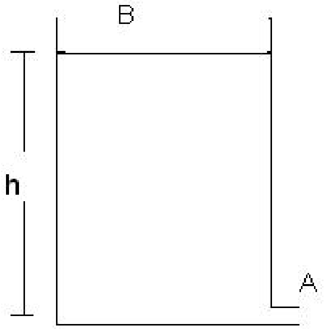
Dieter Stirn, Gladenbach

Die Wasseruhr

Eine der ersten Uhren ist wohl die Wasseruhr, die aus einem achsensymmetrischen Hohlgefäß mit einer kleinen Ausflussöffnung besteht. Der Wasserstand wird dabei entweder auf einer Skala am Rand des Gefäßes oder an einem Stab, der die Symmetrieachse des Gefäßes bildet, abgelesen. Die Abbildung zeigt die Skizze einer Wasseruhr, mit B ist die Fläche des Kreises in der Höhe h bezeichnet, die Austrittsöffnung hat die Kreisfläche A mit dem Radius d.



In einem Versuch verwendeten wir (Grundkurs Mathe 12) ein zylindrisches Gefäß mit dem Radius r =8 cm und dem Volumen von ca. 4 l. Der Radius d der Austrittsöffnung betrug d = 1,8 mm . Einen Ausschnitt der Tabelle mit den aufgenommenen Werten zeigt Abb. 1.

DATA	volum…	zeit/s	Restv…		
	c1	c2	c3	c4	c5
1	0.0000	0.0000	4000.0		
2	300.00	15.000	3700.0		
3	400.00	19.000	3600.0		
4	500.00	24.000	3500.0		
5	600.00	29.000	3400.0		
6	700.00	35.000	3300.0		
7	800.00	40.000	3200.0		

c3,Title="Restvolomen/cm^3"

Abb. 1

In Spalte C1 sind die gemessenen Volumina, das herauslaufende Wasser wurde mit einem Messzylinder aufgefangen. In Spalte C3 sind die Restvolumina eingetragen. In Abb. 2 sind die Messwerte aus C2 und C3 grafisch dargestellt. Eingezeichnet ist auch die Ausgleichskurve, die mit dem TI 92 erarbeitet wurde. Ihre Gleichung ist :

$$V = 0{,}025t^2 - 21{,}52t + 4008{,}3$$

darin bedeuten:

V das Restvolumen in cm^3 und t die Zeit in Sekunden.

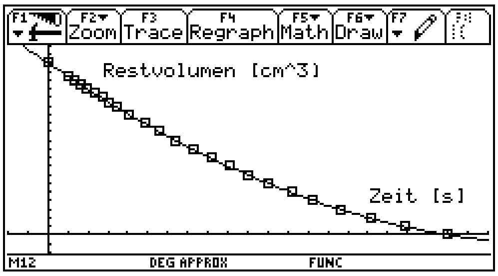


Abb. 2

Die letzte Messung erfolgte nach t =294 s. Es wurde in Übereinstimmung mit dem Graf festgestellt, dass der Wasserstand nicht linear mit der Zeit abnimmt, dies ergab sich bereits während der Messung. Auch konnte die Begründung dafür von den Schülern gefunden werden. Es wurde vermutet, dass sich das Gefäß zur Austrittsöffnung hin verjüngen müsste, damit der Wasserstand mit der Zeit linear abnimmt. Diese Überlegungen gaben Anlass, über die physikalischen Zusammenhänge nach zu denken.

Nach dem hydrostatischen Prinzip gilt für die Austrittsgeschwindigkeit v des Wassers $v = \sqrt{2gh}$. Das Volumen dV des Wassers, das in der Zeit dt aus der Öffnung strömt, wird berechnet durch $dV = A \cdot v \cdot dt$. Es ist gleich groß der Abnahme der Wassermenge im Gefäß: $dV = -B \cdot dh$. Es gilt dann:

$$-B \cdot dh = A \cdot v \cdot dt$$

$$-B \cdot dh = A \cdot \sqrt{2gh} \cdot dt \qquad (1)$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung, die Herleitung übersteigt sicherlich die Fähigkeiten der Schüler im Grundkurs, ist:

$$h(t) = \frac{A^2}{2B^2} \cdot g \cdot t^2 - \frac{A}{B}\sqrt{2g} \cdot \sqrt{h_0} \cdot t + h_0 \qquad (2)$$

Sind aber Differenzialgleichungen im Unterricht behandelt, stellt die Herleitung der Lösung keine Probleme dar, wenn zuvor die Trennung der Variablen durchgeführt wurde.

Mit den Daten des Gefäßes ergibt sich für die Parameter:

$A=0{,}102\ cm^2$, $B=201{,}1\ cm^2$, $h_0= 20\ cm$

Multipliziert man Gleichung (2) noch mit B, so ist direkt ein Vergleich der Parameter mit denen der Ausgleichskurve möglich.

$$\frac{A^2}{2B} \cdot g = 0{,}025 \frac{cm^3}{s^2},$$

$$A \cdot \sqrt{2g \cdot h_0} = 21{,}43 \frac{cm^3}{s},$$

$$h_0 \cdot B = 4021 cm^3$$

In Abb. 3 ist die mit der Gleichung (2) und den Parametern des Experiments erstellte Funktion dargestellt. Sie weicht um unteren Bereich ein wenig von der Ausgleichskurve ab (siehe Abb. 2). Hierbei ist es interessant, einmal durch kleine Variationen im Durchmesser der Austrittsöffnung oder im Durchmesser des Gefäßes heraus zu finden, wie sich die Parameter und dadurch auch die Anpassung an den Datenplot ändern. Änderungen, die im Bereich der Messungenauigkeit liegen, haben erstaunliche Auswirkungen.

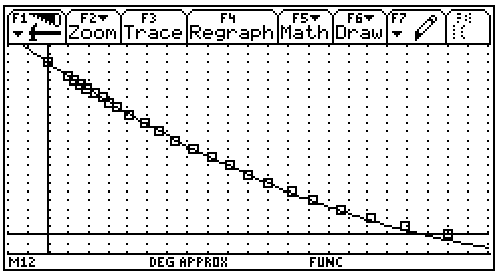


Abb. 3

Auch eine andere Problemstellung fand das Interesse der Schüler:
Wie muss das Gefäß geformt sein, damit die Skala linear geteilt werden kann. Denn dann erniedrigt sich der Wasserspiegel durch das Auslaufen in gleichen Zeitabständen immer um das gleich Maß. Wenn der Wasserspiegel in gleichen Zeitabschnitten um das gleiche Maß sinken soll, dann muss $\frac{dh}{dt}$ konstant sein. Aus Gleichung (1) ergibt sich:

$$-\frac{dh(t)}{dt} = \frac{A}{b} \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)} \qquad (3)$$

Mit der Bedingung: $-\frac{dh}{dt}$ ist konstant, folgt für Gleichung (3)

$$C = \frac{A}{B} \cdot \sqrt{2g \cdot h(t)} \qquad (4)$$

setzt man $A = \pi \cdot d^2$ und $B = \pi \cdot r(h)^2$, so liefert der TI-92:

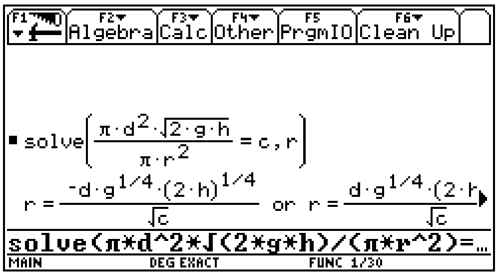


Abb. 4

Zusammengefasst ist dann:

$$r = \frac{d \cdot \sqrt[4]{2g \cdot h(t)}}{\sqrt{c}} \qquad (5)$$

Speichert man r als Funktion von d, c und h ab, so lassen sich vielfältige numerische Fragen ganz einfach beantworten.

Autor:
Dieter Stirn
Schöne Aussicht 28
35075 Gladenbach
email: D.Stirn@t-online.de