REGARD MATHEMATIQUE SUR BRUXELLES AVEC CABRI-GEOMETRE

Chantal Randour-Gabriel
Athénée Royal Gatti de Gamond

ETUDE DE LA SURFACE LATERALE, DE LA HAUTEUR ET DU VOLUME, D'UNE TOUR DE BASE POLYGONALE EN FONCTION DE LA SURFACE HABITABLE ET REALISATION DE MAQUETTE.

La surface habitable et la hauteur d'un étage sont fixées ainsi que les dimensions du rectangle délimitant le terrain disponible.
La forme du bâtiment peut être un parallélipipède à base rectangle, polygonale (à 6 côtés et symétrique par rapport à ses axes) ou losange.
L'étude de la hauteur, de la surface latérale et du volume débouche sur des fonctions discontinues dont les sauts décrivent des courbes qui semblent être des hyperboles mais quelles sont ces fonctions?
Un patron des bâtiments avec indication des niveaux est prévu pour toutes les bases possibles.
Notions mathématiques utilisées: fonctions rationnelles, dérivation, asymptotes et résolution d'équations par approximation.
Des calculatrices graphiques (TI-92) travaillant en calcul symbolique sont utilisées pour analyser les fonctions.

Wiskundige kijk op Brussel met Cabri-Géomètre

Studie van de zijdelingse oppervlakte, de hoogte en het volume, van een gebouw met veelhoeksbasis in functie van de bewoonbare oppervlakte en verwezenlijking van de maquette

De bewoonbare oppervlakte en de hoogte van een verdieping liggen vast, net zoals de afmetingen van de rechthoek die het beschikbare terrein begrenst.
De vorm van het gebouw mag een balk zijn, veelhoekig (met zes zijden en symmetrisch t.o.v. zijn assen) of ruitvormig.
De studie van de hoogte, de zijdelingse oppervlakte en het volume leidt tot discontinue functies waarvan de delen op hyperbolen lijken, maar welke functies zijn het ?
Er wordt een model gemaakt van de gebouwen met aanduiding van de niveau's voor al de mogelijke basissen.
Wiskundige begrippen : rationale functies, afgeleiden, asymptoten en numeriek oplossen van vergelijkingen.
De functies worden onderzocht met de grafische rekenmachine TI92 en symbolisch rekenen.

ETUDE DE LA SURFACE LATERALE ET DU VOLUME DE TOURS

Chantal Randour-Gabriel

ETUDE DE LA SURFACE LATERALE
ET DU VOLUME DE TOURS

Chantal Randour-Gabriel

Niveau: classe de cinquième 4h semaine avec possibilités de développements complémentaires en 6h semaine

Prérequis: notion de fonction dérivée

Objectif: montrer à partir d'un problème concret et d'une construction géométrique, des fonctions discontinues obtenues comme suite de points expérimentaux, établir la forme algébrique des fonctions continues associées et discuter de leur graphe.

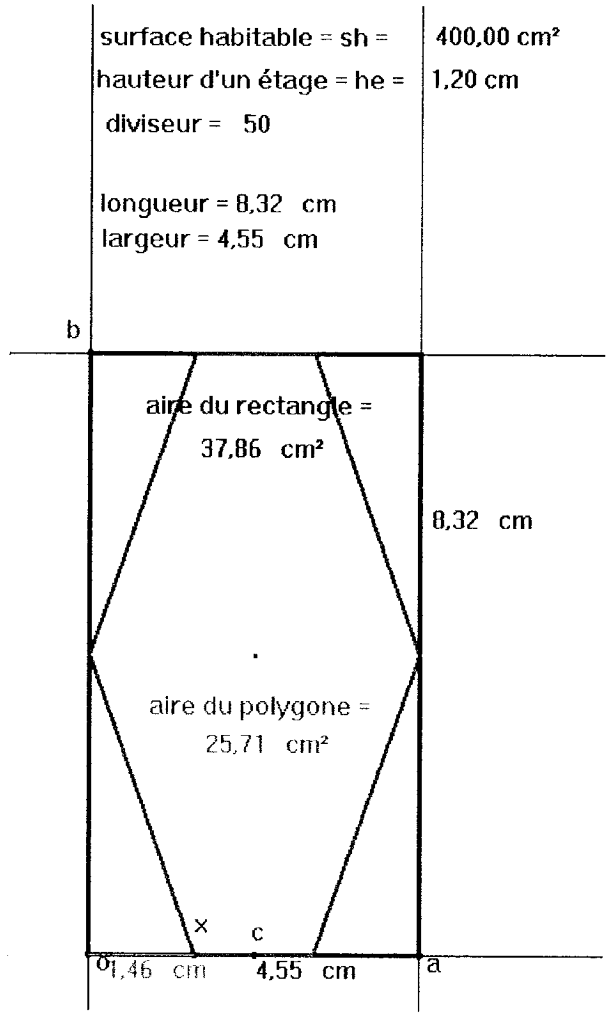
Sujet: parmi les immeubles modernes de Bruxelles, certains se révèlent être de simples parallélépipèdes rectangles, d'autres ont une base en forme de losange ou encore d'hexagone.
Sur un terrain rectangulaire de dimensions données, une tour à base polygonale sera construite.
La surface habitable est fixée ainsi que la hauteur d'un étage.
Suivant la forme du polygone de base, comment varient la surface des murs extérieurs et le volume du bâtiment?

Dessiner un rectangle déterminant le terrain.

Point o
Demi-droite horizontale comprenant o

2 constructions possibles

Point a sur cette demi-droite
Perpendiculaire à cette demi-droite par o
Point b sur cette droite
Parallèles, points sur 2 objets et polygone pour dessiner le rectangle
Mesure de ob → longueur
Mesure de oa → largeur
ou
Éditer la longueur et la largeur du terrain
Reporter la largeur sur la demi-droite et la longueur sur la droite



Dessiner l'hexagone de base

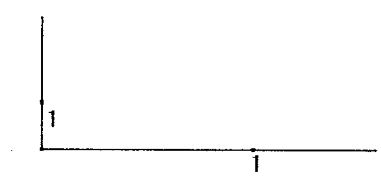
Segment oc
Milieu c de oa
Point x sur ce segment
Milieux des cotés et centre du rectangle
Par des symétries centrales construire les points de l'hexagone
Aire du rectangle initial et de l'hexagone
Editer 3 nombres

> La surface habitable sh
> La hauteur d'un étage he
> Un diviseur d

Segment ox
Mesure de ox

Créer un système d'axes pour y faire les graphiques

Point oo
Demi droite horizontale comprenant oo
Point 1 sur cette demi-droite
Perpendiculaire à oo comprenant oo
Point 1 sur cette droite
Nouveaux axes



Mesures et calculs

Périmètre du polygone de base
Surface habitable / aire du polygone
Ceil(ce nombre) → le nombre d'étages
Hauteur = nbre d'étages * hauteur d'un étage
Volume = base * hauteur
Surface latérale = hauteur * périmètre
Diviser volume et surface latérale par le diviseur

Si le nombre d'étages n'est pas entier...
On suppose ainsi que l'on dispose d'une portion d'étage!

sh/base * hauteur d'un étage → hh
hh * aire du polygone de base → vv
hh * périmètre du polygone de base → sll

aire poly base = 29,57 cm^2
périmètre poly base = 22,40 cm
sh/base = 13,53
nbre d'étages = 14,00

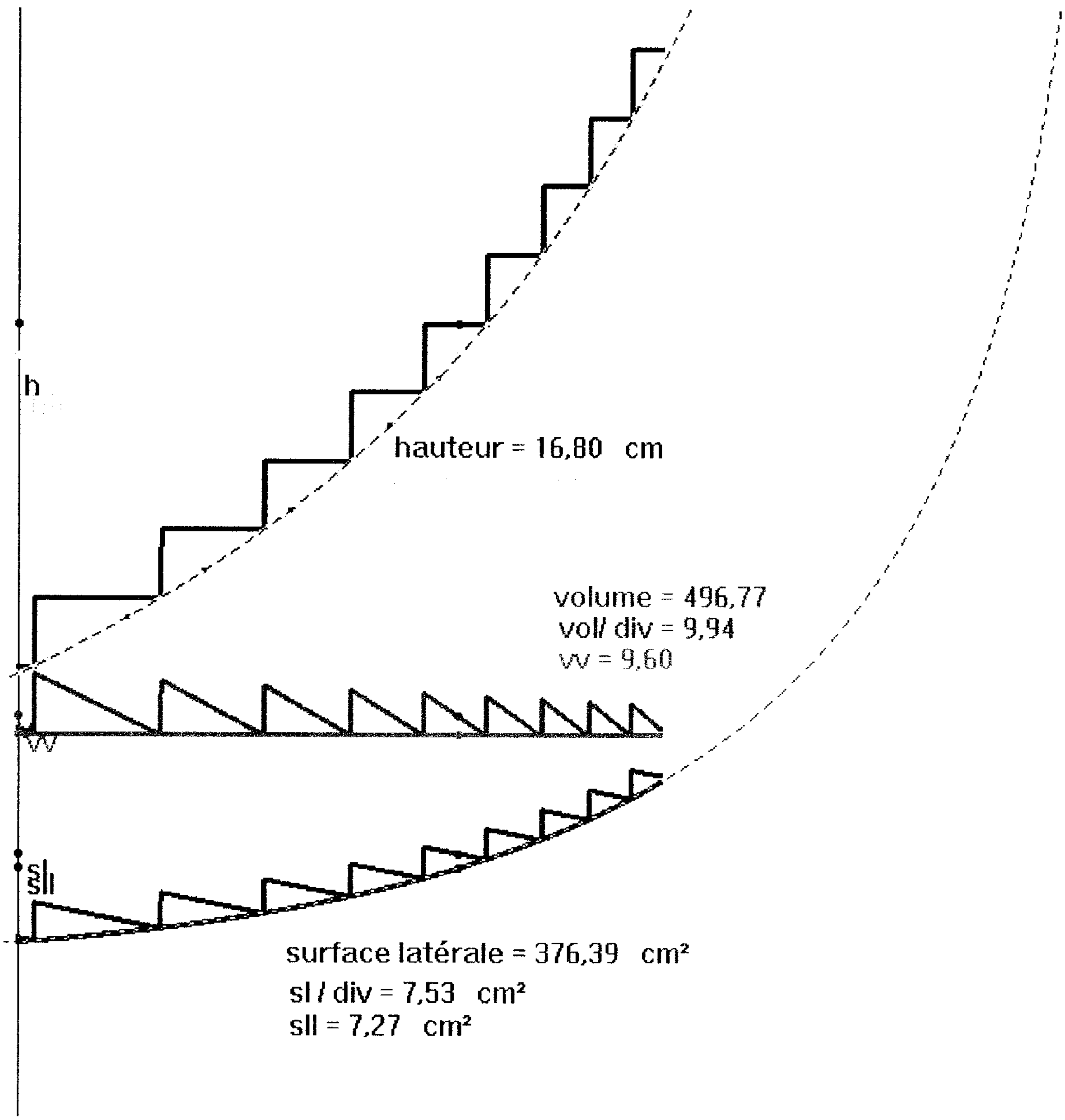
hauteur = 16,80 cm

volume = 496,77
vol/ div = 9,94
vv = 9,60

surface latérale = 376,39 cm^2
sl / div = 7,53 cm^2
sll = 7,27 cm^2

Graphique de ces fonctions de x

Homothétie de l'unité de x par le nombre mesure de ox
Homothétie de l'unité de y par les différentes valeurs
Tracer des parallèles aux axes pour obtenir les couples des fonctions et demander le lieu de ces points pour x (se déplaçant sur le polygone)



Rem: afin de ne pas avoir un dessin trop petit, l'axe des x n'apparaît pas
les valeurs indiquées sont calculées pour x = 1,71 cm

Dessiner la maquette

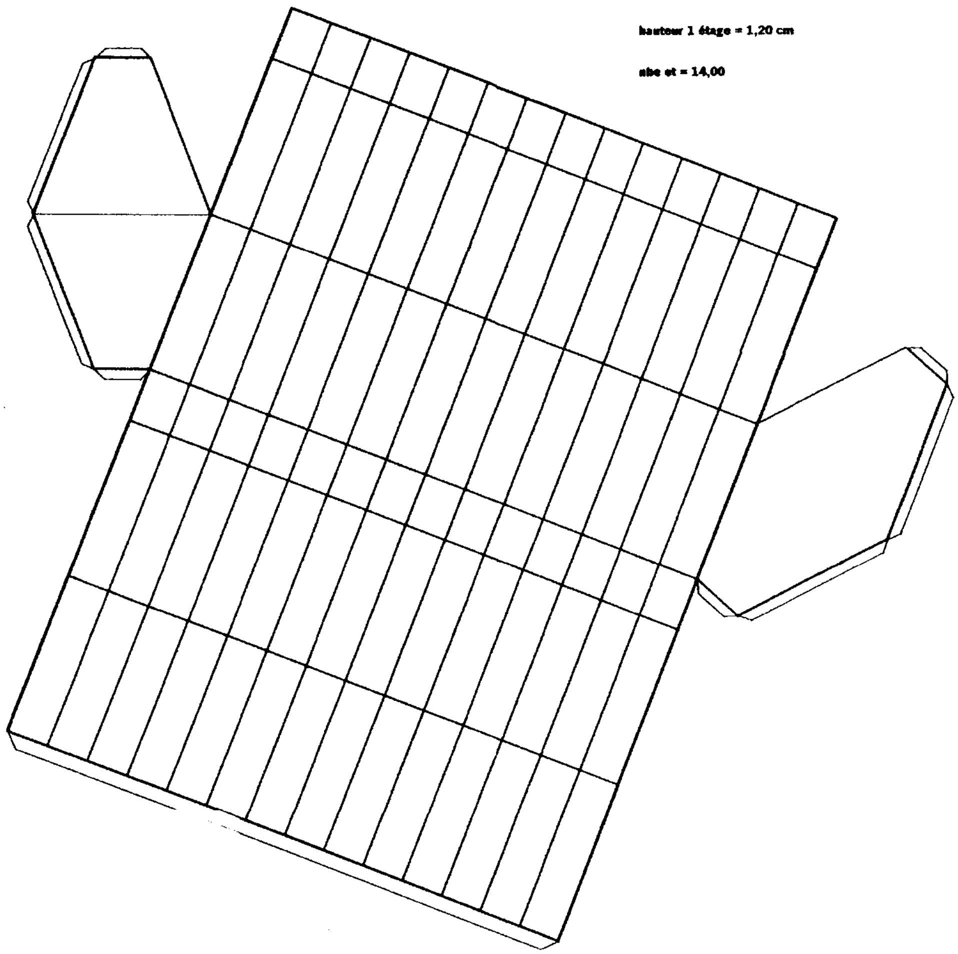
Translater le polygone en un point de la feuille
Dessiner une droite sur l'un des côtés et reporter les mesures des côtés du polygone en utilisant le compas
Déterminer un vecteur de direction perpendiculaire à la droite de base dont la norme est celle d'un étage
Placer x pour obtenir le maximum d'étages et reporter par translation de droites la hauteur d'un étage autant de fois que le nombre d'étages
Déplacer x pour ne pas être dans une situation extrême et dessiner le rectangle (polygone) délimitant la surface latérale de la maquette
Replacer x en position maximale
Indiquer les intersections des droites avec ce rectangle et déterminer les segments joignant ces points et cacher les droites contenant ces segments
Déterminer le milieu de la hauteur et tracer la parallèle à la droite de base comprenant ce milieu
Construire le symétrique de la base par rapport à cet axe
Choisir un nombre pour les rebords à coller
En reportant ce nombre tracer des petits cercles et dessiner les polygones déterminant les rabats

hauteur 1 étage = 1,20 cm

nbe et = 14,00

hauteur 1 étage = 1,20 cm

nbe et = 14,00



Fonctions hauteur, volume et surface latérale lorsqu'on ne tient pas compte d'un nombre entier d'étages

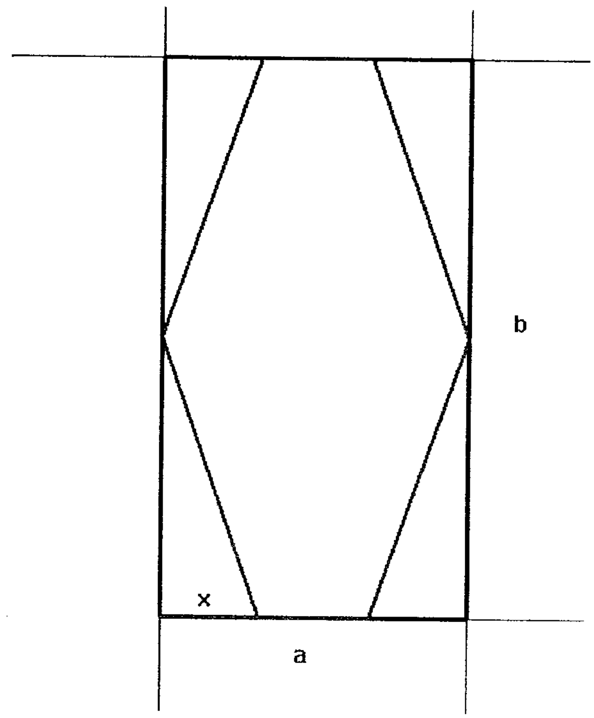
Paramètres:

a largeur du rectangle
b longueur du rectangle

sh surface habitable
he hauteur d'un étage

variable:

x mesure du côté du triangle



Périmètre et surface du polygone

$$y1(x) = 2(a - 2x) + 4\sqrt{x^2 + (\frac{b}{2})^2}$$

$$y2(x) = (a - 2x)b + bx = b(a - x)$$

hauteur de la tour

$$y3(x) = \frac{he * sh}{y2(x)} = \frac{he * sh}{b(a - x)}$$

Volume de la tour

$$y4(x) = y2(x) * y3(x)$$

$$y4(x) = b(a-x)\frac{he * sh}{b(a-x)} = he * sh$$

et le volume est constant…

Surface latérale de la tour

$$y5(x) = y1(x) * y3(x)$$

$$y5(x) = \left[(2(a-2x) + 4\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}} \right] * \frac{he * sh}{b(a-x)}$$

$$k = -2\frac{he * sh}{b}$$

$$y5(x) = k * \frac{a-2x}{x-a} + 2k * \frac{\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}}{x-a}$$

$$y5(x) = k * \frac{-2x+a}{x-a} + k * \frac{\sqrt{4x^2+b^2}}{x-a}$$

$$y6(x) = \frac{y5(x)}{k}$$

$$y6(x) = \frac{\sqrt{4x^2+b^2} - 2x + a}{x-a}$$

$$y7(x) = y6'(x) = \frac{(x-a) * \left[\frac{4x}{\sqrt{4x^2+b^2}} - 2 \right] - \sqrt{4x^2+b^2} + 2x - a}{(x-a)^2}$$

$$y7(x) = \frac{(x-a)4x - 2(x-a)\sqrt{4x^2+b^2} - 4x^2 - b^2 + (2x-a)\sqrt{4x^2+b^2}}{(x-a)^2\sqrt{4x^2+b^2}}$$

$$y7(x)=\frac{-4x^2-b^2+4x(x-a)+a\sqrt{4x^2+b^2}}{(x-a)^2\sqrt{4x^2+b^2}}$$

$$y7(x)=\frac{-b^2-4ax+a\sqrt{4x^2+b^2}}{(x-a)^2\sqrt{4x^2+b^2}}$$

prendre le numérateur de y7(x) et le placer dans y8(x) et résoudre y8(x)=0

$$y8(x)=-b^2-4ax+a\sqrt{4x^2+b^2}$$

$$y8(x)=0 \Leftrightarrow a\sqrt{4x^2+b^2}=b^2+4ax$$

remarquer que $b^2+4ax>0$

attention en élevant au carré, des solutions devront peut - être être rejetées

$$a^2(4x^2+b^2)=(b^2+4ax)^2 \qquad (1)$$

$$4a^2x^2+a^2b^2=b^4+8ab^2x+16a^2x^2$$

$$12a^2x^2+8ab^2x+b^4-a^2b^2=0$$

$$\Delta=64a^2b^4+48a^4b^2-48a^2b^4=16a^2b^4+48a^4b^2=16a^2b^2(b^2+3a^2)$$

$$\sqrt{\Delta}=4ab\sqrt{b^2+3a^2}$$

Les solutions de l'équation (1) sont

$$x1 = \frac{-8ab^2 + 4ab\sqrt{b^2+3a^2}}{24a^2} = \frac{-2b^2 + b\sqrt{b^2+3a^2}}{6a}$$

$$x2 = \frac{-8ab^2 - 4ab\sqrt{b^2+3a^2}}{24a^2} = \frac{-2b^2 - b\sqrt{b^2+3a^2}}{6a}$$

mais

$$b^2 + 4ax2 = \frac{-b^2 - 2b\sqrt{b^2+3a^2}}{3} < 0$$

x2 est à rejeter en vertu de la remarque plus haut et donc y6(x) peut avoir un extremum

Afin de rappeler les propriétés de quelques fonctions élémentaires, la fonction y5 de la surface latérale peut se dessiner comme somme de deux fonctions, une homographique et une irrationnelle elle-même se dessinant comme produit de deux fonctions

$$T1(x) = k * \frac{-2x+a}{x-a}$$

T1 a la forme d'une hyperbole dont les asymptotes ont les équations $x = a$ et $y = -2k$

$$NT2(x) = \sqrt{4x^2+b^2}$$

NT2 a la forme d'une demi-hyperbole dont les asymptotes obliques ont les équations $y = 2x$ et $y = -2x$

$$DT2(x) = \frac{k}{x-a}$$

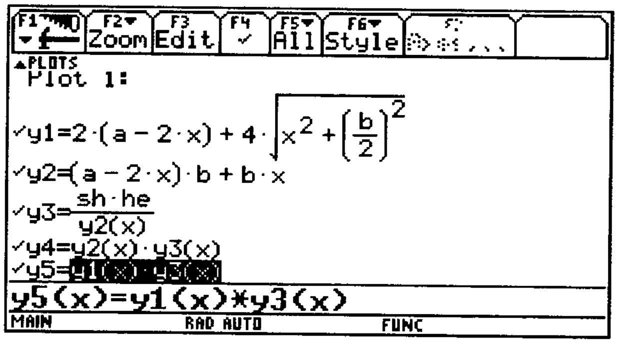
DT2(x) a la forme d'une hyperbole dont les asymptotes ont les équations $x = a$ et $y = 0$

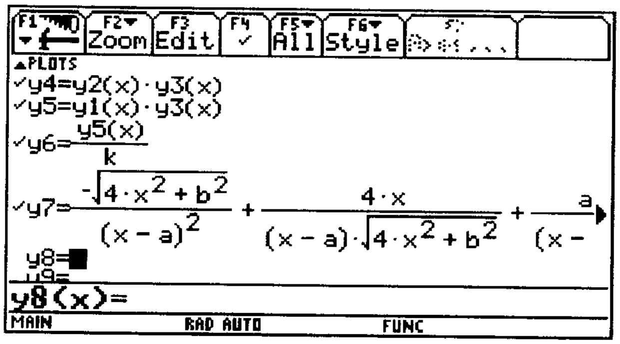
$$T2(x) = NT2(x) * DT2(x)$$

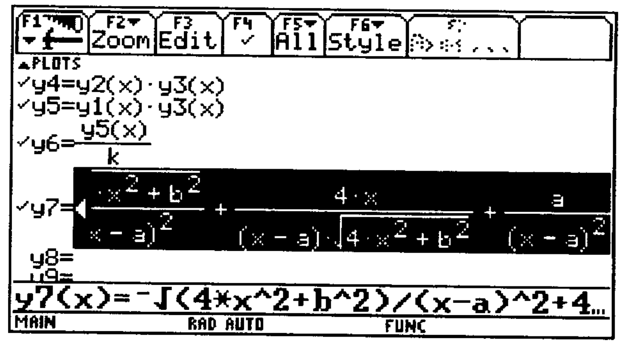
$$y5(x) = T1(x) + T2(x)$$

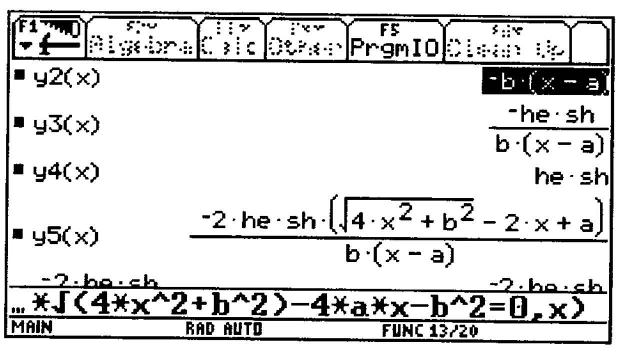
Les fonctions dans la TI-92 plus

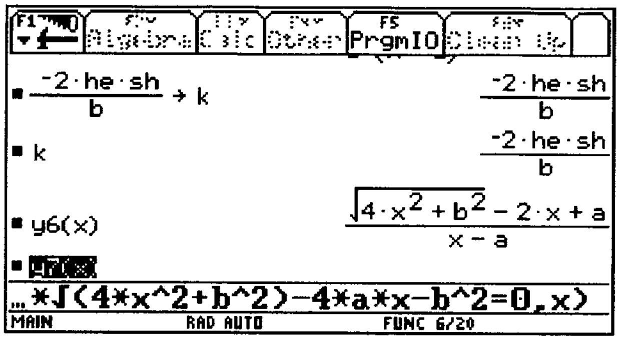
Si le calcul des dérivées s'avère trop long ou trop compliqué pour la classe, l'utilisation de la TI-92 est très utile.
Voici les différents écrans obtenus.

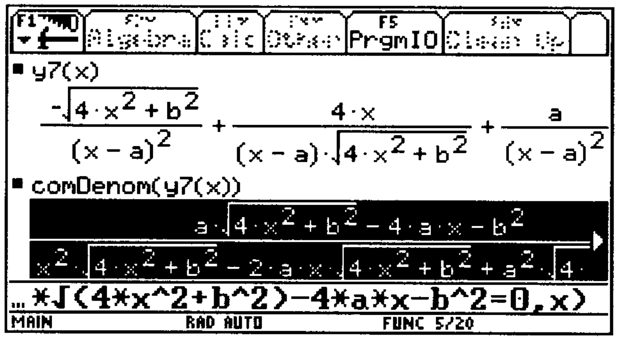


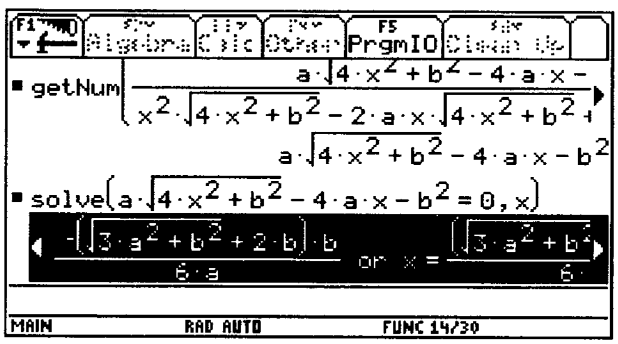


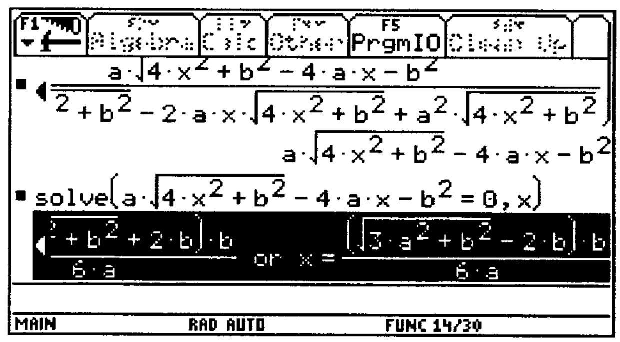




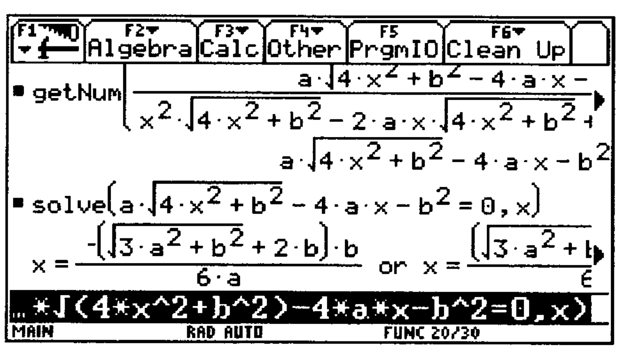




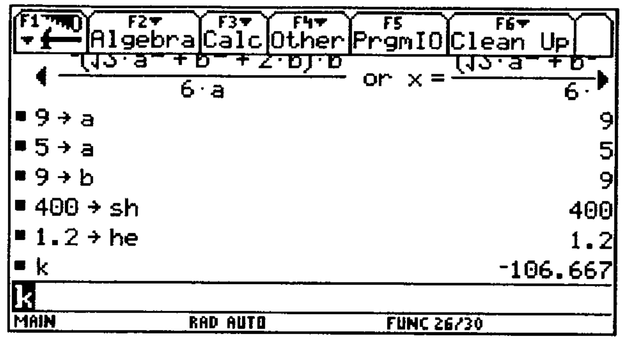


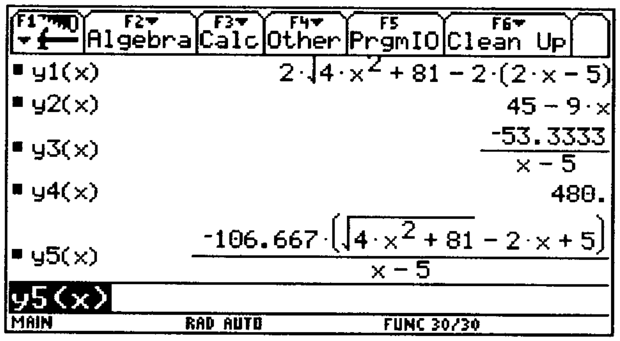


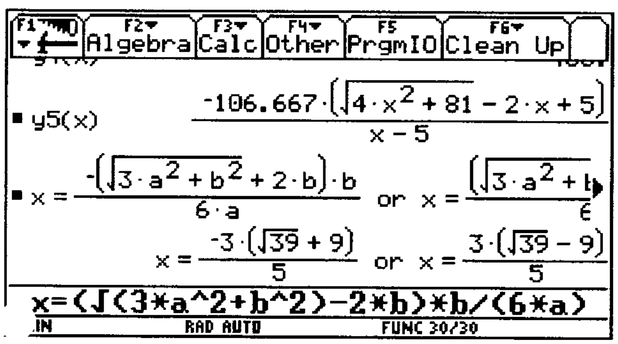
Remarque: sur la TI-92 il faut aider la machine en mettant au carré l'équation et en résolvant cette dernière!

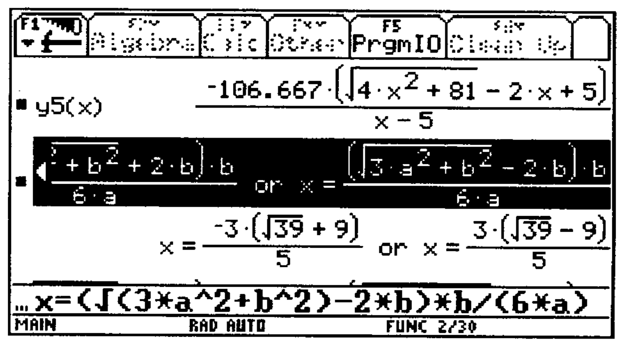


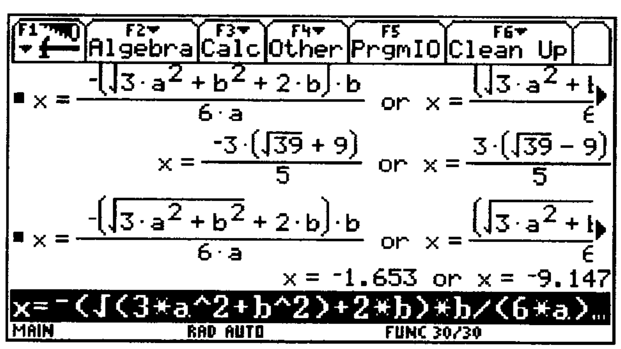
Voici les fonctions lorsque l'on donne aux paramètres les mêmes valeurs que dans la figure CABRI

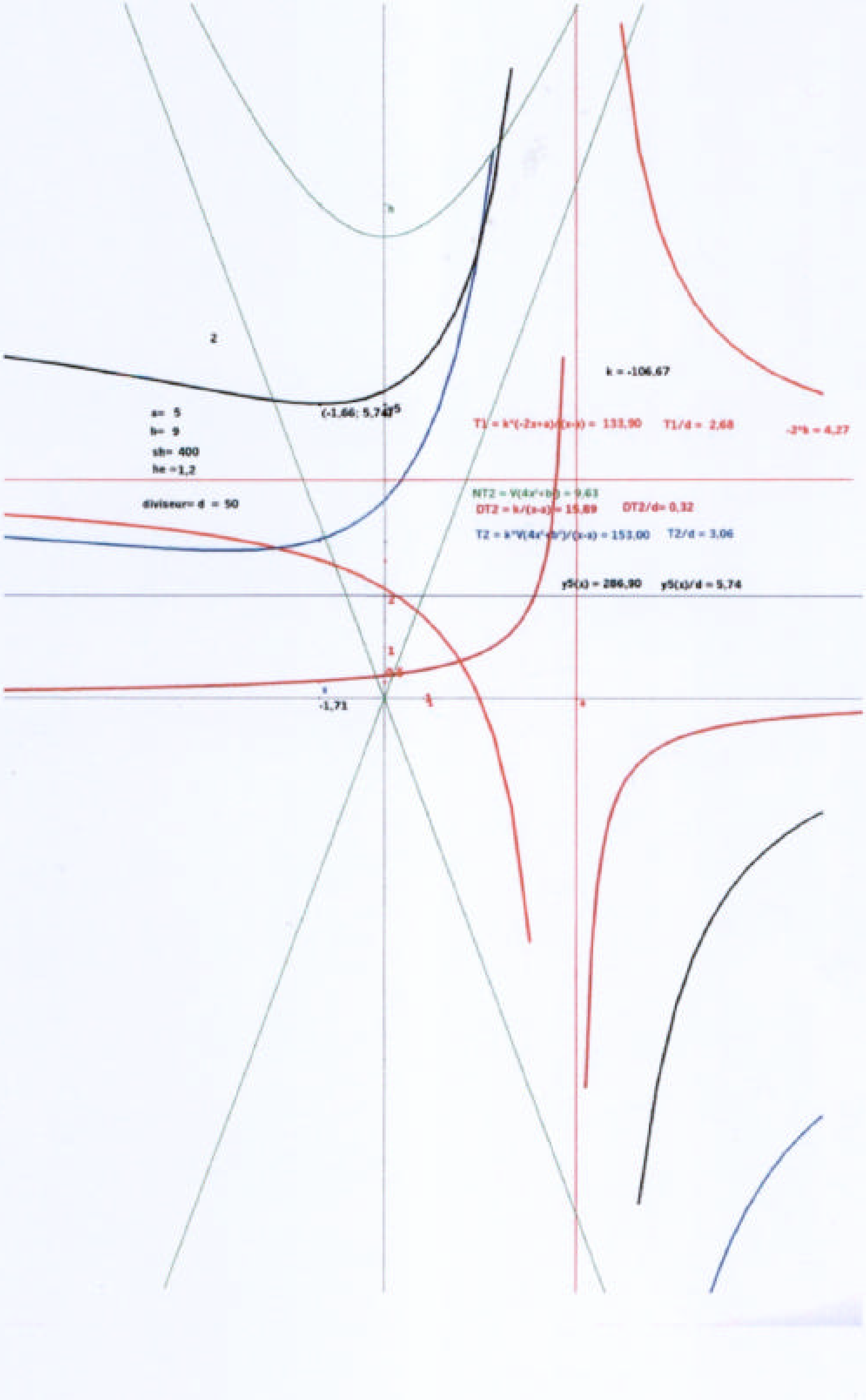











2
k = -106,67
(-1,66; 5,74)
a= 5
b= 9
sh= 400
he =1,2
T1/d = 2,68
-2*k = 4,27
diviseur= d = 50
DT2/d= 0,32
T2/d = 3,06
y5(x) = 286,90
y5(x)/d = 5,74
-1,71