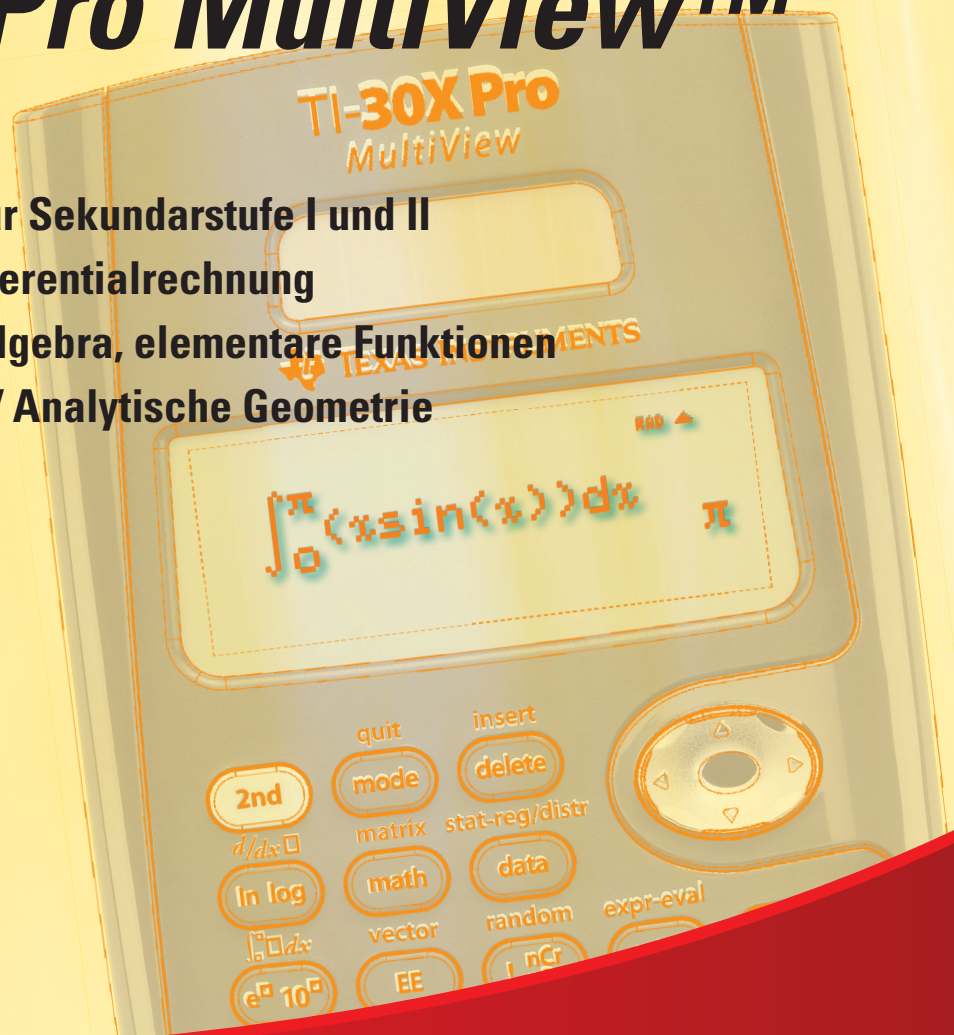


Heinz Klaus Strick

Arbeitsblätter für den TI-30X Pro MultiView™

- Mit Beispielen für Sekundarstufe I und II
- Integral- und Differentialrechnung
- Arithmetik und Algebra, elementare Funktionen
- Lineare Algebra / Analytische Geometrie
- Stochastik



Heinz Klaus Strick
Arbeitsblätter für den TI-30X Pro MultiView™

© 2010 Texas Instruments

Dieses Werk wurde in der Absicht erarbeitet, Lehrerinnen und Lehrern geeignete Materialien für den Unterricht an die Hand zu geben. Die Anfertigung einer notwendigen Anzahl von Fotokopien für den Einsatz in der Klasse, einer Lehrerfortbildung oder einem Seminar ist daher gestattet. Hierbei ist auf das Copyright von Texas Instruments hinzuweisen. Jede Verwertung in anderen als den genannten oder den gesetzlich zugelassenen Fällen ist ohne schriftliche Genehmigung von Texas Instruments nicht zulässig. Alle Warenzeichen sind Eigentum ihrer Inhaber.

Layout: Texas Instruments

Einführung

Diese Sammlung von Arbeitsblättern für den Mathematikunterricht soll dazu anregen, den Schulrechner **TI-30X Pro MultiView™** von Texas Instruments und die Möglichkeiten seines Einsatzes kennenzulernen. Die Auswahl der Blätter erfolgte nach dem Gesichtspunkt, möglichst viele verschiedene Themen des Mathematikunterrichts – vor allem aus Sekundarstufe II – anzusprechen, bei denen Rechnungen erforderlich sind, die über die bloße Anwendung der Grundrechenarten oder die Berechnung von Funktionswerten der trigonometrischen Funktionen, der Exponential- und Logarithmusfunktionen hinausgehen.

Zu den besonderen Möglichkeiten des TI-30X Pro MultiView™ gehören

- die drei Gleichungslöser (für die exakte Lösung von Gleichungen 2. und 3. Grades, für die numerische Lösung beliebiger Gleichungen, für die Lösung von Gleichungssystemen 2. und 3. Ordnung (auch von unterbestimmten Systemen),
- die Berechnung der numerischen Ableitung und der numerischen Integration,
- die Optionen zur Bildung von Summen- und Produkttermen,
- die Rechenoperationen mit Matrizen und Vektoren,
- die enthaltenen Wahrscheinlichkeitsfunktionen (Binomial-, Normal-, Poissonverteilung),
- die Statistikoptionen (z. B. Quartile, Regression, Korrelation).

Durch die getroffene Auswahl der Beispiele werden die Stärken dieses Rechnertyps sichtbar; allerdings werden auch die Grenzen deutlich – insbesondere hinsichtlich der Frage der grafischen Darstellung von Ergebnissen. Aus diesem Grunde sind auf den entsprechenden Arbeitsblättern Grafiken zu sehen, die mit einem anderen Rechnertyp erstellt werden mussten (TI-Nspire™).

Die Arbeitsblätter können die Verwendung von Schulbüchern nicht ersetzen, da auf die Theorie zu den angewandten Algorithmen nur teilweise und sicherlich nicht umfassend genug eingegangen werden kann; aus Gründen des Umfangs musste auch eine Auswahl an Fragestellungen getroffen werden, die nicht alle in den Lehrplänen enthaltenen Anforderungen abdeckt. Da sehr viele Themen des Mathematikunterrichts angesprochen werden, werden durch die Vielfalt der Beispiele Anregungen für weitere Einsatzmöglichkeiten des Schulrechners gegeben.

Es wurde darauf verzichtet, das Eintippen von Tastenfolgen darzustellen (die notwendigen Informationen entnehme man dem beigegeführten Handbuch); andererseits werden durch die absichtlich große Anzahl von abgebildeten Screenshots die erforderlichen Einzelschritte zur Lösung eines Problems deutlich gemacht. Insofern können die Arbeitsblätter auch dazu dienen, bestimmte Funktionen des Schulrechners kennenzulernen. Screenshots ersetzen an vielen Stellen auch Erklärungen von Rechenvorgängen, da diese aus den Abbildungen entnommen werden können.

Die Arbeitsblätter sind so aufgebaut, dass zunächst ein Problem (Beispiel-Aufgabe) gestellt wird, dessen Lösung anschließend mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ erfolgt. Am Ende eines Arbeitsblatts sind weitere Übungsaufgaben aufgeführt, die ähnlich wie die ausgeführte Lösung bearbeitet werden sollen. Die Lösungen sind in der Regel so ausführlich, dass die Arbeitsblätter auch zum selbstständigen Lernen eingesetzt werden können; durch die Übungsaufgaben ist eine Kontrolle des Gelernten möglich.

Viel Freude bei der Arbeit mit dem TI-30X Pro MultiView™!

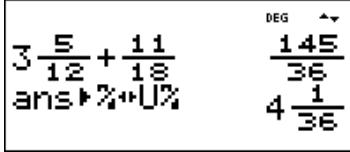

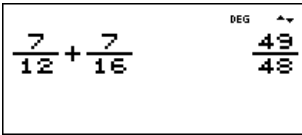
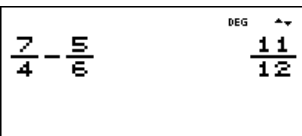
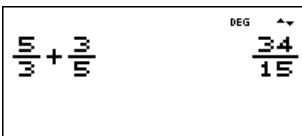
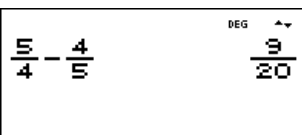
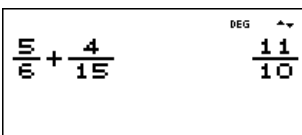
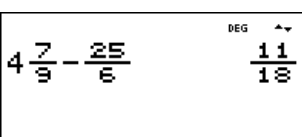
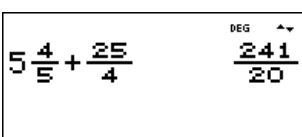
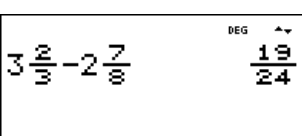
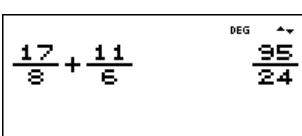
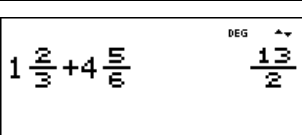
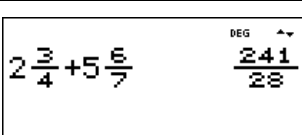
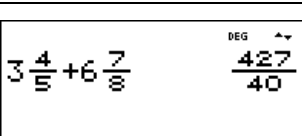
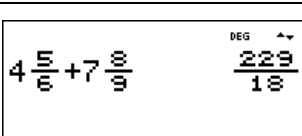
Leverkusen, im August 2010

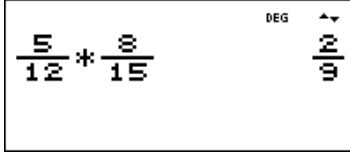

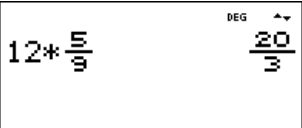
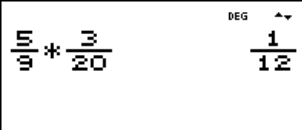
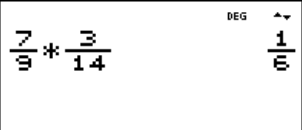
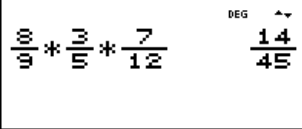
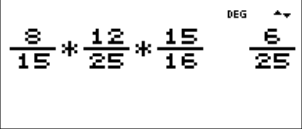







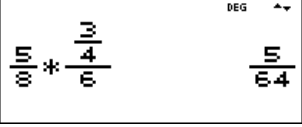
Heinz Klaus Strick

Inhaltsverzeichnis

Arbeitsblätter für Sekundarstufe I	5
Addieren und Subtrahieren von Brüchen	5
Multiplizieren und Dividieren von Brüchen	6
Wie groß ist die Anzahl der Primteiler? (Spiel)	7
Vergleich von statistischen Daten	8
Bestimmen einer Geradengleichung zu gegebenen Punkten	9
Lösen eines linearen Gleichungssystems mit zwei Gleichungen und zwei Variablen	10
Bestimmen der Nullstellen / des Scheitelpunkts einer quadratischen Funktion (1)	11
Bestimmen der Nullstellen / des Scheitelpunkts einer quadratischen Funktion (2)	12
Bestimmen der Lösung einer quadratischen Gleichung (mit Wurzeltermen)	13
Umformung von Wurzeltermen	14
Bestimmen der Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen	15
Arbeitsblätter für Sekundarstufe II	16
Arbeitsblätter zur Analysis	16
Bestimmen eines einbeschriebenen Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt	16
Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (exakte Methode)	17
Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (numerische Methode)	18
Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 4. Grades	19
Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen	20
Bestimmen von Extremstellen einer Funktion (Einführung)	21
Untersuchung des Monotonieverhaltens und Bestimmung von Extrempunkten	22
Numerische Bestimmung von Wendepunkten eines Graphen	23
Exakte Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten (ganzrat. Fkt. 4. Grades)	24
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (1)	25
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (2)	26
Flächen zwischen Graph und x-Achse (1) – ganzrationale Funktion 3. Grades	27
Flächen zwischen Graph und x-Achse (2) – ganzrationale Funktion 3. Grades	28
Flächen zwischen Graph und x-Achse (3) – ganzrationale Funktion 4. Grades	29
Flächen zwischen Graph und x-Achse (4) – gebrochenrationale Funktion	30
Flächen zwischen Graph und x-Achse (5) – Exponentialfunktion	31
Integralrechnung: Untersuchung von Integralfunktionen	32
Bestimmung der Nullstellen von Integralfunktionen	33
Arbeitsblätter zur Linearen Algebra / Analytischen Geometrie / Matrizen	34
Lösen eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen	34
Sonderfälle bei linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen	35
Länge und Orthogonalität von Vektoren	36
Winkel zwischen Vektoren, Geraden, Ebenen	37
Darstellung von Ebenen: Von der Parameterdarstellung zur Koordinatengleichung	38
Lagebeziehungen von Geraden	39
Anwendung des Vektorprodukts: Bestimmen eines orthogonalen Vektors	40
Abstand eines Punktes von einer Geraden	41

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (1)	42
Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (2) – Inverse Matrix	43
Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (3) – Fixvektor	44
Verflechtungsmatrizen: Bedarfsberechnungen	45
Arbeitsblätter zur Regressions- und Korrelationsrechnung	46
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion	46
Regressionsrechnung: Modellieren durch eine quadratische Funktion	47
Regressionsrechnung: Optimierung einer exponentiellen Modellierung	48
Arbeitsblätter zur Stochastik	49
Binomialkoeffizienten – Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel <i>6 aus 49</i>	49
Bestimmen einer Binomialverteilung (vollständige Verteilung)	50
Bestimmen einer Binomialverteilung (einzelne Werte)	51
Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen	52
Optimierung der Annahme von Flugbuchungen	53
Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (1)	54
Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (2)	55
Bestimmen von 95 %- Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)	56
Bestimmen von sigma-Umgebungen um den Erwartungswert	57
Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Punkt- und Intervallschätzung	58
Testen von Hypothesen – Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art	59
Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Konfidenzintervall-Bestimmung	60
Das klassische Geburtstagsproblem und Variationen	61
Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen	62
Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung	63

Gebiet: Arithmetik	Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)
Addieren und Subtrahieren von Brüchen	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Der TI-30X Pro MultiView™ kann einfache arithmetische Operationen mit Brüchen vornehmen.</p> <p>Notiere die fehlenden Zwischenschritte.</p>	
<p>Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Print-Option (<code>mode</code>)</p> <p>Umwandeln einer gemischten Zahl in einen unechten Bruch und umgekehrt (<code>math</code>-Menü)</p>	
<p>Erläuterung der Lösung: Gleichnamige Brüche werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert). Daher müssen zunächst die Brüche gleichnamig gemacht werden.</p> <p>$3 \frac{5}{12} + \frac{11}{18} = 3 + \frac{15}{36} + \frac{22}{36} = 3 + \frac{37}{36} = 3 + 1 + \frac{11}{36} = 4 \frac{1}{36} = \frac{145}{36}$ oder $3 \frac{5}{12} + \frac{11}{18} = \frac{41}{12} + \frac{11}{18} = \frac{123}{36} + \frac{22}{36} = \frac{145}{36} = 4 \frac{1}{36}$</p>	
Übungsaufgaben	
<p>Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte. Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.</p>	
	
	
	
	
	
	
	

<p>Gebiet: Arithmetik</p>	<p>Einsatz ab Stufe 5 (auch zur Wiederholung geeignet)</p>
<p>Multiplizieren und Dividieren von Brüchen</p>	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Der TI-30X Pro MultiView™ kann einfache arithmetische Operationen mit Brüchen vornehmen.</p> <p>Notiere die fehlenden Zwischenschritte.</p>	
<p>Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Print-Option (<code>mode</code>)</p>	
<p>Erläuterung der Lösung:</p> <p>Brüche werden miteinander multipliziert, indem man die Zähler multipliziert und durch das Produkt der Nenner teilt. Vor dem Ausmultiplizieren ist nach Möglichkeit zu kürzen.</p> $\frac{5}{12} \cdot \frac{8}{15} = \frac{5 \cdot 8}{12 \cdot 15} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$	
<p>Übungsaufgaben</p>	
<p>Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte. Wenn das Ergebnis ein unechter Bruch ist, notiere es auch als gemischte Zahl.</p>	
	
	
	
	
	
	
	

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 6
--	--------------------

Vergleich von statistischen Daten

Beispiel-Aufgabe

Um einen Leistungsvergleich herzustellen, wurde in zwei Parallelklassen (a und b) ein Test durchgeführt. Dabei ergab sich bei den erreichten Punktzahlen folgende Häufigkeitsverteilung:

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
a	1	0	0	2	1	1	1	0	1	1	0	2	4	0	0	2	3	2	2	1	2	0	1	1
b	0	0	0	0	0	1	1	0	3	1	6	0	5	3	2	2	1	1	0	0	0	0	1	0

Vergleiche die beiden Verteilungen. Bestimme die dazu notwendigen Kenngrößen.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 1-Var Stats (**2nd** **data**)

```

DEG
STATVARS DISTR
1:StatVars
2:1-Var Stats
3:2-Var Stats
    
```

Erläuterung der Lösung

Die Daten werden in die zur Verfügung stehenden Listen L1, L2 und L3 eingegeben, und zwar: in Liste L1 die Punktzahlen von 16 bis 39 (einschl.), die als Ergebnisse des Tests aufgetreten waren, sowie die Häufigkeiten, mit denen diese Punktzahlen in den Klassen a bzw. b vorkamen, in Liste L2 bzw. Liste L3. Wählt man dann die 1-Variablen-Statistik im STAT-REG-Menü, dann fragt der Rechner noch ab, welche Listen ausgewertet werden sollen. Um die Leistungen der Klasse a zu bewerten, müssen die Daten aus Liste L1 mit den Häufigkeiten (FRQ = frequency) aus Liste L2 untersucht werden; entsprechendes gilt für die Daten aus Klasse b.

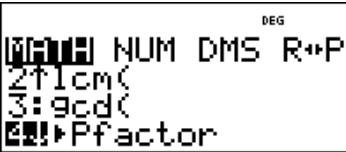

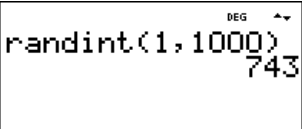
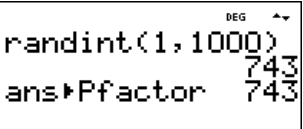
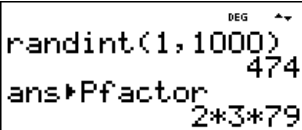
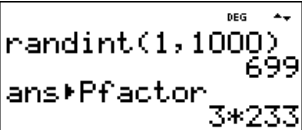
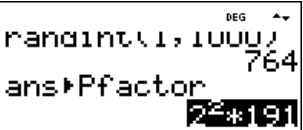
Der Vergleich der beiden Klassen zeigt: In Klasse a sind 28 Kinder, in Klasse b 27. Arithmetisches Mittel und Median liegen in Klasse a oberhalb der beiden Mittelwerte von Klasse b. Die Daten der Klasse a streuen jedoch stärker als die von Klasse b, wie man sowohl an der mittleren quadratischen Abweichung σ_x als auch an den Quartilen ablesen kann: 50% der Punktwerte liegen in Klasse a zwischen 24,5 und 33,5, in Klasse b zwischen 26 und 30. Außerdem liegen Maximum und Minimum in Klasse a weiter vom Median entfernt als in Klasse b.

	Anzahl	arithm.M.	σ_x	Min	Q1	Median	Q3	Max
a	28	28,86	6,12	16	24,5	29,5	33,5	39
b	27	27,70	3,52	21	26	28	30	38

Übungsaufgaben

Vergleiche die erreichten Punktzahlen der Klasse c mit denen aus Klasse a und b.

	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
c	0	1	0	1	1	2	1	0	1	1	3	1	3	2	3	2	1	3	1	1	0	0	0	1

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 7						
Wie groß ist die Anzahl der Primteiler? (Spiel)							
Beispiel-Aufgabe							
Mithilfe des Zufallszahlengenerators des Taschenrechners werde eine natürliche Zahl aus der Menge $\{1, 2, \dots, 1000\}$ gewählt. Wie viele Primteiler enthält diese Zahl?							
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Pfaktor-Funktion des $\boxed{\text{math}}$ -Menüs							
Erläuterung der Lösung							
Ganzzahlige Zufallszahlen kann man mithilfe des randint-Befehls aus dem Random-Menü des TI-30X Pro MultiView™ bestimmen: Man gibt die gewünschte kleinste und größte Zahl der Menge an (mit Komma voneinander getrennt), vgl. 1. und 2. Screenshot. – Anschließend wird auf die Antwort der Pfactor-Befehl angewandt (am Dreieck-Symbol vor „Pfactor“ kann man ablesen, dass der Befehl im Anschluss an die natürliche Zahl eingegeben werden muss).							
							
							
An den Antworten lesen wir ab, dass die Zahl 743 eine Primzahl ist, die Zahl 474 drei Primteiler besitzt, die Zahl 699 zwei und die Zahl 764 ebenfalls nur zwei Primteiler (nämlich 2 und 191).							
Übungsaufgaben							
1. Mache ein Spiel mit einem Partner: Jeder von euch erzeugt eine Zufallszahl und bestimmt mit dem TI-Schulrechner die Anzahl der Primfaktoren. Gewonnen hat, wer die größere [kleinere] Anzahl von Primteilern hat. Wenn die Anzahl gleich ist, muss die Spielrunde wiederholt werden.							
<ul style="list-style-type: none"> ➤ Welche der beiden Spielregeln ist günstiger? ➤ Protokolliere, wie oft die Anzahl der Primfaktoren 1, 2, 3, 4 beträgt. (Warum kann die Anzahl der Primteiler nicht größer als 4 sein?) 							
Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4			
absolute Häufigkeit							
2. Der TI-Schulrechner kann natürliche Zahlen bis 999999 in Primfaktoren zerlegen. Führt in der Klasse den o. a. Zufallsversuch oft durch protokolliert, wie oft welcher Fall auftritt.							
Anzahl Primfaktoren	1	2	3	4	5	6	7
absolute Häufigkeit							

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8
---------------------------	--------------------

Bestimmen einer Geradengleichung zu gegebenen Punkten

Beispiel-Aufgabe

Gegeben sind die Punkte P (2 | 4) und Q (7 | 6). Bestimme die Gleichung $y = mx + b$ der Geraden, welche durch die beiden Punkte verläuft, und bestimme weitere Punkte auf der Geraden,
 a) durch Bestimmung eines Gleichungssystems mit zwei Gleichungen mit den beiden Variablen,
 b) durch Anwenden einer linearen Regression.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

sys-solv ($\boxed{2nd}$ $\boxed{\tan^{-1}}$)
 LinReg ($\boxed{2nd}$ \boxed{data})

Erläuterung der Lösung

a) Liegt ein Punkt auf einer Geraden, dann erfüllen seine Koordinaten die Geradengleichung, also: $4 = m \cdot 2 + b$ und $6 = m \cdot 7 + b$. Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Variablen, das wir üblicherweise wie folgt notieren:

$$\begin{cases} 2m + 1b = 4 \\ 7m + 1b = 6 \end{cases}$$

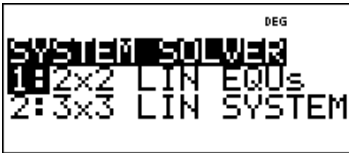
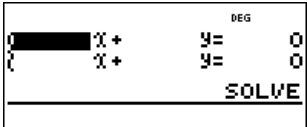
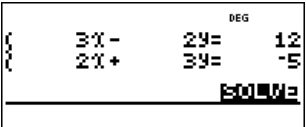

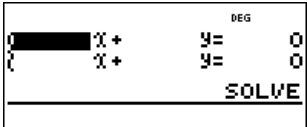
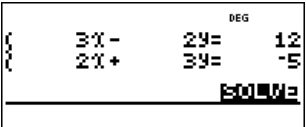

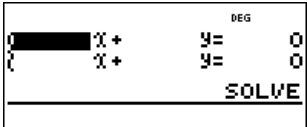
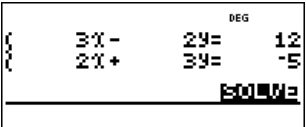

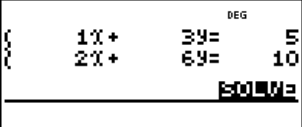
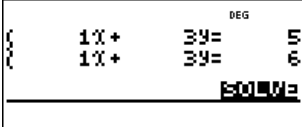
Ein solches Gleichungssystem kann man mithilfe der sys-solv-Option des TI-30X Pro MultiView™ lösen - beachte: Die Variablen im TR heißen x und y (und nicht m und b) und deshalb lautet auch die „Lösung“: Die Gleichung der Geraden durch die Punkte P und Q ist: $y = \frac{2}{5}x + \frac{16}{5}$. Um weitere Punkte auf der Geraden zu bestimmen, muss dies erst noch in \boxed{table} eingegeben werden.

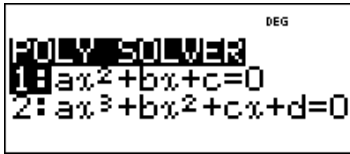


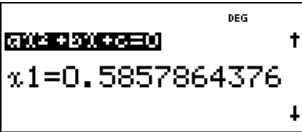
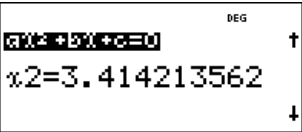
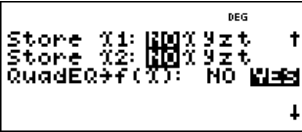

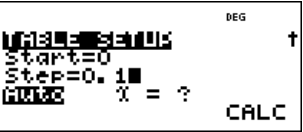
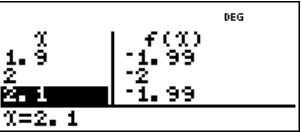
b) Das Verfahren der linearen Regression sucht zu einer Menge von Punkten diejenige Gerade, die am besten passt. Im Extremfall kann die „Punktwolke“ aus zwei Punkten bestehen; dann geht die Regressionsgerade auch tatsächlich durch die beiden Punkte. Die Koordinaten der Punkte werden als Daten in \boxed{data} eingegeben. Der LinReg-Befehl im STAT-REG-Menü greift auf die Daten in den Listen L1 und L2 zu und berechnet die Koeffizienten $a = 0,4$; $b = 3,2$. Man kann den Funktionsterm direkt abspeichern und eine Wertetabelle anlegen lassen.

Übungsaufgaben

Bestimme die Gleichung der Geraden $y = mx + b$ durch die Punkte P und Q

(a) P (3 5) ; Q (-2 4)	(d) P (3 0) ; Q (7 -3)
(b) P (1 -3) ; Q (5 5)	(e) P (6 1) ; Q (-4 -1)
(c) P (-2 1) ; Q (4 1)	(f) P (-1 -1) ; Q (5 -2)

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8			
Lösen eines linearen Gleichungssystems mit 2 Gleichungen und 2 Variablen				
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gesucht sind zwei Zahlen x und y, für die gilt:</p> <p>Subtrahiert man das Doppelte von y vom Dreifachen von x, so erhält man 12; addiert man das Doppelte von x zum Dreifachen von y, so erhält man -5.</p> <p>Zu lösen ist also das Gleichungssystem: $3x - 2y = 12$ und $2x + 3y = -5$</p>				
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:				
<p>System Solver ($\boxed{2nd} \boxed{\tan^{-1}}$)</p>				
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Die System-Solver-Option „2x2 LIN EQUs“ (linear equations) des TI-Schulrechners erwartet zunächst die Eingabe der in den beiden Gleichungen auftretenden Zahlen (die sogenannten Koeffizienten). Diese gibt man nacheinander ein; nach Drücken der $\boxed{\text{enter}}$-Taste springt der Cursor jeweils zum nächsten einzugebenden Zeichen. Wenn der erste Koeffizient in einer Gleichung eingegeben ist, muss das Rechenzeichen + ggf. noch in - abgeändert werden, wie das beispielsweise in der ersten der beiden Gleichungen der Fall ist.</p> <p>Hat man alle Koeffizienten und das Rechenzeichen eingegeben, erhält man nach Drücken der $\boxed{\text{enter}}$-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist ein Paar von Zahlen, die gemeinsam die beiden Gleichungen erfüllen.</p>				
<table style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 33%; text-align: center;">  </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 33%; text-align: center;">  </td> <td style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: 33%; text-align: center;">  </td> </tr> </table>				
				
<p>Übungsaufgaben</p>				
<p>1. Löse mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ das Gleichungssystem</p>				
(a) $\begin{cases} 2x - 5y = 7 \\ 3x + 1y = 5 \end{cases}$	(c) $\begin{cases} 0,3x - 0,7y = -0,9 \\ -0,1x + 0,9y = 2,3 \end{cases}$			
(b) $\begin{cases} -1x + 6y = 1 \\ 5x - 2y = 2 \end{cases}$	(d) $\begin{cases} \frac{2}{3}x - \frac{1}{6}y = \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y = -\frac{3}{4} \end{cases}$			
<p>2. Gib auch die nachfolgenden beiden Gleichungssysteme ein. Überlege, was die Rückmeldung des Rechners bedeutet, und gib eine Begründung hierfür an:</p>				
				

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8		
Bestimmen der Nullstellen / des Scheitelpunkts einer quadratischen Funktion (1)			
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 2$.</p> <p>a) Bestimme die beiden Nullstellen von f, d. h. löse die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 2 = 0$.</p> <p>b) Bestimme den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion.</p>			
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™: poly-solv ($\boxed{2nd} \boxed{\cos^{-1}}$) table (\boxed{table})			
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Wählt man die Option poly-solv des TI-30X Pro MultiView™, dann erwartet der Rechner zunächst die Eingabe der Koeffizienten a, b und c. Dann werden die Lösungen exakt (d. h. nach der Lösungsformel) bestimmt und als Dezimalzahlen ausgegeben; hier $x_1 \approx 0,586$ und $x_2 \approx 3,414$.</p>			
			
			
<p>Man kann die Lösungen, aber auch den Funktionsterm f(x) speichern (QuadEG → f(x)). Mit diesem Speicherbefehl wird gleichzeitig die algebraische Umformung des Funktionsterms vorgenommen und der Rechner bestimmt die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung – hier: $f(x) = a \cdot (x - h)^2 + k$ mit $a = 1$, $h = 2$ und $k = -2$.</p> <p>An der Scheitelpunktsform lesen wir ab, dass die quadratische Funktion den Scheitelpunkt S (2 -2) hat. Diesen Punkt kann man auch mithilfe der Wertetabelle (\boxed{table})-Option) finden.</p>			
			
Übungsaufgaben			
<p>1. Bestimme Nullstellen und Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit</p> <p>(a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$</p> <p>(b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 4$</p> <p>(c) $f(x) = -x^2 - 4x + 7$</p> <p>(d) $f(x) = -3x^2 + 2x + 5$</p> <p>2. Die folgende quadratische Funktion f hat keine reellen Nullstellen. Welche Lösungen gibt der TI-30X Pro MultiView™ an? Welchen Scheitelpunkt hat die quadratische Parabel?</p> <p>(a) $f(x) = x^2 + 3x + 3$</p> <p>(b) $f(x) = -x^2 + 4x - 6$</p>			

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 8
---------------------------	--------------------

Bestimmen der Nullstellen / des Scheitelpunkts einer quadratischen Funktion (2)

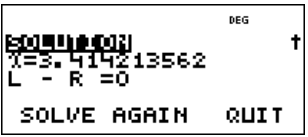
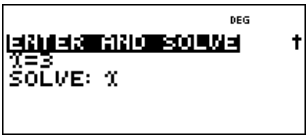
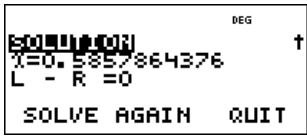
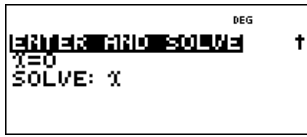
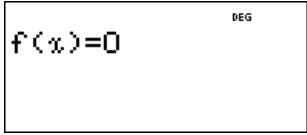
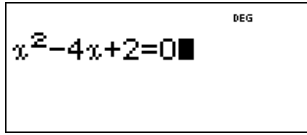
Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist die quadratische Funktion f mit $f(x) = x^2 - 4x + 2$.
 a) Bestimme die beiden Nullstellen von f , d. h. löse die quadratische Gleichung $x^2 - 4x + 2 = 0$.
 b) Bestimme den Scheitelpunkt der quadratischen Funktion.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 num-solv ($\boxed{2nd} \boxed{\frac{\sin^{-1}}{\sin^{-1}}}$)
 table (\boxed{table})

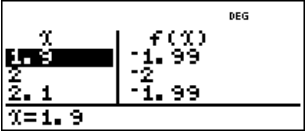
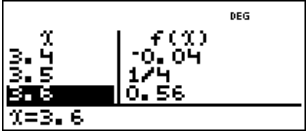
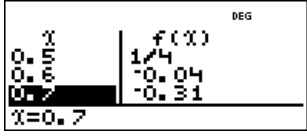
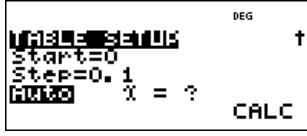


Erläuterung der Lösung

Wählt man die Option num-solv, dann erwartet der Rechner die Eingabe einer Gleichung. Man kann die Gleichung direkt eingeben oder aber zunächst den Funktionsterm $f(x)$ über das \boxed{table} -Menü und dann die Gleichung $f(x) = 0$. Die zweite Möglichkeit des Vorgehens ist hier zu bevorzugen, da die Wertetabelle für die Bestimmung des Scheitelpunkts benötigt wird.



Nach Eingabe eines Startwerts findet der Rechner *eine* der beiden Lösungen, d. h. eine Zahl, für die gilt: linke Seite minus rechte Seite gleich null ($L - R = 0$). Um die zweite Nullstelle zu finden, muss man einen anderen geeigneten Startwert suchen. Beispielsweise findet der TR bei Eingabe des Startwerts $x = 3$ die zweite Lösung. Hier ist $x_1 \approx 0,586$ und $x_2 \approx 3,414$. Geeignete Startwerte für die Bestimmung von Lösungen erhält man aber besonders dann, wenn man sich zunächst die Wertetabelle anschaut und Stellen sucht, bei denen die Funktion einen Vorzeichenwechsel hat: Hier ist das für $0,5 < x < 0,6$ und für $3,4 < x < 3,5$ gegeben.




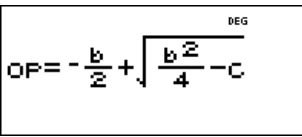

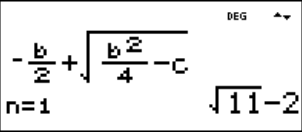

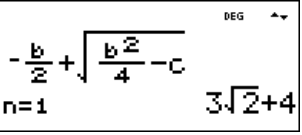

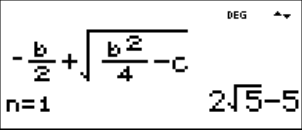


Mithilfe der Wertetabelle findet man auch den Scheitelpunkt der zugehörigen quadratischen Parabel: Er liegt bei $S(2 | -2)$ hat. Hier ist es ein Tiefpunkt (kleinster auftretender Funktionswert); links und rechts davon treten gleiche Funktionswerte auf (die Tabelle ist symmetrisch zu $x = 2$).

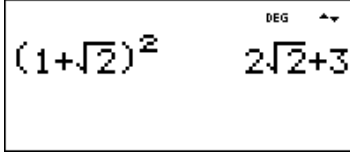


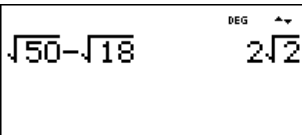

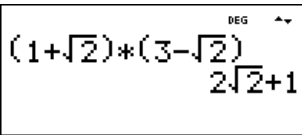
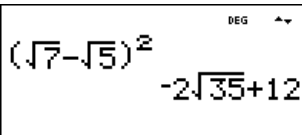
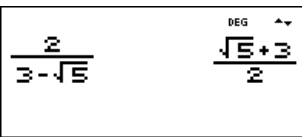
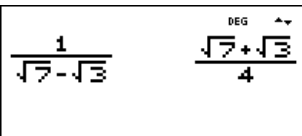
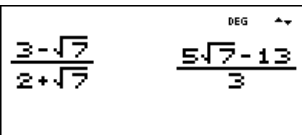
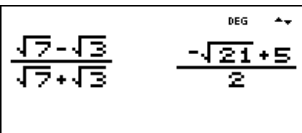
Übungsaufgaben

- Bestimme Nullstellen und Scheitelpunkt der quadratischen Funktion f mit

(a) $f(x) = x^2 - 6x + 1$	(c) $f(x) = -x^2 - 3x + 8$
(b) $f(x) = 2x^2 + 5x - 2$	(d) $f(x) = -3x^2 + 5x + 6$
- Die folgende quadratische Funktion f hat keine reellen Nullstellen. Was gibt der TI-30X Pro MultiView™ an? Welchen Scheitelpunkt hat die quadratische Parabel?

(a) $f(x) = x^2 + 4x + 5$	(b) $f(x) = -x^2 + 6x - 10$
---------------------------	-----------------------------

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8		
Bestimmen der Lösung einer quadratischen Gleichung (mit Wurzeltermen)			
Beispiel-Aufgabe			
Gegeben ist die quadratische Gleichung $x^2 + bx + c = 0$			
Bestimmt werden soll ein Term für die allgemeine Lösung, sodass bei Einsetzen der Koeffizienten die Lösungen – sofern sie existieren – als Wurzelterme ausgegeben werden.			
Löse hiermit dann die Gleichungen			
(1) $x^2 + 4x - 7 = 0$ (2) $x^2 - 8x - 2 = 0$ (3) $x^2 + 10x + 5 = 0$ (4) $x^2 - 2x + 3 = 0$			
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™: Definition von Operationen mithilfe von set op ($\boxed{2nd}\boxed{x}$) Ausführen von Operationen mithilfe von op ($\boxed{2nd}\boxed{\square}$)			
Erläuterung der Lösung			
Nach Umformung erhält man die beiden Lösungen $x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ und $x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$			
Der TI-30X Pro MultiView™ verfügt über die Option, eine bestimmte Abfolge von Operationen abzuspeichern; dabei können unterschiedliche Variablen verwendet werden. In dieser Aufgabe geht es also darum, einen Term für die Lösung einzugeben. Dies ist leider nur für <i>einen</i> Term möglich, beispielsweise die erste Lösung; für die zweite Lösung muss entsprechend das Vorzeichen geändert werden. Zunächst speichert man die Werte für die Variablen, dann führt man die gespeicherte Operation durch.			
			
(1) Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 4x - 7 = 0$ sind $x_1 = -2 + \sqrt{11}$ und $x_2 = -2 - \sqrt{11}$			
(2) Die Lösungen der Gleichung $x^2 - 8x - 2 = 0$ sind $x_1 = +4 + 3\sqrt{2}$ und $x_2 = +4 - 3\sqrt{2}$			
			
(3) Die Lösungen der Gleichung $x^2 + 10x + 5 = 0$ sind $x_1 = -5 + 2\sqrt{5}$ und $x_2 = -5 - 2\sqrt{5}$			
(4) Die Gleichung $x^2 - 2x + 3 = 0$ hat keine reelle Lösung.			
			
Übungsaufgaben			
1. Das Lösungsverfahren mithilfe der set op/op-Funktion ist nicht für beliebige ganzzahlige Koeffizienten anwendbar. Welche Einschränkung muss man beachten?			
2. Bestimme wie in der Beispiel-Aufgabe auch die Lösungen von			
(1) $x^2 + 6x - 3 = 0$ (2) $x^2 - 2x - 1 = 0$ (3) $x^2 + 4x + 3 = 0$ (4) $x^2 - 12x + 8 = 0$			
(5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ (6) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (7) $x^2 - 20x + 5 = 0$ (8) $x^2 + 16x + 3 = 0$			

Gebiet: Algebra	Einsatz ab Stufe 8 (auch zur Wiederholung geeignet)
Umformung von Wurzeltermen	
Beispiel-Aufgabe Der TI-30X Pro MultiView™ kann einfache algebraische Umformungen von Wurzeltermen vornehmen. Notiere die fehlenden Zwischenschritte.	
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Print-Option (<code>mode</code>)	
Erläuterung der Lösung	
$(1 + \sqrt{2})^2 = 1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 1 + 2\sqrt{2} + 2 = 2\sqrt{2} + 3$ (Anwendung binomischer Formel)	
Übungsaufgaben	
Welche Umformungen wurden vorgenommen? Notiere die fehlenden Zwischenschritte.	
	
	
	
	
	
	
	
	

Gebiet: Funktionen	Einsatz ab Stufe 9
---------------------------	--------------------

Bestimmen der Verdopplungszeit bei Wachstumsprozessen

Beispiel-Aufgabe

Ein Kapital von 1000 € werde mit einen jährlichen Zinssatz verzinst; die Zinsen werden jeweils zum Kapital hinzugefügt. Nach wie vielen Jahren hat sich das Kapital verdoppelt?
 Der Zinssatz p beträgt (1) 1 % (2) 2 % (3) 2,5 % (4) 3 % (5) 3,6 % (6) 4 % (7) 4,8 %
 Welcher Zusammenhang zwischen dem Zinssatz p und der Verdopplungszeit d fällt auf?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 table ()
 num-solv ()

Erläuterung der Lösung

Zu lösen ist die Gleichung: $2000 = 1000 \cdot q^n$, wobei $q = 1 + p$ (p Zinssatz).
 1. Lösungsweg: Suche in der Wertetabelle der Funktion f mit $f(x) = 1000 \cdot q^x$ nach demjenigen Wert von x, bei dem der Funktionswert von 2000 überschritten wird, z. B.
 (1) $f(x) = 1000 \cdot 1,01^x$ (≥ 2000 für $x \geq 70$) (2) $f(x) = 1000 \cdot 1,02^x$ (≥ 2000 für $x \geq 36$)

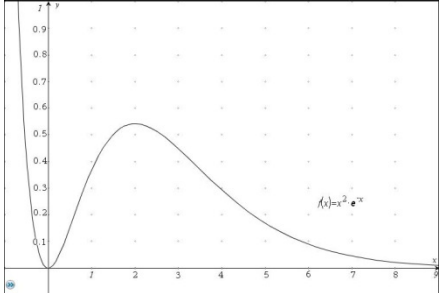
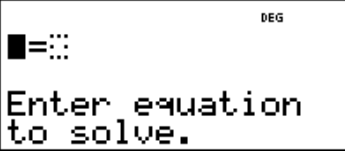
2. Lösungsweg: Das Problem lässt sich auch so formulieren: Gesucht sind die Lösungen der Gleichung $(1+p)^n = 2$. Zur Lösung verwenden wir den numerischen Gleichungslöser, z. B.

Stellt man die Ergebnisse zusammen, dann entdeckt man: $p \cdot d \approx 70$.

Zusatz: Bestätigung mithilfe einer Regression durch eine Potenzfunktion: $d \approx 70 \cdot p^{-1}$

Übungsaufgaben

1. Untersuche die Gültigkeit der $p \cdot d \approx 70$ -Regel auch für $p = 6 \% ; 7 \% ; 8 \% ; \dots ; 12 \%$
2. Suche auch eine Regel für die Verdreifachung eines Kapitals.

<p>Gebiet: Analysis</p>	<p>Einsatz ab Stufe 10</p>																
<p>Bestimmen eines einbeschriebenen Rechtecks mit maximalem Flächeninhalt</p>																	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$</p> <p>Ein möglichst großes Rechteck soll so eingezeichnet werden, dass zwei Eckpunkte auf der x-Achse und zwei auf dem Graphen der Funktion f liegen.</p>																	
<p>Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:</p> <p>num-solv ($\boxed{2nd} \boxed{\frac{\sin}{\sin^{-1}}}$)</p> <p>Aufruf von gespeicherten Werten (recall: $\boxed{2nd} \boxed{sto\rightarrow}$)</p>																	
<p>Erläuterung der Lösung</p>																	
<p>Die Lösung dieses komplexen Problems geschieht schrittweise; wir beginnen mit einem Beispiel: Zeichnet man die Senkrechte zur x-Achse an der Stelle $x = 1$, dann schneidet diese den Graphen an der Stelle $f(1) = e^{-1} \approx 0,367$. Diesen Funktionswert speichern wir unter dem Variablenamen y ab. Dann suchen wir mithilfe des numerischen Gleichungslösers eine (weitere) Lösung der Gleichung $f(x) = y$. Dazu muss man einen geeigneten Startwert eingeben; hier wurde $x = 4$ gewählt und erhalten $x \approx 3,513$. Wir nutzen aus, dass die zuletzt gefundene Lösung noch unter der Variablen x abgespeichert ist, sodass nur eingetippt werden muss: (recall x – 1) * recall y.</p> <p>Der Flächeninhalt dieses einbeschriebenen Rechtecks ist: $A(1) \approx (3,513 - 1) \cdot 0,367 \approx 0,924$</p> <p>Diesen Vorgang wiederholen wir so lange, bis wir die ungefähre Lage des Maximums eingeschachtelt haben. Da $A(0,8) \approx 0,931 < A(0,9) \approx 0,942$ und $A(0,9) > A(1) \approx 0,924 > A(1,1) \approx 0,883$ gilt, liegt das Maximum ungefähr bei $x = 0,9$.</p>																	
<table border="1"> <tr> <td data-bbox="156 1317 459 1438"> $f(x)=x^2*e^{-x}$ </td> <td data-bbox="475 1317 778 1438"> $f(1)\rightarrow y$ 0.367879441 </td> <td data-bbox="794 1317 1098 1438"> $f(x)=y$ </td> <td data-bbox="1114 1317 1417 1438"> ENTER AND SOLVE $x=4$ $y=0.3678794411715$ SOLVE: XY </td> </tr> <tr> <td data-bbox="156 1460 459 1581"> $x=3.512862417$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT </td> <td data-bbox="475 1460 778 1581"> (3.512862417252) 0.924430422 </td> <td data-bbox="794 1460 1098 1581"> $f(1.1)\rightarrow y$ 0.402774011 </td> <td data-bbox="1114 1460 1417 1581"> $x=3.292943071$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT </td> </tr> <tr> <td data-bbox="156 1603 459 1724"> (3.292943071292) 0.883260477 </td> <td data-bbox="475 1603 778 1724"> $f(.9)\rightarrow y$ 0.329321424 </td> <td data-bbox="794 1603 1098 1724"> $x=3.759057614$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT </td> <td data-bbox="1114 1603 1417 1724"> (3.759057614344) 0.941548926 </td> </tr> <tr> <td data-bbox="156 1747 459 1868"> $f(.8)\rightarrow y$ 0.287570537 </td> <td data-bbox="475 1747 778 1868"> $x=4.037576251$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT </td> <td data-bbox="794 1747 1098 1868"> (4.037576250531) 0.931031541 </td> <td></td> </tr> </table>		$f(x)=x^2*e^{-x}$	$f(1)\rightarrow y$ 0.367879441	$f(x)=y$	ENTER AND SOLVE $x=4$ $y=0.3678794411715$ SOLVE: XY	$x=3.512862417$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(3.512862417252) 0.924430422	$f(1.1)\rightarrow y$ 0.402774011	$x=3.292943071$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(3.292943071292) 0.883260477	$f(.9)\rightarrow y$ 0.329321424	$x=3.759057614$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(3.759057614344) 0.941548926	$f(.8)\rightarrow y$ 0.287570537	$x=4.037576251$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(4.037576250531) 0.931031541	
$f(x)=x^2*e^{-x}$	$f(1)\rightarrow y$ 0.367879441	$f(x)=y$	ENTER AND SOLVE $x=4$ $y=0.3678794411715$ SOLVE: XY														
$x=3.512862417$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(3.512862417252) 0.924430422	$f(1.1)\rightarrow y$ 0.402774011	$x=3.292943071$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT														
(3.292943071292) 0.883260477	$f(.9)\rightarrow y$ 0.329321424	$x=3.759057614$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(3.759057614344) 0.941548926														
$f(.8)\rightarrow y$ 0.287570537	$x=4.037576251$ $L - R = 0$ SOLVE AGAIN QUIT	(4.037576250531) 0.931031541															
<p>Übungsaufgabe</p>																	
<p>Bestimmen Sie die Lage des Maximums in der Beispiel-Aufgabe auf drei Dezimalstellen genau sowie den zugehörigen maximalen Rechteck-Flächeninhalt.</p>																	

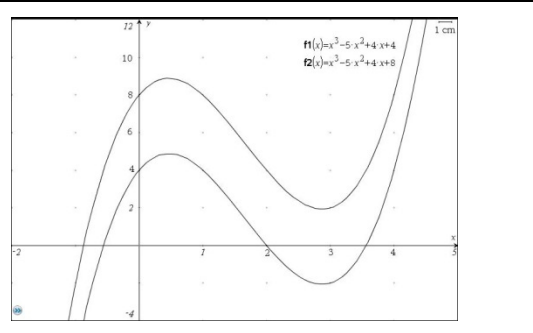
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (exakte Methode)

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f mit

(1) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 4$
 (2) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 8$

Gesucht sind die Nullstellen der Funktionen.



Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 poly-solv ($\boxed{2nd} \boxed{\frac{COS}{COS^{-1}}}$)



Erläuterung der Lösung

Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades stehen im TI-30X Pro MultiView™ die Optionen „poly-solv“ (exakte algebraische Lösung) und „num-solv“ (numerische Lösung) zur Verfügung. – Exakte Lösung: Nach Eingabe der Koeffizienten werden die Lösungen angegeben; das Polynom kann als Funktionsterm unter f(x) gespeichert werden.

(1) Die Funktion hat drei reelle Nullstellen: $x \approx + 3,562$; $x = + 2$; $x \approx - 0,562$

a=1	b= -5	c=4	d=4
$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x1=3.561552813	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x2=2	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x3= -0.5615528128	Store Y1: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ Store Y2: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ Store Y3: $ax^3+bx^2+cx+d=0$ CubeEQ+f(x): NO SOLVE AGAIN QUIT

(2) Die Funktion hat nur eine reelle Nullstelle: $x \approx - 0,875$, außerdem die beiden komplexen Nullstellen $x \approx 2,938 - 0,716 i$ sowie $x \approx 2,938 + 0,716 i$ (wie man durch Scrollen nach rechts sieht).

d=8	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x1= -0.8751297942	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x2=2.937564897	$ax^3+bx^2+cx+d=0$ x3=2.937564897
-----	---	--------------------------------------	--------------------------------------

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrat. Funktion 3. Grades. Skizzieren Sie den Graphen.

(1) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$

(2) $f(x) = - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 1$

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

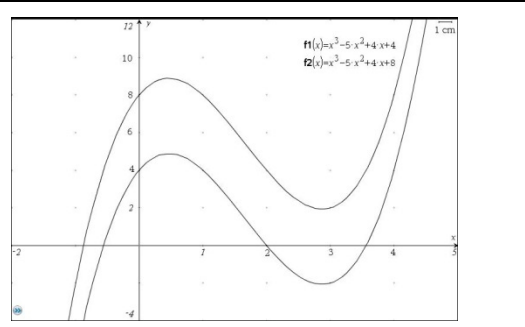
Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 3. Grades (numer. Methode)

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben sind die ganzrationalen Funktionen f mit

(3) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 4$

(4) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 4x + 8$

Gesucht sind die Nullstellen der Funktionen.



Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 num - solv ($\boxed{2nd}$ $\boxed{\frac{\sin}{\sin^{-1}}}$)



Erläuterung der Lösung

Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 3. Grades stehen im TI-30X Pro MultiView™ die Optionen „poly-solv“ (exakte algebraische Lösung) und „num-solv“ (numerische Lösung) zur Verfügung. – Numerische Lösung: Durch die Eingabe des Funktionsterms über die $\boxed{\text{table}}$ -Option wird eine Wertetabelle erzeugt; am Vorzeichenwechsel kann man erkennen, wo ungefähr die Nullstellen liegen. Man erkennt die Nullstelle $x = 2$; die anderen liegen zwischen $x = -1$ und $x = 0$ ($x \approx -0,562$) bzw. $x = 3$ und $x = 4$ ($x \approx + 3,562$). Die ungefähren Werte der Nullstellen werden als Startwerte für den Suchalgorithmus benötigt.

(1) Die Funktion hat drei reelle Nullstellen: $x \approx + 3,562$; $x = + 2$; $x \approx - 0,562$

(2) Man findet nur *einen* Vorzeichenwechsel - die Funktion scheint nur eine reelle Nullstelle zu haben: $x \approx - 0,875$. Eine genauere Untersuchung des Graphenverlaufs ist notwendig.

--	--	--	--

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrat. Funktion 3. Grades. Skizzieren Sie den Graphen.

(1) $f(x) = 2x^3 - 8x^2 + 5x + 2$

(2) $f(x) = - 2x^3 + 8x^2 - 6x + 1$

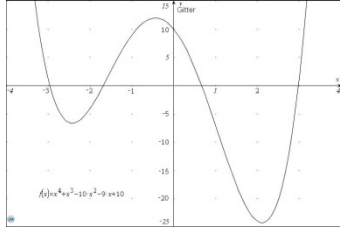
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Nullstellenbestimmung für ganzrationale Funktionen 4. Grades

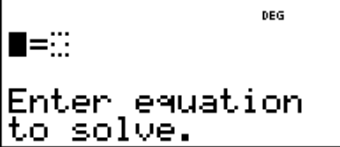
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
 $f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x + 10$.

Gesucht sind die vier nicht-ganzzahligen Nullstellen der Funktion.

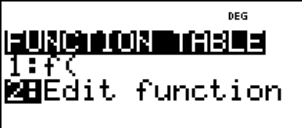
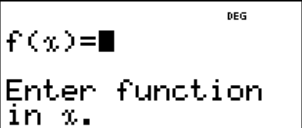
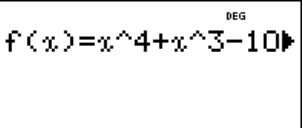
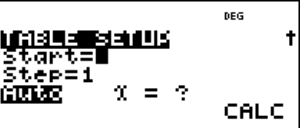

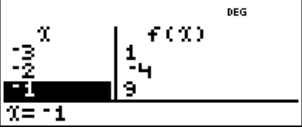
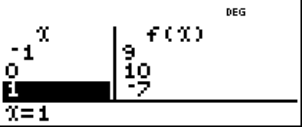
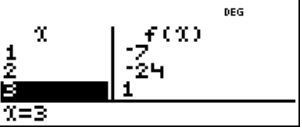
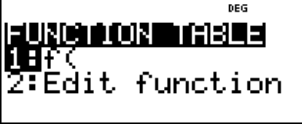
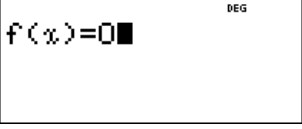
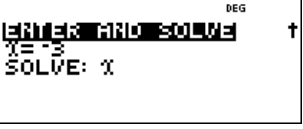
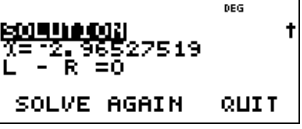
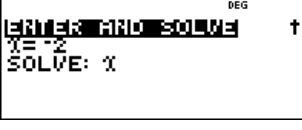

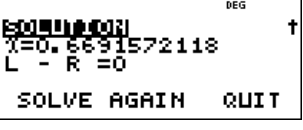
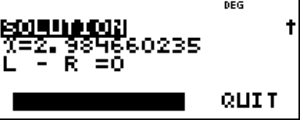


Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 num-solv ($\boxed{2nd} \boxed{\frac{\sin}{\sin}} \boxed{}$)



Erläuterung der Lösung

Für die Bestimmung von Nullstellen bei ganzrationalen Funktionen 4. Grades steht im TI-30X Pro MultiView™ die Option „num-solv“ zur Verfügung. Zunächst wird über die \boxed{table} -Option der Funktionsterm eingegeben; diese erzeugt eine Wertetabelle, aus der wir am Vorzeichenwechsel erkennen können, wo ungefähr die Nullstellen liegen. Für die „num-solv“-Option benötigen wir links den Ausdruck „f(x)“ (Eingabe mithilfe der „f(“-Option von \boxed{table}) und rechts null. Die ungefähren Werte der Nullstellen werden als Startwerte für den Suchalgorithmus benötigt.

Die Nullstellen liegen bei $x \approx -2,965$; $x \approx -1,689$; $x \approx +0,669$; $x \approx +2,985$.

Übungsaufgaben

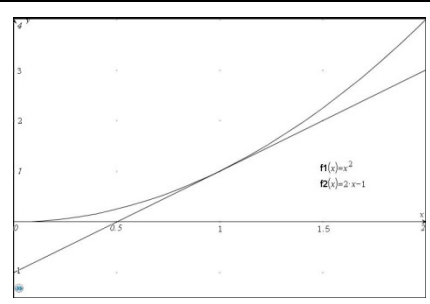
Bestimmen Sie die nicht ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion 4. Grades.

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 12x + 6$	(2) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 20x - 20$
--	---

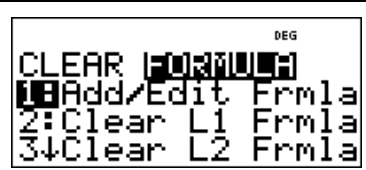
Gebiet: Analysis Einsatz ab Stufe 10

Einführung in die Differenzialrechnung: Untersuchung von Sekantensteigungen

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.
 Untersuchen Sie die Steigung der Sekanten durch den festen Punkt P (1 | 1) und durch variable Punkte Q, die auf dem Graphen von f liegen und auf P zulaufen.

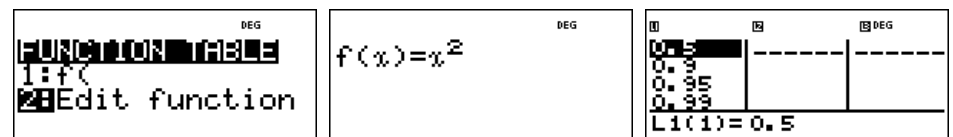


Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 Umgang mit Listenformeln im **[data]**-Menü



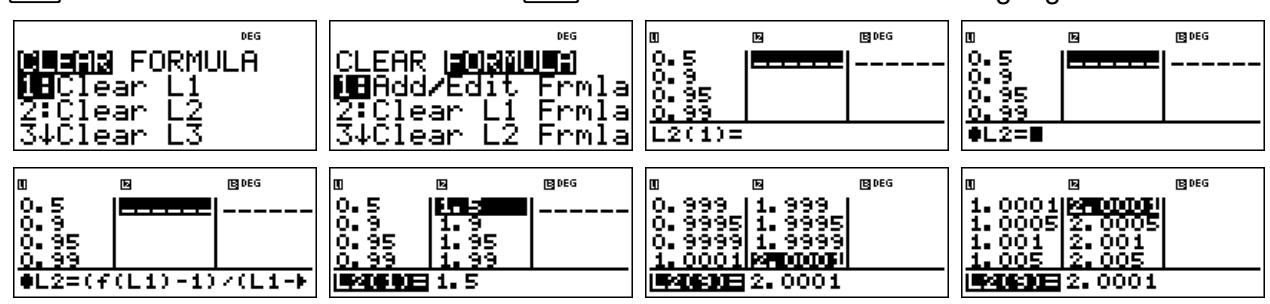
Erläuterung der Lösung

Die zu untersuchende Funktion definieren wir mithilfe von „Edit function“ im **[table]**-Menü. Die x-Werte des sich auf P zu bewegendes Punktes Q tragen wir in Liste L1 im **[data]**-Menü ein. Hier wurden gewählt: $x = 0,5 ; 0,9 ; 0,95 ; 0,99 ; 0,995 ; 0,999 ; \dots ; 0,9999$ und dann die „gespiegelten“ Werte $1,0001 ; 1,0005 ; 1,001 ; \dots ; 1,5$.



Die Steigung m der Sekanten durch die Punkte P und Q berechnet man mithilfe von $m = \frac{f(x_Q) - f(1)}{x_Q - 1}$. Auf dem TI-30X Pro MultiView™ realisieren wir dies mithilfe von Listenformeln

wie folgt: Drückt man einmal auf die **[data]**-Taste sind die Listen sichtbar, wenn man ein zweites Mal drückt, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen (Löschen von Listen und Eingabe und Löschen von Formeln). Wir markieren ein Feld in Liste L2; jetzt erwartet der Rechner die Eingabe einer Berechnungsvorschrift für die Liste L2. Bei der Eingabe der Formel verwenden wir Option 1 des **[table]**-Menüs „f(“) sowie das Symbol „L1“, das wir durch erneutes Drücken der **[data]**-Taste erhalten. Nach Drücken der **[enter]**-Taste werden die Sekantensteigungen berechnet.



Übungsaufgaben

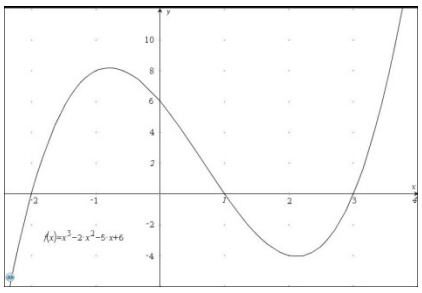
Bestimmen Sie die Steigung der Sekanten für eine Folge von Punkten Q, die auf P zulaufen,

- für $f(x) = x^2$ und $P(2 | 4)$ [$P(0,5 | 0,25)$]
- für $f(x) = x^3$ und $P(1 | 1)$ [$P(2 | 8)$, $P(0,5 | 0,125)$]
- für $f(x) = \sqrt{x}$ und $P(1 | 1)$ [$P(4 | 2)$, $P(9 | 3)$]

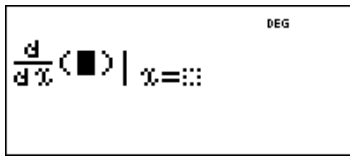
Gebiet: Analysis Einsatz ab Stufe 11

Bestimmen von Extremstellen einer Funktion (Einführung)

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
 $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.
 Bestimmen Sie die Extremstellen des Graphen.



Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 Numerisches Differenzieren ($\frac{d}{dx}$)
 num-solv ($\frac{\sin^{-1}}{\sin^{-1}}$)



Erläuterung der Lösung

Wenn man den Funktionsterm abspeichert, erstellt der Rechner automatisch eine Wertetabelle. Aus dieser kann man entnehmen, dass der Graph einen Hochpunkt im Intervall] -2 ; 0 [und einen Tiefpunkt im Intervall] 1 ; 3 [hat. Durch Verfeinerung der Schrittweite in der Wertetabelle kann die Aussage präzisiert werden. (Hinweis: im MathPrint-Modus werden Funktionswerte – wenn möglich – als Brüche angezeigt; wenn man diese markiert und auf die $\leftarrow \Rightarrow$ -Taste drückt, erscheint unten im Display die zugehörige Dezimalzahl.)

Um die exakte Lage der Extremstellen zu bestimmen, betrachten wir die numerische Ableitungsfunktion. Wenn es nur darum geht, deren Nullstellen zu bestimmen, genügt es, den numerischen Gleichungslöser num-solv ($\frac{\sin^{-1}}{\sin^{-1}}$) zu aktivieren und dort links den Ableitungsoperator einzusetzen sowie Funktionsnamen f (über $\frac{\text{table}}{\text{table}}$) und die Variable x ($\frac{x^{yzt}}{x^{abcd}}$), rechts vom Gleichheitszeichen null. Für die Suche muss jeweils ein geeigneter Startwert eingegeben werden.

Die Nullstellen von $f'(x)$ liegen bei $x \approx -0,786$ und bei $x \approx 2,120$.

Übungsaufgaben

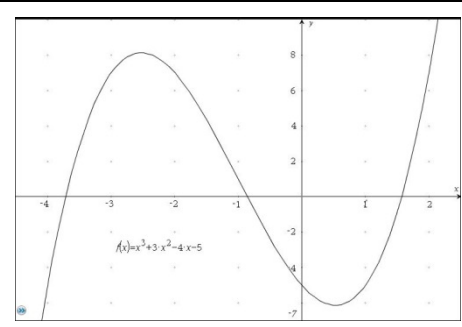
Untersuchen Sie die folgenden Graphen auf Extremstellen.

- | | | |
|---------------------------------|---|---|
| (1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$ | (2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$ | (3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ |
|---------------------------------|---|---|

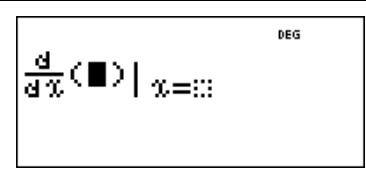
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

Untersuchung des Monotonieverhaltens und Bestimmung von Extrempunkten

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit
 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$.
 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen und bestimmen Sie den Hochpunkt und den Tiefpunkt.



Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Numerisches Differenzieren ($\frac{d}{dx}$)
 num-solv ($\frac{sin}{sin}$)



Erläuterung der Lösung
 Mithilfe der Wertetabelle der numerischen Ableitungsfunktion erkennt man ungefähr den Verlauf des Graphen: Zunächst steigt der Graph streng monoton (da die Werte der Ableitungsfunktion positiv sind); zwischen $x = -3$ und $x = -2$ ändert sich das Monotonieverhalten: der Graph ist danach streng monoton fallend ($f'(x) < 0$); zwischen $x = 0$ und $x = 1$ wechselt das Monotonieverhalten wieder zu streng monotonem Wachsen.
 Die Nullstellen von $f'(x)$ erhält man mit dem numerischen Gleichungslöser: Der Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ geschieht an den Stellen $x \approx -2,528$ (von + nach -) und $x \approx 0,528$ (von - nach +). Um die Funktionswerte an diesen Stellen zu bestimmen, kann man die expr-eval-Option ($\frac{table}{table}$) nutzen, sobald der Gleichungslöser eine Lösung gefunden hat. Gibt man dann nämlich den Funktionsterm von $f(x)$ ein, dann wird die Lösung in den angegebenen Term eingesetzt (da die gefundene Lösung als aktueller x-Wert gespeichert ist).

Der Graph hat den Hochpunkt (-2,528 | 8,128) und den Tiefpunkt (0,528 | - 6,128)

Übungsaufgaben

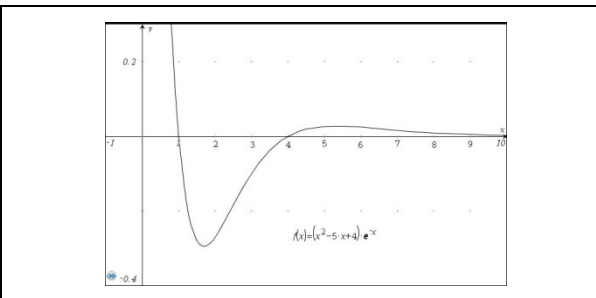
Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen und bestimmen Sie die Extrempunkte.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3$	(2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$	(3) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 8$
----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

Bestimmen von Wendepunkten eines Graphen

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist die Funktion f mit
 $f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$
 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen.



Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Numerisches Differenzieren (**2nd** **ln log**)
 Erstellen von Wertetabellen (**table**)

$$f(x) = \frac{d}{dx} (\dots) \quad | \quad x = \dots$$

Erläuterung der Lösung

Ein Graph ist auf einem Intervall genau dann linksgekrümmt [rechtsgekrümmt], wenn der Graph der Ableitungsfunktion auf diesem Intervall streng monoton wächst [fällt]. Definiert man die numerische Ableitungsfunktion als $f'(x)$, dann kann man an der automatisch erzeugten Wertetabelle ablesen: Zunächst nehmen die Werte von $f'(x)$ zu (d. h. der Graph von f ist linksgekrümmt); das Monotonieverhalten ändert sich zwischen $x = 2$ und $x = 3$, danach nehmen die Werte von $f'(x)$ wieder ab (d. h. der Graph von f ist rechtsgekrümmt) bis dann im Intervall] 6 ; 7 [erneut ein Monotoniewechsel eintritt: die Funktionswerte nehmen wieder zu (d. h. der Graph von f ist linksgekrümmt). Um die Stellen des Monotoniewechsel von f' zu bestimmen, müssen wir die Schrittweite für die Wertetabelle verfeinern und erhalten $x \approx 2,4384$ und $x \approx 6,5615$.

$f(x) = \frac{d}{dx} ((x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x})$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>0.135335125</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.184691196</td></tr> <tr><td>3</td><td>0.149361197</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	2	0.135335125	2.5	0.184691196	3	0.149361197	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>6</td><td>-0.0074362..</td></tr> <tr><td>6.5</td><td>-0.0083377..</td></tr> <tr><td>7</td><td>-0.0082069..</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	6	-0.0074362..	6.5	-0.0083377..	7	-0.0082069..	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2.4</td><td>0.185064559</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.185315419</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.184691196</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	2.4	0.185064559	2.5	0.185315419	2.5	0.184691196									
X	f(X)																																			
2	0.135335125																																			
2.5	0.184691196																																			
3	0.149361197																																			
X	f(X)																																			
6	-0.0074362..																																			
6.5	-0.0083377..																																			
7	-0.0082069..																																			
X	f(X)																																			
2.4	0.185064559																																			
2.5	0.185315419																																			
2.5	0.184691196																																			
	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2.435</td><td>0.185337063</td></tr> <tr><td>2.44</td><td>0.185338775</td></tr> <tr><td>2.445</td><td>0.185331523</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	2.435	0.185337063	2.44	0.185338775	2.445	0.185331523	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>2.4383</td><td>0.185339204</td></tr> <tr><td>2.4384</td><td>0.185339208</td></tr> <tr><td>2.4385</td><td>0.185339207</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	2.4383	0.185339204	2.4384	0.185339208	2.4385	0.185339207	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>6.5</td><td>-0.0086447..</td></tr> <tr><td>6.55</td><td>-0.0086557..</td></tr> <tr><td>6.6</td><td>-0.00865194</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	6.5	-0.0086447..	6.55	-0.0086557..	6.6	-0.00865194	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>6.5614</td><td>-0.0086561..</td></tr> <tr><td>6.5615</td><td>-0.0086561..</td></tr> <tr><td>6.5616</td><td>-0.0086561..</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	6.5614	-0.0086561..	6.5615	-0.0086561..	6.5616	-0.0086561..
X	f(X)																																			
2.435	0.185337063																																			
2.44	0.185338775																																			
2.445	0.185331523																																			
X	f(X)																																			
2.4383	0.185339204																																			
2.4384	0.185339208																																			
2.4385	0.185339207																																			
X	f(X)																																			
6.5	-0.0086447..																																			
6.55	-0.0086557..																																			
6.6	-0.00865194																																			
X	f(X)																																			
6.5614	-0.0086561..																																			
6.5615	-0.0086561..																																			
6.5616	-0.0086561..																																			

Die Funktionswerte an diesen Stellen kann man mithilfe von `expr-eval` erhalten. Die Wendepunkte des Graphen liegen ungefähr bei $W_1 (2,438 | -0,196)$, $W_2 (6,562 | 0,020)$.

$x = 2.4384$	$(x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x} = -0.196094679$	$x = 6.5615$	$(x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x} = 0.020140167$
--------------	--	--------------	---

Hinweis: Die Rechnerkapazitäten des TI-30X Pro MultiView™ reichen nicht aus, um direkt die numerische 2. Ableitung zu bilden.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen.

<p>(1) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 10x + 4$</p>	<p>(2) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 15x - 2$</p>
--	---

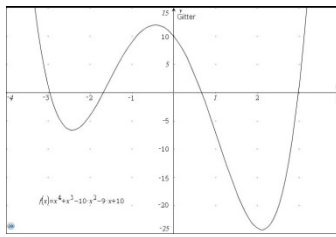
Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 10
-------------------------	---------------------

Exakte Bestimmung von Extrem- und Wendepunkten (ganzrat. Fkt. 4. Grades)

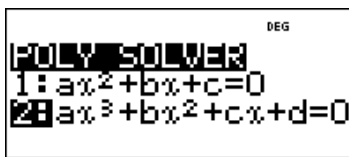
Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 + x^3 - 10x^2 - 9x + 10$.

Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte.

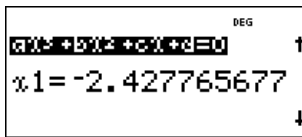
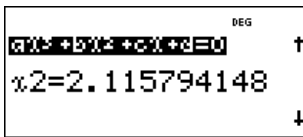
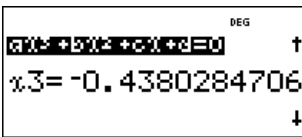
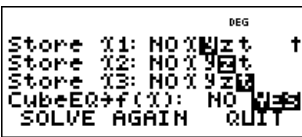
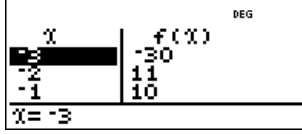
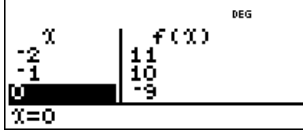
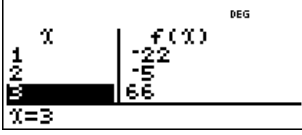
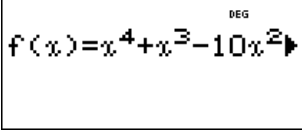
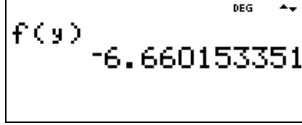
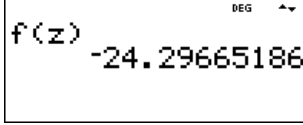
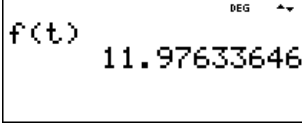


Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
Gleichungslöser poly-solv ($\text{2nd} \left[\begin{smallmatrix} \text{COS} \\ \text{COS}^{-1} \end{smallmatrix} \right]$)

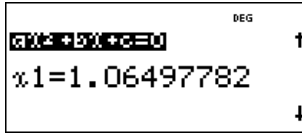
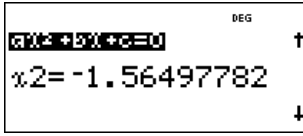
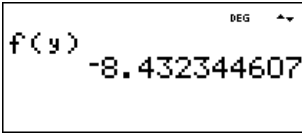
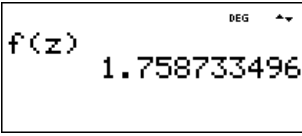


Erläuterung der Lösung

Da der Funktionsterm der 1. Ableitung ein Polynom 3. Grades ist und der Funktionsterm der 2. Ableitung ein Polynom 2. Grades, können die Nullstellen der Ableitungsfunktionen mithilfe des Gleichungslösers poly-solv exakt bestimmt werden. Es gilt: $f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 20x - 9$ und $f''(x) = 12x^2 + 6x - 20$. Die Lösungen der kubischen Gleichung $f'(x) = 0$ werden vom TI-30X Pro MultiView™ nach einem exakten Verfahren berechnet; wir speichern die Werte unter den Variablen y, z, t sowie den Funktionsterm, damit wir in der Wertetabelle überprüfen können, welche Vorzeichenwechsel $f'(x)$ hat. Demnach liegt ein VZW von - nach + vor bei $x \approx -2,428$ (lokales Minimum), ein VZW von + nach - bei $x \approx -0,438$ (lokales Maximum) und ein VZW von - nach + bei $x \approx 2,116$ (lokales Minimum). Die zugehörigen Funktionswerte erhält man nach Eingabe des Funktionsterms mithilfe der table -Optionen.

Die Extrempunkte sind $T_1 (-2,428 | -6,660)$; $H (-0,438 | 11,976)$; $T_2 (2,116 | -24,297)$.
Analog bestimmt man die Wendepunkte: $W_1 (-1,565 | 1,759)$; $W_2 (1,065 | -8,432)$.

			
---	---	--	---

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Extrem- und Wendepunkte der ganzrationalen Funktion 4. Grades.

(1) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + 12x + 6$	(2) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 20x^2 - 20x - 20$
--	---

Gebiet: Analysis Einsatz ab Stufe 11

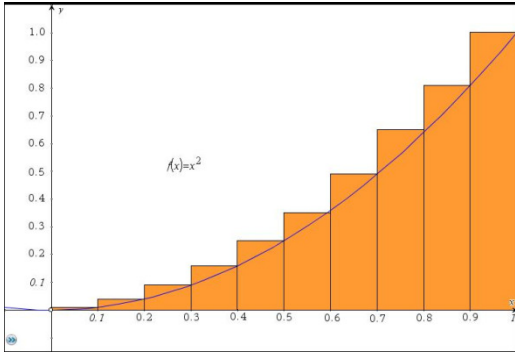
Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2$.

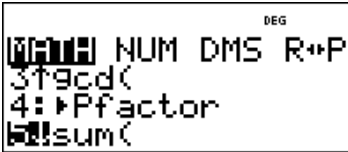
Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x -Achse soll für das Intervall $[0 ; 1]$ bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx , deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls und bestimmt deren Gesamtgröße.



Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:

Summen-Funktion des **math**-Menüs



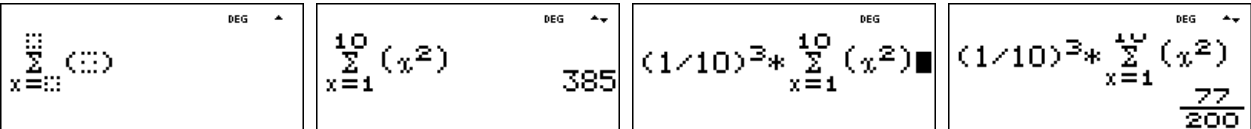
Erläuterung der Lösung

Die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) ergibt sich wie folgt:

$$O_n = \sum_{k=1}^n \Delta x \cdot f(x_k) = \Delta x \cdot \sum_{k=1}^n f(x_k),$$

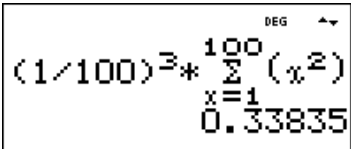
wobei die $f(x_k)$ die Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Intervalls sind. Im Beispiel (vgl. Abb.) sind dies $0,1^2 ; 0,2^2 ; \dots ; 1^2$, also $1^2 \cdot 0,1^2 ; 2^2 \cdot 0,1^2 ; \dots ; 10^2 \cdot 0,1^2$ und $\Delta x = 1/10 = 0,1$. Daher gilt hier: $O_{10} = 0,1 \cdot 0,1^2 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2 = 0,1^3 \cdot \sum_{k=1}^{10} k^2$.

Die Summe der Quadratzahlen bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des **math**-Menüs: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen Σ sowie den Funktionsterm von $f(x)$ (hier: x^2) ein, vgl. 1. und 2. Screenshot. Als Gesamtfläche erhält man hier: $O_{10} = 77/200 = 0,385$



Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie für das Intervall $[0 ; 1]$ und $f(x) = x^2$ den Wert von O_{20}, O_{50}, O_{100} (vgl. Screenshot rechts), O_{1000} . Welche Fläche ergibt sich, wenn man als Höhe der Rechtecke den Funktionswert am linken Intervall-Eckpunkt wählt (sogenannte Untersumme)?



$O_{20} =$ $O_{50} =$ $O_{100} = 0,33835$ $O_{1000} =$

$U_{20} =$ $U_{50} =$ $U_{100} =$ $U_{1000} =$

2. Bestimmen Sie U_{1000} und O_{1000} für $f(x) = x^2$ auf dem Intervall $[0 ; 2]$.

$U_{1000} =$ $O_{1000} =$

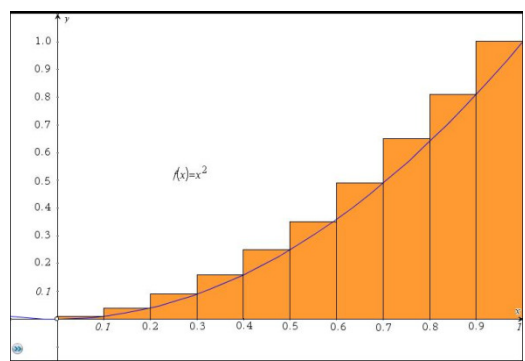
3. Bestimmen Sie U_{1000} und O_{1000} für $f(x) = x^3$ auf dem Intervall $[0 ; 1]$.

$U_{1000} =$ $O_{1000} =$

Gebiet: Analysis Einsatz ab Stufe 11

Einführung der Integralrechnung – Bestimmen von Ober- und Untersummen (2)

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist eine Funktion f, die auf dem Intervall [0 ; b] streng monoton steigend ist, beispielsweise $f(x) = x^2$ und $b = 1$ (siehe Abbildung rechts).



Die Maßzahl der Fläche des Flächenstücks zwischen Graph und x-Achse soll für das Intervall bestimmt werden.

Dazu betrachtet man Rechtecke mit der Breite Δx , deren Höhe bestimmt wird durch den Funktionswert von f am rechten Eckpunkt des jeweiligen Teilintervalls und bestimmt deren Gesamtgröße.

Bestimmen Sie die Flächenmaße für eine Unterteilung des Intervalls in $n = 10, 100, 1000$ Teile für (1) $f(x) = e^x - 1$ über dem Intervall [0 ; 1] (2) $f(x) = \sin(x)$ über dem Intervall [0 ; $\pi/2$]

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:

Summen-Funktion des Math-Menüs

Eingabe eines Funktionsterms (**table**)

Erläuterung der Lösung

Da der Graph der Funktion f streng monoton steigend auf dem Intervall ist, ergibt sich die Gesamtfläche der Treppenfigur (Obersumme O_n) aus dem Produkt der Funktionswerte am rechten Eckpunkt des Teilintervalls und der Rechteckbreite $\Delta x = b/n$: $O_n = \sum_{k=1}^n \frac{b}{n} \cdot f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right) = \frac{b}{n} \cdot \sum_{k=1}^n f\left(\frac{b \cdot k}{n}\right)$

Zunächst geben wir den Funktionsterm f(x) über das **table**-Menü ein; den Summenterm bestimmen wir mithilfe der Summen-Funktion des Math-Menüs: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für k (auf dem Rechner heißen alle Variablen x) am Summenzeichen Σ sowie den Term $f(x_k)$, den man über die Option 1 des **table**-Befehls aktiviert. Die Anzahl der Unterteilungen kann erhöht werden, indem man zurückscrollt und korrigiert. Für Teilaufgabe (2) muss nur der Funktionsterm im **table**-Menü ausgetauscht sowie b korrigiert werden (**mode**: RAD beachten).

$f(x)=e^x-1$	$\frac{1}{10} \sum_{x=1}^{10} \left(f\left(\frac{x}{10}\right) \right)$ 0.805627583	$\frac{1}{100} \sum_{x=1}^{100} \left(f\left(\frac{x}{100}\right) \right)$ 0.726887557	$\frac{1}{1000} \sum_{x=1}^{1000} \left(f\left(\frac{x}{1000}\right) \right)$ 0.719141113
$f(x)=\sin(x)$	$\frac{\pi}{20} \sum_{x=1}^{10} \left(f\left(\frac{\pi x}{20}\right) \right)$ 1.076482803	$\frac{\pi}{200} \sum_{x=1}^{100} \left(f\left(\frac{\pi x}{200}\right) \right)$ 1.00783342	$\frac{\pi}{2000} \sum_{x=1}^{1000} \left(f\left(\frac{\pi x}{2000}\right) \right)$ 1.000785192

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Obersummen $O_{10}, O_{100}, O_{1000}$ für

(1) $f(x) = \sin^2(x)$ auf dem Intervall [0 ; $\pi/2$]

(2) $f(x) = \frac{x-1}{x}$ auf dem Intervall [1 ; 2]

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

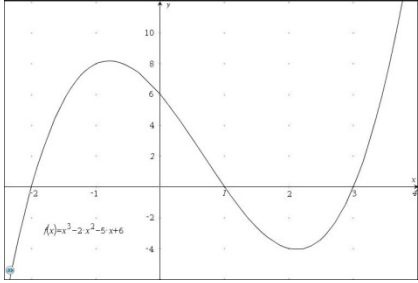
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (1)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.


Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

Hinweis: Die Nullstellen von $f(x)$ sind ganzzahlig.



Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:

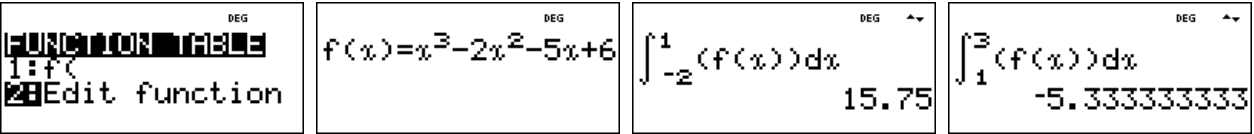
Numerische Integration ($\boxed{2nd} \boxed{e^{10^0}}$)



Erläuterung der Lösung

Wenn an einer Funktion mehrere Untersuchungen vorgenommen werden sollen, lohnt es sich, den Funktionsterm zunächst einmal abzuspeichern. Dies geschieht unter „Edit function“ im Menü, das sich öffnet, wenn man die \boxed{table} -Taste drückt. Damit veranlasst man gleichzeitig den Rechner, eine Wertetabelle anzulegen. Falls die Nullstellen ganzzahlig sind, kann man sie mithilfe der Wertetabelle finden; die gegebene Funktion hat die Nullstellen -2; +1 und +3. Wir erwarten für das linke Flächenstück einen positiven Wert des Integrals, da das Flächenstück oberhalb der x-Achse liegt, und für das rechte Flächenstück einen negativen Wert.

Gibt man dann die Nullstellen als Integrationsgrenzen ein und im Integranden das soeben definierte f (über erneutes Betätigen der die \boxed{table} -Taste, ergänzt um x), dann berechnet der Rechner die gewünschten Maßzahlen mit hoher Genauigkeit: das linke Flächenstück hat die Maßzahl 15,75 F.E., das rechte die Maßzahl $5 \frac{1}{3}$ (wie durch Betätigen der $\boxed{\rightarrow \leftarrow}$ -Taste bestätigt wird).



Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion f . Fertigen Sie eine Skizze des Graphen an, um vorherzusagen, welche der einzelnen Integrale positiv bzw. negativ sein werden. Bestimmen Sie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x -Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$	(2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8$	(3) $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 7x + 6$
---------------------------------	---	---

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

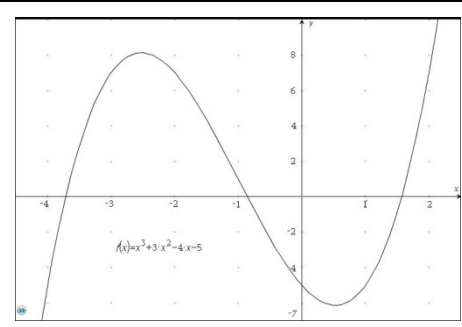
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (2)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 5$.

Die Maßzahl der Fläche der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

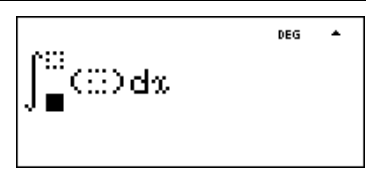
Die Nullstellen von f(x) sind nicht ganzzahlig.



Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Numerische Integration (2^{nd} $\int \square$)

Gleichungslöser poly-solv (2^{nd} $\frac{COS}{COS-1}$)



Erläuterung der Lösung

Da es sich um eine Funktion 3. Grades handelt, kann die Bestimmung der Nullstellen mithilfe von „poly-solv“ erfolgen. Zunächst werden die Koeffizienten des Polynoms eingegeben. Die drei Lösungen werden abgespeichert, damit sie als Integrationsgrenzen zur Verfügung stehen.

Bei der Integration beachte man die richtige Reihenfolge der Integrationsgrenzen (hier: $x_1 < x_3 < x_2$). Gibt man die gespeicherten Nullstellen als Integrationsgrenzen ein und im Integranden das soeben definierte f (über Betätigen der $\frac{table}{\square}$ -Taste, ergänzt um x), dann berechnet der TI-30X Pro MultiView™ die gewünschten Maßzahlen mit hoher Genauigkeit: das linke Flächenstück hat ungefähr die Maßzahl 15,0 F.E., das rechte ungefähr 9,7 F.E.

--	--

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Nullstellen der ganzrationalen Funktion f sowie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

(1) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 3$	(2) $f(x) = -x^3 - 2x^2 + 5x + 3$	(3) $f(x) = -x^3 - 4x^2 + 4x + 8$
----------------------------------	-----------------------------------	-----------------------------------

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

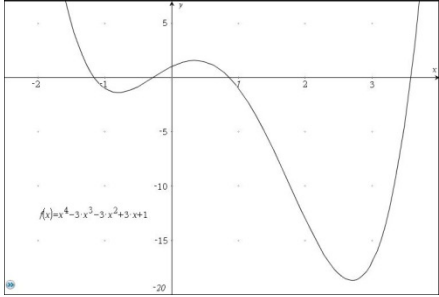
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (3)

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist die ganzrationale Funktion f mit $f(x) = x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 3x + 1$.

Die Maßzahl der Fläche der drei Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden, soll bestimmt werden.

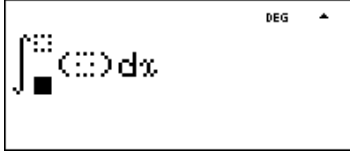
Die Nullstellen von f(x) sind nicht ganzzahlig.



Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Numerische Integration (2^{nd} $e^{□} 10^{□}$)

Gleichungslöser num-solv (2^{nd} $\frac{\sin^{-1}}{\sin^{-1}}$)

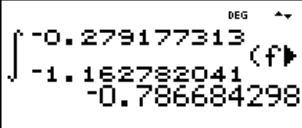
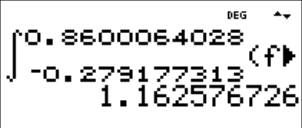
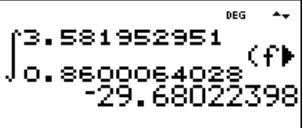


Erläuterung der Lösung

Da es sich um eine Funktion 4. Grades handelt, kann die Bestimmung der Nullstellen nur numerisch mithilfe von „num-solv“ erfolgen; hierfür benötigt man die ungefähre Lage der Nullstellen. Die Nullstellen sind aktuell jeweils unter der Variablen x gespeichert und sollten unter anderen Variablen abgelegt werden ($\text{sto} \rightarrow$), damit man auf sie zurückgreifen kann.

			
---	---	--	---

Bei der Integration gibt man nacheinander jeweils zwei benachbarte Nullstellen als Integrationsgrenzen ein, im Integranden die über die table -Taste definierte Funktion f(x). Der Rechner bestimmt dann die Maßzahlen mit hoher Genauigkeit. Das linke Flächenstück hat ungefähr die Maßzahl 0,79 F.E., das mittlere ungefähr 1,16 F. E., das rechte ungefähr 29,7 F.E.

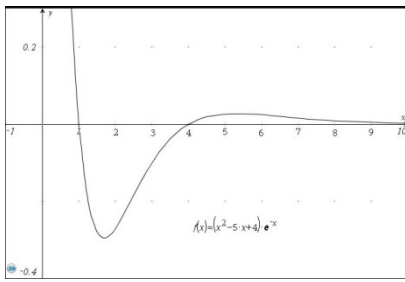
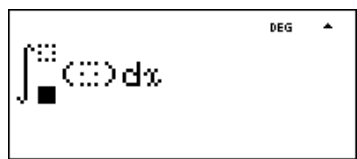

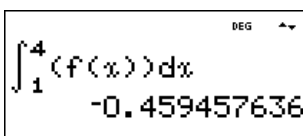
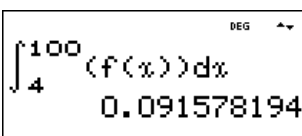
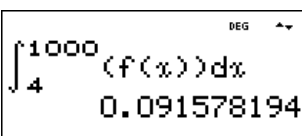
		
---	---	--

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die nicht ganzzahligen Nullstellen der ganzrationalen Funktion 4. Grades sowie die Maßzahlen der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.

<p>(1) $f(x) = x^4 - 12x^2 - 10x + 4$</p> <p>Nullstellen:</p> <p>$x_1 =$ $x_2 =$</p> <p>$x_3 =$ $x_4 =$</p> <p>Flächenmaßzahlen:</p> <p>$A_1 =$</p> <p>$A_2 =$</p> <p>$A_3 =$</p>	<p>(2) $f(x) = -x^4 - 2x^3 + 8x^2 + 15x - 2$</p> <p>Nullstellen:</p> <p>$x_1 =$ $x_2 =$</p> <p>$x_3 =$ $x_4 =$</p> <p>Flächenmaßzahlen:</p> <p>$A_1 =$</p> <p>$A_2 =$</p> <p>$A_3 =$</p>
---	--

Gebiet: Analysis		Einsatz ab Stufe 11
Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (4)		
Beispiel-Aufgabe Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2}$ Gesucht ist die Maßzahl des Flächenstücks zwischen $x = -1$ und $x = +1$, das von Graph und x-Achse eingeschlossen wird.		
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™: Numerische Integration ($\boxed{2^{nd}}\boxed{e^{10^{10}}}$)		
Erläuterung der Lösung Über die $\boxed{\text{table}}$ -Option gibt man den Funktionsterm ein – man kann dabei die $\boxed{\text{=}}$ -Taste benutzen. Der Rechner erzeugt eine Wertetabelle, die für das Anfertigen einer Skizze des Graphen verwendet werden kann. Bei der Eingabe der Integrandfunktion kann auf die Option 1 von $\boxed{\text{table}}$ zurückgegriffen werden.		
Übungsaufgaben		
Skizzieren Sie den Graphen der gebrochen-rationalen Funktion f und bestimmen Sie die Maßzahl des Flächenstücks, das der Graph von f und die x-Achse einschließen.		
(1) $f(x) = \frac{4 - x^2}{x^2 - 9}$	(2) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x}$	(3) $f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{x^2 - 1}$

<p>Gebiet: Analysis</p>	<p>Einsatz ab Stufe 11</p>
<p>Integralrechnung: Bestimmen von Flächen zwischen Graph und x-Achse (5)</p>	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gegeben ist die Funktion f mit</p> $f(x) = (x^2 - 5x + 4) \cdot e^{-x}$ <p>Gesucht sind die Maßzahlen der beiden Flächenstücke, die von Graph und x-Achse eingeschlossen werden.</p>	
<p>Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:</p> <p>Numerische Integration ($\boxed{2nd} \boxed{e^{10^x}}$)</p>	
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Am Funktionsterm liest man ab, dass die beiden Nullstellen der Funktion bei $x_1 = +1$ und $x_2 = +4$ liegen. Über die table-Option gibt man den Funktionsterm ein. Der Rechner erzeugt eine Wertetabelle, die für das Anfertigen einer Skizze des Graphen verwendet werden kann.</p> <p>Bei der Eingabe der Integrandfunktion kann auf die Option 1 von table zurückgegriffen werden.</p> <p>Bei der Bestimmung des „ins Unendliche“ reichende Flächenstücks ergibt sich kein Unterschied bei der Integration bis $x = 100$ oder bis $x = 1000$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="151 1086 454 1220">  </div> <div data-bbox="470 1086 774 1220">  </div> <div data-bbox="790 1086 1093 1220">  </div> <div data-bbox="1109 1086 1412 1220">  </div> </div>	
<p>Übungsaufgaben</p>	
<p>Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und bestimmen Sie die Maßzahl der Flächenstücke, die der Graph von f und die x-Achse einschließen.</p>	
<p>(1) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-x}$</p>	
<p>(2) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot x \cdot e^{-x}$</p>	
<p>(3) $f(x) = (x^2 - 1) \cdot (x^2 - 4) \cdot e^{-x}$</p>	

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

Integralrechnung: Untersuchung von Integralfunktionen

Beispiel-Aufgabe

Untersuchen Sie den Verlauf des Graphen der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze, die gegeben ist durch:

$$f(x) = \int_{-1}^x (t^3 - 3t^2 - t + 3) dt$$

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Edit function ()

Numerische Integration ()

Erläuterung der Lösung

Mithilfe von „Edit function“ im -Menü kann man den Funktionsterm eingeben – auch Integralfunktionen, wobei man beachten muss, dass im TI-30X Pro MultiView™ nicht formal zwischen der Variablen x der Integrationsgrenze und der Variablen t der Integrandfunktion unterschieden wird. Der Rechner legt eine Wertetabelle an, an der wir den Verlauf der Integralfunktion ablesen.

			<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">X</th> <th style="width: 85%;">f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>-0.5</td><td>0.765625</td></tr> <tr><td>0</td><td>2.25</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	-1	0	-0.5	0.765625	0	2.25																								
X	f(X)																																		
-1	0																																		
-0.5	0.765625																																		
0	2.25																																		
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">X</th> <th style="width: 85%;">f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0.5</td><td>3.515625</td></tr> <tr><td>1</td><td>4</td></tr> <tr><td>1.5</td><td>3.515625</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	0.5	3.515625	1	4	1.5	3.515625	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">X</th> <th style="width: 85%;">f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>2</td><td>2.25</td></tr> <tr><td>2.5</td><td>0.765625</td></tr> <tr><td>3</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	2	2.25	2.5	0.765625	3	0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">X</th> <th style="width: 85%;">f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>3</td><td>0</td></tr> <tr><td>3.5</td><td>1.265625</td></tr> <tr><td>4</td><td>6.25</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	3	0	3.5	1.265625	4	6.25	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: left;"> <thead> <tr> <th style="width: 15%;">X</th> <th style="width: 85%;">f(X)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>-2</td><td>6.25</td></tr> <tr><td>-1.5</td><td>1.265625</td></tr> <tr><td>-1</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	-2	6.25	-1.5	1.265625	-1	0
X	f(X)																																		
0.5	3.515625																																		
1	4																																		
1.5	3.515625																																		
X	f(X)																																		
2	2.25																																		
2.5	0.765625																																		
3	0																																		
X	f(X)																																		
3	0																																		
3.5	1.265625																																		
4	6.25																																		
X	f(X)																																		
-2	6.25																																		
-1.5	1.265625																																		
-1	0																																		

Vergrößert man – beginnend bei $x = -1$ – die obere Integrationsgrenze, dann stellt man eine Zunahme der Funktionswerte von 0 bis zu einem Maximum bei $x = +1$ fest, was plausibel ist, da das gesamte Flächenstück oberhalb der x -Achse liegt. Danach nehmen die Funktionswerte wieder ab bis zur Nullstelle bei $x = +3$, was wegen der Symmetrie des Graphen der Integrandfunktion zum Punkt $(+1 | 0)$ plausibel ist, und steigen danach wieder an, da der Graph der Integrandfunktion im positiven Bereich verläuft. Links von der ersten Nullstelle bei $x = -1$ hat die Funktion positive Funktionswerte, da zwar die Integrandfunktion im negativen Bereich verläuft, die obere Integrationsgrenze x aber unterhalb der unteren Integrationsgrenze -1 liegt.

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie die Graphen der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Integrandfunktion und erläutern Sie dann die Eigenschaften der Integralfunktion.

<p>(1) $f(x) = \int_0^x (t^4 - 4t^3 + 3t^2) dt$</p>	<p>(2) $f(x) = \int_0^x (t^4 - 5t^2 + 6) dt$</p>	<p>(3) $f(x) = \int_0^x \sin(t) dt$</p>
--	---	--

Gebiet: Analysis	Einsatz ab Stufe 11
-------------------------	---------------------

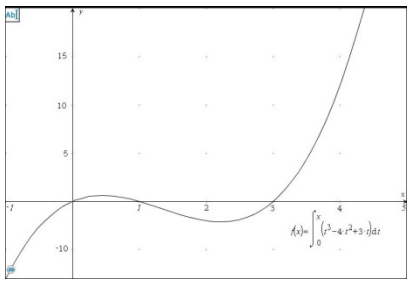
Bestimmung der Nullstellen von Integralfunktionen

Beispiel-Aufgabe

Gegeben ist der Graph der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze durch:

$$f(x) = \int_0^x (t^3 - 4t^2 + 3t) dt$$


Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion.



Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Numerische Integration (2^{nd} $\int \square$ e^{\square} 10^{\square})

num-solv (2^{nd} $\frac{\sin}{\sin^{-1}}$)



Erläuterung der Lösung

Die Integralfunktion wird mithilfe von „Edit function“ im **table**-Menü eingegeben. Der Rechner legt eine Wertetabelle an, aus der man entnehmen kann, dass der Graph der Integralfunktion eine doppelte Nullstelle bei $x = 0$ hat sowie zwei einfache Nullstellen, die zwischen $x = 1,6$ und $x = 1,7$ bzw. zwischen $x = 3,7$ und $x = 3,8$ liegen. Dass diese einfachen Nullstellen auftreten, ergibt sich aus der Tatsache, dass das Flächenstück zwischen 0 und 1, das oberhalb der x -Achse liegt, kleiner ist als das Flächenstück zwischen 1 und 3, das unterhalb der x -Achse liegt.

$f(x) = \int_0^x (t^3 - 4t^2 + 3t) dt$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0.1</td><td>0.013691667</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	0	0	0.1	0.013691667	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.5</td><td>0.140625</td></tr> <tr><td>1.6</td><td>0.017066667</td></tr> <tr><td>1.7</td><td>-0.127641667</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	1.5	0.140625	1.6	0.017066667	1.7	-0.127641667	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>3.6</td><td>-0.7776</td></tr> <tr><td>3.7</td><td>-0.1483083</td></tr> <tr><td>3.8</td><td>0.625733333</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	3.6	-0.7776	3.7	-0.1483083	3.8	0.625733333
X	f(X)																								
0	0																								
0.1	0.013691667																								
X	f(X)																								
1.5	0.140625																								
1.6	0.017066667																								
1.7	-0.127641667																								
X	f(X)																								
3.6	-0.7776																								
3.7	-0.1483083																								
3.8	0.625733333																								

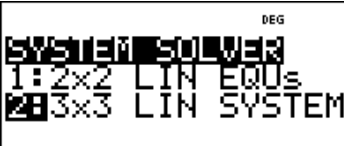
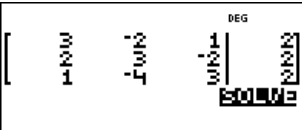
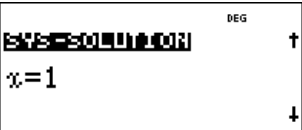


Gibt man dann im numerischen Gleichungslöser die Gleichung $f(x) = 0$ ein, dann findet der Rechner – bei Eingabe geeigneter Startwerte für den Suchalgorithmus – die beiden Nullstellen.

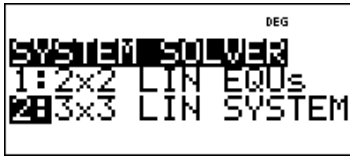
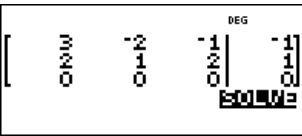
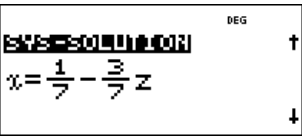
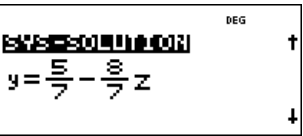

$f(x) = 0$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.6</td><td>0.017066667</td></tr> <tr><td>1.7</td><td>-0.127641667</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	1.6	0.017066667	1.7	-0.127641667	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>3.7</td><td>-0.1483083</td></tr> <tr><td>3.8</td><td>0.625733333</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	3.7	-0.1483083	3.8	0.625733333	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> </thead> <tbody> <tr><td>1.612574113</td><td>0</td></tr> <tr><td>3.72075922</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	X	f(X)	1.612574113	0	3.72075922	0
X	f(X)																				
1.6	0.017066667																				
1.7	-0.127641667																				
X	f(X)																				
3.7	-0.1483083																				
3.8	0.625733333																				
X	f(X)																				
1.612574113	0																				
3.72075922	0																				


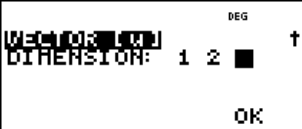
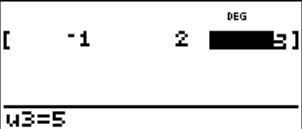
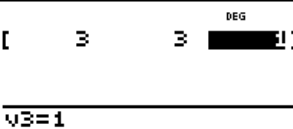
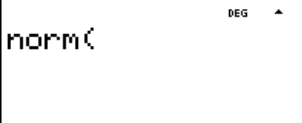
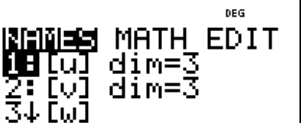
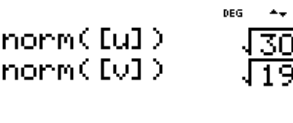
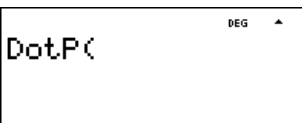
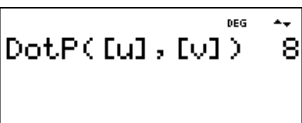
Übungsaufgaben



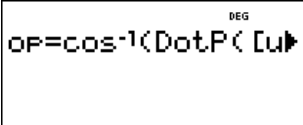
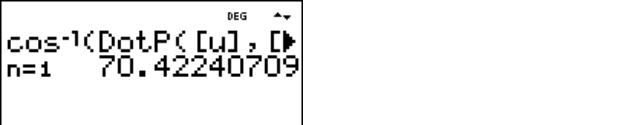
Bestimmen Sie die Nullstellen der Integralfunktion f mit fester unterer und variabler oberer Grenze. Skizzieren Sie zunächst den Graphen der Integrandfunktion und schätzen Sie grob ab, wo die Nullstellen liegen.

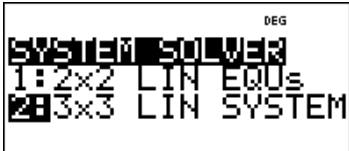
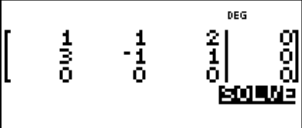
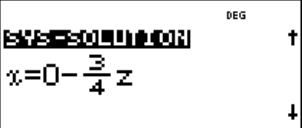
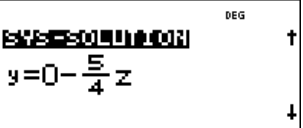

<p>(1) $f(x) = \int_0^x (t^2 - 2t) dt$</p>	<p>(2) $f(x) = \int_1^x (-t^3 + 5t^2 - 4t) dt$</p>	<p>(3) $f(x) = \int_0^x (t^4 - 4t^3 + t^2) dt$</p>
---	---	---

Gebiet: Lineare Algebra	Einsatz ab Stufe 10
Lösen eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems</p> $\begin{cases} 3x - 2y + 1z = 2 \\ 2x + 3y - 2z = 2 \\ 1x - 4y + 3z = 2 \end{cases}$	
<p>Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:</p> <p>System Solver ($\boxed{2nd}$ $\boxed{\tan}$)</p>	
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Die System-Solver-Option „3x3 LIN EQUs“ des TI-30X Pro MultiView™ erwartet zunächst die Eingabe der Koeffizienten in den drei Gleichungen. Diese gibt man nacheinander ein; nach Drücken der <i>enter</i>-Taste springt der Cursor jeweils zum nächsten einzugebenden Zeichen. Wenn der erste Koeffizient in einer Gleichung eingegeben ist, muss das Rechenzeichen + ggf. noch in – abgeändert werden, wie das beispielsweise in der ersten Gleichung der Fall ist. Hat man alle Koeffizienten und das Rechenzeichen eingegeben, erhält man nach Drücken der <i>enter</i>-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist ein Tripel von Zahlen, die gemeinsam das Gleichungssystem erfüllen (hier: (1 2 3) mit der Pfeiltaste nach unten/oben blättern).</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">     </div>	
Übungsaufgaben	
<p>1. Lösen Sie mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ das Gleichungssystem</p> <div style="display: flex; justify-content: space-between;"> <div style="width: 45%;"> <p>(a) $\begin{cases} 2x - 2y + 3z = 10 \\ -1x + 4y + 5z = 5 \\ 1x + 1y + 1z = 2 \end{cases}$</p> <p>(b) $\begin{cases} 2x - 1y + 3z = -1 \\ 1x + 2y + 2z = 1 \\ 3x - 4y + 1z = 3 \end{cases}$</p> </div> <div style="width: 45%;"> <p>(c) $\begin{cases} 1x - 1y - 2z = 0 \\ -1x + 2y = -8 \\ 3y + 1z = -3 \end{cases}$</p> <p>(d) $\begin{cases} 2x - 1y = 5 \\ 1x - 3z = -2 \\ 3y + 4z = -5 \end{cases}$</p> </div> </div>	
<p>2. Eine quadratische Parabel verläuft durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3. Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion f mit $f(x) = ax^2 + bx + c$.</p> <p>(a) $P_1 (1 0)$, $P_2 (2 3)$, $P_3 (3 10)$</p> <p>(b) $P_1 (1 5)$, $P_2 (3 37)$, $P_3 (-2 2)$</p> <p>(c) $P_1 (2 6)$, $P_2 (-2 -2)$, $P_3 (4 4)$</p> <p>(d) $P_1 (-2 5)$, $P_2 (2 9)$, $P_3 (4 29)$</p> <p>(e) $P_1 (-2 -4)$, $P_2 (2 6)$, $P_3 (3 11)$</p>	

Gebiet: Lineare Algebra & Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
Sonderfälle bei linearen Gleichungssystemen mit drei Variablen	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gesucht ist die Lösung des linearen Gleichungssystems</p> $\begin{cases} 3x - 2y - 1z = -1 \\ 2x + 1y + 2z = 1 \end{cases}$	
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: System Solver (2nd $\left[\begin{smallmatrix} \tan \\ \tan^{-1} \end{smallmatrix} \right]$)	
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Die System-Solver-Option „3x3 LIN EQUs“ (linear equations) des TI-30X Pro MultiView™ erwartet die Eingabe der Koeffizienten in <i>drei</i> Gleichungen; da nur zwei Gleichungen gegeben sind, wird als dritte Gleichung $0x + 0y + 0z = 0$ gewählt, d. h. man lässt die dritte Gleichung unverändert. Hat man alle Koeffizienten und Rechenzeichen eingegeben, erhält man nach Drücken der <i>enter</i>-Taste die Lösung des Gleichungssystems, das ist eine Parameterdarstellung der unendlich vielen Lösungen – hier das Tripel $(\frac{1}{7} - \frac{3}{7}z \mid \frac{5}{7} - \frac{8}{7}z \mid z)$. Setzt man für z irgendeine Zahl ein, dann erhält man eine konkrete Lösung, beispielsweise für $z = -2$: $(1 \mid 3 \mid -2)$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="156 1019 459 1153">  </div> <div data-bbox="475 1019 778 1153">  </div> <div data-bbox="794 1019 1098 1153">  </div> <div data-bbox="1114 1019 1417 1153">  </div> </div>	
<p>Übungsaufgaben</p>	
<p>1. Lösen Sie mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ das Gleichungssystem</p> <p>(a) $\begin{cases} 1x + 3y - 2z = 4 \\ -2x + 3y + 1z = 11 \end{cases}$</p> <p>(b) $\begin{cases} 5x + 2y + 3z = 7 \\ 3x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$</p> <p>(c) $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 3 \\ 1x + 1y + 3z = 6 \end{cases}$</p>	
<p>2. Gegeben sind zwei Ebenen E_1 und E_2 durch eine Koordinatengleichung. Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgerade – sofern sie existiert.</p> <p>(a) $E_1: 3x - 2y - 1z = -1$; $E_2: 2x + 1y + 2z = 1$</p> <p>(b) $E_1: 2x - 1y - 3z = -1$; $E_2: 4x - 2y - 6z = 2$</p> <p>(c) $E_1: 2x - 1z = 3$; $E_2: -2y + 1z = -1$</p>	

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
Länge und Orthogonalität von Vektoren	
Beispiel-Aufgabe (1) Gegeben sind zwei Vektoren. Welche Länge haben diese? (Betrag) (2) Sind die beiden Vektoren zueinander orthogonal?	$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Befehle der Vector-Option ($\boxed{2nd} \boxed{EE}$)	
Erläuterung der Lösung	
Mit der Vector-Option des TI-30X Pro MultiView™ kann man 1-, 2- oder 3-dimensionale Vektoren eingeben (EDIT) und mit ihnen rechnen (MATH). Die Vektoren hier sind 3-dimensional; die Komponenten werden einzeln eingeben; durch \boxed{enter} springt man zur nächsten Eingabe.	
	 
Die Länge eines Vektors ergibt sich nach dem Satz des PYTHAGORAS: $ \vec{u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$. Der TI-30X Pro MultiView™ berechnet die Länge, wenn man Option 3 (norm magnitude) wählt und dann über NAMES den Vektor benennt, dessen Länge bestimmt werden soll.	
	 
Zwei Vektoren sind zueinander orthogonal, wenn für das Skalarprodukt der beiden Vektoren gilt: $\vec{u} * \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$. – Mit dem TI-30X Pro MultiView™ berechnet man das Skalarprodukt mithilfe der Option DotProduct; man benennt dann über NAMES die beiden Vektoren, von denen das Skalarprodukt bestimmt werden soll. Die beiden Vektoren hier sind nicht zueinander orthogonal.	
	
Übungsaufgaben	
1. Bestimmen Sie mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ die Länge folgender Vektoren. 2. Welche der Vektoren stehen zueinander senkrecht?	
(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,3 \\ 1,6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/2 \\ 16/9 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0,3 \\ -0,2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -1,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$	

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11	
Winkel zwischen Vektoren, Geraden, Ebenen		
Beispiel-Aufgabe Gegeben sind zwei Vektoren. Welchen Winkel bilden sie miteinander?	$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Befehle der Vector-Option (2nd EE) Speichern von Operationen (op / set op)		
Erläuterung der Lösung		
Der TI-30X Pro MultiView™ verfügt über die Möglichkeit, dass man komplexe Formeln speichern und wieder aufrufen kann. Beispielsweise kann man diese Option bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren nutzen. Dabei gilt:		
$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }, \text{ also: } \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{ \vec{u} \cdot \vec{v} }\right)$		
Wenn man wiederholt den Winkel zwischen Vektoren bestimmen muss, dann lohnt es sich, den Term, bei dem die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion angewandt wird, auf den Quotienten aus dem Skalarprodukt der beiden Vektoren und dem Produkt der Beträge der beiden Vektoren als feste Operation zu definieren. Dazu klickt man die „set op“-Taste an – der Rechner erwartet dann die Eingabe des Terms. Im Beispiel hier ergibt sich ein Winkel von ca. 70,4°.		
		
Ändert man die betrachteten Vektoren, dann kann durch Anklicken des op-Befehls die gespeicherte Operation erneut abgerufen werden.		
Übungsaufgaben		
1. Bestimmen Sie mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ die Winkel zwischen folgenden Vektoren (a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,3 \\ 1,6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/2 \\ 16/9 \end{pmatrix}$		
2. Bestimmen Sie den Schnittwinkel zwischen den beiden Geraden g und h. $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$		
3. Bestimmen Sie den Schnittwinkel, den die beiden Ebenen miteinander bilden: $E_1: 3x - 2y + 4z = -1$; $E_2: 2x + 2y - 1z = 3$		

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
Darstellung von Ebenen: Von der Parameterdarstellung zur Koordinatengleichung	
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Gegeben ist die Ebene IE im \mathbb{R}^3 durch eine Parameterdarstellung. $IE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$</p> <p>Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.</p>	
<p>Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:</p> <p>System Solver ($\boxed{2nd} \boxed{\frac{\tan}{\tan^{-1}}}$)</p>	
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Die Koordinatengleichung einer Ebene wird bestimmt durch einen Normalenvektor der Ebene und durch einen Punkt der Ebene. Für die Komponenten n_1, n_2, n_3 des Normalenvektors muss gelten: $1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 2 \cdot n_3 = 0$ und $3 \cdot n_1 - 1 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0$ (d. h. das Skalarprodukt des Normalenvektors mit den beiden Richtungsvektoren der Ebene muss jeweils null ergeben).</p> <p>Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Variablen, das mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ gelöst werden kann. Nach Eingabe der erweiterten Koeffizientenmatrix – die fehlende dritte Gleichung ist $0 \cdot n_1 + 0 \cdot n_2 + 0 \cdot n_3 = 0$ – erhält man eine Parameterdarstellung der unendlich vielen Lösungen. Wählt man $z = -4$, dann sind $x = 3$ und $y = 5$.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div data-bbox="156 1010 459 1137">  </div> <div data-bbox="475 1010 778 1137">  </div> <div data-bbox="794 1010 1098 1137">  </div> <div data-bbox="1114 1010 1417 1137">  </div> </div> <p>Setzt man in die so erhaltene Form $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3$ die Koordinaten des Aufhängepunktes A (1 2 -1) ein, dann erhält man 17 und somit die Koordinatengleichung der Ebene:</p> <p>IE: $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = 17$</p>	
Übungsaufgaben	
<p>1. Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Ebene IE. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von IE.</p> <p>a) $IE: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$</p> <p>b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$</p>	
<p>2. Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Geraden g mit der Ebene IE aus Übungsaufgabe 1</p> <p>(1) durch Einsetzen der Parameterdarstellung der Geradenpunkte in die in Aufgabe 1 bestimmte Koordinatengleichung</p> <p>(2) durch Lösung des sich ergebenden linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Variablen</p> <p>$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$</p>	

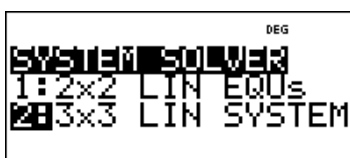
Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
--------------------------------------	---------------------

Lagebeziehungen von Geraden

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 im \mathbb{R}^3 . Untersuchen Sie die gegenseitige Lage.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 System Solver (2nd $\left[\begin{smallmatrix} \tan \\ \tan^{-1} \end{smallmatrix} \right]$)

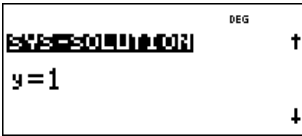
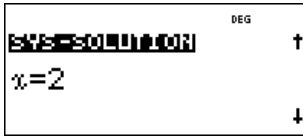
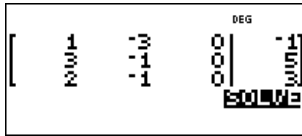


Erläuterung der Lösung

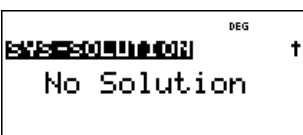
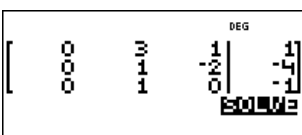
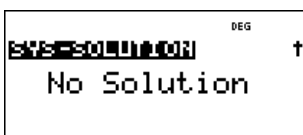
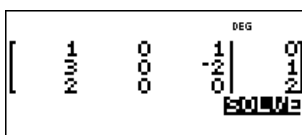
Es ist zu untersuchen, ob je zwei Geraden gemeinsame Punkte haben, d. h. ob das lineare Gleichungssystem mit drei Gleichungen und zwei Variablen eine Lösung hat oder nicht.

Dazu muss die zu lösende Vektorgleichung, z. B. $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ umgeformt werden zu

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{oder als Gleichungssystem} \quad \begin{cases} x - 3y = -1 \\ 3x - y = 5 \\ 2x - y = 3 \end{cases} \quad (\text{mit } x \text{ für } \lambda \text{ und } y \text{ für } \mu)$$



Da das Gleichungssystem eine Lösung besitzt, haben die Geraden g_1 und g_2 einen gemeinsamen Punkt, dessen Koordinaten $S(4 | 4 | 3)$ man erhält, wenn man die Lösungen in die Parameterdarstellungen einsetzt. Dagegen erhält man keine Lösungen, wenn man analog gemeinsame Punkte von g_1 und g_3 bzw. von g_2 und g_3 sucht:


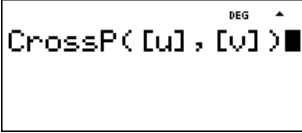
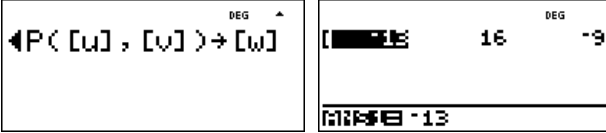


d. h. die Geraden g_1 und g_3 bzw. g_2 und g_3 sind zueinander windschief oder zueinander parallel. An den Richtungsvektoren liest man ab, dass sie nicht zueinander parallel sind.

Übungsaufgabe

Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 im \mathbb{R}^3 . Untersuchen Sie die gegenseitige Lage.

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
Anwendung des Vektorprodukts: Bestimmen eines orthogonalen Vektors	
Beispiel-Aufgabe Gesucht ist ein Vektor, der orthogonal ist zu den beiden Vektoren.	$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™: Math-Befehle der Vector-Option ($\boxed{2nd} \boxed{EE}$)	
Erläuterung der Lösung	
Mithilfe des Kreuzprodukts (Cross-Product) kann man einen Vektor bestimmen, der orthogonal zu zwei gegebenen Vektoren ist. Man kann ihn mithilfe des $\boxed{sto \rightarrow}$ -Befehls unter dem Namen w abspeichern. Der berechnete Vektor wird (aus Platzgründen) als Zeilenvektor ausgegeben.	
	
Übungsaufgaben	
1. Bestimmen Sie einen Vektor, der orthogonal ist zu den gegebenen Vektoren.	
(a) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ -1,3 \\ 1,6 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 1,1 \\ 0,6 \end{pmatrix}$ (c) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1/4 \\ 2/3 \\ 3/4 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/2 \\ 16/9 \end{pmatrix}$ (d) $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1,4 \\ 0,3 \\ -0,2 \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ -1,2 \\ 0,3 \end{pmatrix}$	
2. Gegeben ist eine Parameterdarstellung einer Ebene E. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.	
(a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$	
3. Zeigen Sie, dass die beiden Geraden g und h einen Punkt gemeinsam haben. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, die durch die beiden Geraden bestimmt wird.	
$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$	

Gebiet: Analytische Geometrie	Einsatz ab Stufe 11
--------------------------------------	---------------------

Abstand eines Punktes von einer Geraden

Beispiel-Aufgabe
 Gegeben ist der Punkt P (1 | 2 | 3) und die Gerade g, die gegeben ist durch eine Parameterdarstellung.

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Welchen Abstand hat der Punkt von der Geraden?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

- Vector (**2nd** **EE**)
- Definition einer Funktion (**table**)
- numerische Ableitung (**2nd** **ln log**)

NAMES MATH EDIT
 1: [u] dim=3
 2: [v] dim=3
 3: [w] dim=3

FUNCTION TABLE
 1: f(x)
 Edit function

Erläuterung der Lösung

Wir bilden den Differenzvektor $\vec{p} - \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$

und untersuchen, für welche Einsetzung des Parameters λ dieser einen möglichst kleinen Betrag hat. Mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ kann dies realisiert werden, indem wir eine Funktion f definieren, die in Abhängigkeit vom Parameter x (statt λ) den Betrag des Differenzvektors berechnet:

Dazu definieren wir zunächst die drei Vektoren (die beim Rechner u, v, w heißen) und dann über das **table**-Menü die Funktion: $f(x) = \text{norm}([u] - ([v] + x \cdot [w]))$, deren Wertetabelle wir untersuchen können. Das Minimum der Funktion liegt ungefähr bei $x \approx 0,7$.

Um das Minimum mit größerer Genauigkeit zu bestimmen, betrachten wir die numerische Ableitung der Betragsfunktion an der Stelle x. Diese Funktion hat einen Vorzeichenwechsel zwischen $x = 0,6$ und $x = 0,7$. Mithilfe des Gleichungslösers finden wir die Lösung $x = 2/3$.

Um den Abstand zu bestimmen, kehren wir zur Betragsfunktion zurück (man braucht nur den Operator d/dx zu löschen), setzen $x = 2/3$ ein und erhalten $f(2/3) \approx 1,83$.

[u] = [1 2 3]	[v] = [2 3 1]	[w] = [-1 1 2]	f(x)=norm([u]-([v]+x*[w]))																				
NAME 1	v3=1	w3=2																					
TABLE SETUP start=0 step=0.1 x=? CALC	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.6</td><td>1.833030278</td></tr> <tr><td>0.7</td><td>1.827566688</td></tr> <tr><td>0.8</td><td>1.854723699</td></tr> <tr><td>X=0.6</td><td></td></tr> </table>	x	f(x)	0.6	1.833030278	0.7	1.827566688	0.8	1.854723699	X=0.6		$f(x) = \frac{d}{dx}(\text{norm}([u]))$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.6</td><td>-0.2182176</td></tr> <tr><td>0.7</td><td>0.109435033</td></tr> <tr><td>0.8</td><td>0.431330729</td></tr> <tr><td>X=0.8</td><td></td></tr> </table>	x	f(x)	0.6	-0.2182176	0.7	0.109435033	0.8	0.431330729	X=0.8	
x	f(x)																						
0.6	1.833030278																						
0.7	1.827566688																						
0.8	1.854723699																						
X=0.6																							
x	f(x)																						
0.6	-0.2182176																						
0.7	0.109435033																						
0.8	0.431330729																						
X=0.8																							
f(x)=0	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>x</th><th>f(x)</th></tr> <tr><td>0.666666667</td><td>1.825741858</td></tr> <tr><td>X=</td><td></td></tr> </table>	x	f(x)	0.666666667	1.825741858	X=		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>X=0</td><td></td></tr> <tr><td>SOLVE: X</td><td></td></tr> </table>	X=0		SOLVE: X		<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td>SOLVE AGAIN</td><td>QUIT</td></tr> </table>	SOLVE AGAIN	QUIT								
x	f(x)																						
0.666666667	1.825741858																						
X=																							
X=0																							
SOLVE: X																							
SOLVE AGAIN	QUIT																						

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes P (1 | -1 | 1) von den Geraden g_1, g_2, g_3, g_4 :

$$g_1 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad g_2 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_3 : \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad g_4 : \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

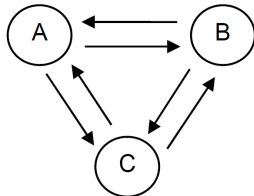
Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11
--	---------------------

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (1)

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben. Wir betrachten einen Anfangszustand von 30 % Pkw in A, 40 % in B, 30 % in C.

Wie verteilen sich in den nächsten drei Tagen die Leihautos auf die Niederlassungen?
 Welche Verteilung ist auf lange Sicht zu erwarten?



$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Matrix-Menü (**2nd** **math**)

Vector-Menü (**2nd** **EE**)

DEG

NAMES MATH **EQ**

1: [A]

2: [B]

3: [C]

DEG

NAMES MATH **EQ**

1: [u]

2: [v]

3: [w]

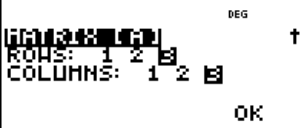
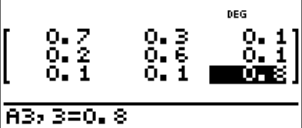
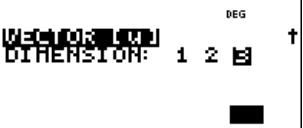
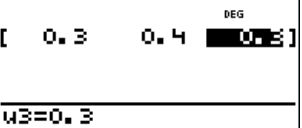
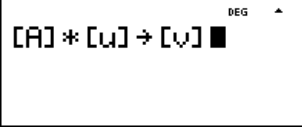
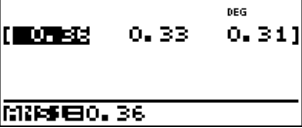
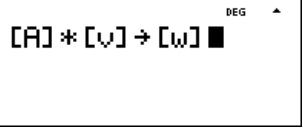
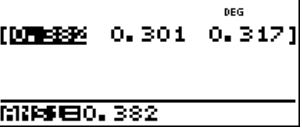
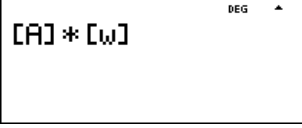
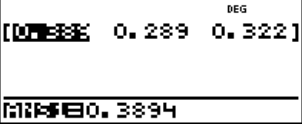
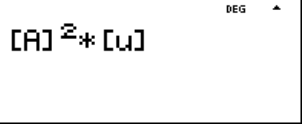
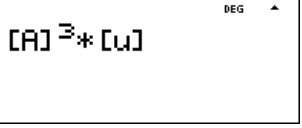
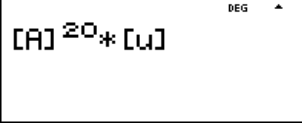
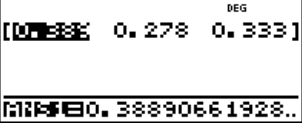
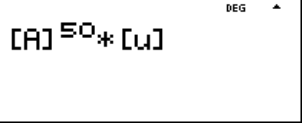
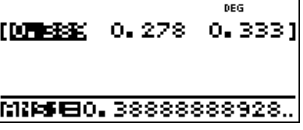
Erläuterung der Lösung

Über den Editor des Matrix-Menüs gibt man zunächst die Dimension der Matrix (3 x 3) und dann zeilenweise die Koeffizienten ein, dann über den Editor des Vector-Menüs die Dimension und die Koeffizienten des Startvektors. Den Editor verlässt man mit dem quit-Befehl (**2nd** **mode**).

Über die NAMES-Befehle ruft man die Matrix und den Vektor auf, um das Produkt zu bilden; dieses wird – aus Platzgründen – ebenfalls als Zeilenvektor ausgegeben. Wir lesen ab: Nach einem Tag sind 36 % der Fahrzeuge in Niederlassung A, 33 % in B und 31 % in C.

Da der Zustandsvektor für den 2. Tag für die weitere Rechnung benötigt wird, sollte er zunächst abgespeichert werden; entsprechend verfährt man für den 3. Tag. Die Koeffizienten des Zustandsvektors für den 4. Tag werden auf drei Dezimalstellen gerundet ausgegeben; bei Anklicken sieht man unten den exakten Wert. Alternativ kann man auch die Matrixpotenzen A², A³ mit dem Startvektor multiplizieren, um die Zustandsvektoren der nächsten Tage zu erhalten.

Um die Verteilung auf lange Sicht zu berechnen, betrachtet man höhere Exponenten der Matrixpotenz. Es zeigt sich, dass es zwischen dem Zustand nach 20 bzw. 50 Tagen kaum einen Unterschied gibt: ca. 38,9 % der Autos werden in A sein, ca. 27,8 % in B und ca. 33,3 % in C.

Übungsaufgaben

Bestimmen Sie die Verteilung der Leihautos für den Anfangszustand (1 ; 0 ; 0) [(0 ; 1 ; 0)].

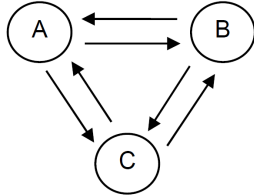
Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11
--	---------------------

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (2) – Inverse Matrix

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben. Wir betrachten einen Anfangszustand von 30 % Pkw in A, 40 % in B, 30 % in C.

Wie kann man erschließen, welche Verteilung die Leihautos am Vortag auf die Niederlassungen hatten?

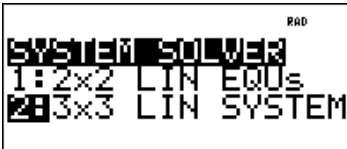
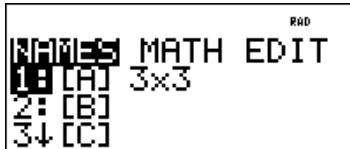


$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

System solver (2^{nd} $\left[\frac{\tan}{\tan^{-1}} \right]$)

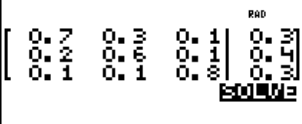



Matrix-Menü (2^{nd} $[math]$)

Erläuterung der Lösung

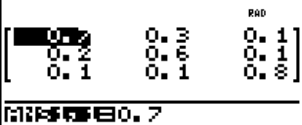
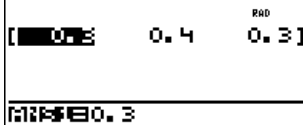
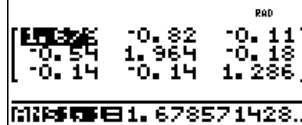
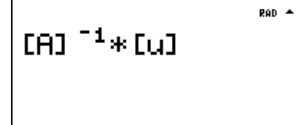
Gesucht ist nach Aufgabenstellung ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $M * \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,4 \\ 0,3 \end{pmatrix}$


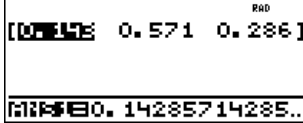
1. Weg: Die Matrix-Vektor-Gleichung kann als lineares Gleichungssystem aufgefasst werden, das zu lösen ist. Dazu muss die erweiterte Koeffizientenmatrix im System solver eingegeben werden. Man erhält dann den Lösungsvektor – hier als Zeilenvektor notiert:
 (1/7 ; 4/7 ; 2/7) ≈ (0,143 ; 0,571 ; 0,286)

2. Weg: Man gibt zunächst Übergangsmatrix und Startvektor ein und bestimmt dann die inverse Matrix zur Übergangsmatrix und multipliziert diese mit dem gegebenen Startvektor.

Um die Umkehrmatrix zu bilden, wählt man unter NAMES zunächst den Namen der Matrix und drückt dann entweder die $[x^{-1}]$ -Taste (Exponent: -1) oder wählt im MATH-Menü des Matrix-Menüs den Befehl „Inverse“. Es ergibt sich der gleiche Zustandsvektor für den Vortag wie oben.

Übungsaufgaben

- a) Welche Probleme treten auf, wenn man die Verteilung am Vor-Vortag bestimmen möchte?
- b) Bestimmen Sie – falls möglich – den Zustandsvektor des Vortags für einen Startvektor (hier als Zeilenvektor notiert):
 (1) (1 ; 0 ; 0) (2) (1/3 ; 1/3 ; 1/3) (3) (0,5 ; 0,25 ; 0,25) (4) (0,389 ; 0,278 ; 0,333)

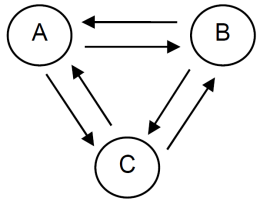
Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik)	Einsatz ab Stufe 11
--	---------------------

Übergangsmatrizen: Bestimmung von Zustandsvektoren (3) - Fixvektor

Beispiel-Aufgabe

Eine Mietwagenfirma hat Niederlassungen in drei Städten A, B, C. Durch die Matrix M wird der durchschnittliche tägliche Wechsel von Leihautos zwischen Niederlassungen beschrieben.

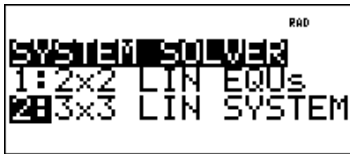
Gibt es eine optimale Verteilung der Leihautos auf die drei Niederlassungen, d. h. gibt es einen Zustand, der sich nicht ändert?
(Ein solcher Zustand wird als Fixvektor der Übergangsmatrix bezeichnet.)



$$M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix}$$

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

System solver ($\boxed{2nd} \boxed{\text{tan}^{-1}}$)



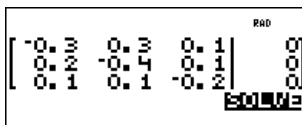
Erläuterung der Lösung

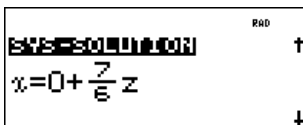
Gesucht ist nach Aufgabenstellung ein Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,6 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

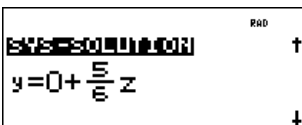
Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit drei Gleichungen und drei Variablen. Bevor dieses gelöst werden kann, muss es umgeformt werden. Wir benutzen hier die Variablennamen x, y, z:

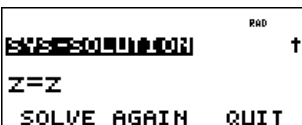
$$\begin{cases} 0,7x + 0,3y + 0,1z = x \\ 0,2x + 0,6y + 0,1z = y \\ 0,1x + 0,1y + 0,8z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -0,3x + 0,3y + 0,1z = 0 \\ 0,2x - 0,4y + 0,1z = 0 \\ 0,1x + 0,1y - 0,2z = 0 \end{cases}$$

Die erweiterte Koeffizientenmatrix wird im System solver eingegeben. Man erhält unendlich viele Lösungen, die in Form einer Parameterdarstellung ausgegeben werden:









Es gibt jedoch nicht unendlich viele Lösungen der Form $(\frac{7}{6} z ; \frac{5}{6} z ; z)$, sondern tatsächlich eine eindeutige Lösung: Für die Komponenten des Zustandsvektors muss nämlich gelten, dass ihre Summe gleich 1 (= 100 %) ist: $\frac{7}{6} z + \frac{5}{6} z + z = 1$

Auflösen dieser linearen Gleichung nach z ergibt: $z = 1/3$. Folglich existiert ein stabiler Zustand des Systems: $(\frac{7}{18} ; \frac{5}{18} ; \frac{6}{18}) \approx (0,389 ; 0,278 ; 0,333)$.

Hinweise: (a) Der Hauptsatz über reguläre MARKOFF-Ketten sagt aus, dass die Spaltenvektoren der Grenzmatrix M^∞ gleich dem Fixvektor der Matrix M sind, vgl. Arbeitsblatt (1).

(b) Man hätte die Gleichung $x + y + z = 1$ auch von vornherein berücksichtigen können, allerdings kann der TI-30X Pro MultiView™ nur 3x3-Gleichungssysteme lösen.

Übungsaufgaben

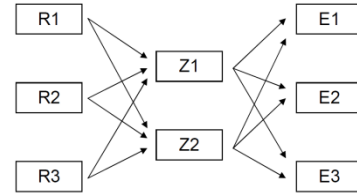
Bestimmen Sie den Fixvektor zur Matrix (1) $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$ (2) $M = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \\ 0,2 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}$

Gebiet: Matrizen (Lineare Algebra / Stochastik) Einsatz ab Stufe 11

Verflechtungsmatrizen: Bedarfsberechnungen

Beispiel-Aufgabe

Eine Firma stellt drei Endprodukte E1, E2 und E3 her, die sie aus angelieferten Zwischenprodukten Z1 und Z2 zusammensetzt. Der Hersteller der Zwischenprodukte wiederum benötigt hierfür drei Rohprodukte R1, R2 und R3.



Konkret bestehen folgende Beziehungen zwischen den Roh-, Zwischen- und End-Produkten:
 $Z1 = 3 E1 + 5 E2 + 2 E3$ (d. h. der Bedarf von Zwischenprodukt Z1 ergibt sich aus dem Bedarfen der Endprodukte: 3 Mengeneinheiten für E1, 5 ME für E2 und 2 ME für E3); außerdem noch:
 $Z2 = 4 E1 + 1 E2 + 2 E3$; $R1 = 1 Z1 + 3 Z2$; $R2 = 3 Z1 + 4 Z2$; $R3 = 2 Z1 + 1 Z2$

Bestimmen Sie die Bedarfsmatrizen für die beiden Produktionsstufen sowie die Bedarfsmatrix für den gesamten Produktionsprozess, wenn 20 ME des Endprodukts E1, 30 ME des Endprodukts E2 und 15 ME des Endprodukts E3 hergestellt werden sollen.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Matrix-Menü (2^{nd} [math])
 Vector-Menü (2^{nd} [EE])

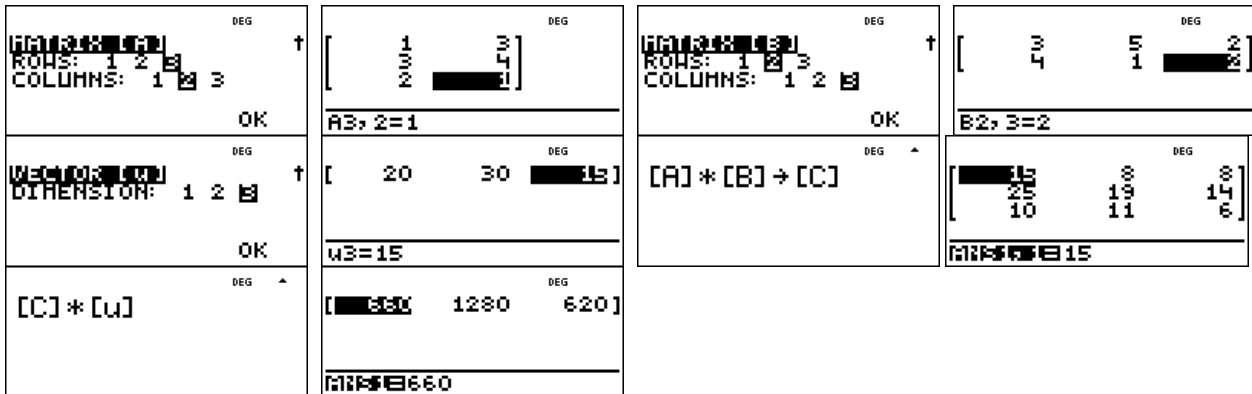


Erläuterung der Lösung

Die beiden Produktionsstufen lassen sich auch mithilfe von Bedarfsmatrizen beschreiben:

1. Produktionsstufe $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2. Produktionsstufe $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; Auftragsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 15 \end{pmatrix}$

Diese können jeweils über den Editor des Rechners eingegeben werden. Die Gesamtbedarfsmatrix ergibt sich aus dem Produkt C der beiden Matrizen: $C = A * B$, der Gesamtbedarf aus dem Produkt von C mit dem Auftragsvektor:



Es ergibt sich ein Gesamtbedarf von 660 ME des Rohstoffs R1, 1280 ME des Rohstoffs R2 und 620 ME des Rohstoffs R3.

Übungsaufgabe

Bestimmen Sie die Bedarfsmatrizen für eine Materialverflechtung, die durch die folgenden Gleichungen gegeben ist: $Z1 = 4 E1 + 2 E2 + 1 E3$; $Z2 = 3 E1 + 2 E3$ sowie $R1 = 5 Z1 + 3 Z2$; $R2 = 1 Z1 + 2 Z2$; $R3 = 3 Z1 + 4 Z2$.

Benötigt werden 12 ME des Endprodukts E1, 22 ME des Endprodukts E2 und 17 ME des Endprodukts E3. Bestimmen Sie den Gesamtbedarf an Rohstoffen R1, R2, R3.

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 8
--	--------------------

Regressionsrechnung: Modellieren durch eine lineare Funktion

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der Deutschen Bundesbank nahm die Anzahl der Bankfilialen in Deutschland in den letzten Jahren kontinuierlich ab.

Geben Sie aufgrund der Entwicklung eine Prognose an für die Anzahl der Bankfilialen im Jahr 2012.

(Hinweis: Wählen Sie statt der tatsächlichen Jahreszahlen die Zahlen 0, 2, 4, ..., 14.)

	Jahr	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009	
	Anzahl	67930	63186	58546	54089	47244	44100	39833	39441	

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 LinReg (**2nd**[data])

Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der **[data]**-Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das STAT-REG-Menü die Option LinReg aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt. Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete lineare Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man anschließend über die Wertetabelle die Prognosewerte für kommende Jahre ablesen kann. Die am besten zu den Daten passende lineare Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -2181x + 67062$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß r^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.

Um die Prognose vornehmen zu können, wird über die **[table]**-Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax + b$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden. Für das Jahr 2013 ergibt sich im linearen Modell die Prognose $f(18) \approx 27808$.

$f(x)=ax+b$

Übungsaufgabe

Der Bierabsatz in Deutschland (gemessen in Millionen Hektoliter) war in den letzten Jahren leicht rückläufig. Welche Prognose (gemäß linearem Modell) ergibt sich für das Jahr 2012?

Lineare Funktion: $f(x) =$

	Jahr	1994	1998	2002	2006	2008	2012	
	Volumen	115,7	109,4	107,8	106,8	102,9		← Prognose

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 9
--	--------------------


Regressionsrechnung: Modellieren durch eine quadratische Funktion

Beispiel-Aufgabe

Ein Basketballspieler wird beim Freiwurf-Training fotografiert. Legt man ein Koordinatensystem über die Bilder, dann stellt man fest: Der Ball wird in A (0 | 225) abgeworfen; die Mitte des Korbes ist in B (430 | 305). Aus den Fotos sind ungefähr die Punkte C (100 | 310), D (200 | 395), E (300 | 375) zu entnehmen (Angaben in cm).

Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, durch welche die Wurfparabel am besten beschrieben werden kann.

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 QuadraticReg des STAT-Reg-Menüs (2nd data)



Erläuterung der Lösung

Die Daten werden nach Drücken der data -Taste in die beiden Listen L1 und L2 eingegeben; dann wird über das STAT-REG-Menü die Option QuadraticReg aktiviert, in der bestätigt wird, dass die Daten in den Listen L1 und L2 stehen und mit der Häufigkeit 1 (ONE) berücksichtigt. Außerdem wird die Option aktiviert, dass der berechnete quadratische Funktionsterm unter f(x) gespeichert wird (RegEQ→f(x)); dies geschieht, damit man auch Zwischenwerte ablesen kann. Die am besten zu den Daten passende quadratische Funktion hat die Funktionsgleichung $f(x) \approx -0,0026x^2 + 1,316x + 219,9$. Die gute Qualität der Anpassung lässt sich am Bestimmtheitsmaß R^2 ablesen, das nahe bei 1 liegt.



Um weitere Punkte der Flugkurve ablesen zu können, wird über die table -Taste die Wertetabelle aufgerufen. Da der Funktionsterm in der Form $f(x) = ax^2 + bx + c$ gespeichert wurde, muss er nicht eingegeben werden.



X	f(X)
0	219.8998283
50	279.2102236
100	325.512329
X=0	

Übungsaufgabe

1. Durch drei Punkte ist eine quadratische Parabel eindeutig bestimmt. Bestimmen Sie die Gleichung mithilfe einer quadratischen Regression.

(1) $P_1 (-2 | 5)$; $P_2 (0 | -1)$; $P_3 (3 | 8)$

(2) $P_1 (-2 | -3)$; $P_2 (1 | 1)$; $P_3 (5 | 0)$

2. Ein Ball wird aus einer Höhe von 8 m über der Straßenebene waagrecht aus einem Fenster geworfen. Er trifft in 10 m Entfernung von der Hauswand auf dem Boden auf.

Bestimmen Sie die Gleichung der Wurfparabel mithilfe einer quadratischen Regression.

Gebiet: Beschreibende Statistik	Einsatz ab Stufe 10
--	---------------------

Regressionsrechnung: Optimierung einer exponentiellen Modellierung

Beispiel-Aufgabe

Nach Angaben der Deutschen Bundesbank nahm die Anzahl der Bankfilialen in Deutschland in den letzten Jahren kontinuierlich ab.

Suchen Sie eine Modellierung, die am besten zur Entwicklung passt und geben Sie eine Prognose an für die Anzahl der Bankfilialen im Jahr 2012.

(Hinweis: Wählen Sie statt der tatsächlichen Jahreszahlen die Zahlen 0, 2, 4, ..., 14.)

	Jahr	1995	1997	1999	2001	2003	2005	2007	2009
	Anzahl	67930	63186	58546	54089	47244	44100	39833	39441

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:

STAT-REG: ExpReg (2nd data)

```

DEG
SUBSYS DISTR
7:LnReg a+bInx
8:PwrReg ax^b
9:ExpReg ab^x
        
```

Erläuterung der Lösung (Modellieren mit einer linearen Funktion wird als bekannt vorausgesetzt)

Die Anpassung durch eine exponentielle Funktion mit $y = 68309 \cdot b^{0,9586x}$ hat das Bestimmtheitsmaß $r^2 \approx 0,9846$ und ermöglicht die Prognose $f(18) \approx 31930$.

```

DEG
10 44100
12 39833
14 39441
L2(9)=
        
```

```

DEG
1:a=68309.6565
2:b=0.9586300788
3:r^2=0.984572808
        
```

```

DEG
X f(X)
16 34745.02034
18 31929.68791
20 29342.47727
X=18
        
```

Aus der Sachsituation ist nicht zu vermuten, dass die Anzahl der Bankfilialen gegen null geht (wie bei einer Exponentialfunktion). Vielmehr ist anzunehmen, dass die Anzahl zwar weiter abnimmt, aber nicht unter einen Sockelbetrag fallen wird, d. h. optimal scheint eine Modellierung mithilfe einer Exponentialfunktion vom Typ $f(x) = c + a \cdot b^x$. Gesucht ist dasjenige c , das optimal zu den gegebenen Daten passt. In Liste L3 werden die um c verminderten Daten gespeichert.

Für $c = 20000$ ergibt sich für 2013 die Prognose $f(18) \approx 13901$ (+20000) mit $r^2 \approx 0,9843$ und für $c = 30000$ erhalten wir $f(18) \approx 5847$ (+30000) – wobei $r^2 \approx 0,9785$ schlechter ist als oben. Die Variation von c ergibt: $c = 11000$ ist optimal mit $r^2 \approx 0,9849$ und $f(18) = 21820$ (+11000).

```

DEG
10 44100 24100
12 39833 19833
14 39441 19441
L3(9)=
        
```

```

DEG
YDATA: L1 L2 L3
YDATA: L1 L2 L3
FRQ: NONE L1 L2 L3
Regress f(X): NO
Y=ab^X
CALC
        
```

```

DEG
1:a=49431.26598
2:b=0.9319476525
3:r^2=0.984270288
        
```

```

DEG
X f(X)
16 16005.38159
18 13901.09688
20 12073.47
X=18
        
```

```

DEG
10 44100 33100
12 39833 28833
14 39441 28441
L3(9)=
        
```

```

DEG
1:a=57748.11013
2:b=0.9473650541
3:r^2=0.984860217
        
```

```

DEG
X f(X)
16 24311.71223
18 21819.77499
20 19583.25996
X=18
        
```

Übungsaufgabe

- a) Berechnen Sie für die o. a. Modellierung die Qualität der Anpassung für unterschiedliche Werte von c .
- b) Begründen Sie, warum andere Modellierungen nicht sachgerecht wären.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 9
---------------------------	--------------------

Binomialkoeffizienten – Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Lottospiel 6 aus 49

Beispiel-Aufgabe

Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der geraden Glückszahlen beim Lottospiel ,6 aus 49'*

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialkoeffizienten ($\frac{nCr}{nPr}$)
 $\frac{table}{table}$ -Funktion

$$\frac{24 nCr 6 * 25 nCr 6}{49 nCr 6}$$

Erläuterung der Lösung

Da es 24 gerade und 25 ungerade Zahlen in der Menge {1, 2, ..., 49} gibt, berechnen sich die

Wahrscheinlichkeiten mithilfe des Terms
$$P(X = k) = \frac{\binom{24}{k} \cdot \binom{25}{6-k}}{\binom{49}{6}}$$

Dieser Term kann als Funktionsterm f(x) mithilfe der $\frac{table}{table}$ -Funktion eingegeben werden (Achtung: $\frac{table}{table}$ verwenden und 6-k als (6-x) in Klammern setzen). Die in der Wertetabelle auftretenden Brüche können durch Drücken der $\frac{table}{table}$ -Taste als Dezimalzahlen angezeigt werden (dies ist im Display nur unten sichtbar).

f(x)=
Enter function
in x.

f(x) = $\frac{24 nCr x *}{49 nCr 6}$

TABLE
start=0
Step=1
x = ?
CALC

x	f(x)
-1	Error
0	0,01266464
1	0,076329
f(x)=0,09118541	

x	f(x)
2	0,249674338
3	0,332899117
4	0,227963525835

x	f(x)
5	0,075987842
6	Error

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)	0,0127	0,0912	0,2497	0,3329	0,2280	0,0760	0,0096

Übungsaufgaben

1 a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Richtigen beim Lottospiel ,6 aus 49'* (ohne Berücksichtigung der Zusatzzahl)

k	0	1	2	3	4	5	6
P(X = k)							

1 b) Bestimmen Sie auch die Wahrscheinlichkeit für die Gewinnränge mit Zusatzzahl.

3 Richtige mit Z.	4 Richtige mit Z.	5 Richtige mit Z.
-------------------	-------------------	-------------------

2. In einer Klasse sind 13 Jungen und 16 Mädchen; 5 hiervon erhalten durch Auslosung eine Freikarte. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhalten k Mädchen eine Freikarte?

k	0	1	2	3	4	5	
P(X = k)							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen einer Binomialverteilung (vollständige Verteilung)

Beispiel-Aufgabe

Bestimmen Sie die Verteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Sechsen beim 10-fachen Würfeln*

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialpdf im DISTR-Menü (**2nd** **data**)
 Definition von Funktionstermen in der **table**-Option

```

DEG
STAT-REG 0.5113
3↓invNormal
4↓Binomialpdf
5↓Binomialcdf
    
```

Erläuterung der Lösung

Der TI-Schulrechner bietet zwei Möglichkeiten, die Wahrscheinlichkeiten zu berechnen und anzuzeigen: Die Verteilung ist im DISTR-Menü aufrufbar (dort hat man die Optionen SINGLE-LIST-ALL); wählt man die gesamte Verteilung, dann wird diese in einer Liste abgespeichert, die jedoch maximal 42 Elemente enthalten darf (also $k = 0, 1, \dots, n; n \leq 41$). Hier wurde L2 als Liste gewählt; zuvor wurden über den **data**-Befehl die Werte der Zufallsgröße ($X = 0, 1, 2, \dots, 10$) einzeln in Liste L1 eingegeben, um die Zuordnung zu erleichtern. Die Wahrscheinlichkeiten werden in der Liste 4-stellig angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 9 Stellen ablesbar.

Die andere Möglichkeit ist, den Term zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit (gemäß der BERNOULLI-Formel) über die **table**-Option als $f(x)$ einzugeben: $P(X = k) = \binom{10}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10-k}$ und dann in der Wertetabelle nachzuschauen (die Funktionsvariable heißt grundsätzlich x).

DEG
BINOMIALPDF
X: SINGLE LIST ALL

DEG
BINOMIALPDF
TRIALS=n=10
P(SUCCESS)=1/6

DEG
BINOMIALPDF
SAVE FOR 0: X:n
SAVE TO: L1 L3

DEG
0
0.0543
1
0.3230
2
0.2907
3
0.1550
L2(1)=0.161505582..

DEG
0.0543
0.0130
0.0022
L2(8)=0.000248072..

DEG
0.0543
0.3230
0.2907
1.7E-8
L2(9)=0.000018605..

DEG
f(x)=10 nCr x*(

DEG
TABLE SETUP
Start=0
Step=1
TABLE X=? CALC

DEG
X f(X)
-1 Error
0 0.161505583
1 0.323011166
X=-1

DEG
X f(X)
9 0.000000827
10 0.000000017
11 0
f(X)=0

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Wappen beim 20-fachen Münzwurf*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P(X = k)											
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
P(X = k)											

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: *Anzahl der Erfolge beim 12-stufigen BERNOULLI-Versuch mit $p = 0,3$*

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X = k)													

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen einer Binomialverteilung (einzelne Werte)

Beispiel-Aufgabe

200 Rosinen werden zufällig in den Teig von 100 Rosinenbrötchen verteilt. Ein Rosinenbrötchen wird zufällig ausgewählt.
 Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist in diesem Brötchen keine Rosine, genau eine Rosine, zwei Rosinen, drei, vier, mehr als vier Rosinen?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialpdf im DISTR-Menü (**2nd**[data])



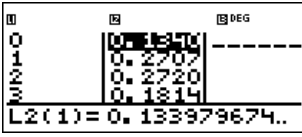
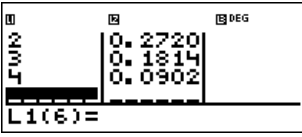



```

DEG
STAT-REG 0513
3↓invNormal
4↓Binomialpdf
5↓Binomialcdf
                    
```

Erläuterung der Lösung

Die Berechnung von einzelnen Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist über das DISTR-Menü aufrufbar; dort kann man die Option SINGLE oder LIST aufrufen. Wählt man LIST, dann muss man zunächst eine Liste von interessierenden Werten anlegen. Dies geschieht hier in Liste L1 über den [data]-Befehl. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten werden in der Liste 4-stellig angezeigt; in der Anzeige im Display unten sind jeweils 9 Stellen ablesbar.

Wir modellieren den Vorgang als 500-stufigen BERNOULLI-Versuch mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1/100$. Wir entnehmen die Einzelwahrscheinlichkeiten der Liste L2. Statt die berechneten 5 Wahrscheinlichkeiten zu addieren, benutzen wir die kumulierte Binomialverteilung, um den Wert $P(X \leq 4)$ zu berechnen und hieraus $P(X > 4) = 1 - 0,9483 = 0,0517$ zu bestimmen

Lösung:	k	0	1	2	3	4	> 4
	$P(X = k)$	0,1340	0,2707	0,2720	0,1814	0,0902	0,0517

Übungsaufgaben

1. Eine Schule wird von 800 Schülern/innen besucht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat keine Person, eine, zwei, drei, mehr als drei Schüler/innen an einem bestimmten Tag, z. B. am 25. Februar Geburtstag? (Modellierungsannahme: Die Wahrscheinlichkeit ist für alle Tage des Jahres gleich groß: $p = 1/365$; Schaltjahre werden nicht berücksichtigt.)

Lösung:	k	0	1	2	3	> 3	
	$P(X = k)$						

2. Ein Rouletterad (bestehend aus 37 gleich großen Sektoren) wird 50-mal gedreht. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird die Kugel auf einem bestimmten Feld, z. B. auf dem Feld mit der Nummer 0, keinmal, einmal, zweimal, mehr als zweimal liegen bleiben?

Lösung:	k	0	1	2	> 2		
	$P(X = k)$						

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Berechnung des Erwartungswerts und der Varianz von Binomialverteilungen

Beispiel-Aufgabe

Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Binomialverteilungen mit $n = 100$ und $p = 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; \dots ; 0,9$ gemäß Definiton.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Listen-Formeln (im **[data]**-Menü)

Summen-Funktion im **[math]**-Menü

DEG

CLEAR **[ON/OFF]**

[2] Add/Edit Frmla

[2] Clear L1 Frmla

[3] Clear L2 Frmla

DEG

[5] NUM DMS R↔P

[4] Pfactor

[5] sum(

[6] Prod(

Erläuterung der Lösung

Gemäß Definition des Erwartungswerts $\mu = E(X)$ bzw. der Varianz $V(X) = \sigma^2$ gilt:

$$E(X) = \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) \quad \text{und} \quad V(X) = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 \cdot P(X = k) \quad \text{wobei} \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Die Summenfunktion des TI-30X Pro MultiView™ bietet die Möglichkeit, auch Summen mit vielen Summanden zu berechnen. Wählt man Option 5 im **[math]**-Menü, dann erscheint das Summensymbol Σ ; im Zusammenhang mit den Listenformeln (die in eine Zeile passen müssen) muss eine bestimmte Reihenfolge der Eingabe (Komma als Trennzeichen) beachtet werden:

Sum(Term mit der Variablen x, Variablenname x, kleinster Wert für x, größter Wert für x)

Zur konkreten Aufgabe: In Liste L1 (**[data]**-Menü) geben wir die gewünschten Werte für die Erfolgswahrscheinlichkeit p ein. Dann erfolgt die Eingabe der Listenformel: Drückt man ein zweites Mal auf die **[data]**-Taste, erscheint das Menü zur Bearbeitung der Listen. Wir markieren ein Feld in Liste L2; jetzt erwartet der Rechner die Eingabe einer Berechnungsvorschrift für die Liste L2. Diese lautet für E(X): L2 = Sum(x * 100 nCr x * L1^x * (1 - L1)^(100 - x), x, 0, 100)

Nach einiger Rechenzeit erscheinen dann die Erwartungswerte in der Spalte für Liste L2. Offensichtlich gilt: $E(X) = \mu = n \cdot p$.

Analog berechnen wir die Varianzen in Liste L3, wobei auch die gerade bestimmten Erwartungswerte aus Liste L2 verwendet werden. Auffallend an den Rechenergebnissen ist, dass die Varianzen gleich sind für p und 1 - p, und weiter, dass für alle Beispiele gilt: $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$

Übungsaufgaben

Überprüfen Sie die Richtigkeit der Formeln $E(X) = n \cdot p$ und $V(X) = n \cdot p \cdot (1 - p)$ für $n = 50$ [$n = 80$] und für $p = 1/4 ; p = 3/4 ; p = 1/3 ; p = 2/3 ; p = 1/6 ; p = 5/6$.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Optimierung der Annahme von Flugbuchungen

Beispiel-Aufgabe

Wegen der Kapazität der eingesetzten Flugzeuge können für eine bestimmte Flugverbindung im Inland maximal 150 Plätze gebucht werden. Dennoch nimmt die Fluggesellschaft mehr Buchungen an, da im Mittel 10 % der Buchungen nicht wahrgenommen werden. An jeder Buchung verdient die Fluggesellschaft 30 € (auch bei den Fluggästen, die nicht erscheinen, denn diese müssen eine *No-Show*-Gebühr zahlen). Falls eine Buchung angenommen wurde, aber der Passagier nicht mitfliegen kann, muss nach EU-Recht eine Entschädigung von 250 € gezahlt werden.

- a) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn bei Annahme von 160 Buchungen.
- b) Bei welcher Anzahl von Buchungen ist der Gewinn die Fluggesellschaft maximal?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Summenfunktion im **[math]**-Menü

Listenformeln in **[data]**-Menü

MAIN NUM DMS R+P
 4↑Pfactor
 5sum(
 6:Prod(
 RAD

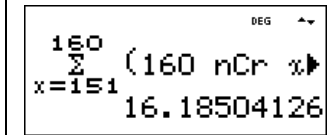
CLEAR FORMULA
 1Add/Edit Frmla
 2:Clear L1 Frmla
 3↓Clear L2 Frmla
 DEG

Erläuterung der Lösung

a) Wenn 160 Buchungen angenommen werden, muss mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 151)$ ein Betrag von 100 € als Entschädigung gezahlt werden, mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 152)$ ein Betrag von 200 €, ... und mit Wahrscheinlichkeit $P(X = 160)$ ein Betrag von 1000 €, insgesamt

$$\sum_{k=151}^{160} \binom{160}{k} \cdot 0,9^k \cdot 0,1^{160-k} \cdot (k - 150) \cdot 250 \approx 16,19$$

Im Mittel müsste also bei Annahme von 160 Buchungen ein Betrag von 16,19 € an Entschädigungen gezahlt werden, d. h. der Gewinn beträgt $160 \cdot 30 \text{ €} - 16,19 \text{ €} = 4783,81 \text{ €}$.



b) Es wäre nun lästig, alle interessierenden Werte von n in den Summenterm einzutippen und die so berechneten Daten in einer Tabelle zu erfassen. Hierzu kann man die Option der Listenformeln benutzen, die man über das **[data]**-Menü ansteuern kann (**[data]** doppelt anklicken):

Man gibt interessierende Werte für n in die Liste L1 ein und definiert dann für L2 eine Formel; dabei erscheint das Summenzeichen als „sum“-Befehl, bei dem nacheinander der Summenterm, der Name der Variablen, der kleinste und der größte Wert von x eingegeben werden müssen:

L2 = Sum(L1 nCr x * 0.9^x * 0.1^(L1-x)*(x - 150)*250 , x , 151 , L1)

Nachdem wir so die zu erwartenden Entschädigungsbeträge berechnet haben, können wir zur Berechnung des Gewinns kommen; dazu definieren wir die Listenformel $L3 = L1 \cdot 30 - L2$

DEG
 L1(1)=155
 155
156
157
158

DEG
 0.115413941..
 0.4129
1.2482
3.2823

DEG
 L3=L1*30-L2
 0.1154
0.4129
1.2482
3.2823

DEG
 4804.098289..
 16.185
31.268
55.902
93.350
129.86

Wir lesen ab: Bei der Annahme von 162 Buchungen ist der Gewinn am größten (4804,10 €).

Übungsaufgaben

1. Welche Anzahl von Buchungen wäre optimal, wenn als Entschädigung auf 300 € erhöht würde [nur 150 € gezahlt werden müssen]?
2. Wie verändert sich die Rechnung, wenn der Gewinn pro Buchung 25 € beträgt?

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (1)

Beispiel-Aufgabe
 64 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen digitalen Fotoapparat. Mit welcher Wahrscheinlichkeit würde man bei einer Zufallsstichprobe in 500 Haushalten in
 (1) höchstens 320 (2) weniger als 310 (3) mindestens 315
 (4) mehr als 330 (5) mindestens 312, höchstens 325
 Haushalten einen solchen Fotoapparat finden?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialcdf im DISTR-Menü (2nd data)

```

DEG
STAT-REG 0.5168
4↑BinomialPdf
5Binomialcdf
6↓PoissonPdf
                    
```

Erläuterung der Lösung
 Die Berechnung von Intervall-Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung ist über das DISTR-Menü aufrufbar. Die berechneten Wahrscheinlichkeiten können abgespeichert werden, was für die Lösung von Aufgabe (3) – (5) wichtig ist:

(1) $P(X \leq 320) = 0,5168$; (2) $P(X < 310) = P(X \leq 309) = 0,1639$

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=320 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.516843624 STORE: NO yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=309 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.163916815 STORE: NO yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>
--	---	--	---

(3) $P(X \geq 315) = 1 - P(X \leq 314) = 0,6969$; (4) $P(X > 330) = 1 - P(X \leq 329) = 0,1640$

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=314 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.303075165 STORE: NO yztabcd </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1=0.3030751653 1: x=314 2: y=0.3030751653 3: z=0 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.30307516534 0.696924835 </pre>
<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=330 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.835989831 STORE: NO yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.835989830889 0.164010169 </pre>	

(5) $P(312 \leq X \leq 325) = P(X \leq 325) - P(X \leq 311) = 0,6947 - 0,2137 = 0,4809$ (wegen Rundung)

<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=325 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.694678163 STORE: NO yztabcd </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf TRIALS=n=500 P(SUCCESS)=0.64 X=311 CALC </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG Binomialcdf VALUE=0.213736195 STORE: NO yztabcd SOLVE AGAIN QUIT </pre>
<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 1-0.2137361954 0.7862638046 </pre>	<pre style="font-family: monospace; font-size: x-small;"> DEG 0.694678162525 0.480941967 </pre>		

Übungsaufgaben

Eine Münze wird 400-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen
 (1) größer als 200 (5) höchstens gleich 190
 (2) mindestens gleich 205 (6) kleiner als 215
 (3) mindestens gleich 180, höchstens gleich 205
 (4) größer als 185, aber kleiner als 207

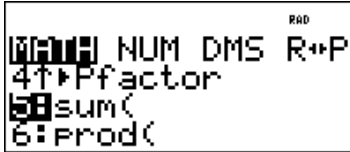
Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 10
---------------------------	---------------------

Bestimmen von Intervall-Wahrscheinlichkeiten bei einer Binomialverteilung (2)

Beispiel-Aufgabe
 Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Sechsen

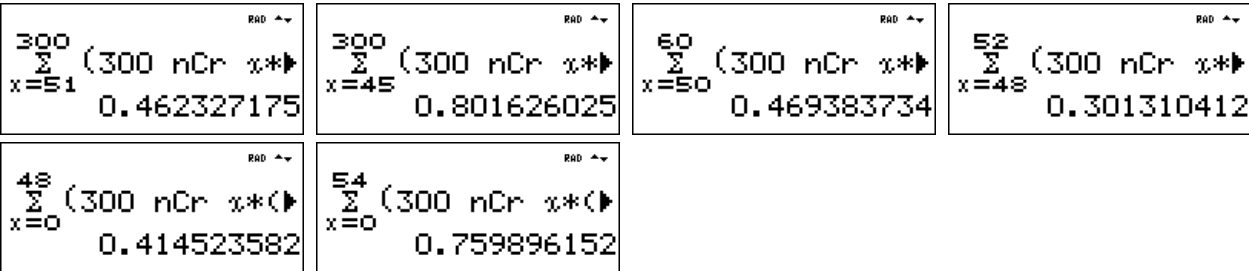
(1) größer als 50 (5) höchstens gleich 48
 (2) mindestens gleich 45 (6) kleiner als 55
 (3) mindestens gleich 50, höchstens gleich 60
 (4) größer als 47, aber kleiner als 53

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Summenfunktion im **math**-Menü



Erläuterung der Lösung
 Da der größte auftretende Binomialkoeffizient der Wahrscheinlichkeitsverteilung für n = 300 gleich $\binom{300}{150} \approx 9,4 \cdot 10^{88}$ ist, also noch auf dem Rechner darstellbar ist, kann man – wenn auch mit größerem Zeitaufwand – die Intervall-Wahrscheinlichkeiten mithilfe der Summenfunktion gemäß BERNOULLI-Formel berechnen: $P(X = k) = \binom{300}{k} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{300-k}$

(1) $P(X > 50) = P(51 \leq X \leq 300) \approx 0,462$; (2) $P(X \geq 45) = P(45 \leq X \leq 300) \approx 0,802$;
 (3) $P(50 \leq X \leq 60) \approx 0,469$; (4) $P(47 < X < 53) = P(48 \leq X \leq 52) \approx 0,301$;
 (5) $P(X \leq 48) = P(0 \leq X \leq 48) \approx 0,415$; (6) $P(X < 55) = P(0 \leq X \leq 54) \approx 0,760$

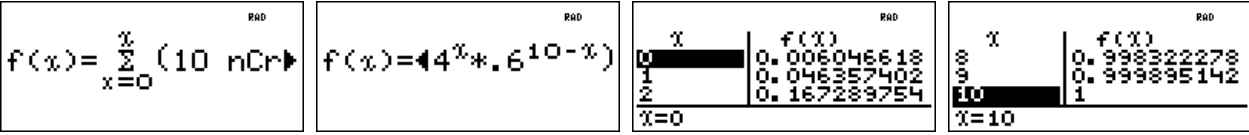


Übungsaufgaben

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl der Wappen beim 200-fachen Münzwurf

(1) größer als 100 (5) höchstens gleich 98
 (2) mindestens gleich 95 (6) kleiner als 103
 (3) mindestens gleich 90, höchstens gleich 105
 (4) größer als 92, aber kleiner als 103

2. Mithilfe des **table**-Menüs kann man eine Funktion definieren und deren Werte in der Wertetafel ablesen. Was berechnet der TI-30X Pro MultiView™ (richtig trotz der Variablen-Einfalt)?



$f(x) = \sum_{x=0}^x (10 \text{ nCr } x)$
 $f(x) = 4^x \cdot 6^{10-x}$
 Table with columns X and f(X) containing values for X=0, 1, 2.
 Table with columns X and f(X) containing values for X=8, 9, 10.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Bestimmen von 95 %- Umgebungen um den Erwartungswert (sigma-Regel)

Beispiel-Aufgabe

Bestimmen Sie für (1) $n = 100$ bzw. (2) $n = 200$ und die Erfolgswahrscheinlichkeiten $p = 0,3$ bzw. $p = 0,4$ bzw. $p = 0,5$ symmetrische Umgebungen um den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ derart, dass diese eine Wahrscheinlichkeit von ungefähr 95 % haben.

Berechnen Sie auch jeweils die zugehörige Standardabweichung und geben Sie den Radius der Umgebung als Vielfaches der Standardabweichung an. Welche Gesetzmäßigkeit fällt auf?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Summenfunktion im math-Menü

Erläuterung der Lösung

Mithilfe der Summenfunktion kann man Wahrscheinlichkeiten von symmetrischen Umgebungen um den Erwartungswert berechnen. Definiert man für ein konkretes n die Funktion f wie folgt:

$$f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

dann zeigt die Wertetabelle beispielsweise für $p = 0,4$ und $n = 100$:

$f(0) = P(X = 40) \approx 0,081$; $f(1) = P(39 \leq X \leq 41) \approx 0,240$ usw.

(Man beachte, dass der TI-30X Pro MultiView™ auch für den Laufindex k die Bezeichnung x verwendet und nicht verwirrt wird !)

$f(x) = \sum_{x=40-x}^{40+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>0</td><td>0.081219145</td></tr> <tr><td>1</td><td>0.240345019</td></tr> <tr><td>2</td><td>0.389930108</td></tr> </table>	X	f(X)	0	0.081219145	1	0.240345019	2	0.389930108	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>8</td><td>0.317850696</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.348117979</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.368462995</td></tr> </table>	X	f(X)	8	0.317850696	9	0.348117979	10	0.368462995	
X	f(X)																		
0	0.081219145																		
1	0.240345019																		
2	0.389930108																		
X	f(X)																		
8	0.317850696																		
9	0.348117979																		
10	0.368462995																		
$f(x) = \sum_{x=50-x}^{50+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>8</td><td>0.31137392</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.343112066</td></tr> <tr><td>10</td><td>0.3647998</td></tr> </table>	X	f(X)	8	0.31137392	9	0.343112066	10	0.3647998	$f(x) = \sum_{x=30-x}^{30+x} (100)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>7</td><td>0.899088676</td></tr> <tr><td>8</td><td>0.937189749</td></tr> <tr><td>9</td><td>0.962548571</td></tr> </table>	X	f(X)	7	0.899088676	8	0.937189749	9	0.962548571
X	f(X)																		
8	0.31137392																		
9	0.343112066																		
10	0.3647998																		
X	f(X)																		
7	0.899088676																		
8	0.937189749																		
9	0.962548571																		
$f(x) = \sum_{x=100-x}^{100+x} (20)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>12</td><td>0.923162368</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.94403426</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.959962808</td></tr> </table>	X	f(X)	12	0.923162368	13	0.94403426	14	0.959962808	$f(x) = \sum_{x=80-x}^{80+x} (200)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>12</td><td>0.929099717</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.948948864</td></tr> <tr><td>14</td><td>0.963924118</td></tr> </table>	X	f(X)	12	0.929099717	13	0.948948864	14	0.963924118
X	f(X)																		
12	0.923162368																		
13	0.94403426																		
14	0.959962808																		
X	f(X)																		
12	0.929099717																		
13	0.948948864																		
14	0.963924118																		
$f(x) = \sum_{x=60-x}^{60+x} (200)$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; font-size: small;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>11</td><td>0.924423904</td></tr> <tr><td>12</td><td>0.94663369</td></tr> <tr><td>13</td><td>0.963109476</td></tr> </table>	X	f(X)	11	0.924423904	12	0.94663369	13	0.963109476										
X	f(X)																		
11	0.924423904																		
12	0.94663369																		
13	0.963109476																		

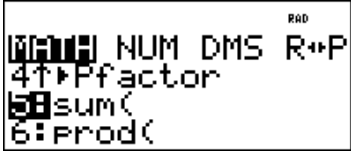
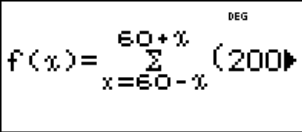
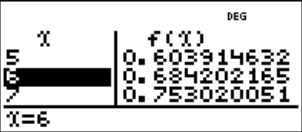


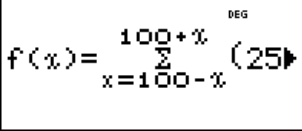

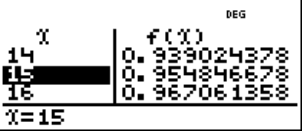

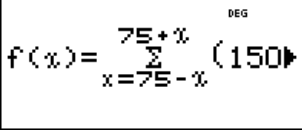
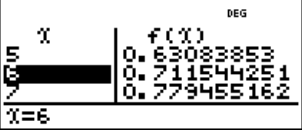
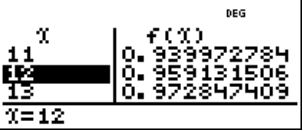
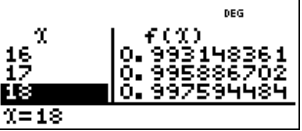
Beispiel: $n = 100$; $p = 0,3$; $P(21 \leq X \leq 39) \approx 0,963 \rightarrow$ Radius = 9,5 (Rechteckbreite berücksichtigen!)

	(1) $p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$	(2) $p = 0,3$	$p = 0,4$	$p = 0,5$
μ	30	40	50	60	80	100
σ	4,58	4,90	5	6,48	6,93	7,07
Radius	2,07 σ	1,94 σ	1,90 σ	1,93 σ	1,95 σ	1,91 σ

Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest: $P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$

Übungsaufgaben

Untersuchen Sie, ob die gefundene Regel auch für $n = 300$ bestätigt wird.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11		
Bestimmen von sigma-Umgebungen um den Erwartungswert			
Beispiel-Aufgabe			
<p>Welche Bedeutung hat die Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ einer Binomialverteilung? Bestimmen Sie für (1) $n = 200$; $p = 0,3$ bzw. (2) $n = 250$; $p = 0,4$ bzw. (3) $n = 100$; $p = 0,5$ das zum Erwartungswert $\mu = n \cdot p$ symmetrische Intervall $[\mu - z \cdot \sigma ; \mu + z \cdot \sigma]$, $z = 1, 2, 3$, sowie die Wahrscheinlichkeit dieses Intervalls. Was fällt auf?</p>			
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™: Summenfunktion im math -Menü			
Erläuterung der Lösung			
<p>Zunächst werden für die angegebenen Werte von n und p die Erwartungswerte μ und die Standardabweichungen σ berechnet sowie die 1σ-, 2σ-, 3σ-Umgebungen von μ bestimmt. Die Wahrscheinlichkeiten der symmetrischen Umgebungen lassen sich mithilfe der Summenfunktion bestimmen. Für konkrete Werte von n und p kann man folgende Funktion definieren:</p> $f(x) = \sum_{k=\mu-x}^{\mu+x} \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$ (gemäß BERNOULLI-Formel). Die interessierenden Intervall-Wahrscheinlichkeiten können dann der Wertetabelle dieser Funktionen entnommen werden. (Man beachte, dass der TI-30X Pro MultiView™ auch für den Laufindex k die Bezeichnung x verwendet und nicht verwirrt wird !)			
			
			
			
	(1) $n = 200$; $p = 0,3$	(2) $n = 250$; $p = 0,4$	(3) $n = 150$; $p = 0,5$
μ bzw. σ	$\mu = 60$; $\sigma \approx 6,48$	$\mu = 100$; $\sigma \approx 7,75$	$\mu = 75$; $\sigma \approx 6,12$
P($[\mu - 1\sigma ; \mu + 1\sigma]$)	P($54 \leq X \leq 66$) $\approx 0,684$	P($93 \leq X \leq 107$) $\approx 0,667$	P($69 \leq X \leq 81$) $\approx 0,712$
P($[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$)	P($48 \leq X \leq 72$) $\approx 0,947$	P($85 \leq X \leq 115$) $\approx 0,955$	P($63 \leq X \leq 87$) $\approx 0,959$
P($[\mu - 3\sigma ; \mu + 3\sigma]$)	P($41 \leq X \leq 79$) $\approx 0,997$	P($77 \leq X \leq 123$) $\approx 0,998$	P($57 \leq X \leq 93$) $\approx 0,998$
Ergebnis: Man stellt für unterschiedliches n und p fest: $P(\mu - 1\sigma \leq X \leq \mu + 1\sigma) \approx 0,68$; $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,955$; $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$			
Übungsaufgaben			
Untersuchen Sie, ob die gefundenen Regeln auch bestätigt werden für (1) $n = 300$; $p = 1/4$ (2) $n = 240$; $p = 1/3$ (3) $n = 120$; $p = 0,45$			

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Schluss von der Gesamtheit auf die Stichprobe: Punkt- und Intervallschätzung

Beispiel-Aufgabe

39 % der Haushalte in Deutschland verfügen über einen Gefrierschrank. Eine Stichprobe vom Umfang 1200 wird genommen. Machen Sie eine Prognose, wie viele der Haushalte der Stichprobe über einen Gefrierschrank verfügen (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %). Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialcdf im DISTR-Menü (2nd data)

```

DEG
STAT-REG 0513
4↑BinomialPdf
58Binomialcdf
6↓PoissonPdf
                    
```

Erläuterung der Lösung

Eine Punktschätzung für die Anzahl der Haushalte mit Gefrierschrank in der Stichprobe ist der Erwartungswert $\mu = n \cdot p = 1200 \cdot 0,39 = 468$. Intervallschätzungen werden mithilfe der Standardabweichung σ vorgenommen: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1200 \cdot 0,39 \cdot 0,61} \approx 16,90$. Die 90 %- , 95 %- bzw. 99 %-Umgebungen um den Erwartungswert μ werden gemäß den sigma-Regeln bestimmt. Zur Erleichterung der Kontrollrechnung werden die zugehörigen Intervallgrenzen in Liste L1 (data -Befehl) eingegeben und zu diesen Werten die kumulierten Wahrscheinlichkeiten bestimmt, z. B. $P(441 \leq X \leq 495) = P(X \leq 495) - P(X \leq 440) = 0,9478 - 0,0514 = 0,8964$. Da die sigma-Regeln nur Faustregeln sind, geben sie nur ungefähr die Intervallgrenzen an. Im Falle der 90 %-Umgebung ist die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit (mindestens 90 %) nicht erfüllt; deshalb muss das Intervall um eine Einheit nach unten bzw. oben erweitert werden.

	90 %-Umgebung um μ	95 %-Umgebung um μ	99 %-Umgebung um μ
$z \cdot \sigma$	$1,64 \sigma \approx 27,71$	$1,96 \cdot \sigma \approx 33,12$	$2,58 \cdot \sigma \approx 43,59$
$\mu - z \cdot \sigma$	440,29	434,88	424,41
$\mu + z \cdot \sigma$	495,71	501,12	511,59
Intervall	441, ..., 495	435, ..., 501	425, ..., 511
Kontrollrechnung	$0,9478 - 0,0514 = 0,8964$	$0,9760 - 0,0223 = 0,9537$	$0,9948 - 0,0048 = 0,9900$
Korrektur	$P(440 \leq X \leq 496) = 0,9538 - 0,0454 = 0,9084$		

```

DEG
1200*.39 468
√1200*.39*.61
16.89615341
                    
```

```

DEG
1.64*16.8961534
27.70969159
1.96*16.8961534
33.11646068
                    
```

```

DEG
BINOMIALCDF
TRIALS=n=1200
P(SUCCESS)=0.39
                    
```

```

DEG
BINOMIALCDF
XLIST: L1 L2 L3
SAVE TO: L1 L3
CALC
                    
```

```

DEG
L1
440 0.0514
490 0.9478
501 0.9760
434 0.0223
L1(1)=495
                    
```

```

DEG
L1
501 0.9760
434 0.0223
511 0.9948
424 0.0048
L1(6)=424
                    
```

```

DEG
L1
425 0.0048
434 0.0223
501 0.9760
424 0.0048
L1(1)=496
                    
```

Übungsaufgabe

Ein Würfel wird 300-mal geworfen. Machen Sie eine Prognose, wie oft Augenzahl 6 fallen wird (Sicherheitswahrscheinlichkeit 90 %, 95 %, 99 %). Überprüfen Sie, ob die nach sigma-Regeln bestimmten Intervalle tatsächlich die Vorgaben über die Sicherheitswahrscheinlichkeit erfüllen und korrigieren Sie ggf. die Intervallgrenzen.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------


Testen von Hypothesen – Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art

Beispiel-Aufgabe

Wenn man bei einem Würfelspiel einen gewöhnlichen Würfel benutzt, geht man davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten der Augenzahl 6 bei diesem Würfel gleich $1/6$ ist (LAPLACE-Modell). Diese Hypothese soll für einen konkret verwendeten Würfel getestet werden. Dazu soll er 600-mal geworfen und die Anzahl der Sechsen bestimmt werden.

- a) Bestimmen Sie eine Entscheidungsregel für $\alpha \leq 0,05$ (α = Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art).
- b) Wie groß ist β (= Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art), wenn die tatsächliche Wahrscheinlichkeit p für Augenzahl 6 gleich 0,15 ; 0,14 ; 0,13 ; ... ; 0,10 ist?

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:
 Binomialcdf im DISTR-Menü (2^{nd} $data$)



Erläuterung der Lösung

Wenn $p = 1/6$ ist, dann wird die Anzahl der Sechsen mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % in der $1,96\sigma$ -Umgebung des Erwartungswerts μ liegen; hier ist: $\mu = 100$ und $\sigma \approx 9,13$.

Wir schätzen: Mit einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95 % gilt für die Anzahl X der Sechsen: $83 \leq X \leq 117$. Zur Kontrolle des nach den Faustregeln bestimmten Intervalls wird die Wahrscheinlichkeit mithilfe der Binomialcdf-Funktion im DISTR-Menü exakt berechnet:

$$P(83 \leq X \leq 117) = P(X \leq 117) - P(X \leq 82) = 0,9704 - 0,0254 = 0,9450$$

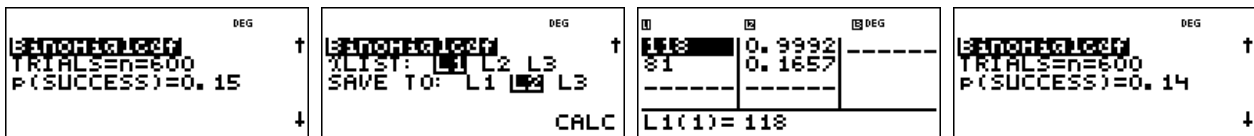


Das Intervall (= Annahmehereich der Hypothese) muss erweitert werden, damit die Bedingung $\alpha \leq 0,05$ erfüllt ist. Durch ähnliche Rechnung wie oben erhält man: $P(82 \leq X \leq 118) = 0,9575$.

Die Entscheidungsregel lautet also: *Verwirf die Hypothese $p = 1/6$, falls in der Stichprobe vom Umfang $n = 600$ weniger als 82 oder mehr als 118 Sechsen auftreten.*

Ein Fehler 2. Art tritt auf, wenn dem Versuch eigentlich ein anderes p zugrunde liegt, das Versuchsergebnis aber im Annahmehereich der Hypothese liegt.

Die Berechnung von $P(82 \leq X \leq 118) = P(X \leq 118) - P(X \leq 81)$ für die angegebenen Wahrscheinlichkeiten kann beispielsweise mithilfe der Option erfolgen, dass die Wahrscheinlichkeiten in einer Liste (L2) abgespeichert werden, wobei man vorher die Werte 118 und 81 in Liste L1 abgelegt hat; man muss dann nur noch die zugrunde liegende Wahrscheinlichkeit p variieren.



So ergibt sich: $\beta(0,15) \approx 83,4 \%$; $\beta(0,14) \approx 61,1 \%$; $\beta(0,13) \approx 33,1 \%$; $\beta(0,12) \approx 11,8 \%$; $\beta(0,11) \approx 2,4 \%$; $\beta(0,10) \approx 0,25 \%$.

Übungsaufgabe

Wahrscheinlichkeiten für einen Fehler 2. Art können auch mithilfe von Listenformeln bestimmt werden: L1 für Werte des tatsächlichen p ; L2 für die Wahrscheinlichkeit β . Führen Sie dies aus.

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Schluss von der Stichprobe auf die Gesamtheit: Konfidenzintervall-Bestimmung

Beispiel-Aufgabe
 Ein doppelter LEGO™-Würfel wurde 500-mal geworfen. 45-mal lag dabei die Seite mit den Noppen nach unten. Bestimmen Sie ein 95 %-Konfidenzintervall für die zugrunde liegende Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Gleichungslöser num-solv (2^{nd} $\frac{\sin}{\sin^{-1}}$)

Wertetabelle einer Funktion ($\frac{table}{}$)

$$500x - 45 = 1.96 \cdot \sqrt{500x(1-x)}$$

$f(x) = 500x - 1.96 \cdot \sqrt{500x(1-x)}$
 Enter function in x.

Erläuterung der Lösung

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % unterscheidet sich ein Stichprobenergebnis vom Erwartungswert μ der zugrunde liegenden, unbekanntem Erfolgswahrscheinlichkeit p um höchstens $1,96\sigma$ (σ = Standardabweichung). Unter der Annahme, dass die Bedingung erfüllt ist (was ja in 95 % der Fälle ein brauchbarer Ansatz ist), werden alle p gesucht, welche die Bedingung $|500 \cdot p - 45| \leq 1,96 \cdot \sigma$ erfüllen.

Diese Ungleichung (bzw. die zugehörige Gleichung) kann mithilfe des TI-30X Pro MultiView™ nach zwei Methoden gelöst werden:

Mithilfe des Gleichungslösers num-solv: Man gibt die Betragsgleichung ein und gibt Startwerte für den Suchalgorithmus ein. Wie man am Beispiel sieht, kann dies auch einmal nicht gelingen (der Startwert $x = 1$ liegt zu weit von der Lösung $x = 0,1183$ entfernt).

Lösung: Das 95 %-Konfidenzintervall ist: $6,79\% \leq p \leq 11,83\%$. Es enthält alle diejenigen Werte von p, innerhalb deren 95 %-Umgebung das Stichprobenergebnis $X = 45$ liegt.

$1500x - 45 = 1.96 \cdot \sqrt{500x(1-x)}$	$\sqrt{500x(1-x)}$	ENTER AND SOLVE X=0 SOLVE: X	SOLVE AGAIN X=0.067942195.. L - R = 0 SOLVE AGAIN QUIT
ENTER AND SOLVE X=1 SOLVE: X	No sign change Error	ENTER AND SOLVE X=0.1 SOLVE: X	SOLVE AGAIN X=0.1183099916 L - R = 0 SOLVE AGAIN QUIT

Gleichwertig zur o. a. Betrag(s)ungleichung ist: $500 \cdot p + 1,96 \cdot \sigma = 45$ oder $500 \cdot p - 1,96 \cdot \sigma = 45$

Man kann den links stehenden Term als Funktionsterm auffassen und in der Wertetabelle dieser Funktion nach dem Funktionswert 45 suchen (ggf. mit Verfeinerung der Schrittweite).

$f(x) = 500x + 1.96 \cdot \sqrt{500x(1-x)}$	TABLE SETUP Start=0 Step=0.01 GATE X = ? CALC	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>0.05</td><td>34.55185846</td></tr> <tr><td>0.06</td><td>40.40831975</td></tr> <tr><td>0.07</td><td>46.18231103</td></tr> </table> X=0.07	X	f(X)	0.05	34.55185846	0.06	40.40831975	0.07	46.18231103	TABLE SETUP Start=0.06 Step=0.001 GATE X = ? CALC																
X	f(X)																										
0.05	34.55185846																										
0.06	40.40831975																										
0.07	46.18231103																										
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>0.066</td><td>43.8814427</td></tr> <tr><td>0.067</td><td>44.45769724</td></tr> <tr><td>0.068</td><td>45.03325069</td></tr> </table> X=0.068	X	f(X)	0.066	43.8814427	0.067	44.45769724	0.068	45.03325069	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>0.0678</td><td>44.91819539</td></tr> <tr><td>0.0679</td><td>44.97572648</td></tr> <tr><td>0.068</td><td>45.03325069</td></tr> </table> X=0.0679	X	f(X)	0.0678	44.91819539	0.0679	44.97572648	0.068	45.03325069	$f(x) = 500x - 1.96 \cdot \sqrt{500x(1-x)}$	<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><th>X</th><th>f(X)</th></tr> <tr><td>0.1182</td><td>44.95070312</td></tr> <tr><td>0.1183</td><td>44.99552172</td></tr> <tr><td>0.1184</td><td>45.04034358</td></tr> </table> X=0.1183	X	f(X)	0.1182	44.95070312	0.1183	44.99552172	0.1184	45.04034358
X	f(X)																										
0.066	43.8814427																										
0.067	44.45769724																										
0.068	45.03325069																										
X	f(X)																										
0.0678	44.91819539																										
0.0679	44.97572648																										
0.068	45.03325069																										
X	f(X)																										
0.1182	44.95070312																										
0.1183	44.99552172																										
0.1184	45.04034358																										

Übungsaufgabe

In der Verbraucherstichprobe 2009 wurden die Ausstattungen von 7947 repräsentativ ausgewählten Haushalten erfasst. 3171 Haushalte verfügten über ein Satellitenempfangsgerät (Decoder), 3854 über einen Kabelanschluss. Bestimmen Sie 95 %-Konfidenzintervalle für die zugrunde liegenden Erfolgswahrscheinlichkeiten p, d. h. für die in der Gesamtheit aller Haushalte vorkommenden Anteile (Angaben auf drei Dezimalstellen runden).

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

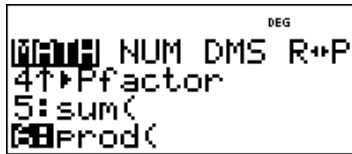
Das klassische Geburtstagsproblem und Variationen

Beispiel-Aufgabe

Beim klassischen Geburtstagsproblem geht es um die Frage, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass unter 23 zufällig ausgewählten Personen mindestens zwei sind, die am gleichen Tag Geburtstag haben. Setzt man zur Vereinfachung voraus, dass die Geburts-Wahrscheinlichkeit für alle Tage des Jahres gleich ist, dann ergibt sich für das Gegenereignis

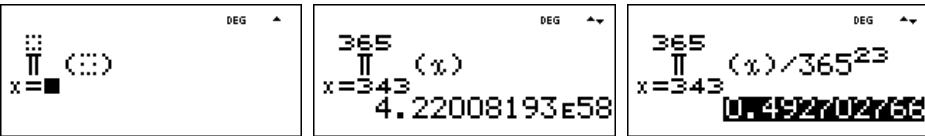
$$P(\text{die 23 Personen haben lauter verschiedene Geburtstage}) = \frac{365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 343}{365^{23}}$$

Verwendete Option des TI-30X Pro MultiView™:
 Produkt-Funktion des \square -Menüs



Erläuterung der Lösung

Das Produkt der Faktoren 343, 344, ..., 365 bestimmen wir mithilfe der Produkt-Funktion des \square -Menüs des TI-30X Pro MultiView™: Dazu füllt man den kleinsten und größten Wert für x am Produktzeichen Π sowie den Funktionsterm x (hier werden nur die Zahlen selbst miteinander multipliziert) ein, vgl. 1. und 2. Screenshot. Rechts steht die zu bestimmende Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses; die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses ist daher gleich

$$P(\text{mindestens zwei von 23 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}) = 1 - 0,4927 = 0,5073 = 50,73 \%$$


Übungsaufgaben

1. Die Wahrscheinlichkeit für mindestens zwei gleiche Geburtstage ist bei 23 Personen ungefähr gleich 50 %, d. h., dies wäre eine faire Wette. Jemand möchte bei seiner Wette sicherer sein und mindestens eine Gewinn-Wahrscheinlichkeit von 60 % [75 %] haben. Bei welcher Personenzahl ergibt sich eine solche Gewinn-Wahrscheinlichkeit?



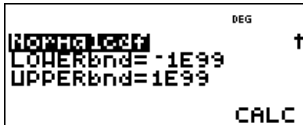
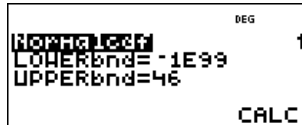


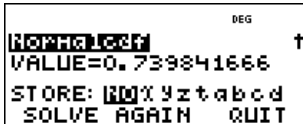
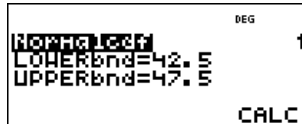


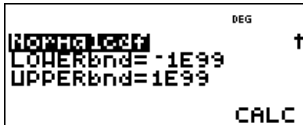
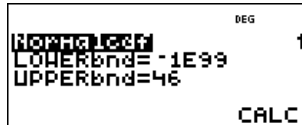


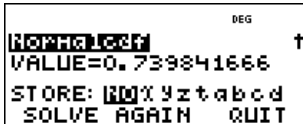
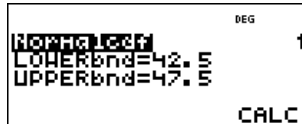


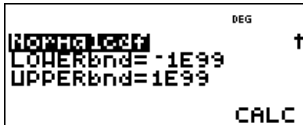
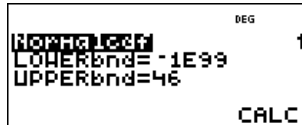


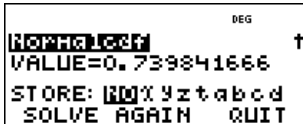
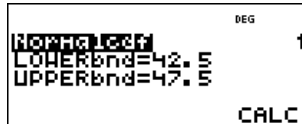

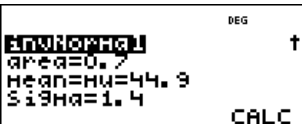
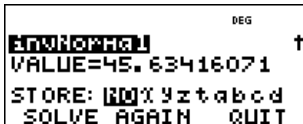
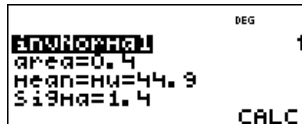
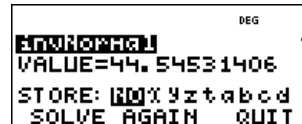
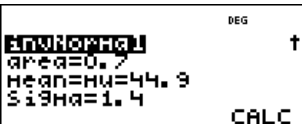
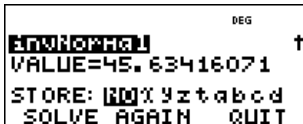
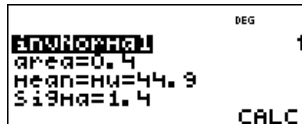
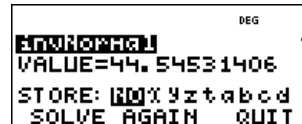
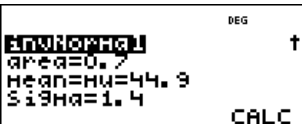
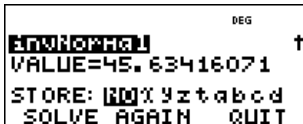
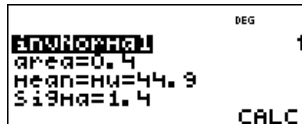
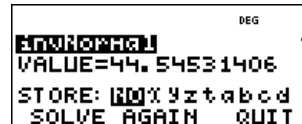
$P(\text{mindestens zwei von } \dots \text{ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}) \approx 60 \%$
 $P(\text{mindestens zwei von } \dots \text{ Personen haben am gleichen Tag Geburtstag}) \approx 75 \%$

2. Ein Rouletterad ist im Prinzip ein Glücksrad mit 37 gleich großen Sektoren, die mit den Zahlen von 0 bis 36 beschriftet sind. Auf diesen Sektoren bleibt dann eine Kugel zufällig liegen. Ein solches Glücksrad werde n -mal gedreht.

Von welcher Anzahl n an lohnt es sich darauf zu wetten (d. h. ist die Wahrscheinlichkeit größer als 50 %), dass die Kugel auf irgendeinem Sektor mindestens zweimal liegen geblieben ist?

Bestimmen Sie dazu mithilfe des Taschenrechners die konkreten Wahrscheinlichkeiten für das Gegenereignis E' „die Kugel bleibt in n Spielrunden auf lauter verschiedenen Sektoren liegen“:

n	3	4	5	6	7	8	9
$P(E')$							

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11								
Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten bei normalverteilten Zufallsgrößen									
<p>Beispiel-Aufgabe</p> <p>Der Kopfumfang von 1-jährigen Mädchen ist näherungsweise normalverteilt mit Erwartungswert $\mu = 44,9$ cm und Standardabweichung $\sigma = 1,4$ cm.</p> <p>a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat ein zufällig ausgewähltes, 1-jähriges Mädchen einen Kopfumfang, der</p> <p style="margin-left: 20px;">(1) kleiner ist als 46,0 cm, (2) mindestens 44,0 cm beträgt,</p> <p style="margin-left: 20px;">(3) mindestens 42,5 cm ist, aber höchstens 47,5 cm ?</p> <p>b) Setzen Sie den Satz fort:</p> <p style="margin-left: 20px;">(1) „70 % der 1-jährigen Mädchen haben einen Kopfumfang, der kleiner ist als ...“</p> <p style="margin-left: 20px;">(2) „60 % der 1-jährigen Mädchen haben einen Kopfumfang, der größer ist als ...“</p>									
Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™: Normalcdf und invNormal im DISTR-Menü (2nd data)									
<p>Erläuterung der Lösung</p> <p>Der TI-30X Pro MultiView™ fragt bei Aufruf der Option Normalcdf (kumulierte Normalverteilung = Integralfunktion der Normalverteilungs-Dichtefunktion) die Werte für μ und σ ab, dann die Grenzen der Integration (wobei die Voreinstellungen -10^{99} und $+10^{99}$ sind).</p>									
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> </tr> <tr> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> </tr> </table>									
									
									
Wir lesen ab: (1) $P(X < 46,0) \approx 78,4 \%$; (2) $P(X \geq 44,0) = P(X > 44,0) \approx 74,0 \%$ (3) $P(42,5 \leq X \leq 47,5 \text{ cm}) \approx 92,5 \%$									
b) Um diese Aufgabe zu lösen, benötigen wir die zugehörige Umkehrfunktion, also eine Funktion, die einer Wahrscheinlichkeit die entsprechenden (Integrations-) Grenzen zuordnet.									
<table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> <td style="width: 25%; padding: 2px;">  </td> </tr> </table>									
									
Wir lesen ab: (1) $P(X < 45,63) = P(X \leq 45,63) = 60 \%$ und (2) $P(X < 44,55) = P(X \leq 44,55) = 40 \%$, also $P(X > 44,55) = 60 \%$.									
Übungsaufgaben									
Für die näherungsweise normalverteilte Körpergröße von 6 Monate alten Jungen gilt: $\mu = 67,6$ cm und $\sigma = 2,2$ cm.									
a) Wie viel Prozent der 6 Monate alten Jungen sind kleiner als 68,0 cm [größer als 64,5 cm] ? b) Für welche Jungen gilt, dass sie zu den 20 % größten der Altersstufe gehören?									

Gebiet: Stochastik	Einsatz ab Stufe 11
---------------------------	---------------------

Approximation der Binomialverteilung durch die Poisson-Verteilung

Beispiel-Aufgabe

Ein Glücksrad mit 50 gleich großen Sektoren wird 50-mal gedreht. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zeiger des Glücksrads auf einem bestimmten Sektor keinmal, genau einmal, genau zweimal, genau dreimal, mehr als dreimal stehen bleiben wird

(1) gemäß Binomialansatz (2) mithilfe der Poisson-Näherung.

Verwendete Optionen des TI-30X Pro MultiView™:

Binomialpdf (-cdf) und Poissonpdf (-cdf) im DISTR-Menü
($\boxed{2nd}$ \boxed{data})

Erläuterung der Lösung

Der Vorgang kann modelliert werden mithilfe eines Binomialansatzes mit $n = 50$ und $p = 1/50$; der Erwartungswert, Parameter für die Poisson-Approximation, ist also gleich $\mu = 50 \cdot 1/50 = 1$.

Da verschiedene Werte der Verteilung berechnet werden sollen, wird zunächst eine Liste L1 mit den Werten $k = 0, 1, 2, 3$ angelegt. Danach werden die Wahrscheinlichkeiten gemäß Binomialansatz in Liste L2 und die gemäß der Poisson-Näherung in Liste L3 gespeichert. Die Näherungswerte unterscheiden sich nur wenig von den exakt berechneten Wahrscheinlichkeiten des Binomialansatzes. Auch die Wahrscheinlichkeit für „mehr als dreimal“, die mithilfe der jeweiligen kumulierten Wahrscheinlichkeiten berechnet wird, bestätigt dies:

$$P(X > 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - 0,9822 = 0,0178 \approx 1 - 0,9810 = 0,0190$$

Übungsaufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Wahrscheinlichkeiten zur Beispiel-Aufgabe auch für den Fall, dass das Glücksrad mit 50 Sektoren 100-mal [200-mal] gedreht wird.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial (n = 100)						
Poisson						
Binomial (n = 200)						
Poisson						

2. Vergleichen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Anzahl der Sechsen beim 300-fachen Würfeln gemäß Binomial- und Poisson-Ansatz.

	k = 0	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4	k > 4
Binomial						
Poisson						

Arbeitsblätter für den TI-30X Pro MultiView™

Haben Sie Fragen zum TI-30X Pro MultiView™ Schulrechner oder zu anderen Produkten von Texas Instruments? Wenden Sie sich an Ihren Fachhändler. Adressen finden Sie auf den TI Webseiten, Rubrik „Rechner kaufen“. Gerne steht Ihnen auch unser Customer Service Center mit Rat und Tat zu Seite. Nehmen Sie mit uns Kontakt auf:



Customer Service Center:

TEXAS INSTRUMENTS

Telefon: 00 800-4 84 22 73 7 (Anruf kostenlos)

Telefax: 00 420-2 26 22 17 99

ti-cares@ti.com

education.ti.com/deutschland

education.ti.com/oesterreich

education.ti.com/schweiz



Ihre Erfahrung. Unsere Technologie. Mehr Lernerfolg.