftigen, nun konnte man versuchen, die Erfahrungen der jeweils anderen Gruppe im weiteren Vorgehen zu berücksichtigen: Gruppe A von Gruppe B: Beachte besondere Punkte, benutze sie bei der Konstruktion einer Lösungsfunktion. Gruppe B von Gruppe A: Nimm nicht zu viele Bedingungen, es gilt nicht immer „Viel hilft viel“, es können Rundungsprobleme auftreten.

Weitergehende Ideen und Lösungen

Die bisher gefundenen Strategien lassen noch kein mechanisiertes Verfahren zu. Einige suchen nach einer Lösungsformel, einige zweifeln daran, dass es so etwas in diesem Fall

überhaupt gibt. Zwar sind notwendig zu berücksichtigende Aspekte erarbeitet, es fehlen aber hinreichende für ein zielgerichtetes Verfahren. Man ist sich einig: Neue Ideen braucht das Land!

Die Suche nach einer einzigen Funktion, die alle Punkte verbindet und die Form der Vase hinreichend annähert, entpuppt sich als schwierig und schien in eine Sackgasse zu führen. Wenn so etwas passiert, muss man den Mut haben und versuchen, noch einmal ganz anders an die Sache heranzugehen, indem man z. B. wieder an den Anfang zurückgeht. In diesem Fall heißt dies, die abgelesenen Messpunkte noch einmal zum Ausgangspunkt für einen qualitativ anderen Ansatz zu nehmen. Schon in der Anfangsphase wurde während der Vorüberlegungen die zunächst naheliegende Möglichkeit genannt, die Messpunkte durch geradlinige Stücke zu verbinden. Diese Idee war aber sofort verworfen worden, weil in diesem Modell nicht gewünschte Knicke in den Übergangsstellen unvermeidbar sind. Aber vielleicht ist die Grundidee ja fruchtbar, nämlich die Annäherung durch stückweise miteinander verbundene Funktionen, also nicht eine Funktion für alle Punkte, sondern mehrere für einige („divide et impera“).

Es wird der Vorschlag gemacht, die Punkte durch Parabelbögen knickfrei zu verbinden. Es war bekannt, das man zur eindeutigen Bestimmung einer Parabel (als quadratische Funktion) drei Punkte oder drei Bedingungen benötigt. Im Plenum wurde eine Strategie zur konkreten Berechnung von Parabelbögen erarbeitet:

- (i) Zwei benachbarte Punkte; Steigungen im linken Punkt stimmen mit vorheriger Parabel überein („knickfreie Verbindung“);
- (ii) Beginn mit Parabel durch die Punkte A, B und C.

Es werden die 11 Punkte der Gruppe A1 benutzt (vgl. Abb. 13).

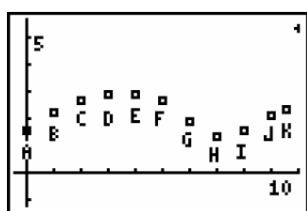


Abb. 13

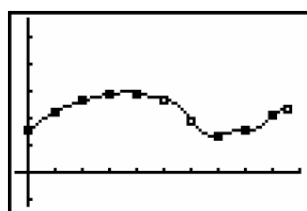


Abb. 14

Zunächst wird der sinnvoll erscheinende Vorschlag gemacht, die Parabeln arbeitsteilig zu bestimmen und dann die Einzelergebnisse zum Gesamtergebnis zusammenzufügen. Nach kurzer Zeit bemerken die einzelnen Gruppen aber schnell, dass sie wegen (i) alle auf Informationen einer anderen Gruppe angewiesen sind, die Steigung im linken Punkt liefert die links liegende Parabel, und für deren Gleichung benötigt man wiederum die Steigung der links davon liegenden Parabel. Es muss also nach (ii) zunächst die Parabel durch A, B und C ermittelt werden, ehe dann sukzessive die übrigen berechnet werden können. Im Unterricht werden die ersten drei Parabeln bestimmt, die Berechnung der übrigen ist Hausaufgabe. Das Ergebnis:

Steigungsbedingung	Funktionsgleichung
--------------------	--------------------

	$f_{ABC}(x) = -0,175x^2 + 0,875x + 1,6$
$f'_{CD}(2) = 0,175$	$f_{CD}(x) = 0,075x^2 - 0,125x + 2,65$
$f'_{DE}(3) = 0,325$	$f_{DE}(x) = -0,275x^2 + 1,975x - 0,55$
$f'_{EF}(4) = -0,225$	$f_{EF}(x) = 0,025x^2 - 0,425x + 4,25$
$f'_{FG}(5) = -0,175$	$f_{FG}(x) = -0,625x^2 + 6,075x - 12$
$f'_{GH}(6) = -1,425$	$f_{GH}(x) = 0,875x^2 - 11,925x + 42$
$f'_{HI}(7) = 0,325$	$f_{HI}(x) = -0,175x^2 + 2,775x - 9,45$
$f'_{IJ}(8) = -0,025$	$f_{IJ}(x) = 0,575x^2 - 9,225x + 38,55$
$f'_{JK}(9) = 1,125$	$f_{JK}(x) = -1,05x^2 + 20,025x - 93,075$

Die sukzessive Interpolation durch Parabelstücke verhindert große Schwankungen; Rundungsfehler spielen auch keine entscheidende Rolle mehr. Insofern sind die Probleme, die bisher auftraten, angemessen gelöst, aber: Die Funktion zwischen H und I (f_{HI}) hat Rechtskrümmung, wo Linkskrümmung erwartet ist. Dieses Phänomen tritt auch schon zwischen f_{ABC} und f_{CD} auf (Vorzeichenwechsel beim Koeffizienten a), ist dort aber nicht augenscheinlich.

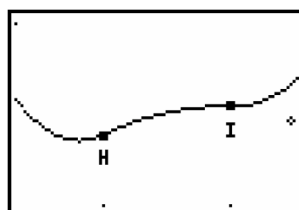


Abb. 15

Es gilt sogar, zumindest in diesem Beispiel: Die Parabeln wechseln immer ihr Krümmungsverhalten. Wenn dies allgemein gilt, darf man dann nur Wendepunkte ablesen? Nein, auch dieser Ansatz liefert nicht das gewünschte Ergebnis.

Zwischenergebnis 2 und ein Korrekturversuch

Die Verbindung der Punkte durch Parabelstücke ist ein systematisches Verfahren, das wegen der Polynome von maximalem Grad 2 zu keinen nennenswerten Problemen im Zusammenhang mit Rundungen führt. Auch kommt es zu keinen großen, unkalkulierbaren Schwankungen. Trotzdem kann es partiell zu qualitativ falscher Form kommen, das Krümmungsverhalten stimmt nicht, also: *Bessere Mathematik muss her!*

Es gibt zwei Ansätze und Ideen:

- (1) Marietheres: Zwischen H und I weitere Punkte ablesen und wieder Parabeln bestimmen, bis es optisch passt.
- (2) Jan-Hendrik: auch das Krümmungsverhalten berücksichtigen, also f'' .

Während Marietheres also lokal reparieren möchte, will Jan-Hendrik mit grundsätzlich anderem Ansatz weiterarbeiten.

Marietheres bekommt den Auftrag, ihren Reparaturvorschlag durchzuführen und zu berichten. Mit $L(7,5 | 1,4)$ erhält sie:

$$f_{HL}(x) = -0,65x^2 + 9,425x - 32,725 \quad \text{und} \\ f_{LI}(x) = 1,25x^2 - 19,075x + 74,15.$$

Das Ergebnis ist frustrierend (vgl. Abb. 16). Wieder ist das Krümmungsverhalten falsch und außerdem ist in I ein Knick

entstanden; es muss also auch f_{IJ} ersetzt werden; man erhält:

$$f_{IJ}(x) = -0,375x^2 + 6,925x - 29,85$$

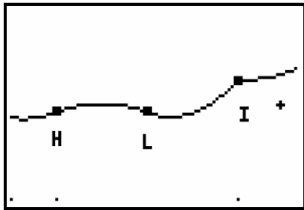


Abb. 16

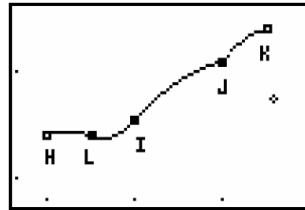


Abb. 17

Auf diesem Weg lässt sich das Problem nicht grundsätzlich lösen; der Krümmungswechsel bleibt, auch wenn er durch zunehmende Verfeinerung schließlich kaum noch zu sehen sein wird. Wenn man aber die Punkte so dicht legt, dass der Krümmungswechsel optisch unbedeutend ist, liefert eventuell auch eine lineare Verbindung schon angemessene Ergebnisse.

Bemerkung: Im Nachhinein wird klar, dass Wendepunkte bei einer Verbindung mit Parabelstücken nur in den Stützpunkten entstehen können, da ja Parabeln keine Wendepunkte haben, also zwischen den Stützpunkten keine Wendepunkte auftreten dürfen. So hätte man schon hier die eingeschränkte Eignung der Parabelverbindung erahnen können, aber: „Klugheit gibt es nur im nachhinein.“

Neue Idee und Lösung

Damit ruhen jetzt alle Hoffnungen in Jan-Hendriks Vorschlag, das Krümmungsverhalten zu berücksichtigen. Aber wie genau soll dies geschehen? Es muss sicher die zweite Ableitung ins Spiel kommen. Man wird also fordern, dass an den Übergangsstellen, also in den Stützpunkten, auch die zweiten Ableitungen übereinstimmen. Natürlich geht das jetzt nicht mehr mit Parabeln, weil man immer zwei Punkte, Knickfreiheit und Krümmungsverhalten berücksichtigen muss, also 4 Bedingungen von Punkt zu Punkt. Wir setzen also Polynome dritten Grades an. Wenn man 11 Punkte hat, werden damit 10 Funktionen benötigt und damit 40 Bedingungen und Gleichungen, also letztendlich 1640 Eintragungen; es reichen vielleicht erst einmal fünf Punkte mit vier Funktionen, also 16 Bedingungen. Was ist notwendig:

- (1) Jede Funktion verläuft durch 2 Punkte (AB, BC, CD, DE) (8 Bedingungen)
- (2) Knickfreiheit in B, C und D (3 Bedingungen)
- (3) Krümmungsverhalten in B, C und D (3 Bedingungen)

Es fehlen also noch zwei Bedingungen. Liegt das an der Anzahl der Stützpunkte? Nein, denn durch jeden neuen Stützpunkt kommen ja vier Bedingungen dazu. Dass zwei Bedingungen noch fehlen leuchtet ein, denn die Punkte A und E sind nur einmal berücksichtigt worden. Man kann also das Verhalten an den Rändern noch beliebig festlegen. Es wird einfach von linearer Fortsetzung an den Enden ausgegangen, was zur Folge hat, dass die zweite Ableitung in den Endpunkten Null ist. Welche fünf Punkte sollen nun gewählt werden? A und K müssen auf jeden Fall dabei sein, der Rest ist eigentlich beliebig, also werden vier Gruppen gebildet, die jeweils

fünf Punkte auswählen und das Verfahren dann durchführen. Danach wird die beste Lösung ausgewählt, soweit mindestens eine geeignete dabei ist. Spätestens, wenn man die Bedingungen aufstellt und versucht, die erste Funktion zu ermitteln, fällt auf, dass dies nicht mehr auf die gleiche Weise geht wie bei den Parabeln, also sukzessive hintereinander, zuerst f_{AB} , dann f_{BC} (usw.). In einer Bedingung steckt immer schon eine weitere Funktion, für deren Bestimmung wiederum eine weitere Funktion benötigt wird. Erst alle Bedingungen zusammen ermöglichen die Berechnung aller Funktionen, man muss also eine große Matrix bilden. Dies könnte man umgehen, wenn man die ersten vier Punkte für das erste Polynom benutzt (in Analogie zum Vorgehen bei den Parabeln), aber dann handelt man sich ja u. U. wieder das Problem der Interpolationspolynome ein!

Es werden 5 Gruppen gebildet, die 5 verschiedene Messpunkte wählen und mit diesen eine Funktion mit dem erarbeiteten Verfahren bestimmen. Es wird beschlossen, am Ende die am besten passende Funktion als Lösung des Problems zu nehmen. Exemplarisch wird das Verfahren hier für die Punkte A, D, F, H und K dargestellt.

$$\begin{aligned} \text{Ansatz: } f_{AD}(x) &= a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \\ f_{DF}(x) &= d_3x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 \\ f_{FH}(x) &= f_3x^3 + f_2x^2 + f_1x + f_0 \\ f_{HK}(x) &= h_3x^3 + h_2x^2 + h_1x + h_0 \end{aligned}$$

Wegen der Fülle an Variablen und Zahlen ist eine systematische Kennzeichnung der Variablen wichtig. Wegen der Einheitlichkeit der Matrixeingabe müssen die Gleichungen der Form $f_{AD}'(3) = f_{DF}'(3)$ in $f_{AD}'(3) - f_{DF}'(3) = 0$ umgeformt werden.

Die vollständige Matrix wird hier aus Platzgründen nicht wiedergegeben (vgl. Anmerkung am Ende des Artikels). Wertet man diese Matrix aus (Diagonalform), so erhält man folgende vier Funktionen:

$$\begin{aligned} f_{AD}(x) &= -0,0100x^3 + 0,5240x + 1,6 \\ f_{DF}(x) &= -0,0364x^3 + 0,2369x^2 - 0,1867x + 2,3107 \\ f_{FH}(x) &= -0,1227x^3 - 2,1493x^2 + 11,7445x - 17,5747 \\ f_{HK}(x) &= -0,0569x^3 + 1,6227x^2 - 14,6595x + 44,0348 \end{aligned}$$

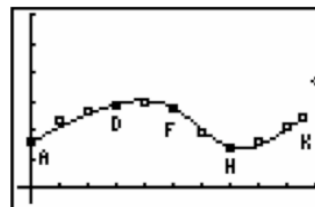


Abb. 18

Berücksichtigt man, dass nur fünf Punkte benutzt werden, so überzeugt die Lösung. Es zeigt sich beim Vergleich der Gruppenergebnisse, dass auch bei anderer Wahl der Punkte gute Ergebnisse erzielt werden. Viel mehr Punkte kann der GTR allerdings nicht bearbeiten (Speicherproblem), so dass man hier wieder an technische Grenzen stößt, ein leistungsstärkeres Gerät (CAS) schafft aber auch die Berechnung für 10 Punkte. Eine Lösung für alle Punkte außer K kann über die Materialdatenbank abgerufen werden.

Endergebnis

Mit Polynomen dritten Grades, die in den Stützpunkten knickfrei und mit demselben Krümmungsverhalten verbunden werden, lassen sich frei skizzierte Kurven gut approximieren. Dieses Verfahren heißt Spline-Interpolation.

Bemerkung: „Spline“ bedeutet „Kurvenlineal“ bzw. auch „Biegelinie“. Wenn man eine biegsame Latte um Haltenasen (hier: Stützpunkte) legt, entsteht eine Kurve, die in dem Sinne optimal ist, dass sie möglichst wenig gebogen ist, also wenig gekrümmt ist.

Sind wir jetzt fertig? Ja, wir haben eine geeignete, stabile Funktion gefunden. Nein, weil da ja noch der Sockel ist ... Außerdem: Wenn der Designer sich plötzlich etwas anderes überlegt, z.B. etwas mehr Dickbauchigkeit der Vase, dann muss man wieder von vorne anfangen, weil ja alle Funktionen inhaltlich miteinander verbunden sind. Dies wäre dann doch wieder ein Anlass für *mehr Mathematik!*

Nachlese

Der methodische Schwerpunkt der Unterrichtssequenz lag auf der Selbststeuerung der Lerngruppe und der möglichst weitgehenden Selbsttätigkeit beim Erarbeiten der (Teil-) Lösungen. Das gemeinsame Ziel („Vasenformel“) trug den Einsatz und die Produktivität über 4 Wochen hinweg. So hatte sich in der Arbeitsphase zur Ermittlung der Splines durch Zufall eine Gruppe mit durchweg leistungsschwächeren Schülerinnen und Schülern gebildet, die aber den Ehrgeiz entwickelte, wirklich vollständig allein die Zielfunktion zu berechnen, was schließlich auch gelang. Hier mussten, wie an anderen Stellen auch, binnendifferenzierende Maßnahmen ergriffen werden, indem den schneller fertig werdenden Gruppen Zusatzaufgaben, meist in Form von Reflexionen über das Erarbeitete, gestellt wurden. Die offene Planung mit der konstitutiven Berücksichtigung von Schülerideen und -beiträgen hat sich insgesamt als produktiv erwiesen, auch wenn der dadurch entstandene Zeitbedarf (natürlich?) größer war, als er in einem stärker lehrergesteuerten Unterricht gewesen wäre. Unabhängig davon äußerten einige Schülerinnen und Schüler in einem abschließenden Rückblick auch ihren Unmut über den größeren Zeitbedarf bei eigentätiger Erarbeitung, sie wünschten lieber eine Instruktion über das Verfahren mit anschließender Übung, ein Vorgehen, das sicher ihrer bisherigen mathematischen Sozialisation entsprach und bei dem sie hinreichend erfolgreich waren. Eigentätigkeit erhöht also nicht per se Schülermotivation!

So wichtig, und mit Blick auf die Gesamtgruppe auch produktiv, die intensiven Phasen mit eigentätiger Gruppenarbeit waren, so notwendig waren auch die bilanzierenden Unterrichtsgespräche und Diskussionen, in denen dann, mehr lehrergesteuert, die Fäden zusammengehalten wurden und weitere Perspektiven und Anregungen, aber auch wiederholende Zusammenfassungen, gegeben wurden.

Insgesamt zeigte der Rückblick aber deutlich, dass der Sinn mathematischer Modellierungen durchweg erfahren, weil erlebt, wurde. Eine Schülerin, die der Autor einige Jahre spä-

ter traf, erinnerte sich noch deutlich an dieses Projekt. Der zeitliche Umfang des Projektes (ca. 4 Wochen) lässt sich auf dem Hintergrund unterrichtlicher und schulischer Rahmenbedingungen (Abitur, Stoffumfang) nur dann rechtfertigen, wenn auch Übungsphasen integriert sind oder anders: Chancen für eine größere Verbreitung solcher Projekte zur Modellbildung kann es nur geben, wenn Erarbeitungen und Übungen so verzahnt werden, dass der zeitliche Bedarf nicht außergewöhnlich über dem der Standardverfahren liegt. So fand hier durchweg immanentes Üben statt, wenn z.B. mehrere Parabeln interpoliert wurden oder verschiedene Ansätze durchgearbeitet wurden. Die Berechnung von Splines zu anderen ausgewählten Punkten war eine Übung, die dokumentierten Lösungen der anderen Gruppen bildeten immer zusätzliches Übungsmaterial. In Wiederaufnahme der Übung, bei der die Schwankungen der Interpolationspolynome bei Erhöhung der Stützstellenzahl erfahren werden sollte, wurde als Übung die Bestimmung des Splines zu den fünf Punkten aufgegeben. Üben fand damit in sinnstiftendem Kontext statt. Dass für eine Routinisierung dieser Übungsumfang nicht ausreichte, zeigte das Klausurergebnis, wo der Aufgabenteil zu Splines in nur knapp ausreichender Weise bearbeitet wurde. Einschränkend muss aber gesagt werden, dass es sich um einen Grundkurs handelte, in dem nur 2 Prüfungsfachschüler saßen und der Inhalt, wenn überhaupt, dann meist auf Leistungskurse beschränkt bleibt. Das Projekt ist aber geprägt von der didaktischen Position, dass Einsicht in Bedeutung und Sinn mathematischer Konzepte und Verfahren eindeutig Vorrang gegenüber der routinisierten Beherrschung von Kalkülen hat, Kalküle, die eben dann aber oft auch als sinnlos erfahren werden.

Natürlich kann eine Klausur nicht das komplexe Unterrichtsgeschehen, wie es Modellbildungsprozesse prägen, abbilden, das Format einer zeitlich eng begrenzten, von Fehlervermeidung geprägten Prüfungssituation lässt dies nicht zu. Verzichtet man deswegen aber umgekehrt auf die Thematisierung solcher Aspekte in Klausuren, erscheinen Schülerinnen und Schülern solche Projekte dann leicht als bestenfalls zusätzliche Bonbons, sie sind dann vielleicht schön, aber unwichtig. Die Klausuraufgabe¹ stellt daher zwei Aspekte von Modellbildung in den Mittelpunkt, die Interpretation und den Vergleich verschiedener Modelle sowie in eingeschränkter Weise auch die Validierung. Konsequenterweise sind syntaktische Anforderungen auf ein wohl immer notwendig bleibendes Minimum reduziert. Stattdessen werden konkrete Ansätze gefordert und häufig Lösungen vorgegeben, die dann ausgewertet und interpretiert werden müssen. Ohne mindestens einen GTR geht hier dann aber gar nichts, ein CAS wäre noch besser.

⁽¹⁾ Anmerkung:

Eine umfangreichere Fassung des Berichts kann von der Materialdatenbank heruntergeladen werden. Dort sind auch die Protokolle der Schülerinnen und Schüler in Originaldarstellung angefügt, ebenso die Klausuraufgabe.

Autor

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar f.d. Lehramt an Gymnasien Oldenburg
hen.koerner@t-online.de