Algebra leren met deTI-89

Werkgroep T3-symposium Leuven
24 - 25 augustus 2001

Doel

Reflecteren op het leren van algebra in een computeralgebra-omgeving, en in het bijzonder op het omgaan met variabelen en parameters.
LET OP: Deze werkgroep is een aangepaste herhaling van de gelijknamige werkgroep van het T3 symposium in Oostende in augustus 2000.

Programma

1. Inleiding (15')
2. Werken in groepjes aan opgaven uit lesmateriaal (50')
3. Nabespreken paragraaf 1 aan de hand van leerlingenuitwerkingen en theorie over instrumentatie (25')

Bij 2. Werken in groepjes aan opgaven uit lesmateriaal

- De opgaven uit paragraaf 1 en 2 komen uit het pakket 'Veranderlijke Algebra' dat ontwikkeld is in het kader van het project 'Algebra leren in een computeralgebra omgeving' dat aan het Freudenthal Instituut wordt uitgevoerd. De opgaven uit paragraaf 3 zijn afkomstig uit nascholingsmateriaal van het Freudenthal Instituut. De laatste opgave van 4 is overgenomen uit een experimenteel eindexamen in Denemarken.
- Werk deze fragmenten één voor één door in twee fasen:
  - Eerst met de ogen van een *leerling*. Welke vaardigheid en deskundigheid heeft u bij het oplossen van de opgaven nodig? Let met name op het gebruik van letters hierbij.
  - Ten tweede vanuit het perspectief van de *docent*. Bespreek met elkaar welk beeld de leerlingen moeten hebben van variabelen en parameters om de opgaven tot een goed einde te brengen.
- Voor de eerste paragraaf heeft u het programma 'schiet' nodig.

Bij 3. Nabespreking

- In de nabespreking wordt met name ingegaan op de opgaven uit de tweede paragraaf.
- Na afloop kunt u de belangrijkste bevindingen van het klasse-experiment waarop deze werkgroep is gebaseerd nalezen in de artikelen na de opgaven:
  Drijvers, P. en Van Herwaarden, O. (2000). Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs* 20(1), 38 - 43.
  Drijvers, P. (2001). *Instrumentatie van algebraïsche substitutie met een computeralgebra machine*. Paper gepresenteerd op de Onderwijs Research Dagen 2001, 27-06-2001, Amsterdam.

Paul Drijvers
Freudenthal Instituut
APS

1 Schieten en schuiven op de TI-89

Je gaat het spelletje ‘Schiet’ spelen op de TI-89. Eerst speel je het spel. Daarna kijk je erop terug om het verband te leggen met de wiskunde.

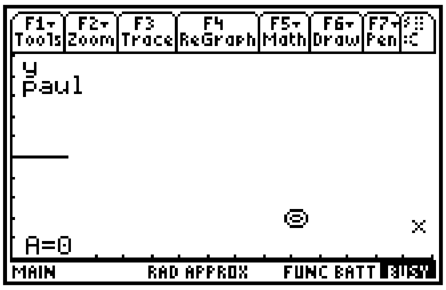
voorbereidingen

1 a. Zorg ervoor dat het spel op je TI-89 aanwezig is.
b. Je gaat het spel samen met buurman/vrouw op één machine spelen.
Typ in het HOME-scherm in: schiet(). Let op het sluithaakje!
Je kunt het commando schiet() ook uit VAR-LINK halen.
c. Meld de twee spelers aan met F1 optie 1 en voer de namen in.

spelen zonder coördinaten

d. Kies F2 optie 1: spelen zonder coördinaten.

Je ziet een scherm van [0, 15] bij [0, 10] met aan de rechterzijde een doel. De ‘loop van het geschut’ zie je links. Het is een stukje van de grafiek van de functie Y1 met Y1 = A*X + 5. Linksonder in beeld staat de huidige waarde van A. Linksboven zie je de naam van de speler die aan de beurt is.



Met ▼ en ▲ kun je de ‘loop’ richten op het doel. Daardoor verandert de waarde van A. Met ENTER schiet je. Raak je het doel, dan krijg je 10 punten. Een schampschot geeft 5 punten.
De twee spelers lossen om de beurt een schot, elk 5 keer. Dan verschijnt de eindscore in beeld.

2 Speel het spel enkele keren met een medeleerling.

spelen met coördinaten

3 a. Kies vervolgens F2 optie 2: Met coordinaten.
Je krijgt dan ook de coördinaten van het doel in beeld.
b. Speel het spel nu niet tegen elkaar maar met elkaar.
Probeer samen een maximale score uit 5 schoten te halen.
c. Hoe kun je geschikte A-waarde uit de coördinaten van het doel berekenen?

het spel afsluiten

4 a. Sluit het spel netjes af met F3 optie 1: Stoppen.
b. Tussentijds afbreken van het spel gaat met ON, gevolgd door ESC.
Als je zo het spel afbreekt, moet je nog twee zaken goed instellen:
- Kies in het HOME-scherm voor F6 optie 1: Clear a-z.
- Kies MODE en stel bij F2 Exact/Approx in op 1:AUTO.

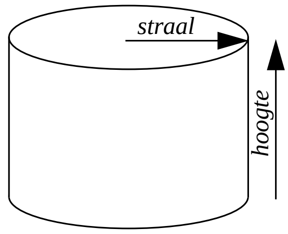
nadenken over het spel

5 Welke wiskundige conclusies kun je trekken uit het spel?
Schrijf die in je schrift.

6 Wat gebeurt er met de grafiek van $y = a \cdot x + 5$ als a groter wordt?

2 Substitutie

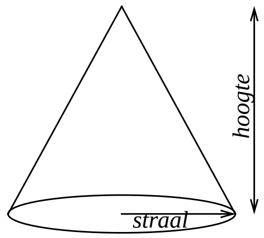
1 Het volume van een cilinder is gelijk aan de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte, afgekort tot v = g * h.
De oppervlakte van het grondvlak is π maal het kwadraat van de straal r, dus
g = π * r^2
Voer deze formules in en substitueer de formule van de oppervlakte in die van de inhoud. π krijg je met 2nd ^.



2 De inhoud van de kegel hiernaast is de oppervlakte van het grondvlak keer de hoogte gedeeld door 3, dus
$inhoud = \frac{1}{3} \cdot grondvlak \cdot hoogte$
De oppervlakte van het grondvlak is π maal het kwadraat van de straal, dus
$grondvlak = \pi \cdot straal^2$

a. Bereken de inhoud van de kegel als de straal gelijk is aan 5 en de hoogte 9 is.

b. Stel je kent de hoogte en de straal niet. Je weet wel dat de hoogte gelijk is aan het dubbele van de straal.
Welke formule voor de inhoud kun je dan opstellen?

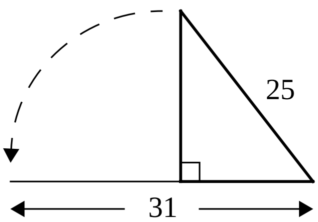


3 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang.
De schuine zijde heeft een lengte van 25.

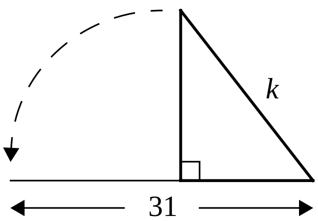
a. Hoe lang zijn de rechthoekszijden?

b. Los het probleem ook op als de twee rechthoekszijden samen 35 zijn in plaats van 31.

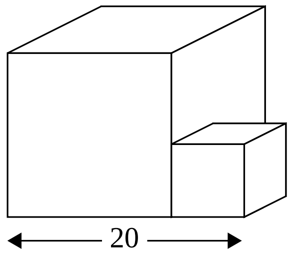
c. Los het probleem in het algemeen op, dat wil zeggen zonder dat de getallen 31 en 25 gegeven zijn.



4 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang.
De schuine zijde heeft een lengte van *k*.
De vraag is, hoe lang de rechthoekszijden zijn.
Voor welke waarden van *k* heeft dit probleem geen oplossing?



5 **a.** De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is 2240. Hoe groot is de ribbe van de grootste kubus?



b. De som van twee getallen is s en de som van hun derdemachten is d.
Druk die getallen uit in s en d.
Schrijf de formules in zo eenvoudig mogelijke vorm.

c. Hoe kun je in het antwoord van **b** zien, dat de twee oplossingen symmetrisch liggen rond $\frac{1}{2}s$?

6 De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is d.
Welke waarden kan de totale inhoud d aannemen?

historische noot:
De Babyloniers

Hierboven zie je een Babylonische kleitablet waarin spijkerschrift is geschreven, toen de klei nog nat was. Dit tablet is waarschijnlijk tussen 1900 en 1600 voor Christus gemaakt.
Sommige van dergelijke tabletten bevatten wiskundige problemen, bijvoorbeeld in de stijl van:
Van een rechthoekig stuk land kennen we de oppervlakte (540 m^2) en de lengte van de diagonaal (39 m). Bereken de afmetingen van het stuk land.

7 Probeer deze opgave op te lossen.

8 Een ander Babylonisch probleem, op eigentijdse manier geformuleerd:
Voor welke waarden van x en y geldt:

$$x + y = 28$$
$$x - y + x.y = 183?$$

Bron: pakket ‘Veranderlijke Algebra’, Freudenthal Instituut, Utrecht

3 Raken aan een bundel

1 Gegeven is de verzameling functies $y_n(x) = x \cdot (n + 1 - x^n)$ met n = 1, 2, 3, 4, ...

a. Teken de grafieken van de functies y_1, ..., y_9 op het scherm (met x-interval [0 , 2], y-interval [0 , 10]).
Wat valt op als je naar de toppen kijkt? Bewijs je vermoeden.

b. Als we n niet alleen de natuurlijke getallen, maar alle reële postieve getallen laten doorlopen, dan ‘omhullen’ de grafieken een nieuwe kromme die min of meer al op het scherm te zien is.
Een standaard methode om een vergelijking van die kromme te vinden is:

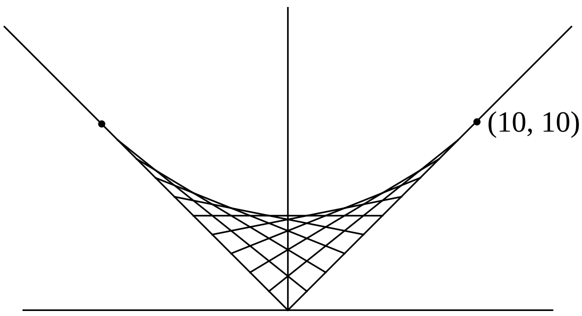
– differentieer $y_n(x)$ naar n

– elimineer n uit de vergelijkingen $y_n(x) = x \cdot (n + 1 - x^n)$ en $\frac{\partial}{\partial n} y_n(x) = 0$

Voer de eliminatie uit met de TI 89.

c. Zet de verkregen expressie in x in het functiebestand en controleer (althans optisch) of de kromme aan de negen eerder getekende krommen raakt.

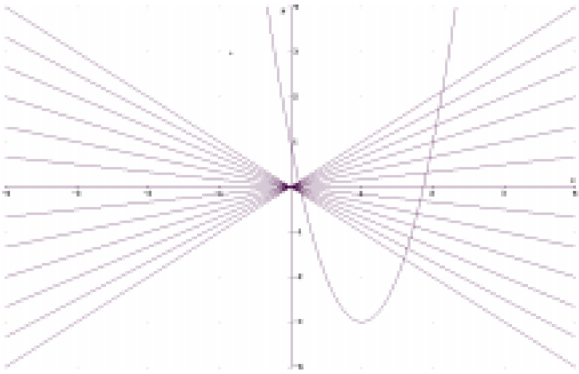
2 In de vorige opgave was de vraag om de formule te vinden van een kromme die aan een gegeven bundel raakt.
Pas de daar gepresenteerde methode toe om in te laten zien dat de lijnen in onderstaande figuur een parabool omhullen. Welke vergelijking heeft deze parabool?



Bron: nascholingsmateriaal van de cursus ‘wiskunde en ICT’ van het Freudenthal Instituut

4 Toegift

1 Een ‘waaier’ van lijnen



Hierboven staat de grafiek van de functie y met $y = 4x^2 - 8x + 1$.
Ook is een ‘waaier’ van lijnen door de oorsprong getekend. Zoals je ziet, varieert het aantal snijpunten dat deze lijnen hebben met de parabool. Vragen zijn nu:

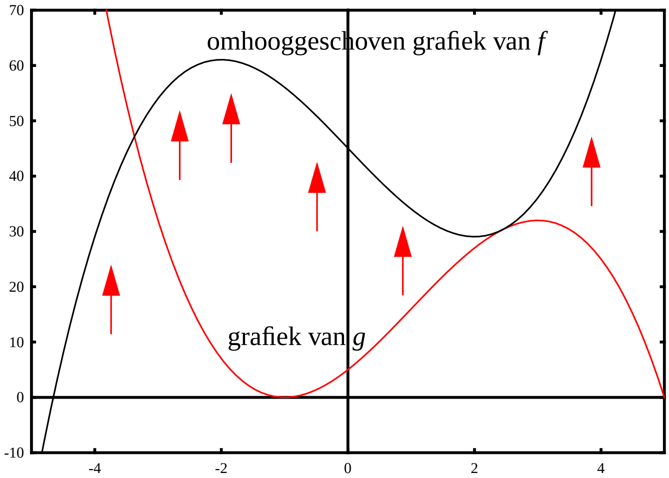
- Tussen welke waarden kan het aantal snijpunten variëren?
- Waarvan hangt het aantal snijpunten tussen lijn en kromme af?
- Bepaal een regel die aangeeft hoe je uit de vergelijking van de lijn het aantal snijpunten met de kromme kunt afleiden.

2 Gegeven zijn functies f en g met

$$f(x) = x^3 - 12x + 16$$

en $$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$$

In de figuur hieronder staat de grafiek van g. De grafiek van f is echter zodanig omhoog geschoven, dat deze de grafiek van g raakt. De vraag is in welk punt de grafieken elkaar raken.



Bron: experimenteel eindexamen waarbij leerlingen het computeralgebra pakket Mathematica gebruiken, Denemarken, 1997.