

T<sup>3</sup> EUROPE

## Problèmes d'optimisation avec la TI 92.

Renée Gossez, Jacqueline Sengier.

**Niveau** 4ème / 5ème

**Prérequis** Recherche des extrema éventuels d'une fonction.

**Objectifs** Aborder les problèmes d'optimisation de manière dynamique à l'aide de l'application Geometry de la TI92.

Une telle approche a l'avantage

- de rendre la résolution des problèmes plus attrayante
- de faciliter l'écriture d'un modèle algébrique sous forme d'une fonction à optimiser
- de susciter souvent de nouvelles questions qui ne seraient pas apparues dans un environnement PC (papier / crayon)

**Enonce du problème.** Une fenêtre a la forme d'un rectangle surmonté d'un demi-cercle. Si son périmètre est de 8 mètres (en comptant la barre transversale), quelles doivent être ses dimensions pour que le maximum de lumière la traverse?

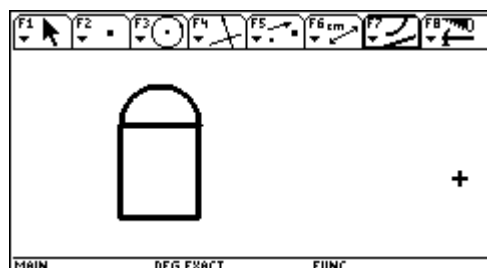


Figure 1

## Résolution.

❖ Après une brève discussion avec les élèves il apparaît que pour construire une fenêtre variable de périmètre 8, il suffit de choisir une largeur  $x$  quelconque puis de calculer la hauteur  $h$  de la manière suivante :

The screenshot shows the following content on the calculator screen:

- Top menu: F1 Algebra, F2 Calc, F3 Other, F4 PrgmIO, F5 Clear a-z...
- Equation 1:  $2 \cdot (x + h) + \frac{\pi \cdot x}{2} = 8$
- Equation 2:  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot x + 2 \cdot h = 8$
- Solve command:  $\text{solve}\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot x + 2 \cdot h = 8, h\right)$
- Result:  $h = \frac{-\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot x - 8\right)}{2}$
- Bottom line:  $\text{solve}\left(\left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot x + 2 \cdot h = 8, h\right)$
- Bottom status: MAIN, RAD EXACT, FUNC 2/30

Figure 2

❖ Il est alors possible de charger dans les calculatrices des élèves, une figure représentant une fenêtre de largeur  $x$  variable et de périmètre 8 cm (échelle du dessin ?) :

Soit MP la machine du professeur et ME celle de l'élève. Ces machines doivent être reliées par un câble et en position de marche.

Sur chacune des deux machines :

2nd VAR-LINK

D'abord sur ME :

F3 - Receive - ENTER

Ensuite , sur MP :

Nom de la figure en surbrillance - F4 pour la sélectionner - F3 - Send - ENTER

Voici cette figure :

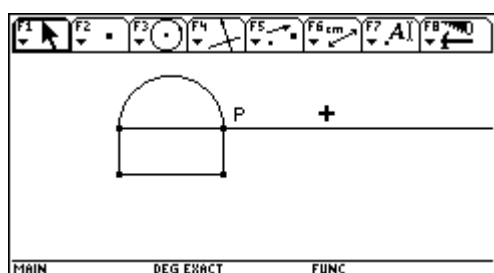


Figure 3

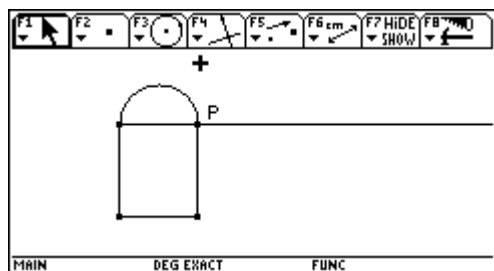


Figure 4

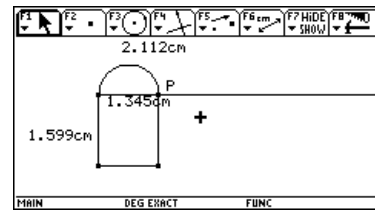
La largeur  $x$  de la fenêtre varie lorsqu'on déplace le point P sur la demi-droite horizontale à laquelle il appartient.

❖ Vérifions que le périmètre de l'une quelconque des fenêtres est bien 8 :

Utiliser

F6 - Distance & Length

puis



F6

Calculate

▲ (2.112 en surbrillance)

ENTER (longueur arc de cercle stockée dans a)

Taper + 2 X

▲ (1.345 en surbrillance)

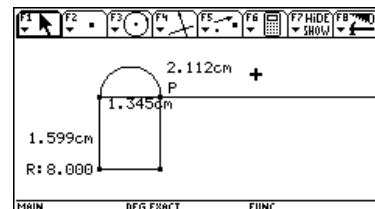
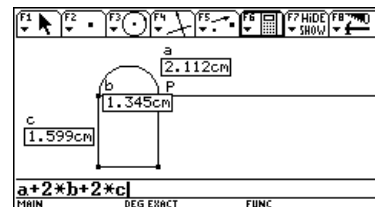
ENTER (largeur rectangle stockée dans b)

Taper + 2 X

▲ (1.599 en surbrillance)

ENTER (hauteur rectangle stockée dans c)

ENTER (le résultat du calcul est affiché après R :)



Figures 5, 6, 7

❖ Calculons l'aire d'une fenêtre :

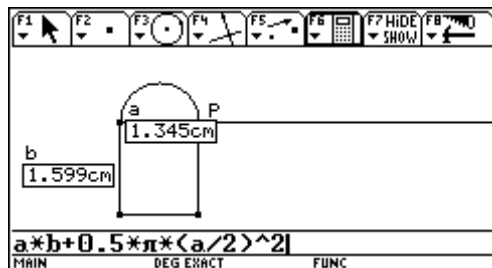


Figure 8

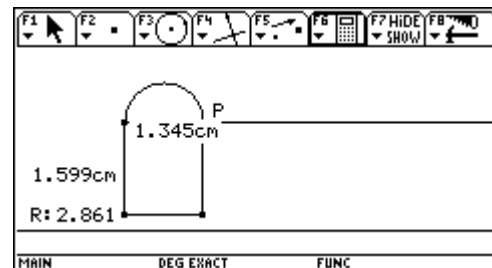


Figure 9

❖ Faisons varier x (en bougeant le point P) et observons la variation correspondante de l'aire de la fenêtre :

Curseur sur le point P - THIS POINT -

2nd LOCK - Faire bouger le point avec la souris

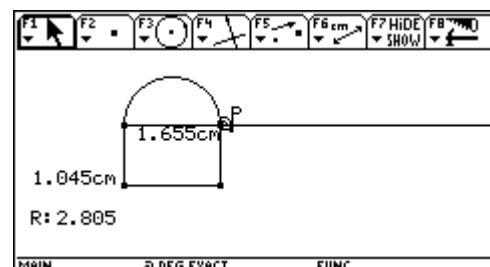


Figure 10

❖ Le maximum de l'aire semble se situer dans le voisinage de  $x = 1.44$

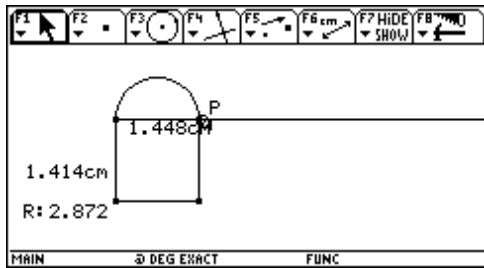


Figure 11

Nous constatons que le rectangle de la fenêtre est fort proche d'un carré...

Tout le monde (enfin presque) sait que parmi les rectangles de même périmètre, celui qui a la plus grande aire est le carré.

Ici, à cause de la présence du demi-disque, nous aurions pu penser que la fenêtre optimale comporterait un rectangle plus large que haut !

La figure qui précède semble montrer qu'il n'en est rien. Pour en avoir le coeur net

❖ Passons à la détermination algébrique des dimensions de la fenêtre optimale :

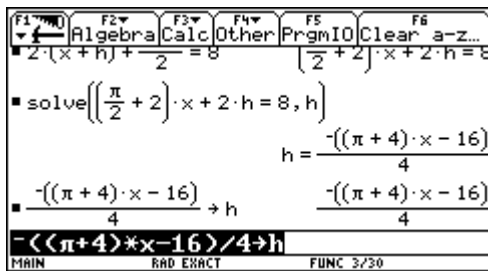


Figure 12

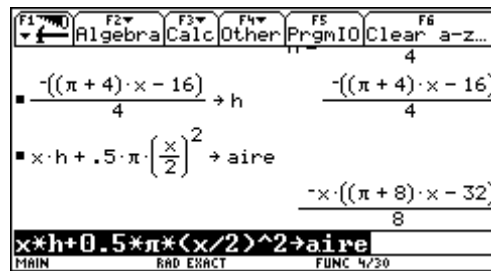


Figure 13

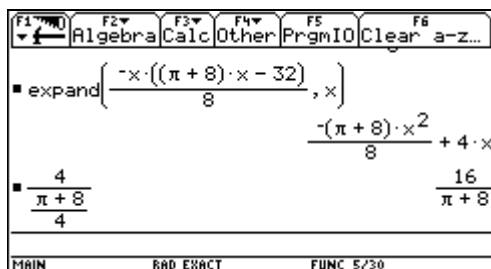


Figure 14

valeur optimale de x

Vérifions que cette valeur optimale est bien un maximum pour l'aire :

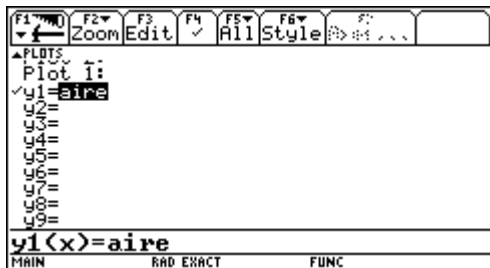


Figure 15

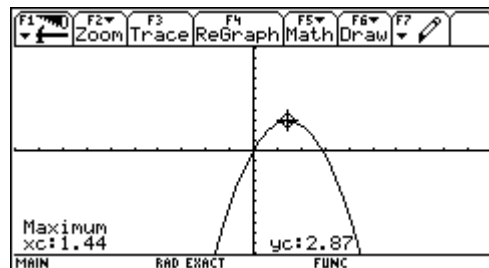


Figure 16

(remarquons au passage que si y est l'aire correspondant à une largeur x de fenêtre, alors le point de coordonnée (x, y) appartient à la courbe précédente, mais que l'inverse n'est pas nécessairement vrai !)

Valeur approchée de la solution :

◆ ENTER

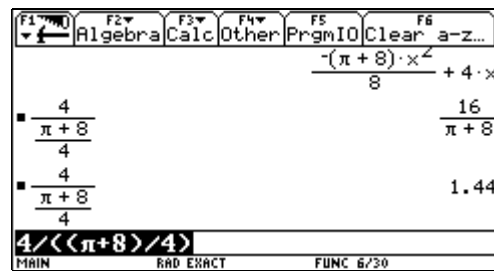


Figure 17

Il reste à confirmer que la fenêtre optimale est bien un carré surmonté d'un demi-disque :

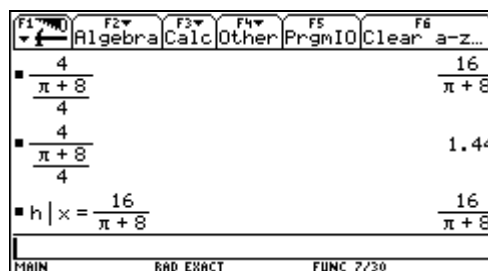


Figure 18

❖ Dans l'application Geometry, il est possible

- d'effectuer une *capture* des valeurs  $c_2$  prises par l'aire de la fenêtre en fonction de la largeur  $c_1$  de celle-ci (figure 19);

- de représenter les points de coordonnées  $(c_1, c_2)$  ainsi relevés (figure 20);

- de vérifier (figure 21) que ces points se trouvent effectivement sur le graphique de la fonction "aire" utilisée précédemment (page 4, figure 13).

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7
	Plot	Setup	Cell	Header	Calc	Util	Stat
DATA	N1	R:					
	c1	c2	c3	c4	c5		
1	1.655	2.805					
2	1.613	2.828					
3	1.568	2.848					
4	1.523	2.861					
5	1.479	2.870					
6	1.434	2.872					
7	1.389	2.869					
<b>r1c1=1.6551724137931</b>							
MAIN      RAD EXACT      FUNC							

Figure 19

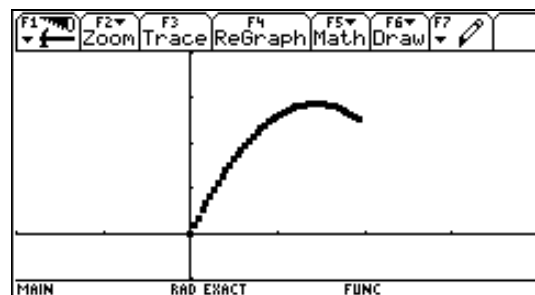


Figure 20

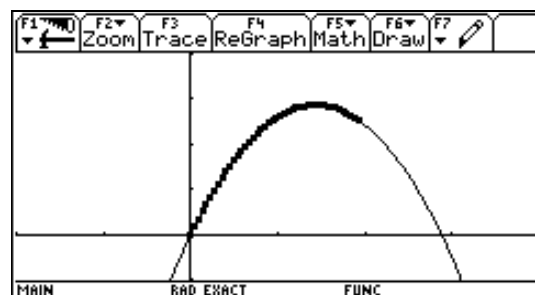


Figure 21