



T³ EUROPA

**Die formule ken ik niet meer...
Hoe kan ik ze terugvinden ?**

Renée Gossez.

Niveau 6de jaar secundair onderwijs.

Rekenmachine TI 83+ en TI89

Inleiding

Hier volgt een eenvoudige oefening over de bepaalde integraal en het gebruik van Darboux sommen.

Verklaar waarom $\int_0^1 x^2 dx$ bestaat en bepaal haar numerieke waarde. Geef een grafische interpretatie.

Oplossing van de leerling die aan het bord was gestuurd :

Als men $[0,1]$ verdeelt in n delen met dezelfde lengte is de onderste Darboux som gelijk aan

$$s_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \right] = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2]$$

en de bovenste Darboux som is

$$S_n = \frac{1}{n} \left[\frac{1}{n^2} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + 1 \right] = \frac{1}{n^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2].$$

??????????

Gelukkig 😊 is er in de klas een leerling (Laurent) die nog weet dat we vorig jaar een formule hebben gezien voor $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 \dots$

Maar jammer genoeg ☹️ kent hij ze niet meer !

De boeken zijn thuis, de leraar wil niets zeggen, ... maar de leerlingen hebben hun TI83 + !!

Gebruik van een grafische rekenmachine om de formule terug te vinden (eerste fase).

Het doel is dus $f(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ met $n \in \mathbb{N}_0$ te bepalen.

De strategie is de volgende :

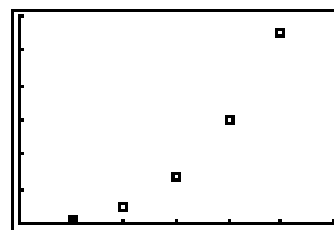
1. $f(n)$ berekenen voor enkele waarden van n ;
2. de grafiek van $f(n)$ tekenen;
3. een "goede" regressie kiezen.

1. $f(1) = 1, f(2) = 5, f(3) = 14, f(4) = 30, f(5) = 55$.

2. Die waarden zijn in de lijsten L1 en L2 ingevoerd en figuur 2 toont de grafiek van $f(n)$:

L1	L2	L3	3
1	1		
2	5		
3	14		
4	30		
5	55		
-----	-----		
L3(1)=			

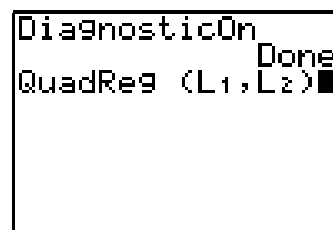
Figuur 1



Figuur 2

3. Dit is blijkbaar een kwadratische functie, dus

- 2nd CATALOG
- DiagnosticOn
- STAT
- CALC
- QuadReg



Figuur 3

ENTER

Helaas, de determinatiecoëfficiënt R^2 is niet gelijk aan 1 !!!

```
QuadReg
y=ax2+bx+c
a=3.5
b=-7.7
c=5.6
R2=.9991761071
```

Figuur 4

De curve zou ook van de derde graad kunnen zijn ...

STAT
CALC
CubicReg(L1,L2)
ENTER

```
CubicReg
y=ax3+bx2+cx+d
a=.3333333333
b=.5
c=.1666666667
d=7.9E-12
R2=1
```

Figuur 5

Hoera, nu is de determinatiecoëfficiënt gelijk aan 1 ☺☺☺.

Gebruik van een rekenmachine om de formules terug te vinden (tweede fase).

OK zegt Laurent, $f(n)$ is zeker een functie van de derde graad maar de waarden van de coëfficiënten zijn benaderingen van de "echte" coëfficiënten.

We moeten hun exacte waarden bepalen.

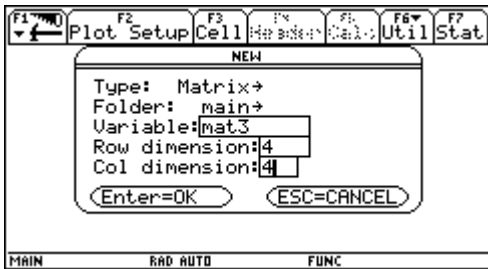
De leerlingen zoeken een nieuwe strategie :

1. Als men veronderstelt dat $f(n)$ effectief een functie van de derde graad is, zijn er 4 onbekende coëfficiënten a , b , c en d in de algebraïsche formule van $f(n)$.

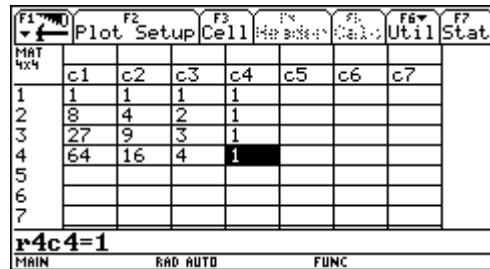
2. Het is dus voldoende a , b , c en d te bepalen zodat

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c + d = 1 \\ f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 5 \\ f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 14 \\ f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 30 \end{cases}$$

Gelukkig heeft een leerling in de klas en TI89 : zijn rekenmachine geeft de exacte waarden van de oplossing :



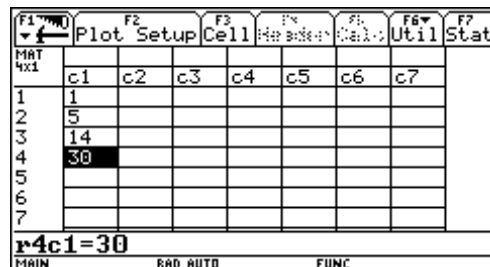
Figuur 6



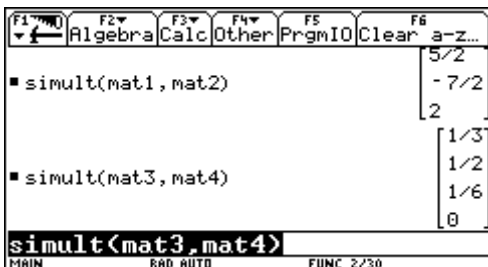
Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9



Figuur 10

Uiteindelijk is

$$f(n) = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \quad (1)$$

Maar de bel van de school klinkt ... de les is gedaan ... de oefening over de bepaalde integraal is als huiswerk voor morgen en het is niet alles : formule (1) moet ook als huiswerk *bewezen* worden !