Eine Funktion f ist gegeben durch

$f(x) = 2x \cdot e^{-4x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Der Graph von f ist in der nebenstehenden *Abbildung 1* dargestellt.

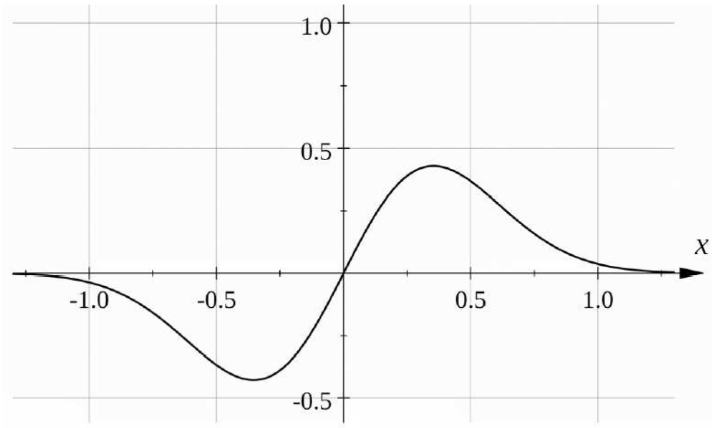


Abbildung 1

Aufgabenstellung Teilaufgabe a)

a) (1) *Weisen Sie nach, dass der Graph von f punktsymmetrisch zum Ursprung ist, und untersuchen Sie sein Unendlichkeitsverhalten.*

(2) *Bestimmen Sie für den Graphen von f die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen und die Extrempunkte.*

(3) *Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass der Graph von f drei Wendepunkte besitzt.* (26 Punkte)

[Zur Kontrolle: $f'(x) = \left(2 - 16x^2\right) \cdot e^{-4x^2}$]

Anforderungsprofil Teilaufgabe a)

1	(1) weist die Punktsymmetrie zum Ursprung nach.	3 (II)
2	(1) untersucht das Unendlichkeitsverhalten.	4 (II)
3	(2) berechnet die Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.	2 (I)
4	(2) berechnet die Ableitung.	3 (I)
5	(2) berechnet mögliche Extremstellen mit Hilfe des notwendigen Kriteriums.	3 (I)
6	(2) bestimmt die Extrempunkte.	7 (II)
7	(3) begründet die Existenz von drei Wendepunkten.	4 (II)

Modelllösung Teilaufgabe a) (1)

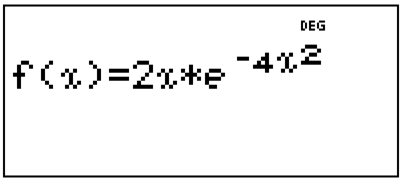
(1) Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, denn für alle $x \in$ R gilt: $f(-x) = 2(-x) \cdot e^{-4(-x)^2} = -2x \cdot e^{-4x^2} = -f(x)$.

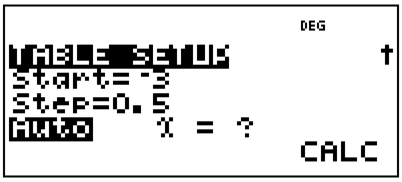
Mit $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{2x}{e^{4x^2}} = 0$ ist die x-Achse Asymptote des Graphen,

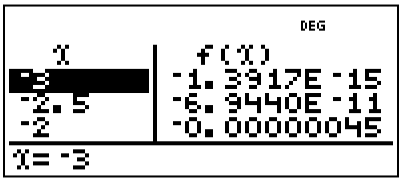
da der Nenner für $x \to \pm\infty$ unbeschränkt wächst.

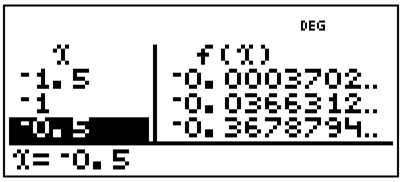
Einsatz des TI30X Pro MultiView™

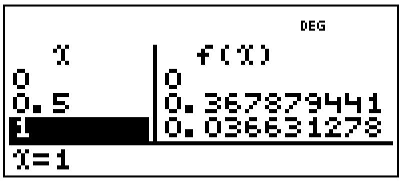
Die Wertetabelle des Graphen ergibt sich über die [table]-Option des WTR:

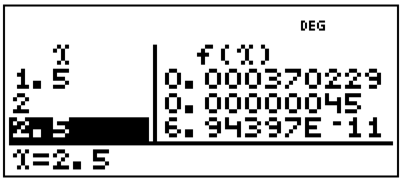






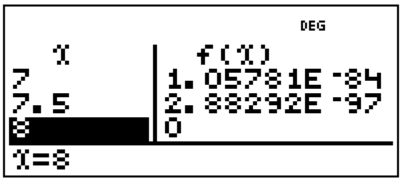






Dass hier eine Punktsymmetrie vorliegt, kann auch an der Wertetabelle festgestellt werden. Für alle angezeigten Werte gilt: f(-x) = - f(x).

Das Verhalten im Unendlichen kann an der Wertetabelle abgelesen werden: Für x = 7 erhält man den Funktionswert $f(7) \approx 1 \cdot 10^{-84}$, für x = 8 kann er vom GTR nicht mehr angezeigt werden, d. h. $|\, f(8)\, | < 10^{-99}$.



Das in der Modelllösung angegebene Argument, dass der Nenner unbeschränkt wächst, gilt auch für den Zähler. Wesentlich ist das Argument, dass die Funktionswerte der Exponentialfunktion im Nenner stärker wachsen als die der linearen Funktion im Zähler.

Für $x \to -\infty$ wird die Symmetrieeigenschaft verwendet.

Modelllösung Teilaufgabe a) (2)

(2) Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$f(x)=0 \Leftrightarrow 2x\cdot e^{-4x^2}=0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0,$ da $e^{-4x^2}\neq 0$ für alle $x\in$ R. N(0|0) = S_y

Bestimmung der Extrempunkte:

$f'(x)=2\cdot e^{-4x^2}+2x\cdot(-8x)\cdot e^{-4x^2}=\left(2-16x^2\right)\cdot e^{-4x^2}$ (Produkt-, Kettenregel)

Die notwendige Bedingung $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left(2-16x^2\right)\cdot e^{-4x^2}=0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ liefert zwei mögliche Extremstellen.

Mit $f'(x_e)=0 \;\wedge$ Vorzeichenwechsel (–/+) der 1. Ableitung an der Stelle $x_{e1}=-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

oder $f'(x_e)=0 \;\wedge\; f''(x_e)\neq 0$ mit $f''(x)=\left(-48x+128x^3\right)\cdot e^{-4x^2}$, konkret

$f''\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 8 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} > 0$, folgt: An der Stelle $x_{e1} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ liegt ein lokales

Minimum mit $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \approx -0{,}43$ vor.

Der Graph besitzt den relativen Tiefpunkt $T\left(-\frac{\sqrt{2}}{4} \middle| -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

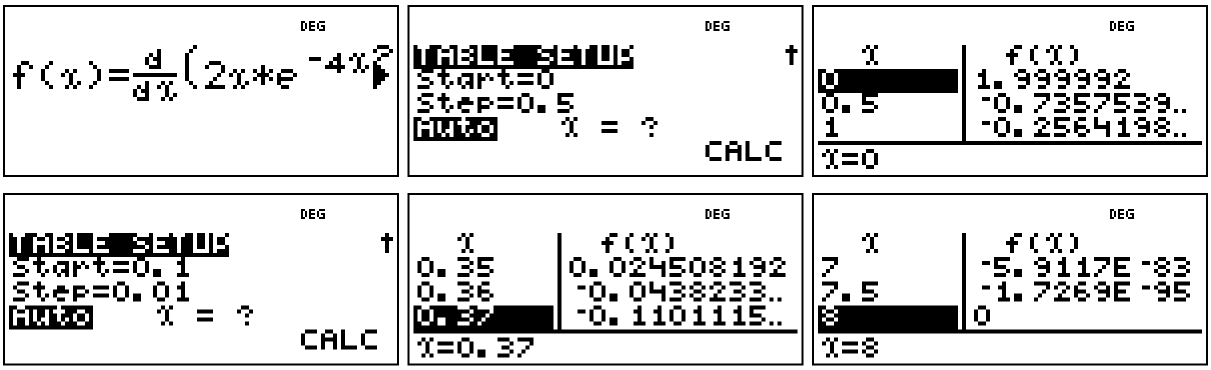
Wegen der Punktsymmetrie zum Ursprung liegt folglich ein relativer Hochpunkt bei

$H\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \middle| \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

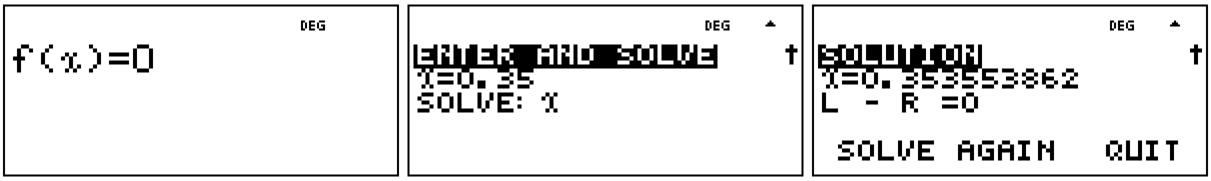
Einsatz des TI30X Pro MultiView™

Der Schnittpunkt mit den Koordinatenachsen muss wegen der Punktsymmetrie der Ursprung sein. Dass der Ursprung zum Graphen gehört, erkennt man am Funktionsterm und der Wertetabelle. Dass dies der einzige Schnittpunkt auf der x-Achse ist, erkennt man am Verlauf des Graphen und am Monotonieverhalten.

Um das Monotonieverhalten zu untersuchen, kann man die Wertetabelle für die numerisch bestimmte Ableitungsfunktion erstellen lassen. Auch der Graph der Ableitungsfunktion hat die x-Achse als Asymptote (vgl. Werte von f'(x) für x = 7, 7.5, 8 in der Wertetabelle), d. h. der Graph von f ist für $x \to +\infty$ streng monoton fallend mit einer Steigung, die gegen null geht (analog spiegelbildlich für $x \to -\infty$).

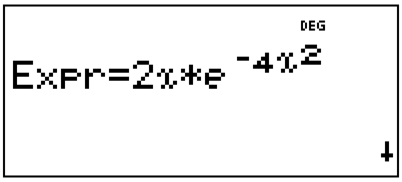


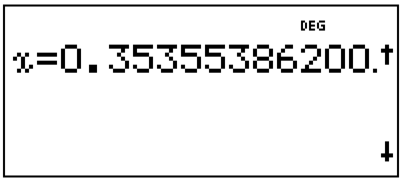
Dass im Intervall] 0 ; 0,5 [ein Hochpunkt des Graphen liegt, lässt sich am Vorzeichenwechsel (von + nach –) bei der numerischen Ableitung ablesen; durch Verfeinerung der Schritte in der Wertetabelle von f'(x) kann man dies z. B. auf das Intervall] 0,35 ; 0,36 [eingrenzen.

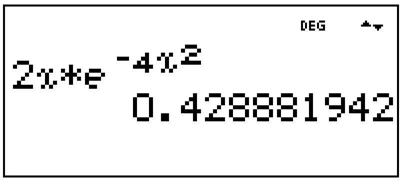


Die Nullstelle der numerischen Ableitungsfunktion findet man mithilfe des numerischen Gleichungslösers (2nd sin/sin⁻¹); es ergibt sich x = 0,35355…

Um die zugehörige y-Koordinate zu bestimmen, benutzt man die Option *expr-eval* (2nd table), gibt für den Term (*expression*) den Funktionsterm von f(x) ein und da aktuell unter x der Wert der (numerischen Nullstelle) x = 0,35355… gespeichert ist, ergeben sich für den Hochpunkt die Koordinaten (0,35355 | 0,42888).







Aus der Punktsymmetrie folgt, dass f auch einen Tiefpunkt hat bei (-0,35355 | -0,42888).

Der lokale Hochpunkt ist wegen des Monotonieverhaltens und des Verhaltens im Unendlichen auch ein absoluter Hochpunkt des Graphen.

Modelllösung Teilaufgabe a) (3)

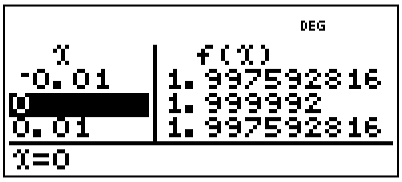
(3) Existenz von drei Wendepunkten:

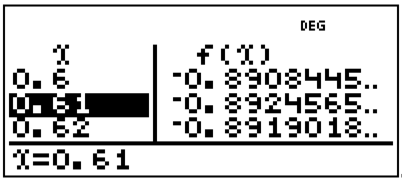
Der (stetige) Graph von *f* besitzt drei Wendepunkte, denn:

- zwischen Minimum und Maximum muss der Graph sein Krümmungsverhalten ändern bzw. ein zu O(0/0) punktsymmetrischer Graph muss einen Wendepunkt im Ursprung besitzen,
- für $x \to \pm\infty$ ist die *x*-Achse Asymptote des Graphen; der Graph muss vor bzw. nach dem Extremum das Krümmungsverhalten ändern, da er die *x*-Achse nicht noch einmal schneidet.

Einsatz des TI30X Pro MultiView™

Die Argumentation in der Modelllösung kann noch durch Untersuchung der numerischen Ableitungsfunktion ergänzt werden: Man erkennt an der Wertetabelle, dass die Ableitungsfunktion an der Stelle x = 0 ein Maximum hat, also der Graph der Funktion f einen Krümmungswechsel von einer Links- zu einer Rechtskurve. Ungefähr bei x = 0,61 liegt ein Minimum (und wegen der Symmetrie bei x ≈ - 0,61 ebenfalls):



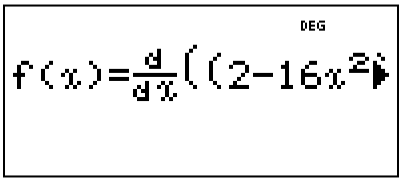


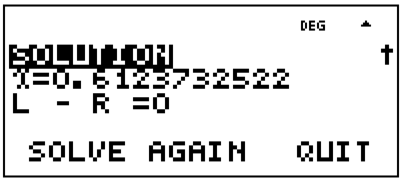
.

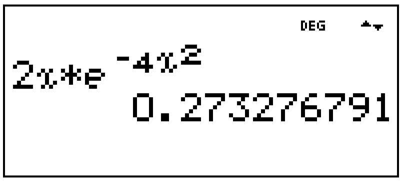
Wegen der Achsensymmetrie des Graphen der Ableitungsfunktion zur y-Achse (da ja die ursprüngliche Funktion punktssymmetrisch zum Ursprung ist) steht die Lage des Maximums bei x = 0 exakt fest.

Um die Stelle des Minimums der Ableitungsfunktion genauer zu bestimmen, muss man die Schrittweite der Wertetabelle verfeinern oder die numerische Ableitung der 1. Ableitung bilden.

Da es jedoch beim TI 30X nicht möglich ist, den Ableitungsoperator zu schachteln, muss formal der Term der 1. Ableitung als Term eingegeben werden (dieser Term ist zur Kontrolle bei Teilaufgabe a) vorgegeben):







Mithilfe des numerischen Gleichungslösers bestimmt man die Nullstelle der numerischen 2. Ableitung und erhält x = 0,61237 … Mithilfe der expr-eval-Option berechnet man auch die y-Koordinate des Wendepunkts: (0,61237 | 0,27328) – dass dies ein Wendepunkt ist, lässt sich mit der Änderung des Monotonieverhaltens der Ableitungsfunktion begründen.

Aufgabenstellung Teilaufgabe b)

b) Die Punkte $O(0|0)$, $P(u|0)$ und $Q(u|f(u))$, $u>0$, legen ein rechtwinkliges Dreieck OPQ fest (siehe *Abbildung 2*).

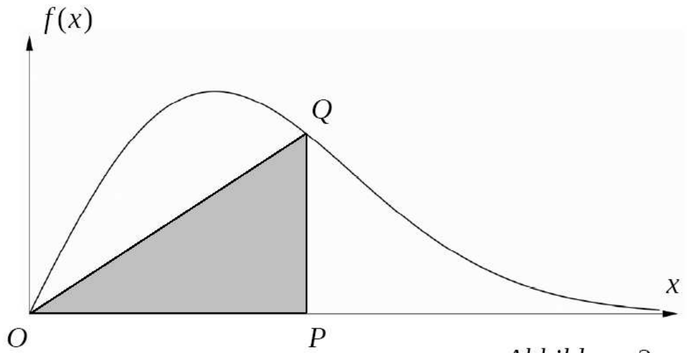


Abbildung 2

Ermitteln Sie den Wert von u, für den der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist. Berechnen Sie diesen maximalen Flächeninhalt. (12 Punkte)

[Zur Kontrolle: $A(u)=u^2\cdot e^{-4u^2}$]

Anforderungsprofil Teilaufgabe b)

	Anforderungen **Der Prüfling**	**maximal erreichbare Punktzahl (AFB)**
1	bestimmt einen Zielfunktionsterm.	3 (II)
2	bestimmt die lokale Maximalstelle.	5 (II)
3	berechnet den maximalen Flächeninhalt.	2 (I)
4	zeigt durch Untersuchung der Randbedingungen, dass das Maximum auch global ist.	2 (II)

Modelllösung Teilaufgabe b)

Allgemein gilt für den Flächeninhalt eines Dreiecks: $A(g,h)=\dfrac{g\cdot h}{2}$.

Für das beschriebene Dreieck gilt konkret: $g=u$; $h=f(u)=2u\cdot e^{-4u^2}$, $u>0$; daraus ergibt sich die Zielfunktion A mit $A(u)=u^2\cdot e^{-4u^2}$, $u>0$, und der Ableitung

$A'(u)=\left(2u-8u^3\right)\cdot e^{-4u^2}$.

Bestimmung des Maximums:

Die notwendige Bedingung $A'(u) = 0 \Leftrightarrow 2u - 8u^3 = 0 \Leftrightarrow u = 0 \vee u = 0{,}5 \vee u = -0{,}5$ liefert als mögliche Extremstelle $u = 0{,}5$, da $u > 0$.

$A''(u) = \left(2 - 40u^2 + 64u^4\right) \cdot e^{-4u^2}$. Aus $A'(0{,}5) = 0 \wedge A''(0{,}5) = -4 \cdot e^{-1} < 0$ folgt:

An der Stelle $u = 0{,}5$ hat die Funktion A das lokale Maximum $A(0{,}5) = 0{,}25 \cdot e^{-1} \approx 0{,}09$.

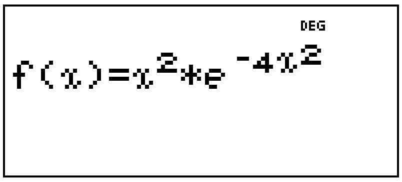
Überprüfung von A am Rand des Definitionsbereiches:

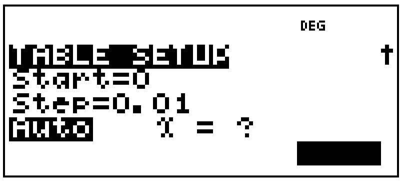
Für $u \to 0$ und für $u \to \infty$ gilt $A(u) \to 0$. Daher ist das lokale Maximum $A(0{,}5)$ auch globales Maximum.

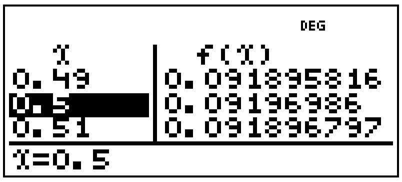
Das rechtwinklige Dreieck hat also für $u = 0{,}5$ den größten Flächeninhalt. Dieser beträgt $0{,}25 \cdot e^{-1}$ FE.

Einsatz des TI30X Pro MultiView™

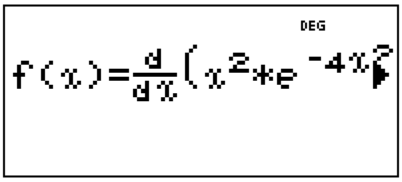
Die Flächeninhaltsfunktion des rechtwinkligen Dreiecks wird als neue Funktion f eingegeben. Man erkennt an der Wertetabelle, dass ungefähr bei x = 0,5 ein Maximum vorliegt:

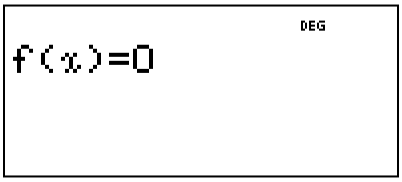


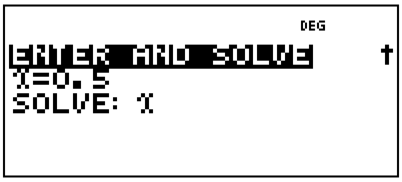


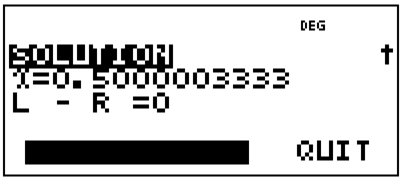


Eine Überprüfung kann mithilfe des numerischen Gleichungslösers der numerischen Ableitungsfunktion erfolgen (allerdings weicht der numerisch ermittelte Wert von 0,5 ab).

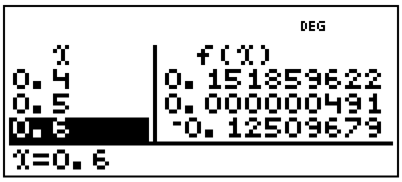








Der Maximalwert der Funktion an der Stelle x = 0,5 ist zu ungefähr 0,09 berechnet worden. Dass hier ein lokales Maximum vorliegt, ist am Verlauf der Ableitungsfunktion ablesbar (Vorzeichenwechsel der numerischen Ableitung von + nach -). Dass es sich dabei um ein absolutes Maximum handelt, ergibt sich aus dem Verhalten für $x \to 0$ und dem Monotonieverhalten für $0 < x < 0{,}5$ (die Ableitungsfunktion hat positive Werte) sowie für $x \to +\infty$ und dem Monotonieverhalten für $x > 0{,}5$ (die Ableitungsfunktion y_3 hat negative Werte).



Aufgabenstellung Teilaufgabe c)

c) *Zeigen Sie, dass durch* $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}$ *eine Stammfunktion von f gegeben ist.*

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;2]$ *einschließt.*

Begründen Sie, dass sich der Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse im Intervall $[0;k]$ *einschließt, für immer größer werdende* $k \in \mathbb{R}^+$ *dem Wert 0,25 FE beliebig annähert.* (12 Punkte)

Anforderungsprofil Teilaufgabe c)

	Anforderungen Der Prüfling	maximal erreichbare Punktzahl (AFB)
1	zeigt, dass durch $F(x)$ eine Stammfunktion von f gegeben ist.	3 (II)
2	berechnet den Flächeninhalt.	5 (I)
3	begründet, dass sich der Flächeninhalt dem Wert 0,25 FE beliebig annähert.	4 (III)

Modelllösung Teilaufgabe c)

Durch $F(x) = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x \cdot e^{-4x^2}$ gegeben, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.

Mit Kettenregel folgt: $F'(x) = -\frac{1}{4} \cdot (-8x) \cdot e^{-4x^2} = 2x \cdot e^{-4x^2} = f(x)$.

Bestimmung der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [0;2]:

$$A = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 2x \cdot e^{-4x^2}\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4} \cdot e^{-16} + \frac{1}{4} \approx \frac{1}{4}$$

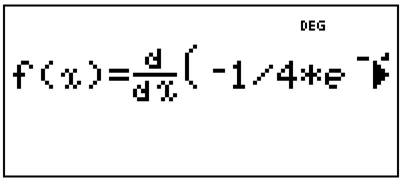
Bestimmung der Flächen zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall [0;k] (k > 0):

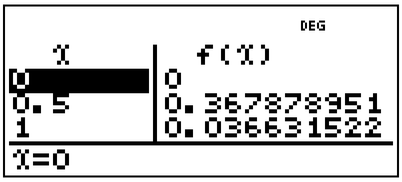
Für immer größer werdende $k \in \mathbb{R}^+$ gilt $-\frac{1}{4} \cdot e^{-4k^2} \to 0$ und deshalb

$$A = \int_0^k f(x)\mathrm{d}x = \int_0^k \left(2x \cdot e^{-4x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{4} \cdot e^{-4x^2}\right]_0^k = -\frac{1}{4} \cdot e^{-4k^2} + \frac{1}{4} \to \frac{1}{4}.$$

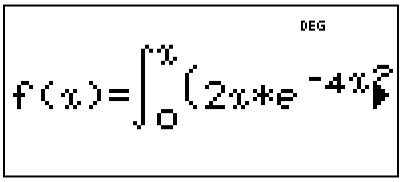
Einsatz des TI30X Pro MultiView™

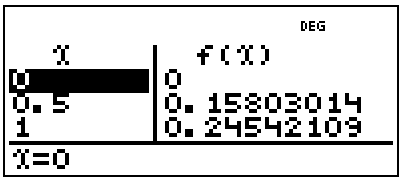
Dass F(x) eine Stammfunktion für f(x) ist, kann numerisch auch mithilfe der Ableitung von F(x) überprüft werden: Ein Vergleich der Wertetabelle mit der aus Teilaufgabe a) zeigt die Übereinstimmung.

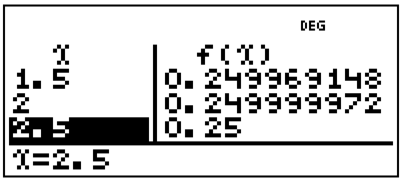


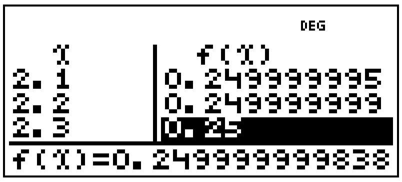


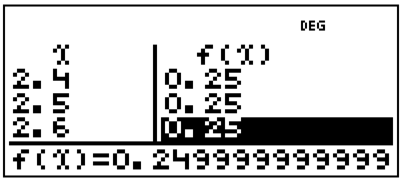
Die Bestimmung der Maßzahl der Fläche könnte auch mithilfe der numerischen Integralfunktion erfolgen: Man erkennt, dass die Funktionswerte dieser Funktion für x > 2 praktisch gleich 0,25 sind.











Wenn man die angegebene Stammfunktion als Funktionsterm in den TI 30X eingibt, dann findet man die gleichen Funktionswerte, wenn man gemäß Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung F(x) – F(0) berechnet, wobei F(0) = - 0,25 (für x = 2 bzw. größere Werte von x):