Eine Ortskurve des Schnittpunkts der Winkelhalbierenden eines Dreiecks

Wilfried Zappe,
Wolfgang Moldenhauer,
Sonnhard Graubner

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Der Punkt C bewege sich auf einer Parallelen zur Seite c.

Relativ leicht zugänglich und analytisch recht einfach beschreibbar sind die Ortkurven der Schnittpunkte der Seitenhalbierenden, der Mittelsenkrechten oder der Höhen dieses Dreiecks. Wie kann man die Ortskurve des Schnittpunktes W der Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC ermitteln?

Eine qualitative Untersuchung mit einer dynamischen Geometriesoftware (hier realisiert mit Cabri Geometre auf dem Voyage™200) ist genau so leicht wie bei den anderen oben genannten besonderen Punkten des Dreiecks.

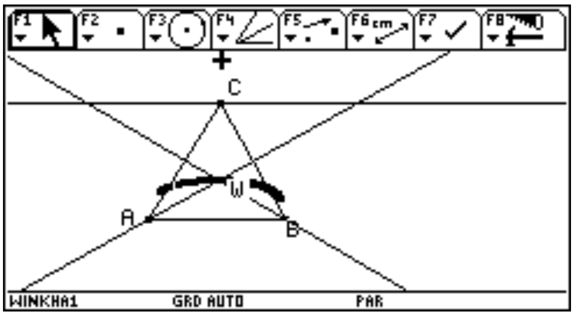

Abb. 1

Es stellt sich die Frage, wie die Ortskurve des Punktes W analytisch beschrieben werden kann. Im Folgenden wird eine Antwort auf diese Frage gegeben, für deren Untersuchung der Voyage™200 sehr hilfreich ist.

O. B. d. A. sei ein kartesisches Koordinatensystem so gelegt, dass die Punkte A, B und C durch $A(0|0)$, $B(1|0)$ und $C(t|1)$ mit $t \in \mathbb{R}$ beschrieben werden können. Die Winkelhalbierenden werden in Parameterform angegeben. Ihre Richtungsvektoren ergeben sich aus der Addition der zugehörigen normierten Seitenvektoren.

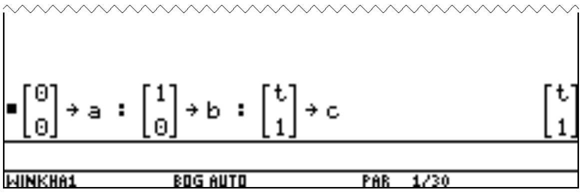

Abb. 2

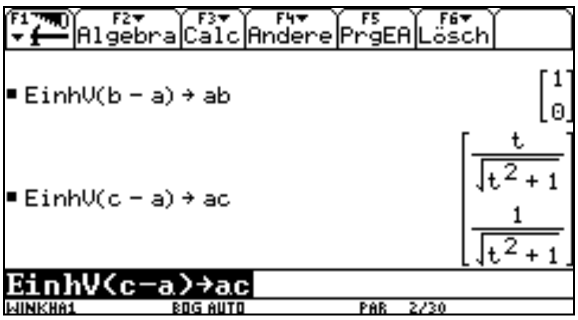

Abb.3

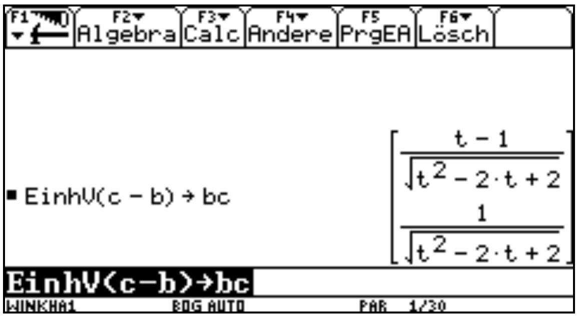

Abb. 4

Damit lassen sich folgende Gleichungen der Winkelhalbierenden definieren:

$$w_\alpha \to g(r) \text{ bzw. } w_\beta \to h(s)$$

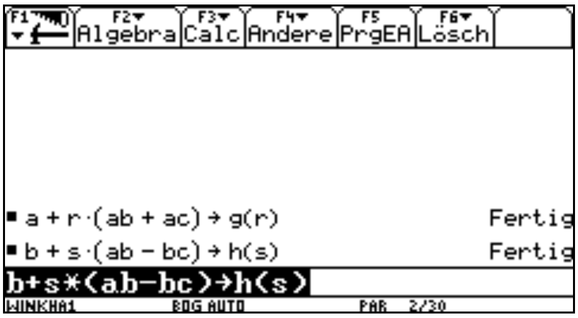

Abb. 5

Der Schnittpunkt W dieser Winkelhalbierenden lässt sich nun leicht berechnen:

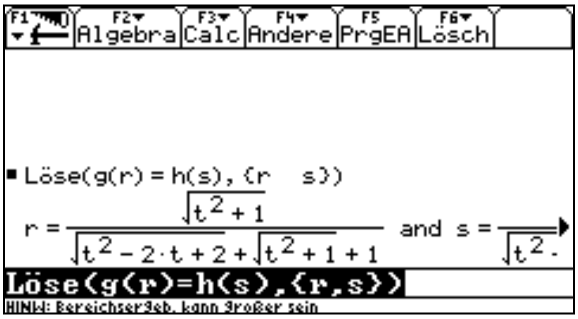

Abb. 6

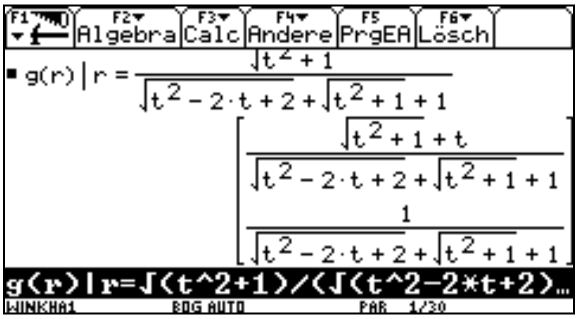

Abb. 7

Dieser Ortsvektor wird unter dem Namen `ortw(t)` gespeichert. Damit ist bereits eine analytische Beschreibung der Ortskurve von W gegeben.

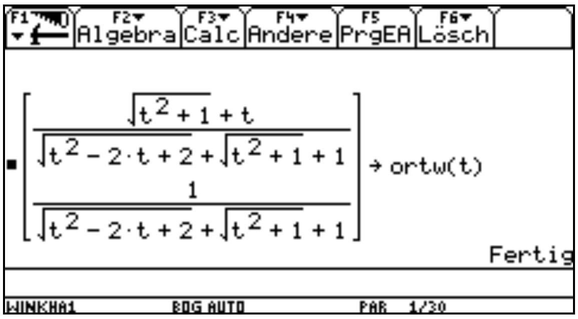

Abb. 8

Zur Kontrolle wird die Ortskurve mit Hilfe der Parameterdarstellung visualisiert. Dazu werden die x-Koordinate bzw. die y-Koordinate von `ortw(t)` unter den Namen `ortx(t)` bzw. `orty(t)` gespeichert.

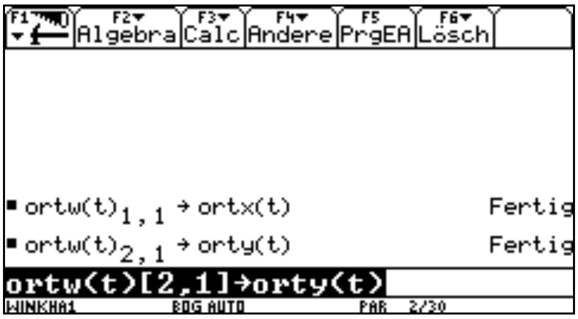

Abb. 9

Abb. 10

Nun wird die Ortskurve gezeichnet.

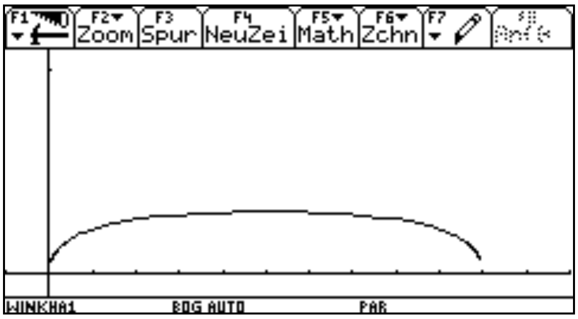

Abb. 11

Die Ortskurve sieht wie eine Ellipse aus. Dies wird nun überprüft.

Die Kurve mündet am linken Ende im Ursprung ein und am rechten Ende in B(1|0). Dies war ja auch von den geometrischen Gegebenheiten her zu erwarten.

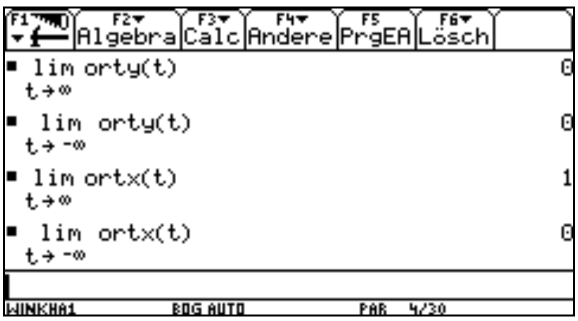

Abb. 12

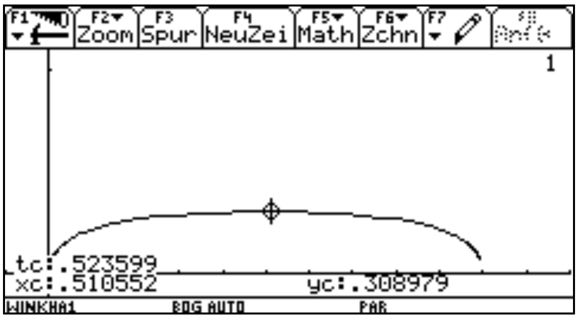

Abb. 13

Wenn eine Ellipse vorläge, müsste sie die kleine Halbachse

$$b=\frac{1}{4}\cdot\left(\sqrt{5}-1\right)\approx 0,31$$

und die große a = 0,5 haben, sowie um 0,5 nach rechts verschoben sein. Ihre Gleichung wäre

$$\frac{(x-0,5)^2}{0,5^2}+\frac{y^2}{0,31^2}=1.$$

Diese Gleichung wird nach y (y > 0) umgestellt und der zugehörige Graph gemeinsam mit der Ortskurve dargestellt.

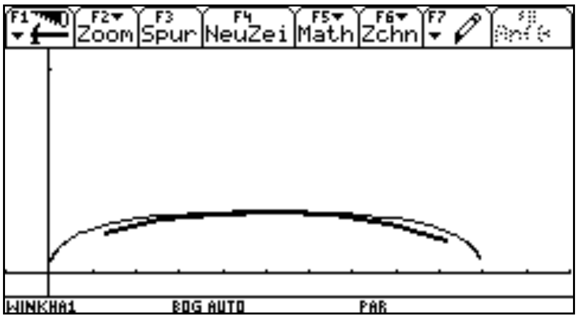

Abb. 14

Es ist keine Übereinstimmung zu erkennen, vermutlich liegt keine Ellipse vor.

Es wird nun eine parameterfreie Gleichung der Ortskurve ermittelt. Zur Vereinfachung der Rechnung ersetzen wir `ortx(t)` durch `x` und `orty(t)` durch `y`.

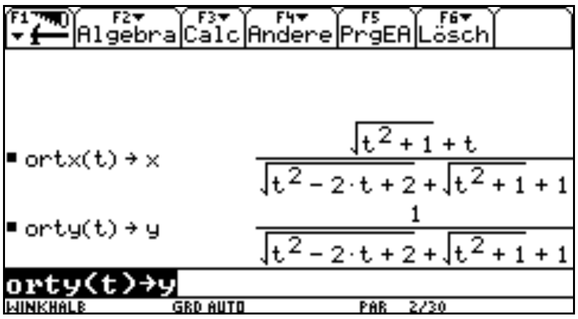

Abb. 15

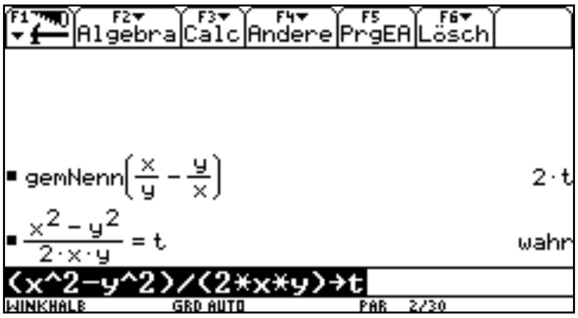

Abb. 16

Es ist

$$\frac{x}{y}-\frac{y}{x}=2t \Rightarrow t=\frac{x^2-y^2}{2xy}.$$

Damit ergibt sich:

$$t^2+1=\left(\frac{x^2+y^2}{2xy}\right)^2$$

und

$$\sqrt{t^2+1}+1=\frac{(x+y)^2}{2xy}.$$

Diese Terme werden nun in die Gleichung für y eingesetzt und es wird mit Bleistift und Papier umgeformt:

$$y=\frac{1}{\sqrt{t^2-2t+2}+\frac{(x+y)^2}{2xy}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{t^2-2t+2}=\frac{2x-(x+y)^2}{2xy}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x^2-y^2}{2xy}\right)^2-2\cdot\frac{x^2-y^2}{2xy}+2=\left(\frac{2x-(x+y)^2}{2xy}\right)^2$$

Damit ist bereits eine parameterfreie Gleichung der Ortskurve gegeben. Sie lässt sich vereinfachen zu:

$$x^2\cdot(2y-1)-x\cdot(2y-1)-y^2=0$$

Mit dem Voyage™200 kann die Gleichung der Ortskurve bestätigt werden.

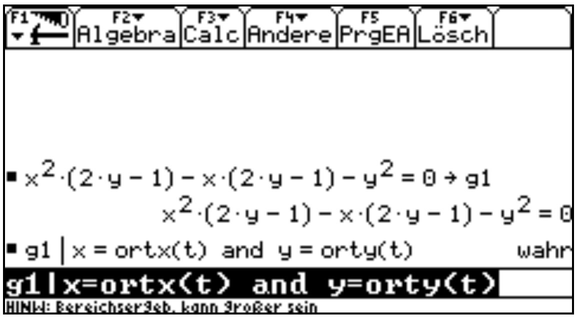

Abb. 17

Es handelt sich also hier um eine Kurve 2. Ordnung. Betrachtet man neben den Winkelhalbierenden der Innenwinkel zusätzlich die der Außenwinkel, so entstehen vier Schnittpunkte, die auf einer Kurve 4. Ordnung liegen.
(Vgl. dazu Gräbe, Hans-Gert: The SymbolicData GEO Records – A Public Repository of Geometry Theorem Proof Schemes.
http://www.informatik.uni-leipzig.de/~graebe/ComputerAlgebra/Publications, 10.10.2006)

Autoren:

Wilfried Zappe, Wolfgang Moldenhauer, Sonnhard Graubner
Kontakt:
Dr. Wilfried Zappe, Ilmenau (D)
wilfried.zappe@onlinehome.de