

TI-Nachrichten

Ausgabe 2/11

Inhaltsverzeichnis

Schwerpunktthema: Messwerterfassung

Mag. G. Aumayr:

Warum sind die Äpfel im Apfelstrudel
immer heißer als der Teig? 1

F.Liebner:

Naturwissenschaftlichen Phänomenen auf der Spur ... 4

O. E. Danninger:

Cool – Verdunstungskälte und
Verdampfungswärme 6

Messwerterfassung

mit dem TI-Nspire™ Lab Cradle 8

M. Tewes:

Das Grundgesetz der Mechanik 9

Weitere Artikel

H. Körner:

Parabelsegmente 13

Dr. H. Kammer:

Diskrete Fouriertransformation DFT
mit dem TI-Nspire™ CAS 19

G. Dreeßen-Meyer:

Konfidenzintervalle und Notes 24

Dr. G. Pinkernell:

Welche Klasse ist besser geworden? Mit Streu-
diagrammen den Lernfortschritt vergleichen 26

Dr. A. Roulier:

Sonnenblumen-Mathematik 29

Tipps und Tricks:

K. Eilers:

Schon bemerkt? Neues unter 2.55MP 31



Abb.: G. Aumayr

Warum sind die Äpfel im Apfelstrudel immer heißer als der Teig?

Mag. Gertrud Aumayr



Apfelstrudel ist eine Wiener Köstlichkeit aus der Zeit der Donau-
monarchie. Die Fülle (österreichisch für „Füllung“), bestehend aus Apfel-
stückchen, Rosinen, Zimt und gerösteten Semmelbröseln, wird in ausgeroll-
ten oder - gezogenen Strudelteig gehüllt und im Backrohr gebacken. Frisch
und noch warm aus dem Backofen schmeckt er am besten. Aber Vorsicht: Die
Fülle ist immer viel heißer als der Teig und wenn man nicht aufpasst, kann
man sich leicht den Mund verbrennen! Warum eigentlich?

Zum einen liegt es daran, dass der Teig Wärme über Wärmeleitung (Unter-
lage), Konvektion (Luft) und Wärmestrahlung an die Umgebung abgibt. Für
die Fülle hingegen bildet der umhüllende Teig eine Art Wärmeisolationss-
chicht. Zum anderen ist die Wärmekapazität der hauptsächlich aus Äpfeln
bestehenden Fülle wesentlich größer als die des Teigs, weshalb sie die Wär-
me länger speichert. Außerdem hat der bröselige Teig viel weniger Berüh-
rungspunkte mit den Temperaturrezeptoren im Mund als der fast flüssige
Inhalt des Apfelstrudels.

Die ersten beiden Punkte lassen sich durch Experimente mit Ver-
nier Temperatursensoren und dem TI-Nspire™ CX CAS als
Messwerterfassungssystem untersuchen.

Warum sind die Äpfel im Apfelstrudel immer heißer als der Teig?

Mag. Gertrud Aumayr

Experiment 1: Messung der Newtonschen Abkühlkurve:

Den Apfelstrudel richtig zuzubereiten ist dabei der schwierigste Teil dieses Experiments. Ist der Strudel fertig, braucht man zwei Temperatursensoren, die im Teig und inmitten der Fülle platziert werden. Die Temperatursensoren werden mittels Lab Cradle™ an den TI-Nspire™ CX CAS angeschlossen. Der Versuchsaufbau ist auf dem Titelfoto zu sehen.

Theorie:

Nach dem Newtonschen Abkühlgesetz ist die Abkühlge-

schwindigkeit eines Körpers $\frac{dT_{\text{Temp}}}{dt}$ proportional zur

Differenz aus Umgebungstemperatur T_u und momentaner Temperatur T_{Temp} des Körpers. Die Anfangstemperatur sei T_a .

Die Lösung der Differentialgleichung $\frac{dT_{\text{Temp}}}{dt} = k \cdot (T_u - T_{\text{Temp}})$ mit der Anfangsbedingung $T_{\text{Temp}}(0) = T_a$ kann mittels TI-Nspire™ CX CAS durch Eingabe von

$\text{desolve}(T_{\text{Temp}}' = k \cdot (T_u - T_{\text{Temp}}) \text{ and } T_{\text{Temp}}(0) = T_a, t, T_{\text{Temp}})$ ermittelt werden und ergibt die Funktion $T_{\text{Temp}}(t) = (T_a - T_u) \cdot e^{-kt} + T_u$.

Durchführung:

Mit Hilfe zweier Temperatursensoren und TI-Nspire™ 14 wird der zeitliche Verlauf der Temperatur der Fülle und des Teiges bestimmt. Zwei der Funktion $T_{\text{Temp}}(t)$ entsprechende Modellkurven werden angepasst (vergl. Abb. 1 und Abb. 2).

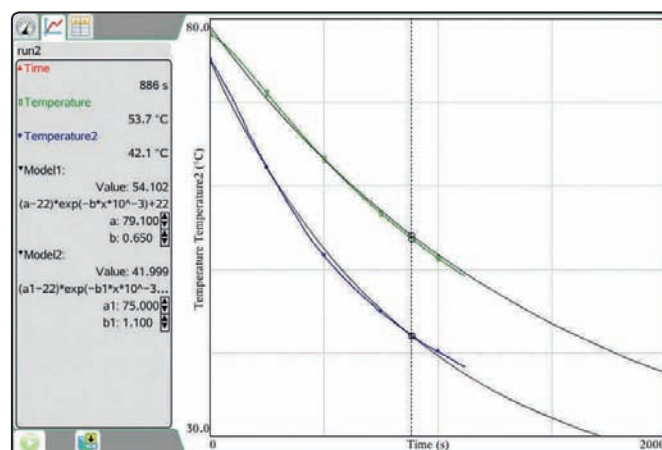


Abb. 1

Zeichenerklärung: CAS Computeralgebrasystem
TI-89 Titanium, Voyage™ 200

CTR Graphische Taschenrechner
TI-82 STATS, TI-83 Plus,
TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition

TI-Nspire™ Technologie

CBL CBR Messwerterfassungssystem
CBL 2™, CBR 2™, TI-Nspire™ Lab Cradle

Liebe Lehrerinnen und Lehrer,

Graphikrechner und Computeralgebrasysteme (CAS) von Texas Instruments eignen sich auch ideal für den Unterricht in Physik, Chemie und Biologie. Die Kompatibilität der Rechner zu verschiedenen Messwerterfassungssystemen eröffnet vielfältige Möglichkeiten: Messen Sie Licht, Temperatur, Spannung, Bewegungen und vieles mehr. In dieser Ausgabe der TI-Nachrichten stellt die Messwerterfassung einen besonderen Schwerpunkt dar. Erfahrene Lehrkräfte haben bei der Erstellung der Artikel mit dem neuen TI-Nspire™ Lab Cradle gearbeitet. Für den experimentellen Bereich eröffnen sich viele neue Ansätze. Den Anfang macht ein Beitrag zur Füllung („Fülle“) eines Apfelstrudels aus Österreich.

Zudem finden Sie u.a. Beispiele aus dem jüngst erschienenen Heft „Naturwissenschaftlichen Phänomenen auf der Spur“. Mitglieder der Themengruppen Biologie, Chemie und Physik des Lehrernetzwerkes T³ haben gemeinsam im Rahmen eines fächerübergreifendes Projekts ein Heft erstellt, in dem Alltagsprobleme untersucht werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen damit durch einfache Experimente an wissenschaftliche Fragestellungen herangeführt werden. Das komplette Heft kann über den TI-Unterrichtsmaterialien Webshop bestellt werden: www.ti-activities-shop.net.

Natürlich kommen darüber hinaus die rein mathematischen Themen in diesem Heft nicht zu kurz. Beachten Sie auch die nützlichen „Tipps & Tricks“ zum neuen Betriebssystem 2.55MP für den TI-84 Plus. Wir wünschen Ihnen mit dieser Ausgabe der TI-Nachrichten wieder viele inspirierende Ideen für Ihren Unterricht.

Ihr TI-Team

Warum sind die Äpfel im Apfelstrudel immer heißer als der Teig?

Mag. Gertrud Aumayr

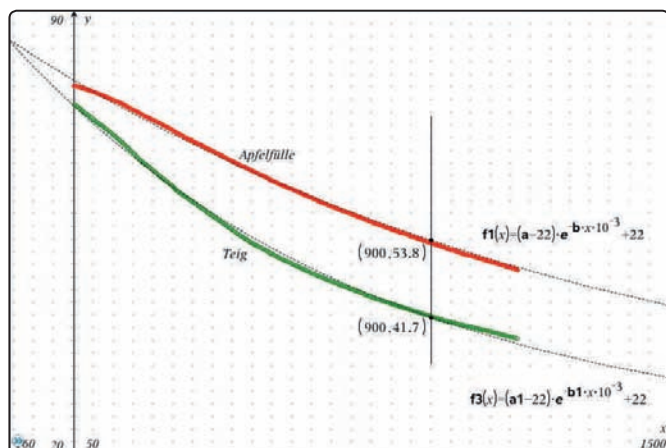


Abb. 2

Ergebnis:

Die beiden Kurven bestätigen die Erfahrung. Die Apfelfülle kühlt weniger schnell ab als der Teig. Nach 15 Minuten hat der Teig ca. 42°C, die Apfelfülle noch immer 53°C.

Experiment 2:

Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität

Der Teig besteht hauptsächlich aus Fett und Mehl, die Fülle aus zerkleinerten und gekochten Apfelstückchen. Für die Messung der spezifischen Wärmekapazität verwenden wir der Einfachheit halber als Modell für den festen Teig einen Teigbrei bestehend aus Speiseöl und Mehl, sowie als Modell für die Apfelfülle Apfelmus. In einem isolierten Gefäß werden jeweils 100 g der beiden Breisorten über eine Heizspirale mit konstanter Leistung erwärmt (Versuchsaufbau siehe Abb.3).

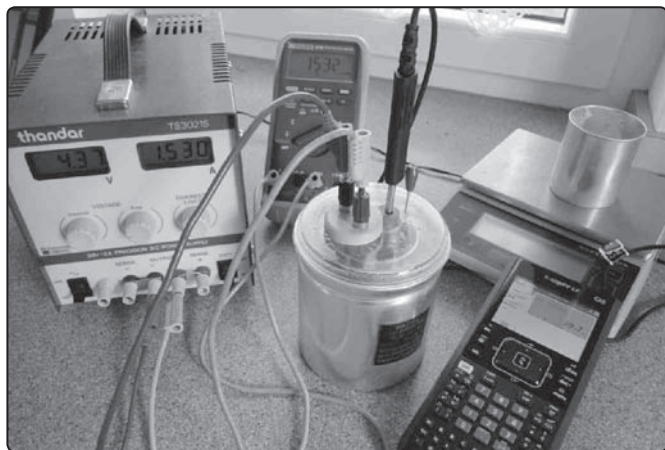


Abb. 3

Theorie:

Die spezifische Wärmekapazität C eines Stoffes ist jene Energie, die benötigt wird, um 1 kg eines Stoffes um 1 K (Kelvin) zu erwärmen.

$$C = \frac{\Delta Q}{m \cdot \Delta T}$$

ΔQ zugeführte Wärme

m Masse

ΔT Temperaturänderung

Die zugeführte Energie entspricht der elektrischen Leistung mal der Zeitdauer, während der die elektrische Leistung angelegt bleibt:

$$\Delta Q = U \cdot I \cdot \Delta t$$

U angelegte Spannung

I gemessene Stromstärke

$U \cdot I$ elektrische Leistung

Δt Zeitdauer

Einsetzen ergibt:

$$C = \frac{U \cdot I \cdot \Delta t}{m \cdot \Delta T} = \frac{U \cdot I}{m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}}$$

$\frac{\Delta T}{\Delta t}$ Temperaturänderung pro Zeit
= Steigung der gemessenen Geraden

Durchführung:

Mit Hilfe eines Temperatursensors und TI-Nspire™ CX CAS wird der zeitliche Verlauf des Temperaturanstieges aufgenommen. An beide Kurven werden lineare Modelle angepasst und die jeweilige Steigung dieser Geraden ermittelt.

Auswertung:

Apfelmus: (vgl. Abb. 4)

$$m = 0.1 \text{ kg}$$

$$U \cdot I = 7,5 \text{ Watt}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0.018 \text{ K/s}$$

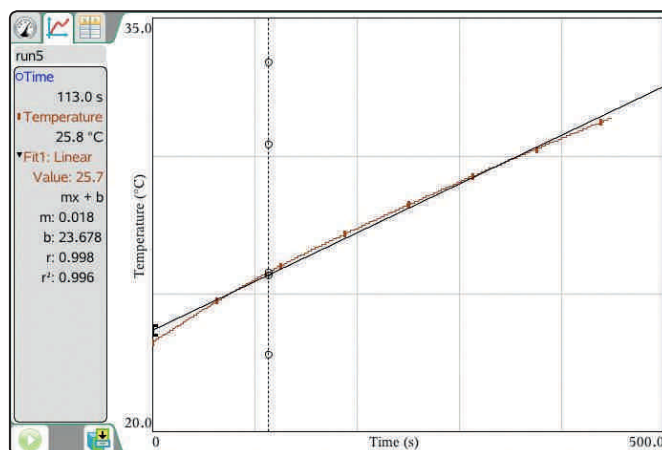


Abb. 4

Warum sind die Äpfel im Apfelstrudel immer heißer als der Teig?

Mag. Gertrud Aumayr

Spezifische Wärmekapazität von Apfelmus:

$$C = \frac{U \cdot I}{m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx 4167 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

Teigbrei: (vgl. Abb. 5)

$$m = 0.1 \text{ kg}$$

$$U \cdot I = 7.5 \text{ Watt}$$

$$\frac{\Delta T}{\Delta t} = 0.028 \text{ K/s}$$

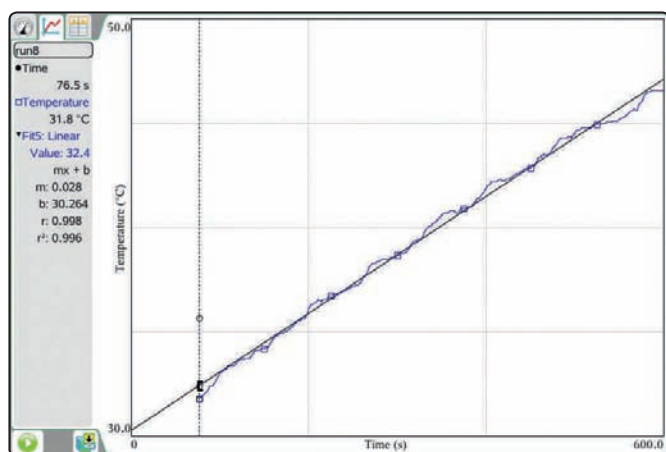


Abb. 5

Spezifische Wärmekapazität von Teigbrei:

$$C = \frac{U \cdot I}{m \cdot \frac{\Delta T}{\Delta t}} \approx 2679 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$$

Vergleich der beiden Messkurven: (Abb. 6)

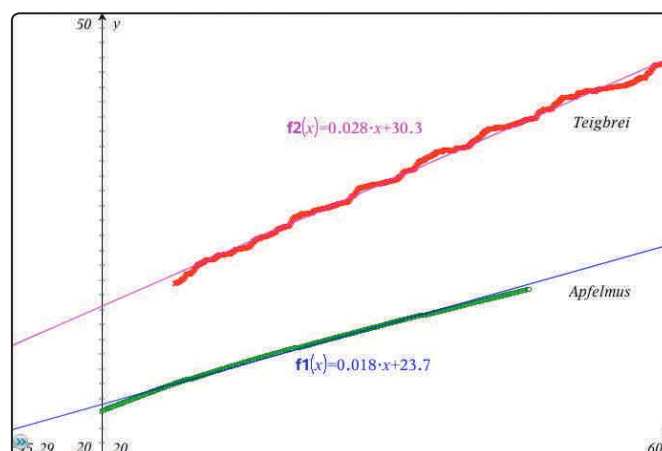


Abb. 6

Vergleich der spezifischen Wärmekapazitäten (Tab. 1):

Apfelmus	Teigbrei	Wasser (Literaturwert)
$4167 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$	$2679 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$	$4187 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{kg}}$

Ergebnis:

Äpfel bestehen zum Großteil aus Wasser. Wasser nimmt Wärme wesentlich langsamer auf als Teigbrei und gibt Wärme wesentlich langsamer ab.

Autor:

Mag. Gertrud Aumayr, 3100 St. Pölten (A)

gertrud.aumayr@t3oesterreich.at

Naturwissenschaftlichen Phänomenen auf der Spur

Frank Liebner



Fächerübergreifende Projektmaterialien

Meist sind es die alltäglichen naturwissenschaftlichen Phänomene, die unsere Schülerinnen und Schüler für die Fächer Physik, Chemie und Biologie begeistern.

Beim Entdecken der Umwelt eröffnet die Technologie für den experimentellen Bereich neue Ansätze.

Als fächerübergreifendes Projekt haben Mitglieder der T³- Themengruppen Biologie, Chemie und Physik gemeinsam ein Material erstellt, in dem Alltagsprobleme, wie z. B. das Herstellen von Kältemischungen oder Abkühlvorgänge, unter Verwendung verschiedener Isolierungen und Lichtausbreitungen untersucht werden. Die Schülerinnen und Schüler sollen durch einfache Experimente und deren Auswertung an wissenschaftliche Fragestellungen herangeführt werden.

Viele weitere Materialien zur Messwerterfassung finden Sie auf der Materialdatenbank unter:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Die einzelnen Beiträge sind so gestaltet, dass die Experimente in der Regel mit allgemein zur Verfügung stehenden Materialien und Chemikalien durchzuführen sind. Die Auswertungen enthalten neben einfachen, für jüngere Schülerinnen und Schüler geeigneten Fragestellungen, Anregungen für weitere, selbst zu planende Experimente bzw. Aufgaben, die eine tiefgründigere Auswertung initiieren sollen. Diese Gliederung ermöglicht es, das Material in verschiedenen Fächern, in unterschiedlichen Kontexten und Klassenstufen einzusetzen.

Alle Experimente wurden mit dem TI-Nspire™ CX CAS und entsprechenden Messsonden durchgeführt.

Beispiele:

Mineralwasser oder auch „saurer Sprudel“

Untersucht wird die Veränderung des pH-Wertes beim Austreiben von Kohlenstoffdioxid; Autor: Markus Schwarz.



Abb. 1

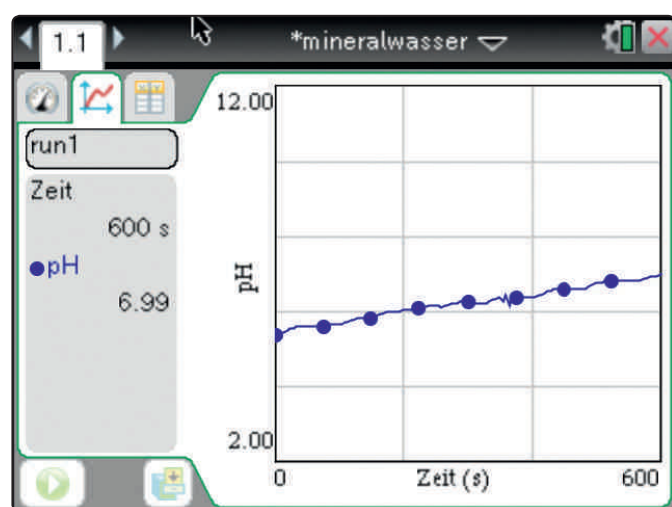


Abb. 2

Welcher Wasserdruck wirkt auf einen Taucher?

Die Schülerinnen und Schüler lernen den Zusammenhang zwischen Eintauchtiefe und Wasserdruck kennen; Autorin: Hildgard Urban-Woldron.



Abb. 3

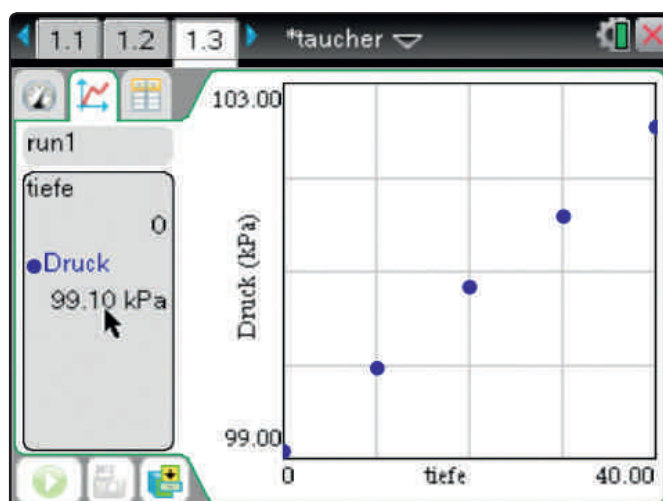


Abb. 4

Schlechte Luft im Klassenzimmer

In einer Langzeitmessung wird die Veränderung des Kohlenstoffdioxidgehaltes und der Temperatur während einer Unterrichtsstunde im Klassenraum ermittelt. Kurz vor Ende der Stunde wird das Zimmer gut gelüftet; Autorin: Katrin Becker.

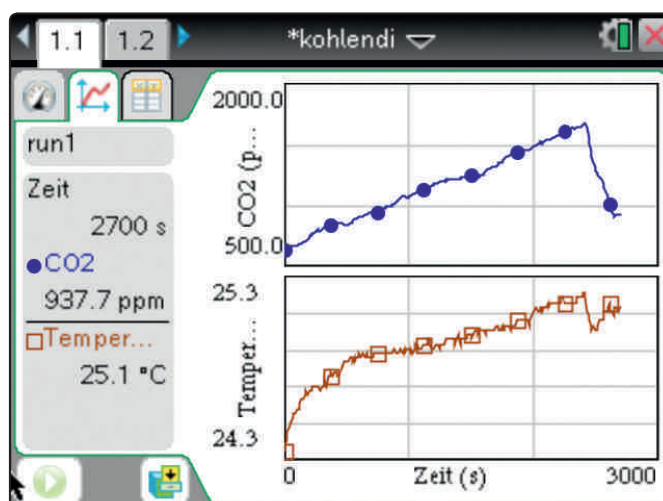


Abb. 5

Ein ausführlicheres Beispiel können Sie in diesem Heft im Artikel von O. Danninger nachlesen.

Materialien zum Download

Eine Kurzanleitung zur Bedienung der Software „DataQuest“, die zum Erfassen von Messwerten genutzt wird und auf jedem TI-Nspire™ CX CAS installiert ist, befindet sich am Ende des Materials.

Die Autoren wünschen allen Nutzern viel Freude und Erfolg beim Experimentieren und dem Entdecken der naturwissenschaftlichen Phänomene.

Das Material steht als Download auf der T³/TI -Materialdatenbank zur Verfügung:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Eine gedruckte Fassung erhalten Sie über den TI-Webshop.

www.ti-activities-shop.net

Im Auftrag aller Autoren

Frank Liebner, Geschwister-Scholl-Gymnasium Löbau (D)

Frank_Liebner@t-online.de

Cool – Verdunstungskälte und Verdampfungswärme

Otmar E. Danninger



Einführung:

Der Abtransport von Wärme in Kühltürmen, erfrischende Springbrunnen in italienischen Palazzi, Klimatisierung von Räumen durch Verdunstungstechnik oder die kühlende Wirkung des Schweißes auf der menschlichen Haut - all diese Phänomene beruhen auf der Verdampfung von Wasser. Die Verdampfung einer Flüssigkeit, also der Übergang von der flüssigen in die gasförmige Phase, ist ein endothermer Prozess. Dabei ist es egal, ob das Wasser bei 100 °C kocht oder ob es bei 20 °C verdunstet. In beiden Fällen wird für den Übergang vom flüssigen in den gasförmigen Aggregatzustand Wärme benötigt. Die Wassermoleküle werden dabei aus dem Einfluss der anziehenden Wechselwirkung mit ihren Nachbarmolekülen befreit.

Die Verdampfungsenthalpie einer Flüssigkeit ist die Wärmemenge, die bei konstantem Druck zur Verdampfung eines Mols Moleküle benötigt wird. Sie stimmt mit der Wärmemenge überein, die beim Phasenübergang Flüssigkeit zu Dampf der Flüssigkeit zugeführt werden muss, um die zwischenmolekularen Kräfte zu überwinden, die die Moleküle zusammenhalten. Die Wärmeenergie steckt nun im entstandenen Dampf (im Gas), sie wird der Umgebung entzogen, weshalb diese sich abkühlt (Verdunstungskälte). Man braucht folglich wenig Energie zur Verdunstung, wenn die zwischenmolekularen Anziehungskräfte gering sind (starke Abkühlung). Sind umgekehrt die Anziehungskräfte groß, benötigt man viel Energie, um die Teilchen vom flüssigen in den gasförmigen Zustand zu bringen (geringe Abkühlung).

Diese Zusammenhänge kann man vorzüglich demonstrieren, wenn man die Temperaturänderung beim Verdunsten einer Flüssigkeit aufnimmt.

Experiment:

Geräte:

TI-Nspire™ CX, TI-Nspire™ Lab Cradle, Temperaturfühler (stainless steel), Kabel

Materialien:

Reagenzgläser, Filterpapier oder Küchenpapier, Gummiband, Tesafilm, Stativmaterial

Durchführung:

Aus Filter- oder Küchenpapier schneidet man ein etwa 6 x 6 cm großes Stück und umwickelt damit den Metallstab eines Temperatursensors. Die Papierhülse lässt sich am besten folgendermaßen herstellen: Man rollt das Papier eng zusammen und schiebt es danach erst über den Sensor. Dort kann man es mit Gummiband oder Tesafilm fixieren. Man kann auch ein Erfrischungstuch auspacken und einfach über den Temperatursensor hängen.

Will man Vergleiche zwischen verschiedenen Flüssigkeiten anstellen, bereitet man mehrere Temperaturfühler vor. Idealerweise verwendet man das neue TI-Nspire™ Lab Cradle mit 3 analogen Eingängen, womit z. B. gleichzeitig die Temperaturkurven von Luft und Wasser und Kölnisch Wasser (Erfrischungstuch) aufgenommen werden können. Steht kein TI-Nspire™ Lab Cradle zur Verfügung, führt man die Messungen nacheinander aus und speichert die Werte im Rechner.

Nach dem Anschließen der Temperatursensoren an das Messgerät ist der Rechner so einzustellen, dass alle 10 Sekunden eine Temperaturmessung über einen Zeitraum von 5 Minuten erfolgt. Man gibt in Reagenzgläser jeweils 1 mL Wasser bzw. Kölnisch Wasser (oder Rasierwasser), taucht die präparierten Temperatursensoren in die Flüssigkeit und saugt diese mit der

Papierhülle auf. Nun startet man die Messung, zieht die Temperatursensoren heraus und fixiert den jeweiligen Griff an einem Stativ oder direkt an der Kante eines Tisches, so dass die Flüssigkeit ungehindert verdunsten kann (s. Abb. 1).

Die Werte sind nur dann aussagekräftig, wenn man genau gleiche Mengen der verschiedenen Flüssigkeiten aufsaugt. Auch ist es bei parallelen Messungen wichtig, die Messfühler synchron aus den Reagenzgläsern zu ziehen, damit die Verdunstung zeitgleich beginnt.

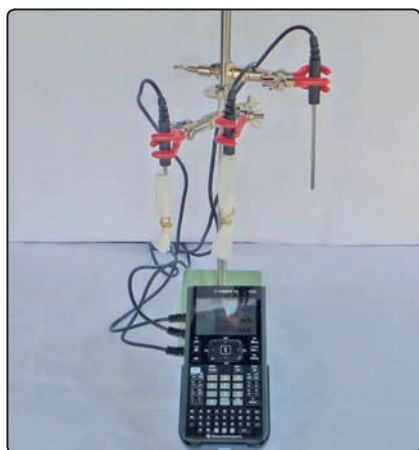


Abb. 1: Aufbau der Messung

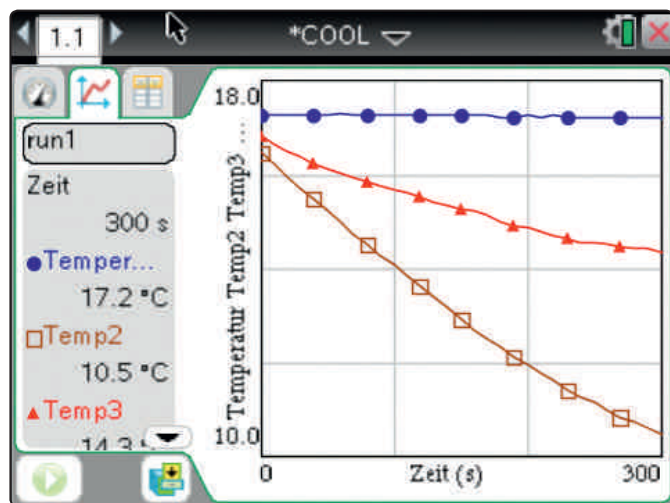


Abb. 2: Vergleich Luft, Wasser, Erfrischungstuch

Ergebnisse:

Die mit den Messungen erhaltenen Korrelationen sind evident (s. Abb. 2). Im Zeitraum von 5 Minuten erfolgt die Abkühlung des wassergetränkten Papiers etwa von 18 °C auf 14 °C, bei Kölnisch Wasser noch deutlicher ausgeprägt bis auf 10 °C.

Je leichter ein Stoff verdunstet, desto stärker ist die Abkühlung bei der Verdunstung. Alkoholhaltige Flüssigkeiten (mit geringen Anziehungskräften zwischen den Teilchen) verdunsten leichter als Wasser (mit starken Anziehungskräften zwischen den Wassermolekülen). Wasser kühlt also stärker als Luft,

Kölnisch Wasser (Erfrischungstuch oder Rasierwasser) noch stärker als Wasser.

Misst man wie beschrieben gleichzeitig die drei Temperaturkurven, so lässt sich zeigen, dass nicht ein kalter Luftzug die Abkühlung der Flüssigkeit bewirkt - die Lufttemperatur bleibt ja konstant. Eine Erweiterung der Experimente ist durch Anblasen mit einem Fön möglich.

Ausblick:

Das geschilderte Experiment kann mit Schülerinnen und Schülern unterschiedlicher Jahrgangsstufen durchgeführt werden. Sowohl Anspruchsniveau als auch Einsetzbarkeit sind in weiten Grenzen variabel.

Für jüngere Schülerinnen und Schüler ist die richtige Interpretation der Graphik ausreichend. Die Erfahrung, dass Schwitzen zur Abkühlung der Körpertemperatur beiträgt, kann auf einfacher Ebene erklärt werden (Verdunstung des im Schweiß enthaltenen Wassers). Die Erklärung mit Hilfe der Teilchenstruktur der Materie richtet sich nach dem Wissensstand der Schüler.

In höheren Jahrgangsstufen kann die üblicherweise recht „trockene“ Darstellung der Siedepunkte der homologen Reihe der Alkane durch die experimentell bestimmbare Abkühlung bei der Verdunstung eindrucksvoll veranschaulicht werden.

Mit steigender Zahl der Kohlenstoffatome bei n-Pentan, n-Hexan, n-Heptan und n-Octan steigen Verdampfungsenthalpie und Siedepunkt, weil die steigende Kettenlänge eine größere Oberfläche und damit größere zwischenmolekulare Anziehungskräfte (van-der-Waals-Kräfte) bedingt. Dementsprechend verdunsten kurzkettige Alkane bei gegebener Temperatur rascher als langkettige und bewirken eine stärkere Abkühlung (bei n-Pentan fällt z. B. die Temperatur von 22 °C bereits innerhalb weniger Minuten auf etwa -12 °C).

Es gibt kaum einen schulrelevanten Versuch, der die Zusammenhänge zwischen Kettenlänge eines Alkans, Oberfläche des Moleküls, van-der-Waals-Kraft, Verdampfungsenthalpie und Siedepunkt so eindrucksvoll zeigt.

Eine vertiefende Betrachtung der Struktur - Eigenschaftskorrelation ist durch Experimente mit isomeren Alkanen oder mit einwertigen Alkanolen möglich. Man vergleiche molare Massen, Siedepunkte und Verdampfungsenthalpien der Alkanole mit den entsprechenden Alkanen und lasse den Temperaturverlauf bei der Verdunstung messen. Besonders bei Butanol bzw. Pentanol, die vergleichbare molare Massen wie Pentan bzw. Hexan besitzen, ist die Auswirkung der Wasserstoffbrückenbindungen im Vergleich zu den van-der-Waals-Kräften besonders gut erkennbar.

Autor:

Otmar E. Danninger, Landshut (D)

otmar.danninger@chemie.uni-regensburg.de

Messwerterfassung mit dem TI-Nspire™ Lab Cradle und der Vernier DataQuest™ App

Passend zu den TI-Nspire™ Handhelds und der TI-Nspire™ Software gibt es nützliches Zubehör für Physik, Chemie und Biologie. Die TI-Nspire™ Lab Station, bestehend aus dem TI-Nspire™ Lab Cradle und der Vernier DataQuest™ App, unterstützt Sie umfassend.

Im Handumdrehen können Sie mit Ihrer Klasse Daten erfassen, austauschen und analysieren. Veranschaulichen Sie realitätsnah Ihre Lerninhalte. So helfen Sie Ihren Schülern, Naturwissenschaften noch besser zu verstehen.

Das TI-Nspire™ Lab Cradle ist optional erhältlich und kompatibel mit allen TI-Nspire™ Handhelds. Die Vernier DataQuest™ App ist in das Betriebssystem des TI-Nspire™ CX und TI-Nspire™ CX CAS Handhelds und in die Lehrer- und Schüler-Software (ab Version 3.0) bereits integriert. Sie vereint alle nützlichen Tools in einer Anwendung.

Visualisieren

Mit der **TI-Nspire™ Lab Station, bestehend aus dem TI-Nspire™ Lab Cradle und der Vernier DataQuest™ Applikation**, können Sie ein breiteres Spektrum an Experimenten im Klassenzimmer oder auch draußen durchführen und Daten erfassen sowie später darstellen. Verwenden Sie dazu einzelne Sensoren, die an das TI-Nspire™ Lab Cradle angeschlossen sind oder bis zu fünf Sensoren gleichzeitig. Wiederholen Sie Experimente mehrmals. Daten werden gespeichert und bleiben erhalten. Samplingrate: bis zu 100.000 pro Sekunde.

Erkunden

Wird das TI-Nspire™ Lab Cradle in Verbindung mit einem TI-Nspire™ Handheld verwendet, kann jeder Schüler selbst naturwissenschaftliche Phänomene untersuchen. Das optionale TI-Nspire™ Lab Cradle bietet mit insgesamt drei analogen und zwei digitalen Anschlüssen Platz für bis zu fünf Vernier Sensoren. Das Angebotsspektrum an Sensoren ist groß – Sie finden sicher für jede wissenschaftliche Aufgabe das passende Modell. Lassen Sie spezifische Teilmengen erfasster Daten auswählen und analysieren, eine Hypothese graphisch darstellen, eine Stichprobe wiederholen und vieles mehr.

Komfortabel

Mit der TI-Nspire™ Lab Station nutzen Sie die Unterrichtszeit effizient – so bleibt mehr Raum für anregende Diskussionen des Lernstoffs mit der Klasse. Der Einstieg ist ganz leicht: Beginnen Sie einfach mit einem TI-Nspire™ CX oder TI-Nspire™ CX CAS Handheld mit einem einzelnen, direkt anschließbaren Sensor. Damit haben Sie ein tragbares Gerät für eine direkte und einfache Datenerfassung, ideal für schnell verlaufende und kurze Ereignisse. Durch das logische Bausteinsystem können Sie jederzeit weitere Sensoren nachrüsten.



Vernier CO₂ Sensor

Die TI-Nspire™ Software ist die perfekte Ergänzung für Schüler mit einem TI-Nspire™ CX Handheld. Die Schüler können Daten mit dem Handheld erfassen und die Informationen dann an die Software übertragen, um sie auf einem PC- oder Mac®-Bildschirm genauer zu untersuchen. Mit der Data Marker Funktion können Sie einen Teil der Daten einfach markieren und auswählen. Zudem bietet die Lehrer-Software weitere Funktionalitäten in der Darstellung.

Mehr zu den oben genannten Produkten finden Sie auf den TI-Webseiten.

Nützliche Unterrichtsmaterialien gibt es hier:
www.ti-unterrichtsmaterialien.net oder im Webshop:
www.ti-activities-shop.net



TI-Nspire™
Lab Cradle

TI-Nspire™ CX Handheld
TI-Nspire™ CX CAS Handheld

Vernier DataQuest™ App

Das Grundgesetz der Mechanik

Mirco Tewes



Das Grundgesetz der Mechanik beschreibt die Wirkung einer Kraft auf die Bewegung eines Körpers. Es spielt bei der Beschreibung von Bewegungen und Bewegungsänderungen von Punktmassen eine zentrale Rolle. Bei der experimentellen Erarbeitung oder Bestätigung des Gesetzes wird häufig ein Vorgehen gewählt, bei dem man in mehreren Teilversuchen die Kraft und die Masse konstant hält und die Beschleunigung indirekt ermittelt.

Mithilfe der neuen TI-Nspire™ LabStation, bestehend aus der Vernier DataQuest™ Applikation und dem TI-Nspire™ Lab Cradle, ist eine direkte Messung von beschleunigender Kraft und erzielter Beschleunigung während eines dynamischen Vorgangs möglich. Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass der proportionale Zusammenhang zwischen den beiden Größen ohne die Einschränkung konstant zu haltender Größen gilt.

Dabei kommen ein Kraftsensor und ein Beschleunigungssensor zum Einsatz. Letzterer ähnelt den Beschleunigungssensoren in Mobiltelefonen. Da in der Kinematik ausreichend Erfahrungen im Messen von Beschleunigungen auf herkömmlichem Wege gesammelt wurden, ist der Einsatz von rechnergestützter Messtechnik zu rechtfertigen, auch wenn das Messgerät selbst eine Blackbox bleibt.

Versuchsaufbau



Abb. 1 Versuch mit Kraft- und Beschleunigungssensor

Geräte

- verschiedene Massestücke (z. B. 0,5 kg, 1 kg, 2 kg)
- Taschencomputer, hier TI-Nspire™ mit TI-Nspire™ Lab Cradle
- Kraftsensor (z. B. Dual-Range Force Sensor, DFS-BTA)
- Beschleunigungssensor (z. B. Low-g-Accelerometer, LGA-BTA), Klebeband
oder
- Ultraschallbewegungssensor (z. B. CBR 2™)

Versuchsdurchführung

Ein Massestück wird mehrfach angehoben, dabei kurzzeitig beschleunigt und wieder abgesenkt. Die beschleunigende Kraft und die Beschleunigung werden gleichzeitig gemessen. Das Experiment wird mit verschiedenen Massestücken durchgeführt.

Vorbereitung: 5 min, Durchführung: 25 min (mit Auswertung)

Einstellungen

- Messmodus: Time Based (Zeitbasiert)
- Messzeit: z. B. 3 s
- Abstand zweier Messungen: z. B. 0,03 s
- Ch1: Beschleunigungssensor, Pfeilrichtung nach oben, in dieser Position Nullpunkt einstellen
- Ch2: Kraftsensor (MB: 50 N), Nullpunkt einstellen bei hängender Masse

Hinweise

Anstelle des Beschleunigungssensors kann auch ein Ultraschallbewegungssensor (z. B. CBR 2™) zur Messung der Beschleunigung eingesetzt werden. Das hat den Vorteil, dass das Messverfahren zur Bestimmung der Beschleunigung für die Schülerinnen und Schülern leichter zu verstehen ist. Der Sensor müsste unter dem anzuhebenden Massestück platziert werden. Die Ergebnisse sind etwas ungenauer als beim beschriebenen Verfahren. Der Versuch lässt sich ferner auch in anderen Varianten durchführen. So kann ein Experimentierwagen (verschiedene Beladungen) durch einfaches Ziehen in Zugrichtung beschleunigt werden. Weitere Varianten wären die gleichzeitige Messung von Kraft und Beschleunigung bei der Schwingung eines Feder-Masse-Pendels oder beim Sprung auf einer Kraftplatte.

Tipps und Tricks

Der Pfeil auf dem Beschleunigungssensor sollte nach oben zeigen. In der Ruheposition ist der Sensor auf Null zustellen, damit die Fallbeschleunigung nicht mitgemessen wird. Auch der Kraftsensor muss auf Null gestellt werden, um nur die beschleunigende Kraft zu messen. Dies muss durchgeführt werden, während das Massestück bereits am Kraftsensor hängt, aber noch nicht bewegt wird.

Auswertung

Die Graphen im F - t - und a - t -Diagramm zeigen ähnliche Verläufe. In das F - a -Diagramm ließe sich eine Ursprungsgerade als Ausgleichsgerade einzeichnen. Nun bestimmt man durch sinnvolles Probieren oder über eine automatische Regression die Gleichung einer solchen Geraden. Es zeigt sich, dass der Anstieg der Masse des beschleunigten Körpers entspricht.

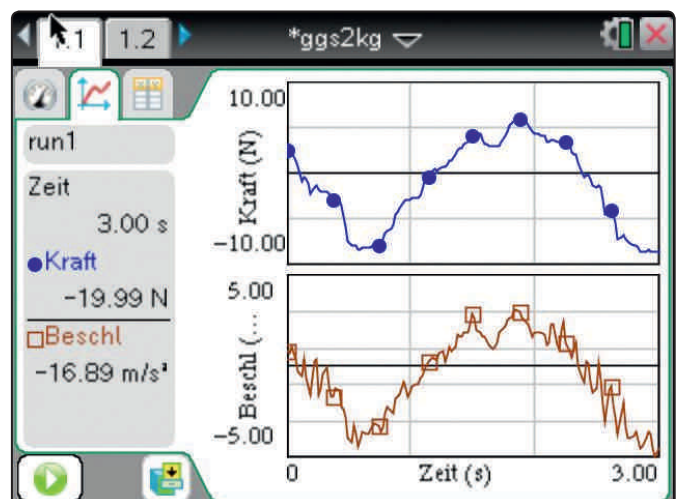


Abb. 2

Das Grundgesetz der Mechanik

(2. Newton'sches Axiom)

- Arbeitsblatt -

Geräte

- verschiedene Massestücke
(z. B. 0,5 kg, 1 kg, 2 kg)
- Taschencomputer
- Kraftsensor
- Beschleunigungssensor
- Klebeband

Versuchsaufbau



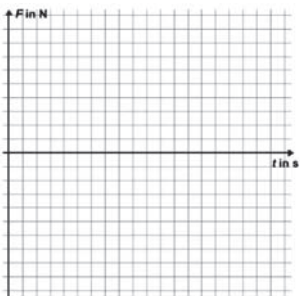
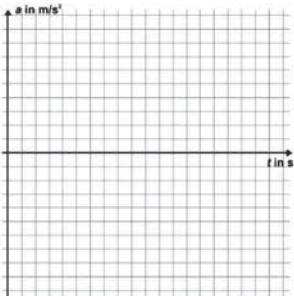
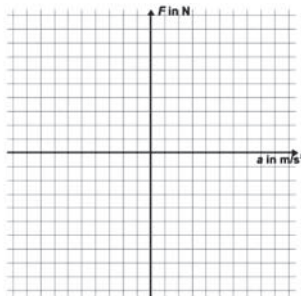
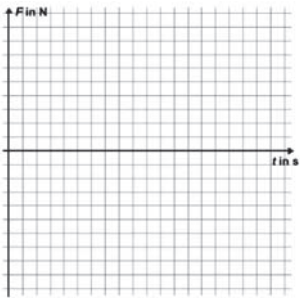
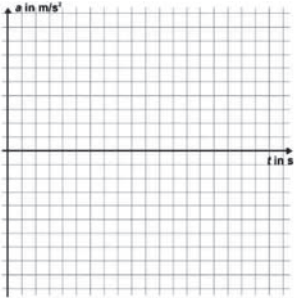
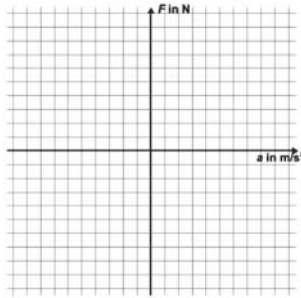
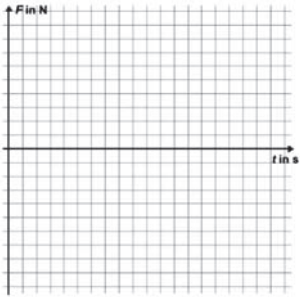
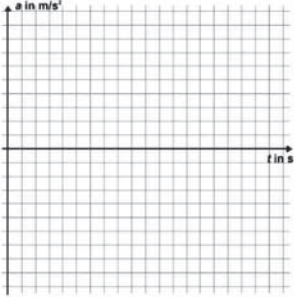
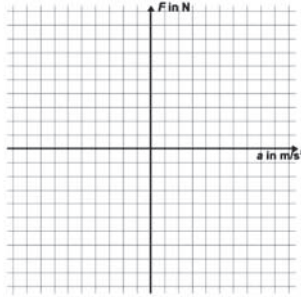
Versuch mit Kraft- und Beschleunigungssensor

Einstellungen

- Messmodus: Time Based (Zeitbasiert)
- Messzeit: 3 s
- Abstand zweier Messungen: 0,03 s
- Ch1: Beschleunigungssensor, Pfeilrichtung nach oben, in dieser Position Nullpunkt einstellen
- Ch2: Kraftsensor (Messbereich: 50 N), Nullpunkt einstellen bei hängender Masse

Versuchsdurchführung und Auswertung

- (A) Bringen Sie den Beschleunigungssensor mithilfe des Klebebandes fest und genau senkrecht (Pfeilrichtung nach oben) am ersten Massestück an. Verbinden Sie die Sensoren mit dem Taschencomputer.
- (B) Stellen Sie den Beschleunigungssensor auf null, während das Massestück noch steht. Heben Sie das Massestück am Kraftsensor hängend an und stellen Sie auch diesen auf null (ruhig halten!). Nehmen Sie alle weiteren Einstellungen vor.
- (C) Starten Sie die Messung. Das Massestück wird während der Messzeit mehrfach angehoben, dabei kurzzeitig beschleunigt und wieder abgesenkt.
- (D) Stellen Sie die Kraft und die Beschleunigung in Abhängigkeit von der Zeit sowie die Kraft in Abhängigkeit von der Beschleunigung in je einem Diagramm graphisch dar. Skizzieren Sie die Verläufe der Graphen auf dem Arbeitsblatt (Rückseite).
- (E) In das Kraft-Zeit-Diagramm kann man eine Ausgleichsgerade einzeichnen. Ermitteln Sie mithilfe des Taschenrechners eine Gleichung dieser Geraden und zeichnen Sie diese. Nutzen Sie entweder die automatische Regression oder bestimmen Sie den Anstieg und den y-Abschnitt durch sinnvolles Probieren.
- (F) Wiederholen Sie die Aufträge (A) bis (E) mit den anderen Massestücken.

Beschleunigte Masse 1 $m_1 =$		
		
Regressionsgleichung:		
Beschleunigte Masse 2 $m_2 =$		
		
Regressionsgleichung:		
Beschleunigte Masse 3 $m_3 =$		
		
Regressionsgleichung:		

Auswertung

Welcher Zusammenhang zwischen der beschleunigenden Kraft F und der erzielten Beschleunigung a lässt sich erkennen? Welche physikalische Bedeutung haben jeweils die Anstiege der Geraden in den F - a -Diagrammen? Formulieren Sie ein Fazit.

Das Grundgesetz der Mechanik (2. Newton'sches Axiom)

- Lösungen zum Schülerarbeitsblatt -

Musterlösungen zu den Aufträgen (A) bis (F):

Beschleunigte Masse 1 $m_1 = 0,5 \text{ kg}$



Abb. 3

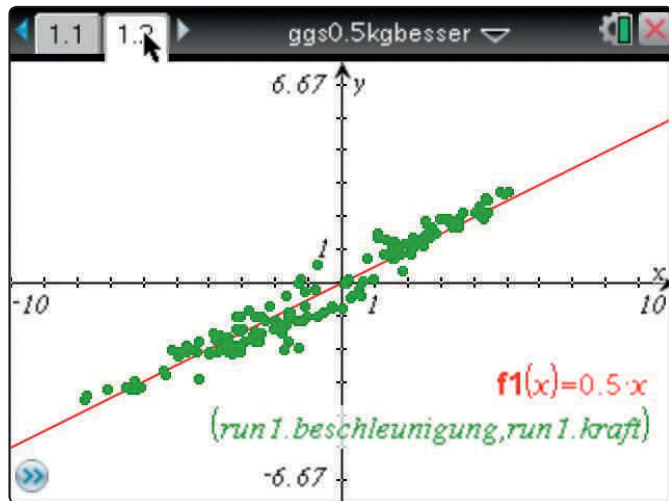


Abb. 4

Beschleunigte Masse 2 $m_2 = 1 \text{ kg}$



Abb. 5

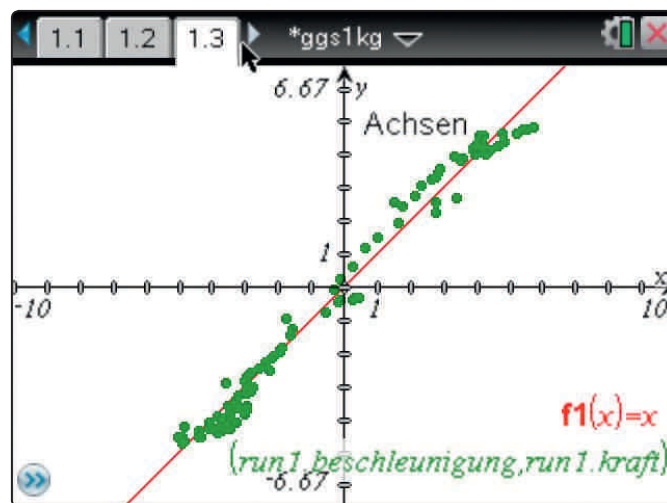


Abb. 6

Beschleunigte Masse 3 $m_3 = 2 \text{ kg}$

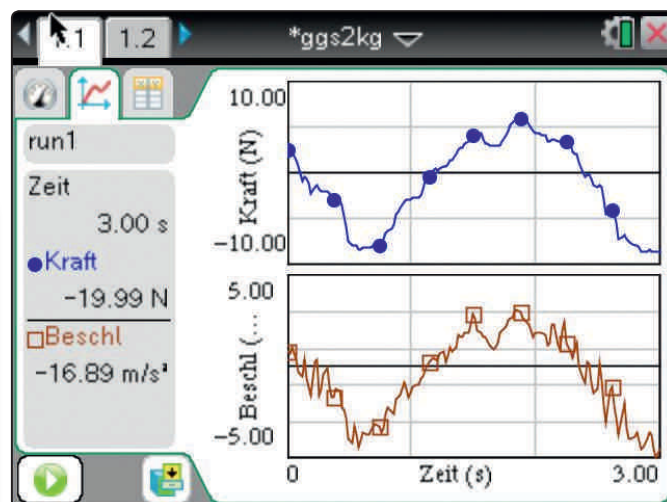


Abb. 7

Noch mehr Möglichkeiten für Physik,
Biologie und Chemie bieten
Ihnen das neue TI-Nspire™ Lab Cradle
und die Vernier DataQuest™ App.
Multifunktionale Messwerterfassung
leicht gemacht.

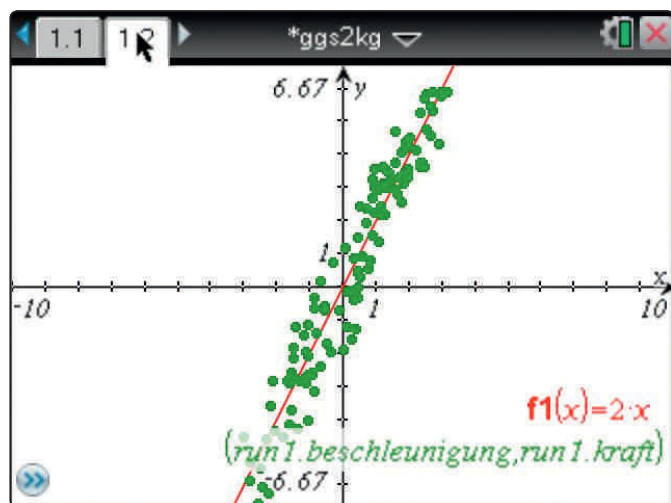


Abb. 8

Die Graphen im F - t - und a - t -Diagramm ähneln einander sehr. Die Proportionalität zwischen F und a wird auch durch die Ursprungsgerade im F - a -Diagramm, die sich als Ausgleichsgerade finden lässt, bestätigt. Zusätzlich ließe sich die weitgehende Konstanz des Quotienten aus F und a zeigen. Der Anstieg der Geraden entspricht jeweils der Masse des beschleunigten Körpers. $F = m \cdot a$

Autor:

Mirco Tewes, Bernau
Primo-Levi-Schule (Gymnasium) Berlin
postmaster@mrtewes.de

Parabelsegmente

Henning Körner

In Erinnerung an Günter Steinberg

CAS Schneidet eine Gerade eine Parabel in zwei Punkten entsteht ein Parabelsegment. Diese Segmente bilden einen spannenden Unterrichtsgegenstand, weil hier verschiedene Aspekte der Analysis und der Geometrie thematisiert werden können. Außerdem bestehen auch historische Anknüpfungspunkte. Es wird eine Unterrichtssequenz vorgestellt, die ihren Ausgang zunächst in einer Aufgabe hat, die Basiskompetenzen schult, dann aber durch Fragen, die aus der Sache heraus entstehen, zu weiteren Untersuchungen Anlass gibt, bei denen dann zunächst ein CAS zentrales, unumgängliches Werkzeug ist. Im weiteren Verlauf führen Modifikationen und historische Bezüge zu neuer und tieferer Einsicht mit der Möglichkeit binnendifferenzierender Weiterarbeit. Insgesamt werden also an einem Objekt (Parabelsegmente) unterschiedliche Methoden angewendet und nicht, wie oft üblich, eine Methode an oft beliebig erscheinenden Objekten geübt. Der Aufbau hat somit Bruderschen ‚Blütencharakter‘. Bezüglich des Einsatzes von CAS leistet die Aufgabensequenz auch einen Beitrag zur Diskussion um „zu Fuß“ vs. „mit Knopfdruck“. Es sind Erfahrungen aus unterschiedlichen unterrichtlichen Umsetzungen des Verfassers eingearbeitet.

Aufgabe 1

Verschiebt man einen Streifen festgelegter Breite parallel zur Symmetrieachse einer Parabel, so schneidet dieser Streifen die Parabel in zwei Punkten P und Q. Diese beiden Punkte bilden ein Parabelsegment (Abb. 1).

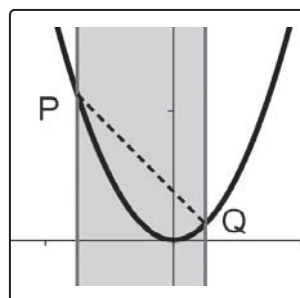


Abb. 1

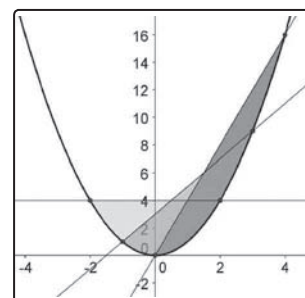


Abb. 2

- Beschreiben Sie die Form des Segments (Abb. 1), wenn der Streifen von links nach rechts wandert. In welcher Position des Streifens vermuten Sie einen maximalen Flächeninhalt?
- In Abb. 2 sind zu $f(x) = x^2$ drei Segmente skizziert. Die zugehörigen Geraden haben die Gleichungen $g_1(x) = 4$; $g_2(x) = 2x + 3$, $g_3(x) = 4x$. Zeigen Sie, dass die Segmente gleiche Breite haben und ermitteln Sie den zugehörigen Flächeninhalt. Was fällt auf? Vergleichen Sie mit Ihrer ursprünglichen Vermutung.

Konstruieren Sie zwei weitere Segmente gleicher Breite nach eigener Wahl und prüfen Sie ihre (neue) Vermutung.

1a) schult inhaltliche Vorstellungskraft und soll durch intuitive Hypothesenbildung eine Berechnung motivieren. In 1b) sind die Beispiele so gewählt, dass eine Berechnung der Flächeninhalte und der Nachweis der konstanten Breite durchaus ‚zu Fuß‘ vorgenommen werden sollten, damit Schüler nicht nur Basiskompetenzen üben, sondern auch unmittelbar erfassen, dass es durchweg um das Lösen von quadratischen Gleichungen und Bilden von Stammfunktionen quadratischer Funktionen geht. Die Zahlenwerte sind so gewählt, dass auch der

numerische Aufwand gering bleibt. Am Beginn einer Problemaufgabe steht also Üben, oder: Üben in sinnstiftendem Kontext zum Auftakt. Ein Vergleich mit der anfänglichen Hypothese führt vielleicht zur Überraschung oder auch einer ersten numerischen Bestätigung. Es drängen sich dann unmittelbar Fragen auf:

- (A) Haben alle Parabelsegmente der Normalparabel mit der Breite 4 denselben Flächeninhalt?
- (B) Haben alle Parabelsegmente der Normalparabel mit gleicher Breite denselben Flächeninhalt?
- (C) Haben alle Segmente gleicher Breite beliebiger Parabeln denselben Flächeninhalt?

Frage (A) wird in der letzten Teilaufgabe von 1b) vorbereitet, die Algebraisierung zu den Grenzen t und $t+4$ ist bei Schülern kein Selbstläufer. Die Fragen stellen nun eine zunehmende Verallgemeinerung zu folgendem allgemeinen Satz dar:

Aufgabe 2

Beweisen Sie den Satz vom Parabelsegment: Bei jeder Parabel haben Parabelsegmente gleicher Breite denselben Flächeninhalt.

Charakteristisch für die Beantwortung der Fragen ist bei der hier gewählten Zugangsart, dass semantisch immer dasselbe passiert. Es müssen zunächst Schnittpunkte von Geraden und Parabeln bestimmt werden, um die Integrationsgrenzen zu erhalten, dann muss eine quadratische Funktion integriert werden. Syntaktisch sprengt aber der Rechenaufwand beim Weg von (A) über (B) nach (C) zunehmend jeden schulischen und auch sonst sinnvollen Rahmen. Hier kann dann ein CAS seine ganze Kraft entfalten. Ob man die Fragen dann sukzessive abarbeitet oder gleich mit (C) beginnt, weil es einem CAS ja ziemlich egal ist, wie komplex die Terme sind, kann den Vorlieben der Schüler überlassen werden. Wie sieht nun ein allgemeiner Ansatz aus? Naheliegend und dann auch von Schülern vorgeschlagen, wird:

1. Parabel: $f(x) = ax^2 + bx + c$,
2. Breite des Segmentes: h
3. Beginn des Segmentes t .

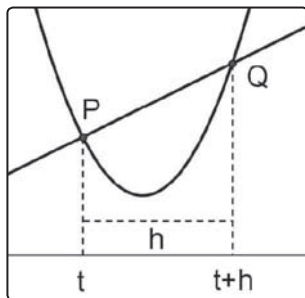


Abb. 3

Die Berechnungen mit dem CAS können auf unterschiedliche Weise durchgeführt werden.

- (1) Ein Protokoll zu einem Vorgehen, das außer der Zuordnung von Variablen und Funktionen keiner gesonderten CAS-Fertigkeiten bedarf und analog zu einer Berechnung ‚zu Fuß‘ erfolgt:

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
[ ] [Algebra] [Calc] [Other] [PrgmIO] [Clean Up]

a·x²+b·x+c→y1(x) Done
y1(t+h)-y1(t) → m 2·a·t+a·h+b
h
solve(m·t+n=y1(t),n)
n=-a·t²-a·h·t+c
m·x+-a·t²-a·h·t+c→y2(x) Done
    
```

Abb. 4

```

MAIN RAD AUTO FUNC 5/30
a·h³
6
∫(y2(x)-y1(x),x,t,t+h)
    
```

Abb. 5

Zum Nachdenken: Auch folgende Eingaben führen zur korrekten Lösung, obwohl doch „b“ auf zwei verschiedene Arten definiert ist (Zeile 1 und Zeile 3), warum?

```

a·x²+b·x+c→y1(x) Done
y1(t+h)-y1(t) → m 2·a·t+a·h+b
h
solve(m·t+b=y1(t),b)
b=-a·t²-a·h·t+c
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30
    
```

Abb. 6

- (2) Wenn man ein auch in anderen Situationen sinnvoll verwendbares Makro zur Bestimmung einer Geraden durch zwei Punkte zur Verfügung hat, gerinnt die Lösung zum Einzeiler im CAS:

```

F1 F2 F3 F4 F5 F6
[ ] [Algebra] [Calc] [Other] [PrgmIO] [Clean Up]

a·x²+b·x+c→y1(x) Done
∫(t+h,zweipk(x,t,y1(t),t+h,y1(t+h)))-y1(x),x,t,t+h)
a·h³
6
MAIN RAD AUTO FUNC 2/30
    
```

Abb. 7

Anmerkung: Das „Zweipk-Makro“ könnte so erzeugt sein:

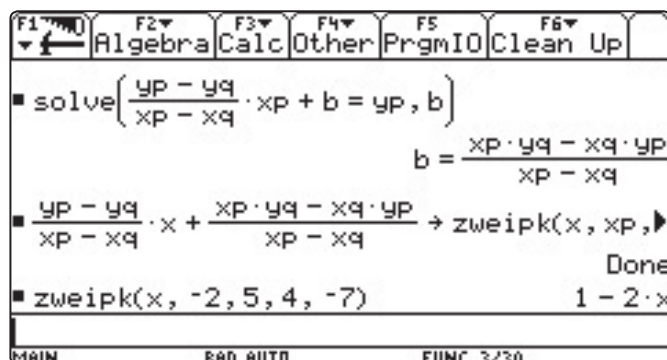


Abb. 8

Das Ergebnis erfreut und überrascht zugleich. Erfreulich ist, dass im Lösungsterm kein t auftaucht, der Flächeninhalt also unabhängig vom Beginn des Segmentes ist. Überraschend ist, dass auch die Parameter b und c nicht mehr auftreten. Dies gibt aber Anlass zum Nachdenken: Na klar, eine Betrachtung von $f(x) = k \cdot x^2$ reicht aus, weil jede Parabel durch Kongruenzabbildungen (Verschiebungen, Spiegelungen, Drehungen) in diesen Typ überführt werden kann, oder umgekehrt: Wenn man eine beliebige Parabel zeichnet, kann man das Koordinatensystem immer so legen, dass der Scheitelpunkt im Ursprung liegt.

Natürlich stellt man die Passung der Lösungsformel mit den Ergebnissen aus Aufgabe 1 her. Man sollte sie auch weitergehend inhaltlich interpretieren: Bei gegebener Breite ist der Flächeninhalt proportional zum Streckfaktor der Parabel, bei gegebenem Streckfaktor wächst der Flächeninhalt kubisch bzgl. der Breite h (Kovarianzaspekt).

Die teilweise komplexen Termumformungen, vor allem bei der Bestimmung des Integrals, werden bei der Arbeit mit dem CAS gar nicht sichtbar, was aber kein Problem darstellt, weil strukturelle Einsicht vorliegt (quadratische Gleichung, kubische Funktion als Stammfunktion), so dass dem Ergebnis ohne Einschränkung vertraut werden kann. Von bleibender und zentraler Bedeutung bleibt aber die Interpretation des Ergebnisses und der einsichtige Umgang mit Parametern. Dass hier nicht immer unmittelbare Klarheit vorliegt, zeigt eine Diskussion in einer Lerngruppe, die nach dem Ansatz mit $f(x) = k \cdot x^2$, Segmentbreite h und Laufparameter t darüber diskutiert, welche Variablen denn im Ergebnis auftreten müssen, können oder dürfen. Hier empfiehlt sich eine Formulierung des Satzes in Bezug auf die Parameter: Bei gleicher Breite h und gleichem Streckfaktor k erhält man immer denselben Flächeninhalt. Es interessiert also den Flächeninhalt überhaupt nicht, wo das Segment beginnt. Wenn wir den Flächeninhalt ausrechnen, darf also im Ergebnis kein t auftreten. Wenn doch, hängt der Flächeninhalt vom Beginn t des Segments ab. Es wird dann sogar weiter diskutiert, ob in der Formel nicht nur ein Parameter auftreten kann oder darf (ein parameterfreies Ergebnis wird zwar, wohl aus früheren analogen Erfahrungen, auch kurz vorgeschlagen, aber natürlich schnell verworfen). Hier muss dann inhaltliche, Verständnis fördernde Aufklärungsarbeit geleistet werden:

(a) Wenn nur k übrig bleibt, hieße das, dass die Breite egal ist. Das ist augenscheinlich falsch. (Abb. 9)

(b) Wenn nur h übrig bleibt, hieße das, dass der Streckfaktor egal ist. Das ist augenscheinlich falsch.

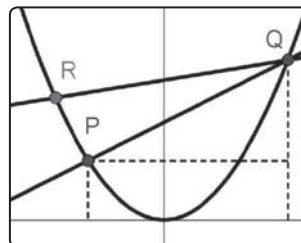


Abb. 9

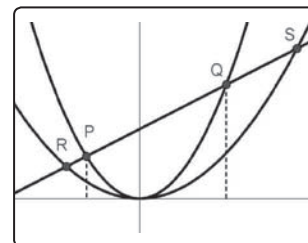


Abb. 10

Wir haben damit nicht nur den Satz bewiesen, sondern auch eine Formel entwickelt, die es uns ermöglicht, die Fläche eines Parabelsegments ohne Integralrechnung (!) anzugeben, wenn wir die Breite kennen.

Beispiel:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 10 \\ g(x) &= x + 4 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} k &= 2 \\ h &= \frac{\sqrt{33}}{2} \end{aligned}$$

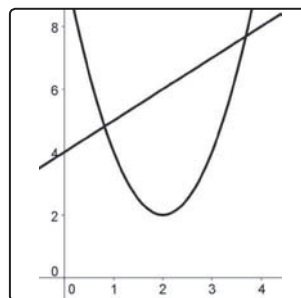


Abb. 11

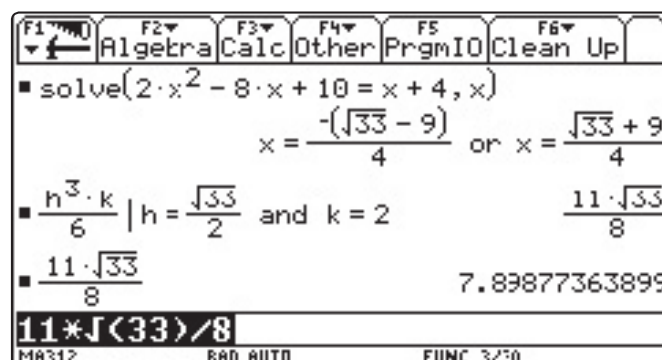


Abb. 12

Es liegt nun fast auf der Hand, auch den ersten Schritt, die Berechnung der Breite, in allgemeiner Form an das CAS zu delegieren, so dass nur noch die Parameter zu der Parabel und der Geraden angegeben werden müssen.

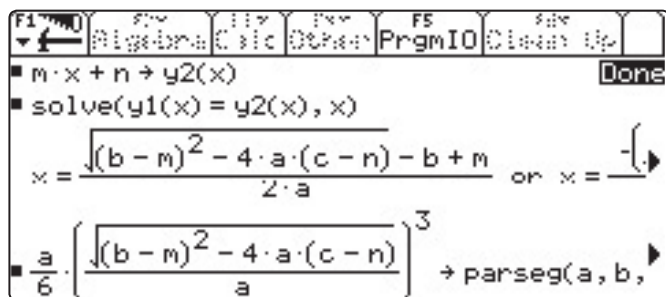


Abb. 13

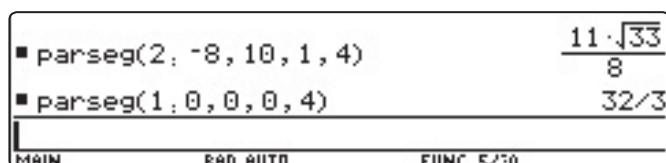


Abb. 14

Bis hierhin sollte und kann auch in Kursen auf grundlegendem Niveau gegangen werden. Eine grundlegende Strategie zur Berechnung von krummlinig berandeten Flächen wird zunächst ‚zu Fuß‘ festigend geübt, ehe die Weiterarbeit mit dem CAS den Umgang mit Variablen, Termen und Funktionen schult und ein weitreichendes Ergebnis (Satz über Parabelsegmente) erzeugt. Es muss hervorgehoben werden, dass hiermit durch Technikeinsatz ein Inhalt allen Schülern durch Eigentätigkeit zugänglich wird, eine Eigentätigkeit, die Strategiewissen und Variablenverständnis beinhaltet und weniger syntaktisches Umformen von Termen. In Kursen auf erhöhtem Niveau sollte man aber auch immer mal wieder die Frage danach stellen, ob es nicht auch anders geht. Ziel ist dann eben nicht mehr die Sicherung eines Ergebnis (es ist ja bewiesen), sondern weiterführende Einsicht in die grundlegende Struktur. Nicht zu vernachlässigen ist auch ein Urmotiv mathematischen Denkens und Handelns, nämlich die Suche nach eleganteren Lösungen, auch wenn dies nicht gerade im Zeitgeist kompetenzorientierter Fokussierungen liegt. Motivation zu einer Variation liefert hier z.B. die Tastache, dass die bisherige Lösung auf Technologieeinsatz angewiesen sind, pointiert gesprochen: Eine einfache Strategie wird mit hohem Aufwand umgesetzt, bösartiger formuliert: brute force and ignorance.

Das Überraschende bei den Parabelsegmenten ist ja, dass sehr unterschiedliche Formen letztendlich alle denselben Flächeninhalt besitzen. Wenn man die Formen irgendwie ‚formgleicher‘ machen könnte, bekommt man vielleicht auch Einsicht und Ideen.

Hier hilft ein Blickwechsel, der eigentlich schon bei der Einführung der Bestimmung krummlinig berandeter Flächen, die von zwei Funktionen gebildet werden, vorgenommen werden sollte. Statt der Schnittstellen der Funktionen f und g werden die Nullstellen der Differenzfunktion $d = f - g$ betrachtet. Damit ist die Bestimmung des Inhalts der Fläche zwischen zwei Funktionen auf die ja vorher behandelte Bestimmung der Fläche zwischen einer Funktion und der x -Achse zurückgeführt. Auf das hier vorliegende Problem ergibt sich

Aufgabe 3

f ist eine beliebige Parabel, g eine beliebige Gerade. Es gilt: $d(x) = g(x) - f(x)$.

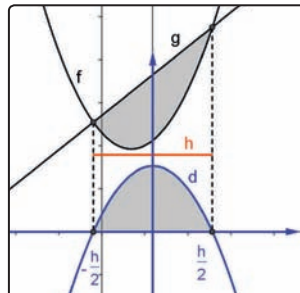


Abb. 15

- Begründen Sie, dass die beiden grauen Flächen gleich groß sind.
- Benutzen Sie nun das „neue“ Koordinatensystem, und entwickeln Sie eine Gleichung von d in diesem System. Beweisen Sie damit den Satz vom Parabelsegment.

Mit dieser Transformation werden alle Segmente zu derselben Parabel augenscheinlich ‚ähnlicher‘, sie werden symmetrisiert (fundamentale Heuristik), alle sind achsensymmetrisch! Dass sie alle kongruent sind, ist nicht unmittelbar zu sehen und wird zunächst Ergebnis der Rechnung, die infolge der Symmetrien auch wesentlich übersichtlicher und weniger aufwändig ist. Mit $d(x) = -ax^2 + b$ und den bekannten Nullstellen von d , erhält man

$$d(x) = -ax^2 + \frac{ah^2}{4}.$$

Für den Flächeninhalt des Segments erhält man dann:

$$2 \cdot \int_0^{\frac{h}{2}} d(x) dx = 2 \cdot \left[-\frac{a}{3} x^3 + \frac{ah^2}{4} x \right]_0^{\frac{h}{2}} = \frac{ah^3}{6}$$

Eine Idee, ein Blickwechsel, führt zu einer starken Reduktion der Termkomplexität, das Problem wird mit vertretbarem Aufwand ‚zu Fuß‘ lösbar! Dieser Blickwechsel leistet aber noch mehr: Die Differenzfunktion d ist immer eine Parabel und hat unabhängig von der Lage des Segmentes immer denselben Streckfaktor (mit umgekehrten Vorzeichen), weil ja von der Ausgangsfunktion nur etwas Lineares abgezogen wird. Sie hat auch immer denselben Abstand zwischen den Nullstellen, nämlich die Breite des Segments. Damit sind die Segmente kongruent, alle Parabelsegmente haben denselben Flächeninhalt. Der Nachweis der Flächengleichheit gelingt ohne weitere Rechnung.

Mit einer Dynamischen Geometrie-Software (DGS), wie sie z.B. beim TI-Nspire™ implementiert ist, kann der Sachverhalt vollständig geometrisch konstruiert und dann dynamisiert werden (Streifen verschieben), so dass die Flächengleichheit sehr schön einsichtig wird. Der besseren Visualisierung wegen, wird $f(x) = x^2 + 1,5$ betrachtet.

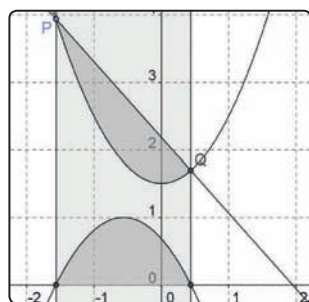


Abb. 16

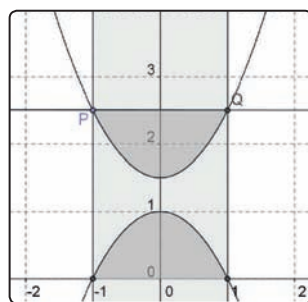


Abb. 17

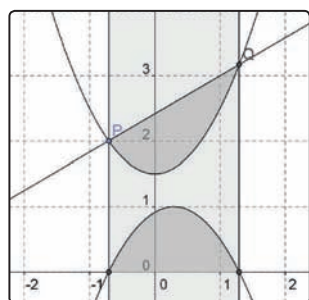


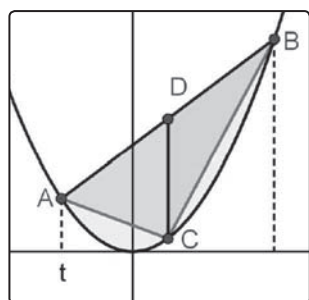
Abb. 18

Ein genauerer Blick sichert uns tiefere Einsicht und elegantere, einfachere Lösungen!

Die Untersuchung von Parabelsegmenten hat auch eine historische Dimension. Im Rahmen seiner Untersuchungen zur Quadratur der Parabel, erhielt Archimedes folgendes Ergebnis:

Aufgabe 4

Sei f eine beliebige Parabel und AB eine Sehne mit dem Mittelpunkt D . Zieht man durch D eine Parallele zur Symmetrieachse bis zum Schnittpunkt C mit der Parabel, so verhält sich der Inhalt des Parabelsegmentes zum Inhalt des Dreiecks ABC wie 4:3.



$f(x) = kx^2$,
Breite des Segments: h ;

Abb. 19

Es ist zu zeigen, dass der Inhalt des Dreiecks ABC nur von k und h abhängt, aber nicht von t .

- (1) Die beiden Dreiecke ACD und CBD haben denselben Flächeninhalt, weil sie dieselbe Grundseite CD und dieselbe Höhe $h/2$ haben. Damit gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABC :

$$F_{ABC} = \frac{h}{2} \cdot CD$$

- (2) Es bleibt die Bestimmung von CD .

Das CAS wird wieder die Rechnungen übernehmen, wir müssen aber Ansätze finden. Diese sollten Schüler selbstständig erarbeiten, dafür muss Zeit gegeben werden, Zeit, die man mit den Berechnungen auf Knopfdruck wieder hereinholt. Wichtig ist, dass die Ansätze und Strategien dokumentiert werden. Wo früher Rechenkaskaden die Dokumentationen prägten, müssen nun Ansätze, Strategien und Interpretationen die Dokumentationen prägen. Dies könnte ungefähr so aussehen:

- (A) Die Länge von CD ist die Differenz der y -Koordinaten von C und D .

- (B) Die y -Koordinate von C ist: $k(t + \frac{h}{2})^2$.

- (C1) Die y -Koordinate von D ist: $\frac{1}{2} \cdot (k(t+h)^2 + kt^2)$

- (C2) Gerade g_{AB} durch A und B ;

$$y\text{-Koordinate von } D \text{ ist: } g_{AB}(t + \frac{h}{2})$$

(C1) bedarf eines gewissen Blicks, es muss erfasst werden, dass die y -Koordinate von D gerade das arithmetische Mittel der y -Koordinaten von A und B ist. Die Berechnung ist dafür dann auch „zu Fuß“ machbar.

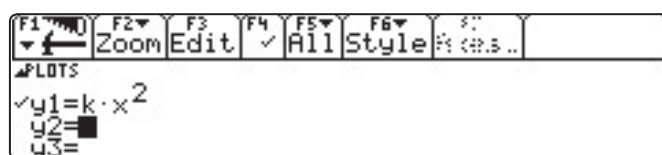


Abb. 20

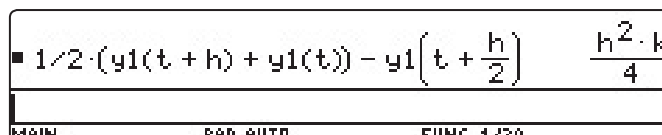


Abb. 21

(C2) bedarf weniger einer zündenden Idee, Geraden durch zwei Punkte und Funktionswerte bestimmen, sollten Standard sein. Dafür ist hier der Rechenaufwand höher.

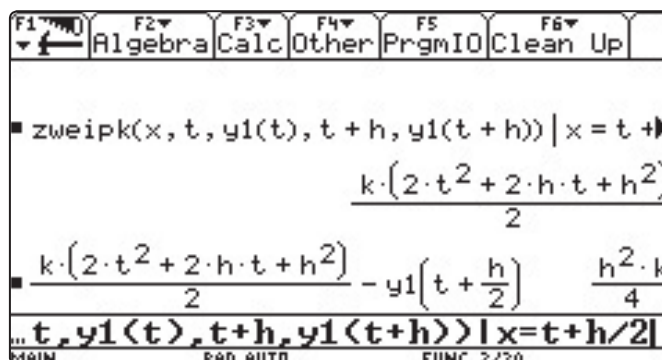


Abb. 22

(3) Die Fläche des Dreiecks ABC beträgt

$$\frac{4}{3} \cdot F_{ABC} = \frac{4}{3} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{h^2 k}{4} = \frac{kh^3}{6} = F_{\text{Segment}}$$

Anmerkungen:

1. Ist sicher am schwierigsten zu sehen, weil auch der geometrische Blick, sozialisationsbedingt und curricular gestützt, meist wenig ausgeprägt ist. Es ist aber wieder eine ähnliche Heuristik wie bei Aufgabe 3. Eine ‚schiefe‘ Fläche wird in zwei Flächen zerlegt, deren Inhalt einfacher zu bestimmen ist.

Die Hilfslinien und farbigen Markierungen können hier eine zusätzliche Hilfe sein.

2. Die Lösungen mit dem CAS zu (C) zeigen, dass tatsächlich eine sprachnahe Formulierung („y-Koordinate von D minus y-Koordinate von C“) ausreicht, um erfolgreich das Problem zu lösen, wenn man funktional mit dem CAS arbeitet. Der auf Verständnis bezogene Kern liegt eben im Ansatz und der Strategie! Sicherer Umgang mit Funktionen und funktionales Denken dominieren vor syntaktischem Arbeiten mit Termen. Ist das noch bzw. schon Mathematik? Aber ja!

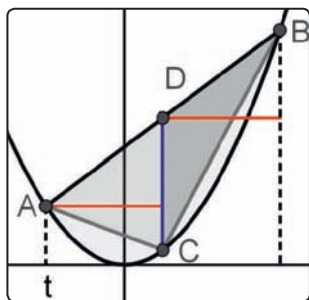


Abb. 23

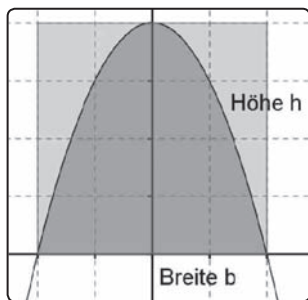


Abb. 24

3. In einer etwas modifizierten Form und mit Einschränkung auf einen Spezialfall ist der Satz von Archimedes für Kurse auf grundlegendem Niveau einfacher zugänglich:

Die Fläche unter dem Parabelbogen ist zwei Drittel der Fläche des Rechtecks aus der Höhe h und der Breite b der Basis der Parabel.

Ist nun alles geklärt?

(1)

Wenn man viele Geraden zeichnet, die die Segmente erzeugen, erhält man ein Bild wie Abb. 25. Da entsteht ja wieder eine Parabel?!

Was ändert sich an den Geradenbild, wenn man die Segmentbreite verändert?

Wie sieht das Geradenbild aus, wenn man zu $f(x) = k \cdot x^2$ Segmente der Breite 3 durch $(1 | f(1))$ skizziert?

Wie sieht das Geradenbild aus, wenn man zu $f(x) = 0,5 \cdot x^2$ Segmente beliebiger Breite durch $(1 | f(1))$ skizziert?

(2)

Wenn man $f(x) = x^2$ durch $f(x) = x^4$ ersetzt, gilt dann ein analoger Satz? (Abb. 26 bis 28)

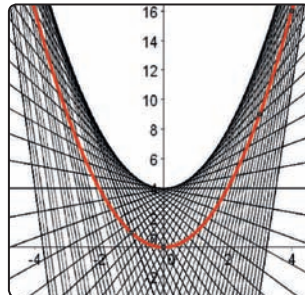


Abb. 25

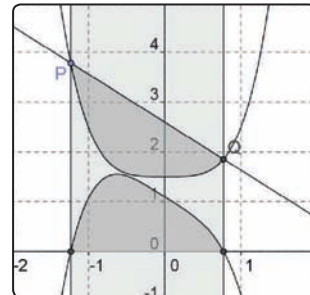


Abb. 26

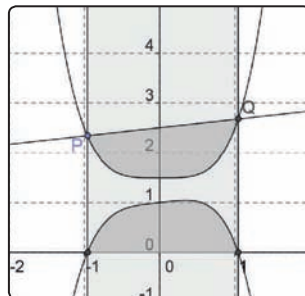


Abb. 27

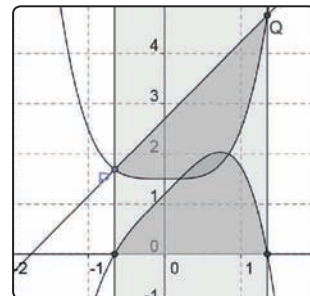


Abb. 28

Wohl nicht. Woran liegt das? Gibt es ein kleinstes oder größtes Segment?

Hört denn das Fragen in der Mathematik nie auf?
Hoffentlich nicht! Günter Steinberg

Autor:

Henning Körner, Oldenburg (D)
Studienseminar Oldenburg f.d. Lehramt an Gymnasien
hen.koerner@t-online.de

Autoren willkommen! Kritik erwünscht!

Ihr Beitrag zu den TI-Nachrichten ist herzlich willkommen, besonders natürlich Beispiele aus dem Unterricht. Ihre Kritik hilft uns, Ihren Wünschen besser gerecht zu werden.
Ihr Lob spornt uns an.

Senden Sie Ihre Beiträge bitte per E-Mail an unsere TI-Nachrichten Redaktion:
ti-nachrichten@ti.com

oder per Post an
Texas Instruments, Education Technology, TI-Nachrichten,
Haggertystraße 1, 85356 Freising, Deutschland

Bitte beachten Sie die Hinweise für Autoren auf unserer Website.

Diskrete Fouriertransformation DFT mit dem TI-Nspire™ CAS

Dr. Hans Kammer



1. Einleitung

Dieser Artikel vermittelt eine elementare Einführung in die Diskrete Fouriertransformation (DFT). Ausgangspunkt ist die Darstellung von Punkten im Raum mithilfe von Ortsvektoren und 3er-Listen (3-Listen) in einem orthogonalen Koordinatensystem. Dann wird das Skalarprodukt für 3-Listen eingeführt. Die Ergebnisse können ohne Schwierigkeiten auf n -dimensionale Listen (n -Listen) übertragen werden.

Im Hauptteil wird gezeigt, wie aus einer Sinus- oder einer Kosinusfunktion durch „äquidistantes Abtasten“ mehrdimensionale Listen von Funktionswerten gewonnen werden können, die eine orthogonale Basis (ein „rechtwinkliges Koordinatensystem“) in diesem mehrdimensionalen Raum bilden. Diese Listen erlauben es, jede nicht harmonische periodische Funktion als Linearkombination (gewichtete Summe) von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen (Diskrete Fourieranalyse). Die dabei gewonnenen „Fourierkoeffizienten“ spielen in der Mechanik (schwingende Systeme), in der Optik (Spektrum), der Akustik (Harmonielehre) und in der Verarbeitung digitaler Signale (z.B. im Mobiltelefon) eine wichtige Rolle.

Ein CAS-System, z.B. TI-Nspire™ CAS, erlaubt es, die Fourierkoeffizienten eines periodischen Messsignals bequem zu bestimmen. Im Vordergrund steht im Mittelschulunterricht die Analyse akustischer Signale, welche mithilfe eines Mikrofons und des TI-Nspire™ Lab Cradle bequem erfasst werden können.

Wir befassen uns hier mit der Fourier-Analyse eines langsam schwingenden Magnetfederpendels mit induktivem „Pick-Up“ dessen Spektrum erstaunlicherweise *zwei* Schwingungsmoden im Verhältnis 2:1 aufweist. Zum Einsatz kommt ein DFT-Programm, das die Fourierkoeffizienten $ak[i]$ und $bk[i]$ zu berechnen erlaubt und die zugehörigen Betrags- und Phasenspektren im Frequenzbereich sowie die entsprechenden Funktionen im Zeitbereich in einer Graph-Applikation auf dem Rechner TI-Nspire™ CAS direkt anzeigt.

Der mathematische Teil dieser Arbeit beruht auf [1].

2. Vektoren und Listen im dreidimensionalen Raum

2.1 Dreidimensionaler Raum: Vektor- und Listendarstellung eines Punktes

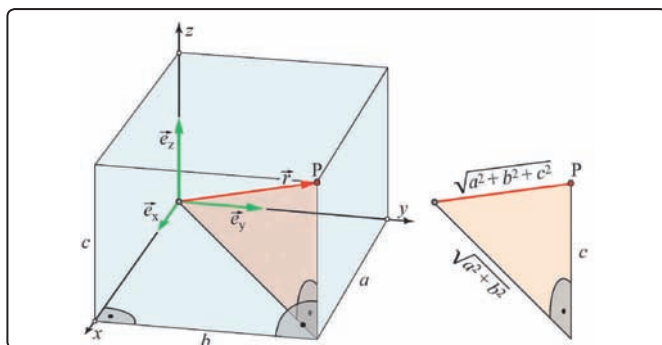


Abb. 1: Ortsvektor, Berechnung des Betrags

Ein Ortsvektor (Pfeil) \vec{r} beschreibt die Lage eines Punktes $P(a|b|c)$ im (dreidimensionalen) Raum (Abb. 1, links). Für den Vektor schreiben wir:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Den Punkt P können wir auch mit einer so genannten Liste darstellen: $r = \{a, b, c\}$.

Den Betrag des Vektors bezeichnen wir in der Listendarstellung mit der Norm $\|\vec{r}\|$. Es gilt:

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Die drei Einheitslisten $e_x = \{1, 0, 0\}$, $e_y = \{0, 1, 0\}$ und $e_z = \{0, 0, 1\}$ bilden eine so genannte *orthonormierte Basis* des 3-dimensionalen Raums.

2.2 Operationen mit Listen

Vektoren und Listen sind gleichwertige Darstellungsmethoden für Punkte im Raum. Sie unterscheiden sich nur in der Schreibweise. Wie für Vektoren können auch für Listen Operationen definiert werden:

Summe:

$$r_1 + r_2 = \{a_1, b_1, c_1\} + \{a_2, b_2, c_2\} = \{a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2\} \quad (1)$$

Streckung mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda \cdot r = \lambda \cdot \{a, b, c\} = \{\lambda \cdot a, \lambda \cdot b, \lambda \cdot c\} \quad (2)$$

Skalarprodukt:

$$\begin{aligned} \text{dotP}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \|\vec{r}_1\| \cdot \|\vec{r}_2\| \cdot \cos \phi \\ &= \sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2} \cdot \cos \phi \end{aligned} \quad (3)$$

Beispiele:

$$\text{dotP}(r, e_x) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{1, 0, 0\}) = a$$

$$\text{dotP}(r, e_y) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{0, 1, 0\}) = b$$

$$\text{dotP}(r, e_z) = \text{dotP}(\{a, b, c\}, \{0, 0, 1\}) = c$$

In der Sprache der Vektorrechnung: Die Projektion eines Ortsvektors auf die Basiselemente mithilfe des Skalarprodukts liefert die Komponenten des Vektors („Ausblendeigenschaft“). Diese Listen-Operationen und -Eigenschaften können direkt auf n -dimensionalen (n -Listen) übertragen werden

Nützliche Materialien finden Sie auch auf der Materialdatenbank unter:

www.ti-unterrichtsmaterialien.net

3. Abtastlisten

3.1 Fourieranalyse einer periodischen Funktion

Ziel der *kontinuierlichen* Fourieranalyse ist es, eine periodische Funktion, z.B. das zeitlich periodische Signal $f = f(t)$ einer Klarinette (Abb. 2)

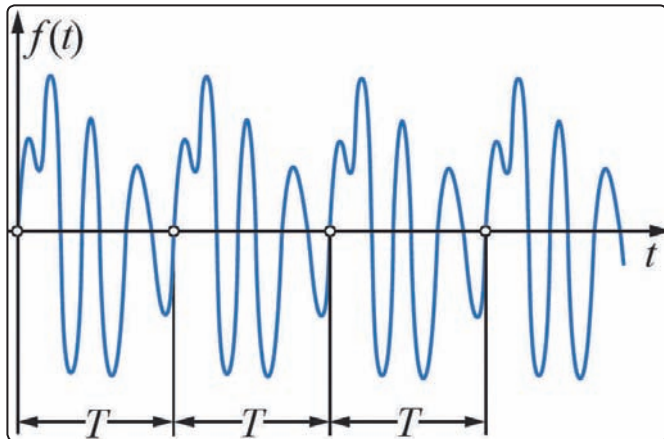


Abb. 2: zeitlich periodisches Tonsignal einer Klarinette

mithilfe von Sinus- und Kosinusfunktionen darzustellen:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot \cos(k \cdot \omega \cdot t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot \omega \cdot t)$$

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (\text{Periode})$$

Tasten wir $f(t)$ in $2 \cdot n$ äquidistanten Zeitintervallen

$$\Delta t = \frac{2 \cdot \pi}{2 \cdot n}$$

ab, so erhalten wir eine $2n$ -Liste \mathbf{f} mit den entsprechenden diskreten Funktionswerten.

Ziel der *diskreten* Fourieranalyse ist es, diese Liste \mathbf{f} als Linearkombination von Listen \mathbf{c}_k und \mathbf{s}_k aus Kosinus- und Sinusfunktionswerten $c_{k,l}$ und $s_{k,l}$ darzustellen, die ebenfalls mit Δt abgetastet wurden:

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \mathbf{c}_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot \mathbf{s}_k \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{c}_k = \{c_{k,1}, c_{k,2}, \dots, c_{k,\ell}, \dots, c_{k,2 \cdot n}\},$$

$$\mathbf{s}_k = \{s_{k,1}, s_{k,2}, \dots, s_{k,\ell}, \dots, s_{k,2 \cdot n}\} \quad \text{und}$$

$$n = \frac{\pi}{\Delta t}$$

Die Listen \mathbf{c}_k und \mathbf{s}_k sind **wechselseitig orthogonal**. Diese entscheidende Eigenschaft wird hier nicht bewiesen. Die „Gewichte“ a_k und b_k heißen *Fourierkoeffizienten*.

3.2 Äquidistantes Abtasten periodischer Funktionen: Orthogonale Wertelisten

Wir untersuchen jetzt Funktionswerte einer Reihe von Kosinus- und von Sinusfunktionen, die wir in äquidistanten Schritten von 30° an Stützstellen im Bereich von 0° bis 330° „abtasten“, d.h. die zugehörigen $N=12$ Funktionswerte (Stützwerte) ablesen und in eine Liste aufnehmen.

Kosinusfunktionen: $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t)$ mit $0 \leq k \leq 6$, $0 \leq l \leq 11$ sowie

Sinusfunktionen: $\sin(l \cdot k \cdot \Delta t)$ mit $1 \leq k \leq 5$, $0 \leq l \leq 11$ und

$$\Delta t = 30^\circ \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

Allgemein: $N = 2 \cdot n$ mit ganzzahligem n mit $0 \leq k \leq n$, $0 \leq l \leq (2 \cdot n - 1)$ und

$$\Delta t = \frac{180^\circ}{n} \left(\frac{\pi}{n} \right)$$

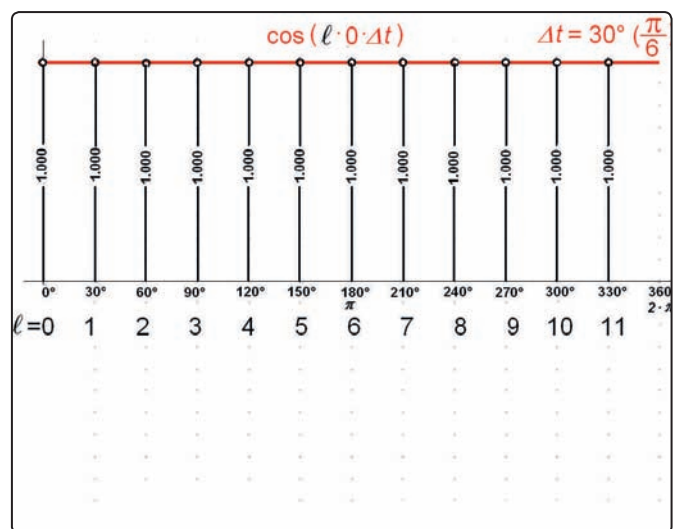


Abb. 3: $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t)$ mit $k = 0$, $\Delta t = 30^\circ$ und $N = 12$

$$c_0 = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

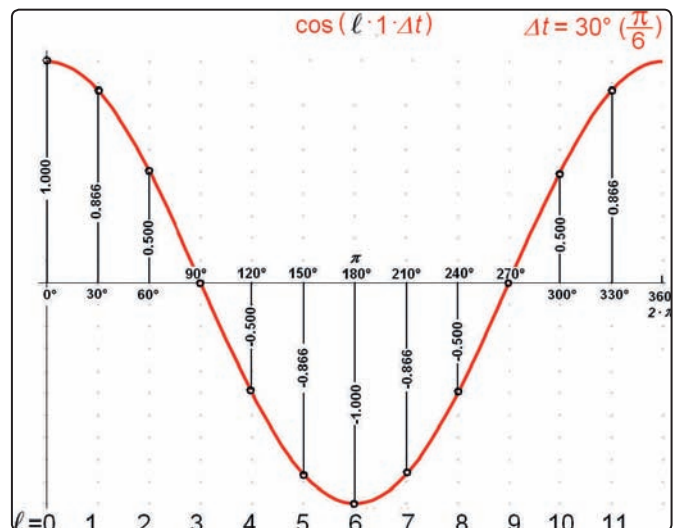


Abb. 4: $\cos(l \cdot k \cdot \Delta t)$ mit $k = 1$ und $N = 12$

$$c_1 = [1, 0.87, 0.5, 0, -0.5, -0.87, -1, -0.87, -0.5, 0, 0.5, 0.87]$$

$tt := \frac{\text{seq}(t, 0, 11, 1) \cdot \pi}{6}$	$\left\{ 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2 \cdot \pi}{3}, \frac{5 \cdot \pi}{6}, \pi, \frac{7 \cdot \pi}{6}, \frac{4 \cdot \pi}{3}, \frac{3 \cdot \pi}{2}, \frac{5 \cdot \pi}{3}, \frac{11 \cdot \pi}{6} \right\}$
$c0 := \cos(0 \cdot tt)$	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
$c1 := \cos(1 \cdot tt)$	$\left\{ 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$
$s1 := \sin(1 \cdot tt)$	$\left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2} \right\}$

Abb. 5: Berechnung der Listen c_0 , c_1 und s_1 mit dem TI-Nspire™ CAS

Abb.3 und 4 zeigen Beispiele für die Abtastung von Kosinusfunktionen für $k = 0$ und 1 an 12 Stützstellen $0 \leq l \leq 11$. Abb.5 zeigt die Berechnung der Kosinus- und Sinuslisten $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1$ und \mathbf{s}_1 mit $\Delta t = \pi/6$. Die restlichen Listen $\mathbf{c}_2 \dots \mathbf{c}_6$ und $\mathbf{s}_2 \dots \mathbf{s}_5$ werden analog berechnet.

Die 12 Listen $\mathbf{c}_0 \dots \mathbf{c}_6$ und $\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_5$ bilden eine **orthogonale Basis in einem 12-dimensionalen Vektorraum**. Das Skalarprodukt zweier beliebiger (nicht gleicher) Listen ergibt null.

Diese Eigenschaft kann mithilfe des Rechnerbefehls **dotP(...)** verifiziert werden, z.B. $\text{dotP}(\mathbf{c}_4, \mathbf{s}_5) = 0$ oder $\text{dotP}(\mathbf{c}_2, \mathbf{s}_3) = 0$. Zu Beginn ist ein solches experimentelle Verfahren einem exakten mathematischen Beweis vorzuziehen. Für die Normen dieser Listen liefert der Rechner mithilfe von

$$\sqrt{\text{dotP}(\text{liste}, \text{liste})}$$

$$\|\mathbf{c}_1\| = \dots = \|\mathbf{c}_5\| = \|\mathbf{s}_1\| = \dots = \|\mathbf{s}_5\| = \sqrt{6} \quad \text{und}$$

$$\|\mathbf{c}_0\| = \|\mathbf{c}_6\| = \sqrt{12}$$

3.3 Das Verfahren der diskreten Fourieranalyse

Wir multiplizieren jetzt die Liste

$$\mathbf{f} = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \mathbf{c}_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot \mathbf{s}_k, \quad n = \frac{\pi}{\Delta t}$$

(Δt Abtastintervall), die wir als Linearkombination von Listen \mathbf{c}_k und \mathbf{s}_k aus Kosinus- und Sinusfunktionswerten darstellen, skalar mit den Kosinus- bzw. Sinus-Listen \mathbf{c}_k und \mathbf{s}_k :

$$\begin{aligned} \text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{c}_k) &= \text{dotP}\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot \mathbf{c}_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot \mathbf{s}_k, \mathbf{c}_k\right) \\ &= a_k \cdot \text{dotP}(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_k) \quad \text{mit } 0 \leq k \leq n \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{s}_k) &= \text{dotP}\left(\sum_{k=0}^n a_k \cdot \mathbf{c}_k + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \cdot \mathbf{s}_k, \mathbf{s}_k\right) \\ &= b_k \cdot \text{dotP}(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_k) \quad \text{mit } 1 \leq k \leq n-1 \end{aligned}$$

Weil die Listen $\mathbf{c}_0 \dots \mathbf{c}_6$ und $\mathbf{s}_1 \dots \mathbf{s}_5$ wechselseitig orthogonal sind, verschwinden alle gemischten Skalarprodukte: $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{s}_m = \mathbf{s}_k \cdot \mathbf{s}_m = 0$ für $k \neq m$ und $\mathbf{c}_k \cdot \mathbf{s}_k = 0$ für $0 \leq k \leq n$ und $1 \leq m \leq n-1$.

Für die Fourierkoeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n-1}$ erhalten wir damit:

$$a_k = \frac{\text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{c}_k)}{\text{dotP}(\mathbf{c}_k, \mathbf{c}_k)} \quad \text{mit } k = 0, \dots, n \quad \text{und}$$

$$b_k = \frac{\text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{s}_k)}{\text{dotP}(\mathbf{s}_k, \mathbf{s}_k)} \quad \text{mit } k = 1, \dots, n-1$$

3.4 Zwei Test-Beispiele

Quadierte Kosinusfunktion

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = (\cos(x))^2,$$

tasten sie im Intervall $[0, 2\pi]$ in $\pi/6$ - Schritten ab und erhalten folgende Werteliste und Fourierkoeffizienten:

$$\mathbf{f} = \left\{1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right\}$$

$$a_0 = \frac{\text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{c}_0)}{\text{dotP}(\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_0)} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{\text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{c}_1)}{\text{dotP}(\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_1)} = 0$$

$$a_2 = \frac{\text{dotP}(\mathbf{f}, \mathbf{c}_2)}{\text{dotP}(\mathbf{c}_2, \mathbf{c}_2)} = \frac{1}{2}$$

$$a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_5 = 0$$

Für die Funktion f mit $f(x) = (\cos(x))^2$ können wir damit schreiben:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 \cdot \cos(0 \cdot x) + a_1 \cdot \cos(1 \cdot x) + a_2 \cdot \cos(2 \cdot x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos(2 \cdot x) \end{aligned}$$

Dieses Resultat ist gemäß einer bekannten goniometrischen Formel identisch mit $(\cos(x))^2$.

Sägezahn-Funktion

Wir betrachten die in der Technik wichtige Sägezahnfunktion

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.5 \cdot x, & x < \pi \\ -\pi + 0.5 \cdot x, & \pi \leq x \leq 2 \cdot \pi \end{cases}$$

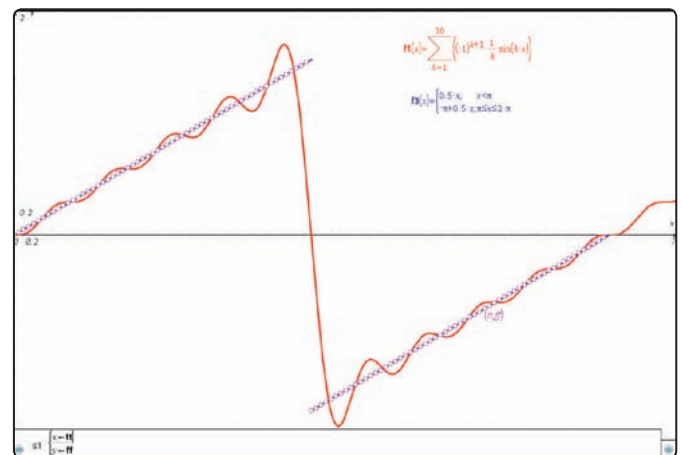


Abb. 6: Sägezahnfunktion mit 120 Abtastpunkten $f_3(x)$ und Approximation $f_1(x)$ mit 10 Fourierrgliedern

Abb.6 zeigt $f_3(x)$ mit 120 Abtastpunkten im Abstand $\pi/60$ und eine Approximation $f_1(x)$ mit 10 Fourierrgliedern.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= +\underbrace{\frac{1}{1}}_{b_1} \cdot \sin(x) - \underbrace{\frac{1}{2}}_{b_2} \cdot \sin(2 \cdot x) + \underbrace{\frac{1}{3}}_{b_3} \cdot \sin(3 \cdot x) \mp \dots \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{9}}_{b_9} \cdot \sin(9 \cdot x) - \underbrace{\frac{1}{10}}_{b_{10}} \cdot \sin(10 \cdot x) \end{aligned}$$

Abb. 7: Berechnung der Fourierkoeffizienten $b_1=0.99977$, $a_0=-0.01309$ und $a_1=0.02618$ mit dem TI-Nspire™ CAS

Der Fourierkoeffizient $a_0 = -0.01308$ gibt den „DC-Anteil“ des abgetasteten Signals **ff** an. Die nachfolgenden a -Koeffizienten haben alle abwechselungsweise die Werte $+0.02618$ und -0.02618 .

Abb.8 zeigt ein TI-Nspire™-Programm, in dem die unter 3.2 dargestellte Methode implementiert ist. Der Input-Parameter

Abb. 8: DFT-Programm auf dem TI-Nspire™ CAS (nach [1])

Als praktisches physikalisches Beispiel untersuchen wir zum Abschluss die Schwingung eines zwischen zwei Schraubenfedern aufgehängten Stabmagneten, der sich in einer Induktionsspule bewegt (Abb.9). Die elektrische Spannung, die von diesem Magneten in der Spule induziert wird, können via TI-Voltage-Probe und EasyLink-Adapter mit einem TI-Nspire™ CAS-Rechner in Funktion der Zeit direkt gemessen werden (Abb. 10).



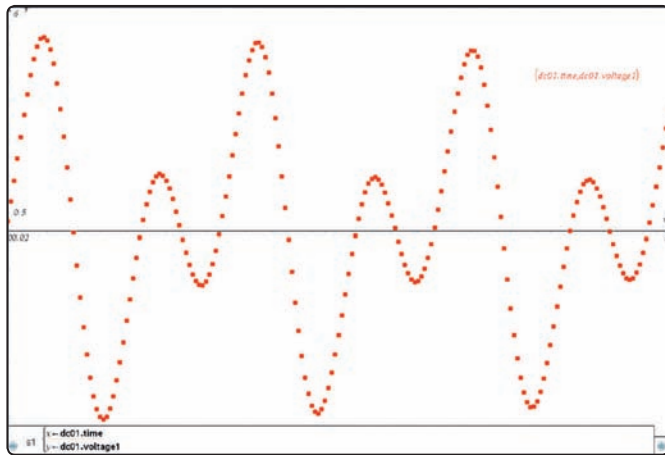


Abb. 10: Schwingung eines Induktionspendels (zwei Moden), 66 Stützstellen pro Periode (Abtastintervall von 0.005 s); exakte Periodendauer $T=0.3235$ s

Das Signal (Abb. 10) zeigt eine periodische Schwingung mit zwei „Modes“, die mit dem DFT-Programm (Abb. 8) untersucht wird. Die Messung liefert bei einem Abtastintervall von 5 ms 66 Messpunkte. Die effektive Schwindungsdauer beträgt 323.5 ms und ist damit etwas kleiner als $66 \cdot 5 \text{ ms} = 330 \text{ ms}$. Dies wird im DFT-Programm mit einem Korrekturfaktor $\text{korr} = 330/323.5 \approx 1.0201$ berücksichtigt, der bewirkt, dass die Kosinus- und Sinus-Funktionswerte ck und sk (Abb. 8) an den korrekten Stützstellen (5 ms, 10 ms, ...) berechnet werden.

Abb. 11 und 12 zeigen die mit dem DFT-Programm berechneten Leistungs- und das Phasenspektren. Die Schwingung des Induktionspendels setzt sich aus zwei Schwingungsmoden mit den Frequenzen 3.09 Hz und 6.18 Hz zusammen. Höhere Harmonische spielen kein Rolle

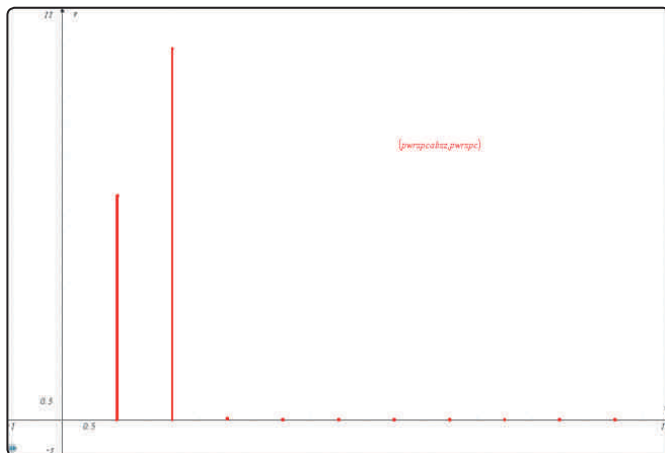


Abb. 11: Leistungsspektrum der Schwingung

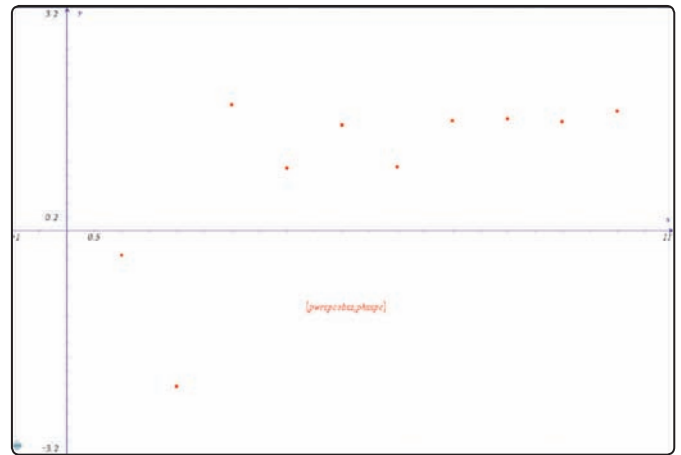


Abb. 12: Phasenspektrum der Schwingung

mehr, wie man dem Leistungsspektrum, aber auch den im Zeitbereich dargestellten Signalen (Abb. 13) entnehmen kann:

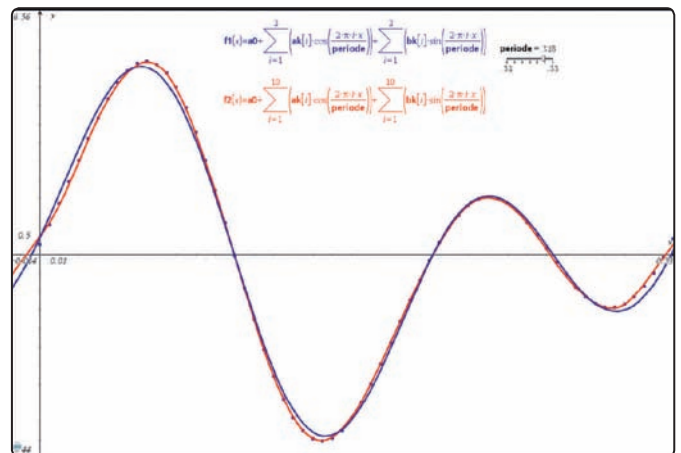


Abb. 13: Anpassung der Messung mit zwei bzw. zehn Fourierkoeffizienten

Das eigenartige und unerwartete Schwingungsverhalten des Induktionspendels mit zwei Moden deutet auf eine Nichtlinearität des schwingenden Systems hin. Die physikalischen Hintergründe sind noch unklar und werden näher untersucht.

Quelle

- [1] Schneebeli, H.R., Vollmer, H.R.: Skalarprodukte, Schwingungen, Signale, Download unter:
<http://www.swisseduc.ch/mathematik/schwingungen/>

Weiterführende Literatur

- [2] von Grünigen, D.Ch.: Digitale Signalverarbeitung, mit einer Einführung in die kontinuierlichen Signale und Systeme, Hanser, 4. Auflage (2008)
[3] von Grünigen, D.Ch.: Digitale Signalverarbeitung, Bausteine, Systeme, Anwendungen, Fotorotar Print und Media AG (2008)



Dr. Hans Kammer, Bern (CH)
hanskammer@bluewin.ch

Konfidenzintervalle und Notes

Günter Dreeßen-Meyer



Im Heft 1/11 der TI-Nachrichten stellt Benno Grabinger die Interaktivität der Notes-Seite vor. Im Unterschied zu einer starren Calculator-Seite rekalkuliert das CAS alle Berechnungen einer Notes-Seite, wenn irgendwo in einem Problem der Wert einer Variablen geändert wird. Im selben Heft beschreibt Siegfried Weiß ein gelungenes Unterrichtskonzept zum Konfidenzintervall.

Mit meinem Leistungskurs habe ich jetzt Konfidenzintervalle und deren Berechnung mit Hilfe einer graphischen Darstellung visualisiert.

Problemstellung

In einer (repräsentativen) Umfrage vor den Wahlen hat eine Partei unter $N=1268$ Befragten $H=650$ Stimmen bekommen. Wie sicher kann diese Partei sein, bei der vor der Tür stehenden Wahl die absolute Mehrheit zu erreichen?

Das Wahlverhalten ist binomialverteilt. Zurückgegriffen werden kann also auf den Erwartungswert $\mu = n \cdot p$, die Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

und die Sigma-Regeln für die Umgebungen um den Erwartungswert.

Betrachtet werden muss die folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \mu - k \cdot \sigma < h < \mu + k \cdot \sigma \\ n \cdot p - k \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} < h < n \cdot p + k \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \\ p - k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} < \frac{h}{n} < p + k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \end{aligned}$$

Legt man noch ein 68,3 % Sicherheitsintervall durch $k=1$ zugrunde, so erhält man eine Ungleichung mit der einzigen Unbekannten p .

Das CAS löst diese Ungleichung und gibt die beiden Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 als Lösung an. Sie bilden das Konfidenzintervall.

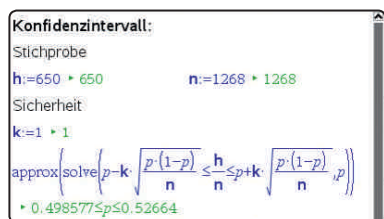


Abb. 1

Das Ergebnis entspricht den Werten, die der implementierte Befehl zur Berechnung eines Konfidenzintervalls ausgibt.

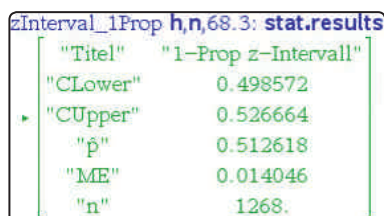


Abb. 2

Die Partei kann also auf einem 68,3% Sicherheitsniveau nicht sicher sein, dass Sie die absolute Mehrheit bei der Wahlen schaffen wird.

Betrachtet man jetzt die beiden Grenzen der Ungleichungen als Funktion von p

$$\begin{aligned} g1(p) &:= p - k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \\ g2(p) &:= p + k \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \end{aligned}$$

und stellt die beiden Funktionen in einem Graphikfenster dar, so ergeben sich beiden Bögen der Konfidenzellipse. Zeichnet man noch das Ergebnis der Stichprobe als lineare, horizontale Funktion ein, so veranschaulichen die beiden Schnittpunkte und die Strecke zwischen ihnen genau das Konfidenzintervall.

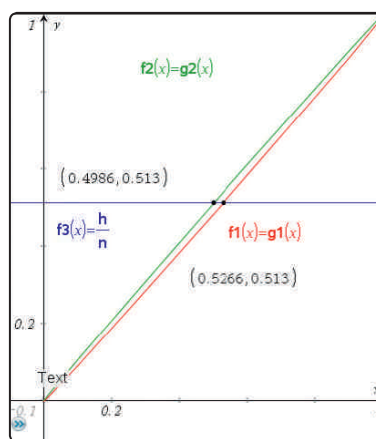


Abb. 3

Änderungen auf der Notes-Seite (Änderung der Stichprobe, Änderung von k für das Sicherheitsniveau) führen jetzt automatisch zur Veränderung der Berechnung und der graphischen Darstellung. Ist der Bildschirm genügend groß, so können die Veränderungen auf einem geteilten Bildschirm wunderbar verfolgt werden. Experimentell lassen sich dann Lösungen finden.

Hätten von den 1268 Befragten 670 angegeben, die Partei zu wählen, dann wäre es sogar auf einem 95,5%-Niveau sicher, dass die Partei die absolute Mehrheit bei der Wahl erreichen wird.

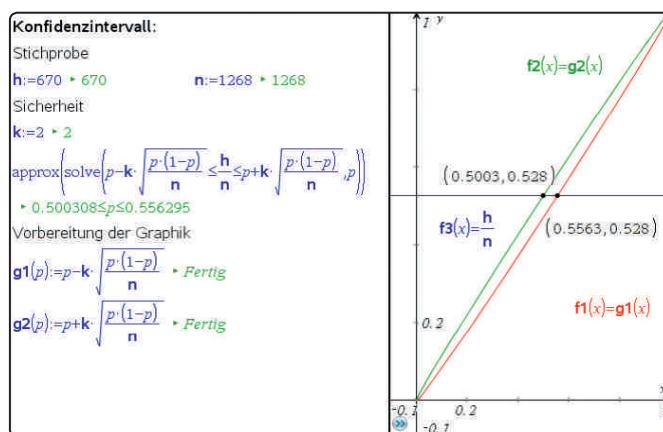


Abb. 4

Anhang:

Bei Binomialverteilungen ist häufig die Wahrscheinlichkeit von Interesse, die zu einer bestimmten $k\sigma$ -Umgebung um den Erwartungswert der Zufallsgröße gehört -- oder umgekehrt der Radius zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit:

Lässt sich z. B. zu der Intervall-Wahrscheinlichkeit von 90% der Radius mit $1,64\sigma$ errechnen?

Die Binomialverteilung lässt sich unter den bekannten Umständen (Laplace-Bedingung) durch die Normalverteilung annähern. Gearbeitet werden kann dann mit einer selbstdefinierten Gauß'schen Dichtefunktion. Das CAS errechnet den entsprechenden Faktor für die Standardabweichung über eine Integration aus (numerisch - die Gauß-Funktion besitzt keine Stammfunktion).

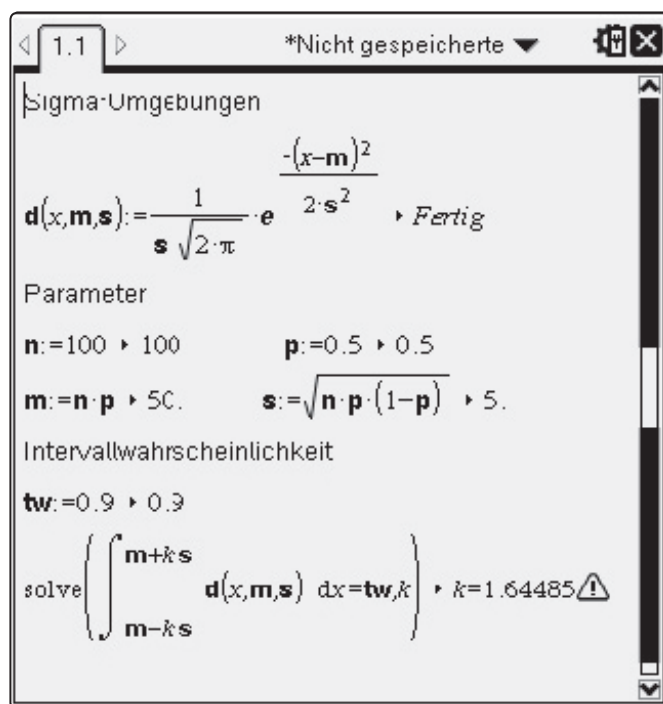


Abb. 5

Visualisieren lässt sich der Zusammenhang mit Hilfe der implementierten Funktion normCdf. Als Funktionsvariable wird das Vielfache k von σ genommen. Die y-Koordinate des Punktes auf dem Graphen wird mit der Intervallwahrscheinlichkeit tw verknüpft. Die x-Koordinate ist dann der gesuchte Faktor k . Dieser wird zur weiteren Verwendung unter der Variablen c gespeichert.

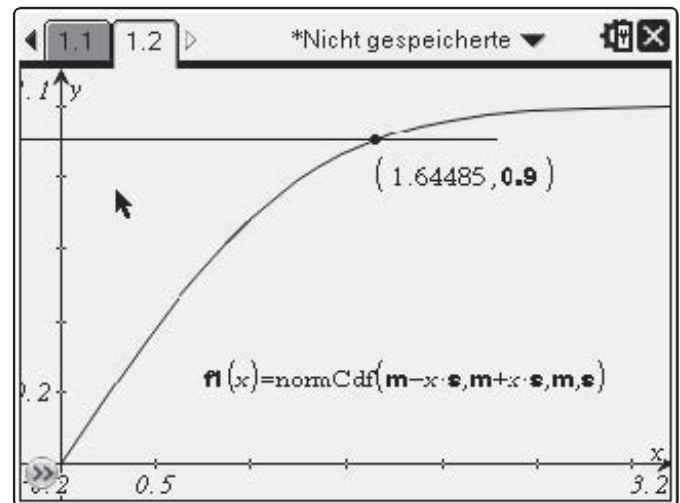


Abb. 6

Zur Kontrolle wird jetzt noch auf einer weiteren Graphik-Seite die Gauß'sche Verteilungsfunktion dargestellt. Die Integralgrenzen werden auf der Notes-Seite definiert und mit zwei Punkten auf der x-Achse verknüpft.

Durch Integration wird die Trefferwahrscheinlichkeit dann für den errechneten Radius bestätigt.

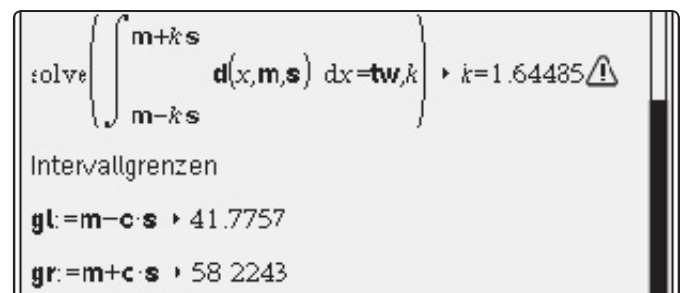


Abb. 7

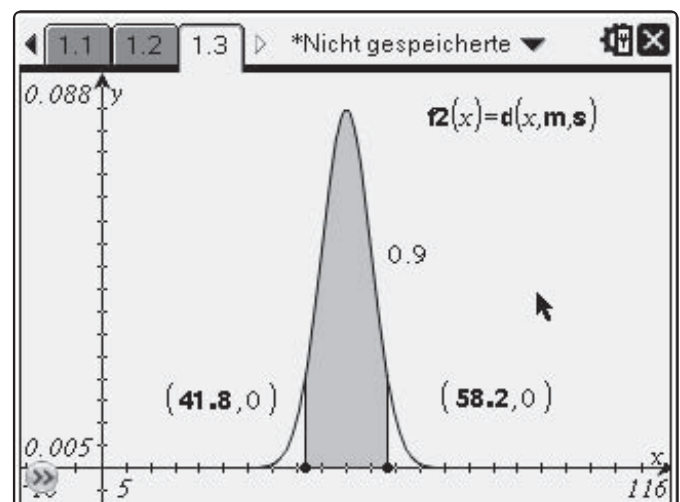


Abb. 8

Autor:

Günter Dreeßen-Meyer, Berlin (D)
G.Dreessen-Meyer@gmx.de

Welche Klasse ist besser geworden?

Mit Streudiagrammen den Lernfortschritt vergleichen

Dr. Guido Pinkernell



Mathematische Diagramme problemorientiert

Bei großen Mengen an Zahlen und Daten verliert man schnell den Überblick. Graphische Darstellungsformen helfen, die wesentlichen Informationen eines Datensatzes auf den ersten Blick zu erfassen oder zumindest abschätzen zu können. Gleich zwei Kompetenzen in den Bildungsstandards weisen auf die zentrale Bedeutung der graphischen Informationsübermittlung für die Mathematik hin, nämlich die Kompetenz "Mathematische Darstellungen verwenden" (K4) und in weiterem Sinne "Kommunizieren" (K6).

Kreisdiagramme, Histogramme bzw. Säulendiagramme, vielleicht auch Boxplots sind zur Darstellung von Daten weithin bekannt. Ihre Erstellung und Anwendung wird im Mathematikunterricht geübt, und bald - so darf man erwarten - ist den Schülerinnen und Schülern der Umgang mit ihnen vertraut. Dabei gibt es auch für die Kompetenz K4 ebenso wie für alle anderen Kompetenzen auch einen Anforderungsbereich III, wo es für K4 heißt: Die Schülerinnen und Schüler können "nicht vertraute Darstellungen lesen und ihre Aussagekraft beurteilen." Also auch beim Umgang mit mathematischen Darstellungsformen gilt es, ein gewisses Maß an Problemorientierung im Blick zu haben und auch mal solche Visualisierungsformen zu verwenden, deren routinierte Interpretation man nicht voraussetzen kann und die auch gar nicht intendiert ist.

Streudiagramme erkunden: Welche Klasse ist besser?

Im folgenden Beispiel wird ein solcher Versuch gemacht. Die dargestellten Daten entstammen einem Forschungsprojekt an der TU Darmstadt, in dem Schülerinnen und Schüler aus verschiedenen Lerngruppen im Abstand mehrerer Monate zwei Mathematiktests bearbeitet haben. Im Anschluss an die zweite Testdurchführung galt es, den Beteiligten eine möglichst kurze, aber aussagekräftige Rückmeldung zu geben: Wie haben die Schüler einer Lerngruppe jeweils abgeschnitten? Wie war ihr Lernfortschritt? Wie hat sich die Lerngruppe insgesamt entwickelt? Das kann man mit langen Datentabellen gut wiedergeben, aber uns ging es um eine graphische Darstellung der Schülerergebnisse: übersichtlich und ohne viel Informationsverlust.

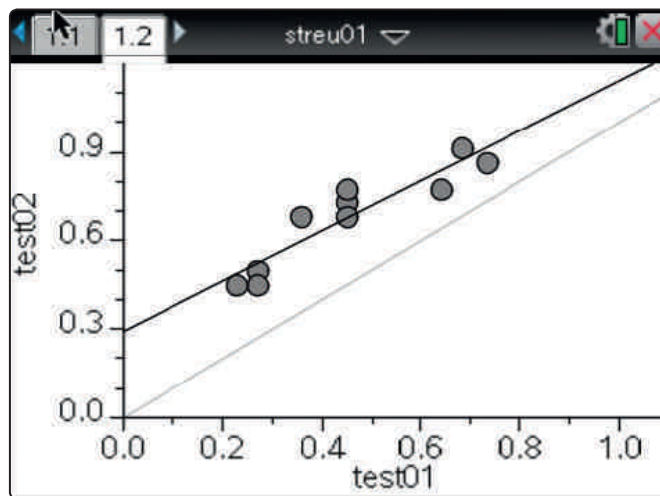


Abb. 1

Mithilfe eines Streudiagramms ist das Gewünschte gut zu realisieren. Die zwei "Noten" jedes einzelnen Schülers in beiden Tests werden auf die zwei Achsen eines Koordinatensystems abgelegt. Es entsteht eine Punktwolke, in der jeder Punkt einen Schüler repräsentiert (Vgl. Abb. 1). Die Regressionsgerade und die Winkelhalbierende werden hinzugefügt, und so lassen sich Aussagen machen über die Testleistungen der einzelnen Schüler und der Lerngruppe insgesamt. Interessanter noch wird es, wenn man die Streudiagramme weiterer Lerngruppen zum Vergleich heranzieht: Welcher Kurs ist besser geworden? Welcher Kurs ist besser als andere besser geworden?

Wir hatten der Rückmeldung für die am Test beteiligten Schülerinnen und Schüler auch gleich passendes Arbeitsmaterial beigelegt. Aufgabe war es, die eigenen Leistungen und die der eigenen Lerngruppe mit den Leistungen anderer Schüler bzw. Lerngruppen zu vergleichen, und zwar auf Grundlage ausgewählter Streudiagramme. Hierzu mussten sie Vergleichskriterien entwickeln, was wiederum bedeutete, dass man sich - ganz im Sinne der Bildungsstandards und ihrem Anforderungsbereich III für die Kompetenz K4 - den Informationsgehalt dieser ungewohnten Darstellungsform erst erarbeiten mussten.

Und wie geht das mit dem TI-Nspire™?

Vermutlich haben Sie die Noten Ihrer Lerngruppe in einer Tabellenkalkulation gespeichert. Am einfachsten ist der Datentransfer in die PC-Software des TI-Nspire™ per "Copy & Paste":

1. Öffnen Sie die Notendaten in Ihrer Tabellenkalkulation. Wenn diese Noten als Dezimalzahlen gespeichert sind, dann achten Sie darauf, dass das Zellenformat einen Punkt als Dezimaltrenner vorsieht, denn die TI-Nspire™-Software verlangt dies so. Ggf. ändern Sie das Zellenformat entsprechend, indem Sie alle Zellen markieren, die Noten enthalten, und im Kontextmenü (Rechtsklick mit der Maus) den Eintrag "Zellenformat" (o.ä.) auswählen.
2. Öffnen Sie in Ihrem TI-Nspire™ eine Datentabelle (List & Spreadsheet).

Informationen zum Lehrerfortbildungsprojekt T³ finden Sie unter:

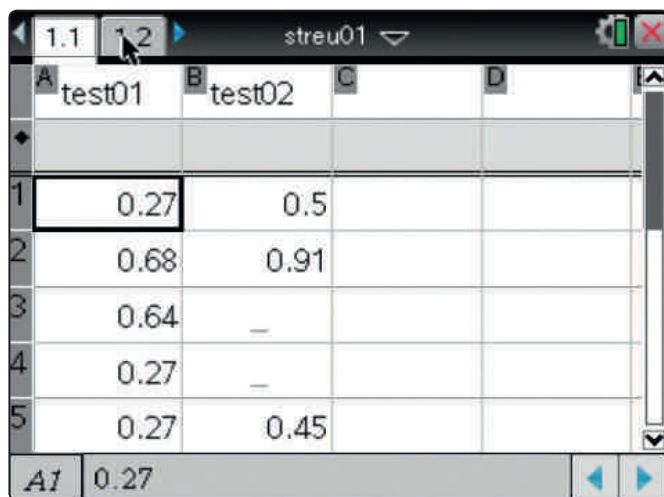
www.t3deutschland.de

www.t3oesterreich.at

www.t3schweiz.ch

- Kopieren Sie den ersten Notensatz aus Ihrer Tabellenkalkulation (Ctrl-C) und fügen Sie sie in die Tabelle Ihres TI-Nspire™ ein (Ctrl-V). Geben Sie dieser Spalte einen Namen, indem Sie im Tabellenkopf z.B. test01 eingeben.

Falls einige Schüler im ersten oder zweiten Test nicht mitgeschrieben haben, macht das nichts. Fehlende Daten werden durch einen Unterstrich eingetragen (Abb.2). Dieser Datensatz wird dann beim Plotten nicht berücksichtigt.



	test01	test02
1	0.27	0.5
2	0.68	0.91
3	0.64	-
4	0.27	-
5	0.27	0.45

Abb. 2

- Wiederholen Sie den Schritt 3 mit den Daten des zweiten Tests. Die hinzukommende zweite Spalte benennen Sie z.B. test02.
- Öffnen Sie in Ihrer TI-Nspire™-Software eine weitere Seite, jetzt mit einem Statistikfenster ("Data & Statistics"). Wenn das gewünschte Streudiagramm nicht schon automatisch erstellt worden ist, dann wählen Sie die jeweils passende Variable test01 bzw. test02 durch Klick auf die Koordinatenachsen aus.

Lassen Sie sich von dieser Unterrichtsidee inspirieren. Verwenden Sie Klausur- oder Klassenarbeitsergebnisse Ihrer eigenen Lerngruppen. Zum Beispiel, indem der Lernfortschritt zwischen zwei aufeinander folgenden Lernkontrollen verglichen werden. Vielleicht finden in Ihrer Schule regelmäßige jahrgangswerte Vergleichsarbeiten statt? Dann können Sie die Ergebnisse weiterer Lerngruppen in die Analyse mit einbeziehen.

Anlage

Jede Abbildung (s. Abb. 3 bis Abb. 7) zeigt die Ergebnisse einer Lerngruppe in zwei gleichwertigen mathematischen Grundwissenstests test01 und test02, die in einem etwa viermonatigen Abstand geschrieben wurden. Jede Skala zeigt den Erfüllungsgrad, d.h. den relativen Anteil der richtig bearbeiteten Aufgaben an der Gesamtzahl aller Aufgaben. Jeder Kringel repräsentiert einen Schüler oder mehrere Schüler mit identischen Erfüllungsgraden in Vor- und Nachtest. Die gestrichelte Linie ist offensichtlich die erste Winkelhalbierende des Achsenkreuzes.

Die fette Linie ist die Ausgleichsgerade aller Datenpunkte, man kann sie auch umschreiben als die Gerade, zu der die Datenpunkte den geringsten Abstand haben.

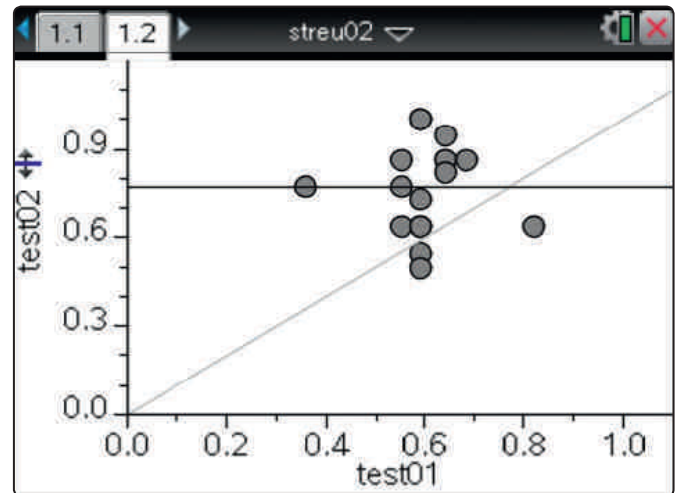


Abb. 3

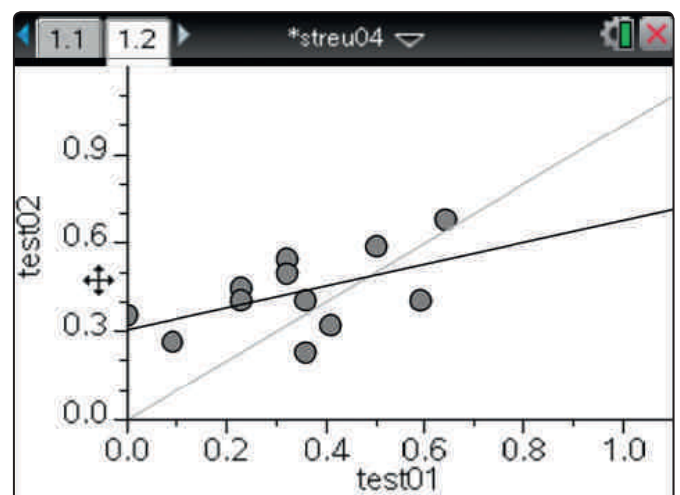


Abb. 4

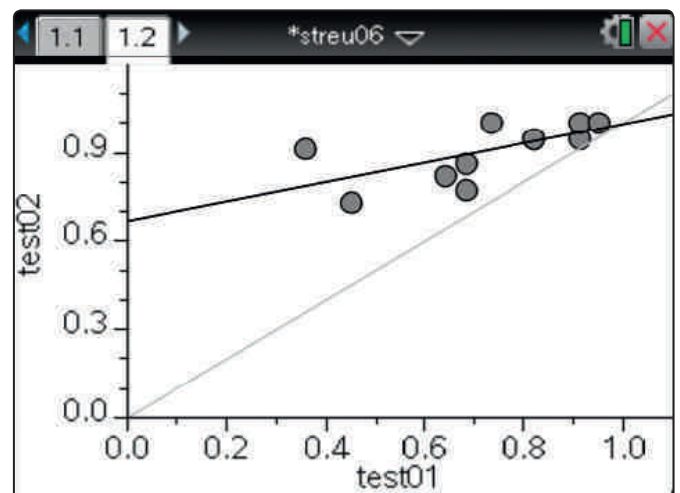


Abb. 5

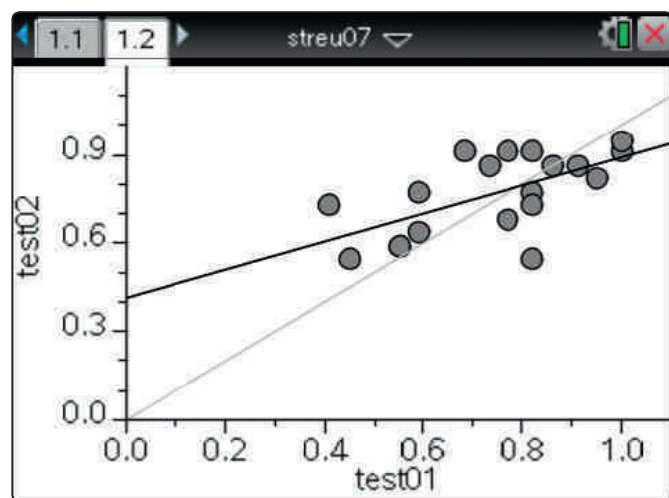


Abb. 6

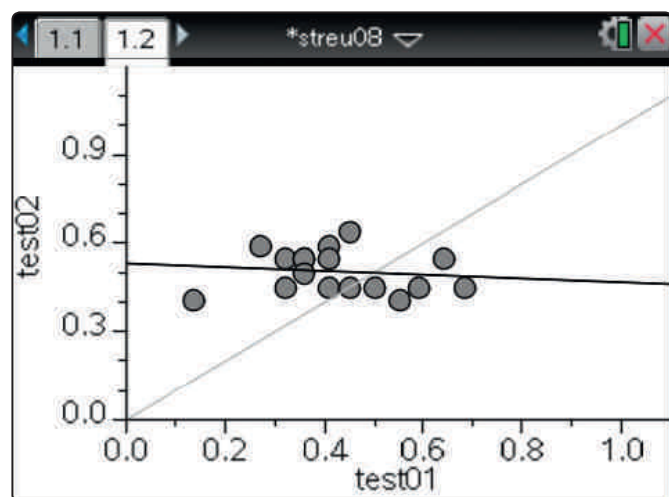


Abb. 7

Mögliche (sich ergänzende oder alternative) Aufgabenstellungen:

Beschreiben Sie die Bedeutung der Position eines Datenpunkts für die Testergebnisse des zugehörigen Schülers.

Interpretieren Sie die Steigung der Ausgleichsgeraden bzgl. des Leistungsvermögens der Lerngruppe, wie dieses sich in den Testergebnissen ausdrückt.

Sortieren Sie die Abbildungen nach selbstgewählten Kriterien (Lage der Ausgleichsgerade, Anzahl der Datenpunkte unterhalb der Winkelhalbierenden, ...) und beschreiben Sie die typischen Eigenschaften jeder Gruppe.

Sortieren Sie die Lerngruppen hinsichtlich ihres Leistungsvermögens. Machen Sie dabei deutlich, was für Sie die wesentlichen Kriterien für "hohes Leistungsvermögen" sind und wie diese sich in den Graphiken ausdrücken.

Autor:

Dr. Guido Pinkernell, Bensheim (D)
pinkernell@mathematik.tu-darmstadt.de

(Noch) mehr Leistung für Ihren Rechner – mit dem aktuellen Betriebssystem

Aktualisieren Sie Ihren Rechner mit der neuesten Version des Betriebssystems. Nutzen Sie die kostenlose Upgrade-Möglichkeit auf den TI-Webseiten im Bereich „Downloads“.

Graphikrechnermodell	Aktuelle Betriebssystem-Version
TI-83 Plus	1.19
TI-84 Plus/TI-84 Plus Silver Edition	2.55 MP
TI-89 Titanium	3.10
Voyage™ 200	3.10
TI-Nspire™	3.10
TI-Nspire™ CAS	3.10

Sonnenblumen-Mathematik

Dr. Alfred Roulier

Neu können mit der TI-Nspire™ Software ab der Version 3.0 auch Dokumente erstellt werden, die nebst Textfeldern, Bildern und Videos selbstverständlich auch alle unterschiedlichen Applikationen von TI-Nspire™ enthalten können. Diese PublishView-Dokumente eignen sich zur besseren Dokumentation der mathematischen Aufgaben/Artikel, werden in einem eigenen Format (tnsp) abgespeichert und können selbstverständlich auch ausgedruckt und in Papierform abgelegt werden.

Speziell interessant ist jedoch auch die Möglichkeit, dass diese Dokumente, ohne TI-Nspire™ Software im Hintergrund, sich mit dem Document-Player beispielsweise auf der TI-Website öffnen lassen. Dabei können Interaktionen ausgeführt werden ohne dass jedoch das ursprüngliche Dokument verändert werden kann. Per Schaltknopf kann auch jederzeit die ursprüngliche Ausgangssituation wieder hergestellt werden. Das nachfolgende Beispiel im Format eines PublishView-Dokuments (incl. Textfelder, Bilder und des Videos) finden Sie auf der TI-Materialdatenbank.

Thema: Sonnenblumen-Mathematik

Im Blütenstand der Sonnenblume sind die Kerne in logarithmischen Spiralen angeordnet – warum? Häufig zählt man 34 rechtsläufige und 55 linksläufige – warum? Dahinter steckt der „goldene Schnitt“ – wie und wo?

Kleine Blütenstände enthalten 21 rechts- und 34 linksläufige Kern-Spiralen, mittelgrosse 34 und 55 und grosse sogar 55 und 89. Diese Zahlen sind Elemente der Fibonacci-Folge.

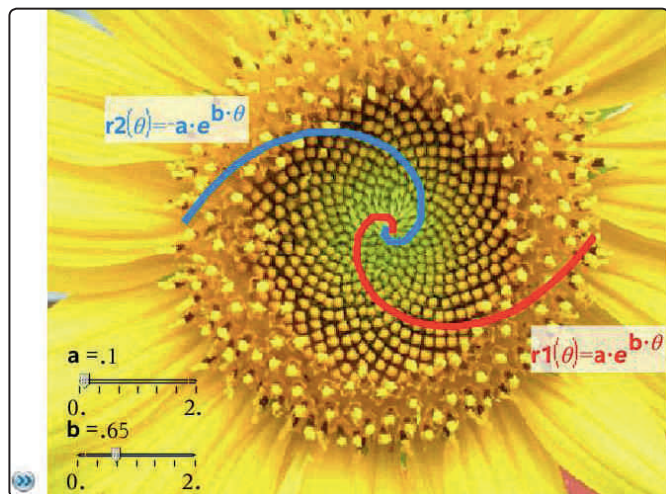


Abb. 1

In der TI-Materialdatenbank findet sich zu dieser Folge eine ausführliche Abhandlung von René Hugelshofer. Der Grenzwertquotient zweier aufeinanderfolgenden Fibonacci-Zahlen strebt nach $\phi = 1.618$, dem sog. Goldenen Schnitt. Unter dem „goldenen Winkel“ versteht man den Winkel $\alpha = 360 - 360/\phi = 137.51$ Grad.

Phyllotaxis

Ein Blick in die Phyllotaxis, d.h. in die Lehre von der Blattstellung zeigt, wie die Natur diese Gesetzmässigkeit erzeugt:

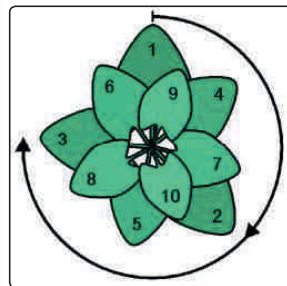


Abb. 2

Die Spitze (Apex) der Sonnenblume produziert sukzessive Blattaustriebe währenddem der Stengel wächst. (Abbildung 2 aus Wikipedia zum Stichwort „Phyllotaxis“)

Didier Reinhardt et al. von der Universität Fribourg haben entdeckt, dass es das Hormon Auxin ist, das dafür sorgt, dass sich die Blätter spiralförmig alle n Grad ausbilden. Die Evolution hat zum Winkel $n=137.5$ Grad geführt; denn so stellt die Pflanze sicher, dass sich die Blätter nicht gegenseitig beschatten. Die Autoren haben dazu auch eine Computeranimation erstellt (nature 426, p 255-260). Das Video ist Bestandteil des TI-Nspire™ PublishView-Dokuments auf der TI-Materialdatenbank.

Simulation

In einem kleinen Programm **sblume(winkel, zuwachs, anzahl)** werden in einer Schleife von *anzahl* Schritten sukzessive die x- und y-Koordinaten der Kerne berechnet, wobei jeweils der nächste Kern inbezug auf den Nullpunkt um den Betrag *zuwachs* weiter entfernt liegt und um den Winkel *winkel* im Gegenuhrzeigersinn weiter gedreht ist. Also:

$$\begin{aligned}x_i &= r_0 + (i-1) \cdot \text{zuwachs} \cdot \cos((i-1) \cdot \text{winkel}), \\y_i &= r_0 + (i-1) \cdot \text{zuwachs} \cdot \sin((i-1) \cdot \text{winkel})\end{aligned}$$

Wenn 1000 Kerne gesetzt werden, entstehen tatsächlich 34 rechts- und 55 linksläufige Spiralen.

Durch leichte Variation der Variablen *winkel* verändert sich das Bild im Streuplot sofort. Das „Sonnenblumenbild“ entsteht nur im schmalen Bereich von $137.5 \pm 0.5^\circ$.

```
sblume 7/7
Define sblume(winkel,zuwachs,anzahl)=
Prgm
Local i
DelVar x,y
r0:=0.5
For i,1,anzahl
x[i]:=(r0+(i-1)*zuwachs)*cos((i-1)*winkel)
y[i]:=(r0+(i-1)*zuwachs)*sin((i-1)*winkel)
EndFor
EndPrgm
```

Abb. 3

Durch Variieren der Schieberegler-Variablen *winkel*, *zuwachs* und *anzahl* wird die Funktion *sblume* in der Notes-Applikation jeweils ausgeführt

sblume(winkel,zuwachs,anzahl) ▶ Done

und dadurch die Graphik entsprechend angepasst.

Wird das Dokument *sonnenblume.tnsp* im Dokument-Player geöffnet, so können die logarithmischen Spiralen (vgl. Abb. 1) über die Schieberegler-Variablen *a* und *b* variiert, das integrierte Video abgespielt oder Variationen der "Sonnenblumenbilder" über die Schieberegler-Variablen *winkel*, *zuwachs* und *anzahl* erzeugt werden:

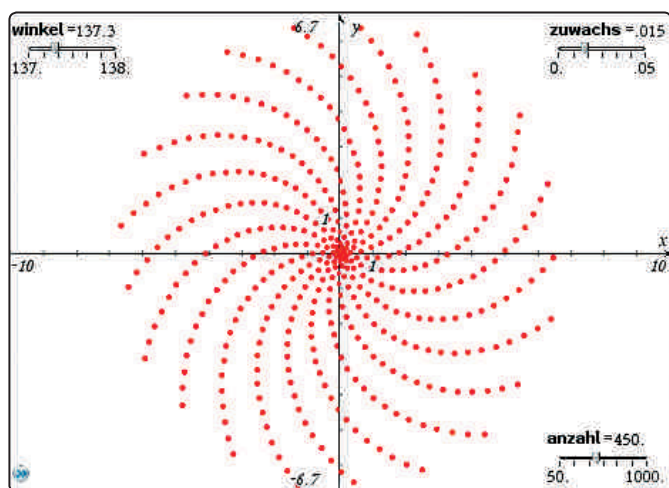


Abb. 4

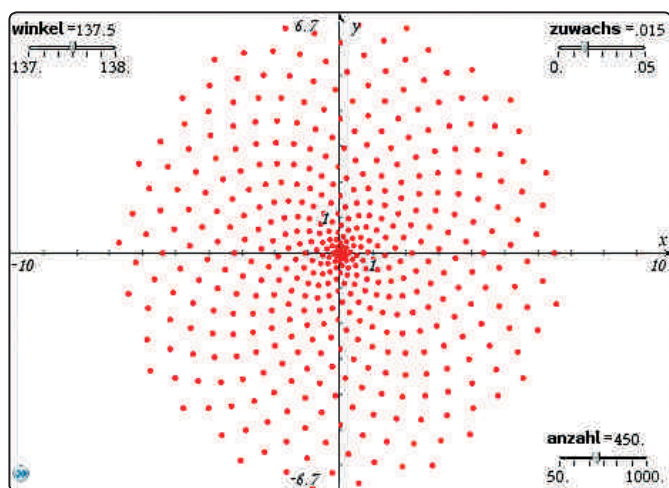


Abb. 5

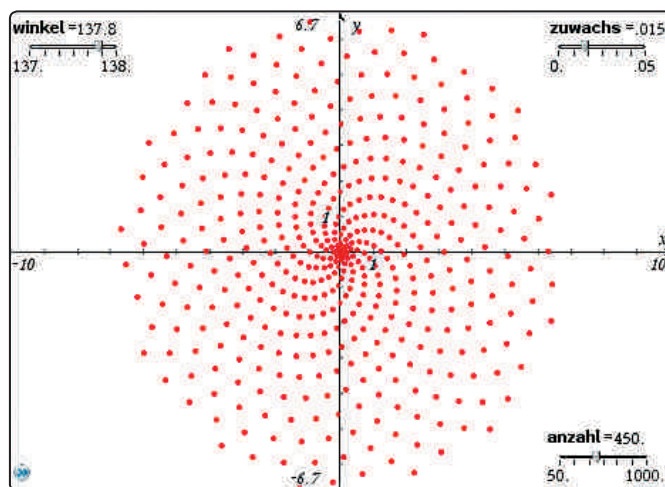


Abb. 6

Dr. Alfred Roulier, Neuenegg (CH)

a.roulier@bluwin.ch

Beilagen:

Das TI-Nspire™ PublishView-Dokument (*tnsp*) Sonnenblume finden Sie auf der TI-Materialiendatenbank.

Weitere Informationen zum TI-Nspire™ Document Player erhalten Sie auf der TI-Website. Hier finden Sie auch einen Vergleich mit der Voll-Version der TI-Nspire™ Software, die Ihnen natürlich viele weitere Möglichkeiten für Ihren Unterricht bietet:

education.ti.com/calculators/products/DEUTSCHLAND/document-player/

Hinweis:


In der letzten Ausgabe (1/2011) wurden im Artikel von A. Roulier aus technischen Gründen leider die Formeln nicht abgedruckt.

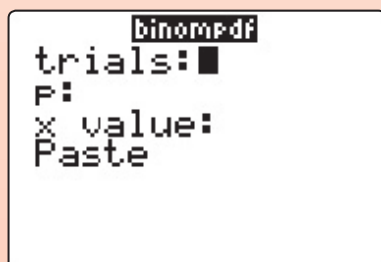
Der korrigierte Artikel kann von der TI-Materialdatenbank herunter geladen werden.

Tipps und Tricks

Schon bemerkt? Neues unter 2.55MP

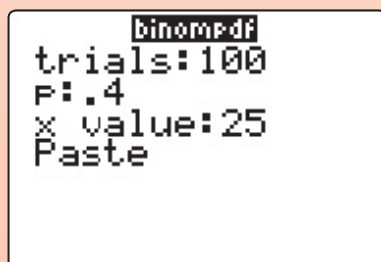
Katrin Eilers

 Das aktuelle Betriebssystem 2.55MP zum TI-84 Plus ermöglicht eine neue (vereinfachte) Eingabe der Befehle im Bereich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Bisher war es notwendig sich die Reihenfolge der Variablen für die Eingabe von Befehlen wie „binompdf“ entweder zu merken, ein Handbuch griffbereit oder CatalogHelp installiert zu haben. Die hat sich nun geändert (Abb.1). Wählt man den Befehl „binompdf“ so erfolgt eine Abfrage nach der Anzahl der Versuche, der Eintrittswahrscheinlichkeit und optional die Anzahl der Treffer. Bestätigt man die Eingabe mit PASTE, so erscheint der gewohnte Ausdruck im Hauptbildschirm bzw. im Ausgangsbildschirm. Ähnliches gilt für weitere Befehle im Bereich der Wahrscheinlichkeitsverteilungen. Allerdings erhält man diese Ansicht nur, wenn der Befehl über DISTR aufgerufen wird. Sucht man sich den Befehl aus dem CATALOG, so erscheint die bisher bekannte Ansicht.



```
binompdf
trials:
P:
x value:
Paste
```

Abb. 1



```
binompdf
trials:100
P:.4
x value:25
Paste
```

Abb. 2



```
invNorm
area:.95
μ:0
σ:1
Paste
```

Abb. 3

Bei der Verwendung der Regressionsmodelle (Unter STAT und CALC) erscheinen nun auch neue Ansichten (Abb.4 am Beispiel der Linearen Regression). In dem gezeigten Beispiel sind die für die Regression benötigten Daten in den Listen L_1 und L_2 gespeichert. Soll die ermittelte Funktion direkt unter $Y=$ gespeichert werden, so fügt man das gewünschte Y unter Store RegEQ ein (in Abb.5 erfolgt dies über das „neue“ Menü). Dieser Dialog betrifft auch die anderen Regressionsmodelle.



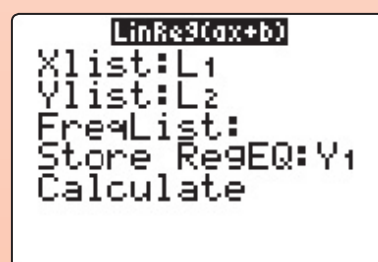
```
LinReg(ax+b)
Xlist:L1
Ylist:L2
FreqList:
Store RegEQ:
Calculate
```

Abb. 4



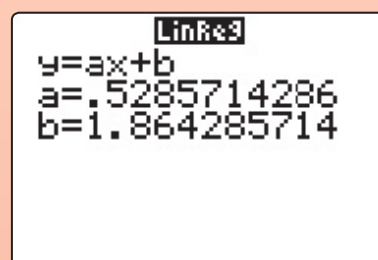
```
LinReg(ax+b)
Xlist:L1
Ylist:L2
FreqList:
Store RegEQ:Y1
Calculate
[FRAC][FUNC][MATH][YVAR]
```

Abb. 5



```
LinReg(ax+b)
Xlist:L1
Ylist:L2
FreqList:
Store RegEQ:Y1
Calculate
```

Abb. 6



```
LinReg
y=ax+b
a=.5285714286
b=1.864285714
```

Abb. 7

Autor:

Katrin Eilers, Hannover (D)
keilers@vr-web.de

Service auf einen Blick

Innovative Technologie

Dank der Technologie unserer aktuellen Graphikrechner TI-84 Plus, TI-84 Plus Silver Edition, TI-89 Titanium, Voyage™ 200, TI-Nspire™ (mit Touchpad), TI-Nspire™ CAS (mit Touchpad) und den neuen TI-Nspire™ CX Modellen können Sie die bestehenden Fähigkeiten der Rechner durch Herunterladen zusätzlicher Applikationen und/oder Upgrades erweitern und Ihren persönlichen Wünschen anpassen. Damit halten Sie sich alle Optionen für die Zukunft offen.

Kostenlose Ausleihe

Sie möchten einen TI-Graphikrechner oder ein Computeralgebrasystem testen? – Kein Problem! Wir leihen Ihnen Einzel-exemplare oder Klassensätze bis zu vier Wochen – kostenlos und unverbindlich!

Unterrichtsmaterialien

Neben den „TI-Nachrichten“ gibt es eine Fülle von begleitenden Unterrichtsmaterialien zum Einsatz unserer Produkte – insbesondere auch von Schulbuchverlagen, hier eine Auswahl von TI und T³:

- **CuBaLibra:** Einfache, gut strukturierte Aufgaben: Stoff für eine Unterrichtsstunde.
- **MMM:** Kurze Beispiele für alltäglich benötigte Veranschaulichungen, die Umsetzung wird mittels Kurzvideos erklärt.
- **T³ Akzente:** Aufgaben mittlerer Komplexität mit Schülerarbeitsblättern und didaktischen Hinweisen.

Mehr Informationen, kostenlose Downloads sowie die Anmeldemöglichkeit zum E-Newsletter „TI-Materialien“ finden Sie auf den TI-Webseiten oder unter: www.ti-unterrichtsmaterialien.net

Lehrerfortbildungen

Graphikrechner und CAS sind für viele Kolleginnen und Kollegen neu und unbekannt. Wir helfen Ihnen mit Fortbildungen an Ihrer Schule oder auf Veranstaltungen! Wenden Sie sich direkt an T³. Mehr Informationen zu T³ finden Sie im Internet:

T³ Deutschland: www.t3deutschland.de

T³ Österreich: www.t3oesterreich.at

T³ Schweiz: www.t3schweiz.ch

Oder kontaktieren Sie Ihren TI-Schulberater sowie unser Customer Service Team.

Praktische Präsentationsmöglichkeiten

Projizieren Sie das Display der Lehrerversion Ihres TI-Graphikrechners mit ViewScreen™, Overheadprojektor, Beamer oder auch am Whiteboard.

Flexible Verbindungsmöglichkeiten

Die Verbindungskabel zu den TI-Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen ermöglichen eine schnelle und stabile Verbindung zum PC oder Mac.

Unkomplizierte Messwerterfassung

Portable, universell einsetzbare Messwerterfassungssysteme für den naturwissenschaftlichen Unterricht. Verschiedene Sensoren erhältlich.

Allgemeine Informationen

Nehmen Sie mit unserem Customer Service Center Kontakt auf, wenn Sie technische Auskünfte benötigen oder Fragen zum Gebrauch unserer Rechner oder bezüglich einer Lehrerfortbildung haben. Auch zum Ausleihen der Rechner ist das CSC die erste Adresse:

Wir sind für Sie da:



Texas Instruments

Customer Service Center

Tel: 00 800-48 42 27 37 (Anruf kostenlos)

Fax: 00 420-2 26 22 17 99

Allgemeine Informationen:

ti-cares@ti.com

Kostenlose Ausleihe von Graphikrechnern und Computeralgebrasystemen:

ti-loan@ti.com

Kostenloses Abonnement der TI-Nachrichten:

ti-nachrichten@ti.com

Garantie

Auf alle Graphikrechner und Computeralgebrasysteme von Texas Instruments bietet Texas Instruments 3 Jahre Herstellergarantie. Sollte doch einmal etwas defekt sein, rufen Sie bitte zunächst unser Customer Service Center an. Oft kann das Problem bereits am Telefon behoben werden.

education.ti.com/deutschland • education.ti.com/oesterreich • education.ti.com/schweiz
ti-cares@ti.com