Josef Lechner (lejos@aon.at)

Standardisierung der Normalverteilung - ein Anachronismus?!

Während der numerische Taschenrechner alle anderen Funktionstabellen aus dem Schulunterricht verbannte, hat bis zum heutigen Tag die Tabelle für PHI(z) mit den Parametern 0 und 1 für den Erwartungswert bzw. die Standardabweichung bei der Normalverteilung in den Lehrbüchern überlebt.
Welche Ursachen hat dieser Anachronismus (traditionelle, technische oder andere)? Was würde es bedeuten, auf die mehr oder weniger aufwendige Skalentranformation im Unterricht zu verzichten?

Teil1 – Die mathematischen Hintergründe

Jeder österreichische Schüler, der die Matura anstrebt, wird - auf Grund ihrers häufigen Vorkommens und ihrer zentralen Bedeutung innerhalb der Schließenden Statistik - mit der Normalverteilung konfrontiert werden. Dies ist auch die einzige Stelle im Unterricht, an der noch Tabellen auftauchen. Dass dies ein Anachronismus ist, sollen die folgenden Ausführungen zeigen.

Normalverteilung und Standardnormalverteilung

Die mathematische Modellierung und Präzisierung der Erfahrungstatsache, dass sich stetige Zufallsvariable normalerweise „glockenförmig“ um ihren Erwartungswert verteilen, führt auf die Normalverteilung, die durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$N(x,\mu,\sigma) := \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

beschrieben wird. Ihr Graph wird als Gaußsche Glockenkurve bezeichnet.

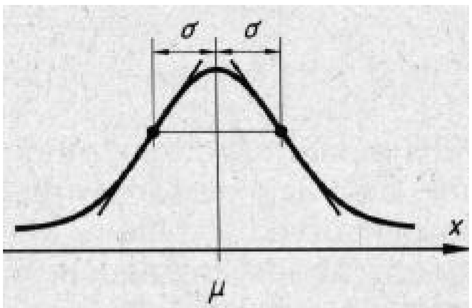

Abb. 1

Der Erwartungswert μ gibt dabei die Stelle des höchsten Punktes der Glockenkurve, die Standardabweichung σ die Lage der Wendepunkte der Glockenkurve an. Durch Bildung des Integrals über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion von $-\infty$ bis x erhält man die Verteilungsfunktion der Normalverteilung.

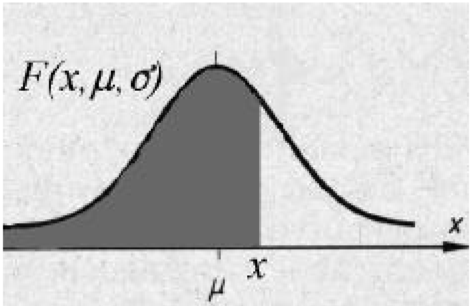

Abb. 2

Sie beschreibt die Fläche unter der Funktion $N(x,\mu,\sigma)$

$$F(x,\mu,\sigma) := \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

Um Wahrscheinlichkeiten $P(x_1 \le X \le x_2)$ bestimmen zu können, ist es notwendig, das Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in einem bestimmten Intervall anzugeben.

$$P(x_1, x_2,\mu,\sigma) := \frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}_{F(x_2,\mu,\sigma)} - \underbrace{\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{x_1} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx}_{F(x_1,\mu,\sigma)}$$

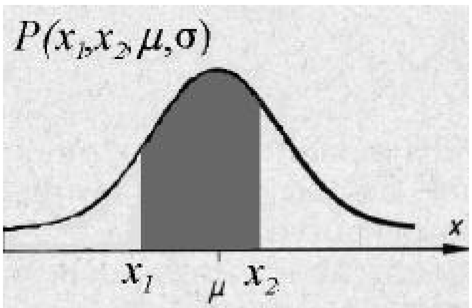

Abb. 3

Hier beginnen im Allgemeinen die Probleme, da sich dieses Integral leider nur näherungsweise berechnen lässt. Daher geht man üblicherweise zur sogenannten Standardnormalverteilung über, die von der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion mit den Parametern μ=0 und σ=1 ausgeht. Dies kann stets durch eine Skalentransformation erreicht werden.

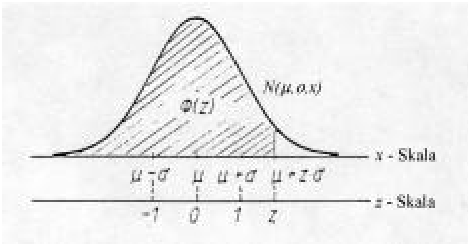

Abb. 4

Daraus lassen sich dann die beiden Transformationsformeln $x = \mu + z \cdot \sigma$ und $z = \frac{x - \mu}{\sigma}$ bestimmen. $\Phi(z)$ ist dabei die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung und beschreibt den Wert des Integrals $\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t^2} dt$. (Dieses Integral wird auch als Gaußsches Fehlerintegral oder Gaußsche Fehlerfunktion bezeichnet; sie ist in Derive als erf-Function implementiert.) Ihre Werte sind in Tabellen aufgelistet, die nach erfolgter Skalentransformation konsultiert werden, anschließend erfolgt wieder die Rücktransformation. Um Beispiele dieser Art zu lösen, ist eine Menge Transformationsarbeit zu leisten. Die verschiedenen Schulbücher bieten dafür sogar eine Reihe von „Transformationssätzen“ an.

In einem Unterricht ohne Technologie-Unterstützung ist man auf Derartiges angewiesen - so wie man ohne numerischen Taschenrechner auf Tabellen für Winkelfunktionen oder für den Logarithmus angewiesen ist. Durch die Verwendung von CAS, CAS-TR, aber auch leistungsfähiger numerischer TR ist es nun aber möglich auf die Standardisierung völlig zu verzichten. Hier stehen in der Regel Funktionen zur Verfügung, die die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion und Verteilungsfunktion der Normalverteilung beschreiben.

Werkzeug	Dichtefunktion N(x, μ σ)	Verteilungsfunktion F(x, μ σ)	Wahrscheinlichkeit im Int. $[x_1, x_2]$ $P(x_1, x_2, \mu\ \sigma)$
DERIVE	definierbar	NORMAL(x,μ,σ)	P(x1,x2,μ,σ):= NORMAL(x2,μ,σ)- NORMAL(x1,μ,σ)
TI-89, TI-92 Plus, Voyage 200	TISTAT.NORMPDF(x,μ,σ)	TISTAT.NORMCDF(-∞,x,μ,σ)	TISTAT.NORMCDF(x1,x2,μ,σ)
TI-92	definierbar	definierbar als Näherung	definierbar als Näherung
TI-83-Plus	NORMPDF(x,μ,σ)	NORMCDF(-∞,x,μ,σ)	NORMCDF(x1,x2,μ,σ)
TI-Interactive!	NORMPDF(x,μ,σ)	NORMCDF(-∞,x,μ,σ)	NORMCDF(x1,x2,μ,σ)

(Bei den Modellen TI-89 und TI-92 Plus muß die Flash-Applikation TI-Stats/List Editor installiert sein.)

Teil 2 – Grundaufgaben zur Normalverteilung

Bei der Behandlung der Normalverteilung treten üblicherweise folgende Grundaufgaben auf:

(a) Berechnung von α bzw. γ,
(b) Berechnung von x,
(c) Berechnung von ε,
(d) Berechnung von μ,
(e) Berechnung von σ.

Im folgenden Beispiel sind derartige Grundaufgaben zusammengefasst.

Beispiel: Ein Wiener Schnittenfabrikant füllt Packungen ab, deren Gewicht mit einem mittleren Wert von 408g normalverteilt bei einer Standardabweichung von 12g ist.

a_1) Welcher Prozentsatz der Packungen wiegt mindestens 400g ?

a_2) Welcher Prozentsatz der Packungen wiegt zwischen 395g und 405g ?

b) Wieviel wiegen die leichtesten 20% ?

c) In welchem Gewichtsbereich befinden sich 90% der Packungen ?

d) Der Schnittenfabrikant möchte garantieren, dass 95% der Packungen ein Mindestgewicht von 400g besitzen. Auf welchen Mittelwert ist die Abfüllanlage einzustellen ?

e) Der Schnittenfabrikant ist mit seiner Anlage nicht zufrieden. Eine neue Abfüllanlage mit einer geringeren Standardabweichung soll angeschafft werden. Diese soll bei einer Einstellung der mittleren Abfüllmenge auf 408g gewährleisten, dass mindestens 95% ein Gewicht von 400g aufweisen. Wie groß darf die Standardabweichung nun sein ?

Mit dem CAS-TR reduziert sich beispielsweise die Berechnung von Teilbeispiel e) auf die Eingabe der allgemeinen Gleichung normcdf(x1,x2,μ,σ) = p im Numeric Solver. Anschließend brauchen dann nur mehr die bekannten Daten eingesetzt und die verbleibende Unbekannte abgefragt werden.

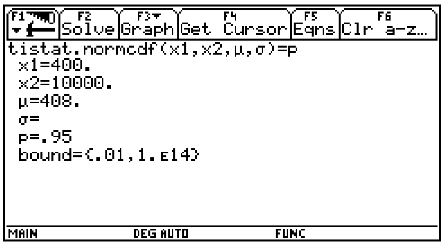

Abb. 5

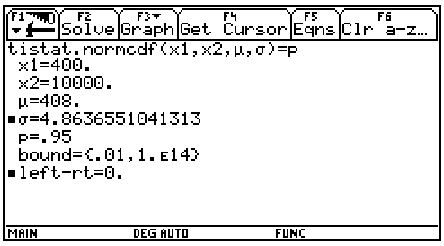

Abb. 6

Die Standardabweichung muß also kleiner als 4,9 g sein.

Will man eine Darstellung der Gaußschen Glockenkurve für diesen Fall bekommen, so ist es notwendig, die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion zu definieren (sie ist aber auch als Befehl TISTAT.NORMPDF(x,µ,σ)im Statistikpaket enthalten). Näherungsweise lässt sich dann auch direkt im Graphikeditor die gesuchte Wahrscheinlichkeit bestimmen.

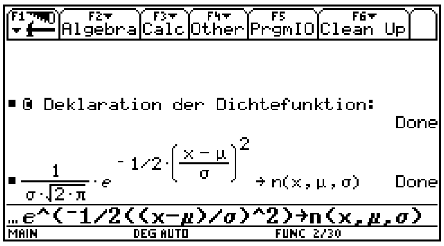

Abb. 7

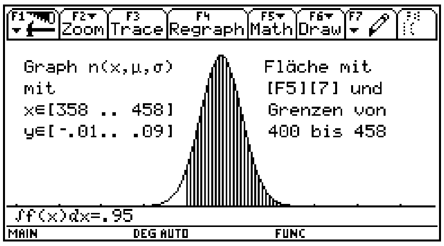

Abb. 8

Hinweis: Auf der Web-Site (www.acdca.ac.at) finden Sie die Aufgabe für eine Reihe von Werkzeugen vollständig gelöst.

Ursachen für diesen Anachronismus

Auf die Standardisierung lässt sich nur dann verzichten, wenn im Unterricht permanent ein geeignetes Rechenwerkzeug zur Verfügung steht. Hier genügt aber bereits ein numerischer Taschenrechner, der über eine implementierte Verteilungsfunktion zur Normalverteilung - wie etwa NORMALCDF(x_1, x_2,µ, σ) - verfügt. Es ist gar nicht notwendig über ein CAS zu verfügen, damit lässt sich nur umso leichter auf die Standardisierung verzichten. Dennoch wird meines Wissens nach in der Regel auch in CAS-Klassen der herkömmliche Weg eingeschlagen. Warum ist das so? Es lassen sich eine Reihe von Gründen aufzählen.

- **Unbekanntes Handling**:

Neueinsteiger verfügen oft über zu geringe Handlingkenntnisse, um die vorhandenen Kommandos effizient nützen zu können. Weiters wird oft befürchtet, dass man damit nicht alle Aufgaben im Zusammenhang mit der Normalverteilung lösen kann. Erste auftretende Probleme - die zumeist durch entsprechende Eingrenzung möglicher Werte für den Erwartungswert oder die Standardabweichung leicht in den Griff zu bekommen sind, führen dann dazu, dass wieder zum alten (umständlicheren) Lösungsweg zurückgekehrt wird.

- **Technische Probleme:**

Bei der Entwicklung der TI-CAS-Rechner (vom TI-92 bis zum Voyage 200) wurde leider auf die Implementierung einer Normalverteilungsfunktion verzichtet. Das Problem läßt sich beim TI-89 bzw. TI-92 Plus durch Laden der Statistikpaketes TI-Stats/List Editor (TISTATLE.*) (Flash-Applikation) beheben und gehört beim Voyage 200 zum Lieferumfang. Besser wäre ein künftiges Betriebssystem, bei dem eine derartige Funktion zum Standardfunktionskatalog gehört. Leider ist die Sache beim weitverbreiteten TI-92 etwas schwieriger. Hier ist es notwendig, selbst eine Näherungsfunktion zu entwickeln bzw. sich nach einer solchen umzusehen, die dann Schülern zur Verfügung gestellt werden kann.

- **Unterrichtstradition:**

Der größte Hemmschuh dürfte meines Erachtens aber unsere Unterrichtstradition sein, die bei der Behandlung der Normalverteilung immer auf der Standardisierung aufbaut. So wird es in Kursen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik gelehrt, so steht es in den Standardlehrbüchern, so wird es auch weitergegeben. Weiters besteht die Angst, das dieses Konzept bei Aufgabenstellungen zum Schätzen und Testen versagt (was aber nicht der Fall ist).

- **Prägung des Unterrichtsganges durch die Schulbücher**:

Dazu kommt, dass sich die meisten Lehrer bei ihrer Unterrichtsvorbereitung an den gängigen Schulbüchern orientieren. Auch die Lehrgänge, die in den Schulbüchern präsentiert werden, bauen auf der Standardisierung auf. Bisher mit gutem Recht: wenn nämlich kein geeignetes Rechenwerkzeug zur

Verfügung steht, ist die Standardisierung der einzig praktikable Weg.

Würde der Verzicht auf die Standardisierung Vorteile bringen?

In erster Linie führt der Verzicht auf die Transformation - die nur rechentechnisches Beiwerk ist - zu einer Entlastung von Nebensächlichkeiten, die mit den konkreten Aufgabestellungen (Untersuchung von normalverteilten Zufallsvariablen, Untersuchung binomialverteilter Zufallsvariablen mit großem Stichprobenumfang, Aufgaben zum Schätzen und Testen), kaum etwas zu tun haben.
Damit ist der Weg frei, sich stärker auf Grundvorstellungen zur Normalverteilung und damit auf Verständnisprobleme der Schüler zu konzentrieren. Dies kann insbesondere durch häufigere Veranschaulichungen erreicht werden, die den Lösungsgang des Schülers begleiten. Auch dabei können die verschiedenen Werkzeuge gute Dienste leisten (siehe dazu insbesondere den Anhang). Durch die Standardisierung wird ja die Information über die tatsächliche Lage der gegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilung „ausgeblendet“. Bleibt man bei den urprünglichen Verteilungen, so ergeben sich auch bessere Vergleichsmöglichkeiten zweier Wahrscheinlichkeitsverteilungen.
Weiters bietet sich die Möglichkeit, im Unterricht nicht nur auf die Binomial- und die Normalverteilung einzugehen, sondern auch andere Verteilungen zu betrachten und stärker die Frage „ welche Verteilung zu welchem Problem? “ in den Vordergrund zu stellen. Auch eine erweiterte Behandlung von Aufgaben zum Schätzen (rel. Häufigkeiten, Stichprobenumfang) und zum Testen wäre wünschenswert.
Natürlich geht mit dem Verzicht auf die Standardisierung auch etwas verloren (auch mit dem Verzicht auf „händisches“ Wurzelziehen ist etwas an Rechenkultur verlorengegangen), etwa die Einsicht, dass beliebige Normalverteilungen auf eine einzige zurückgeführt werden können. Dieser Verlust wiegt aber nicht sehr schwer: Die Möglichkeit der Standardisierung kann natürlich bewusst thematisiert werden, ohne dass sie aber bei den konkreten Aufgaben wirklich immer verwendet werden muss.

Gibt es Erfahrungen mit diesem Konzept?

Der Autor hat bereits dreimal einen Oberstufenkurs inklusive Matura mit permanenter CAS-Unterstützung durchgeführt (zweimal mit Derive und einmal mit TI-92 bzw. TI-92-Plus Geräten). Die Umsetzung im Unterricht erscheint problemlos. Die dargestellte Entlastung von den permanenten Umformungen konkret gegebener Normalverteilungen auf die Standardnormalverteilung eröffnet die dargestellten Möglichkeiten, sie besser auf die eigentlichen Ziele des Stochastikunterrichtes zu konzentrieren.

Der Autor:
Dr. Josef Lechner
Ostarrichi Gymnasium Amstetten
A-3300 Amstetten, Anzengruberstrasse 6
lejos@aon.at