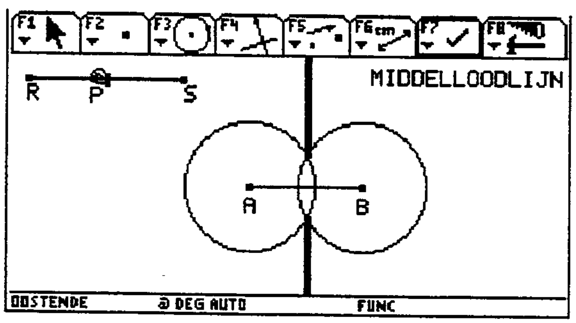
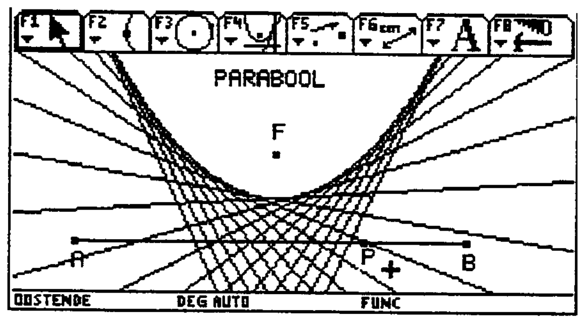
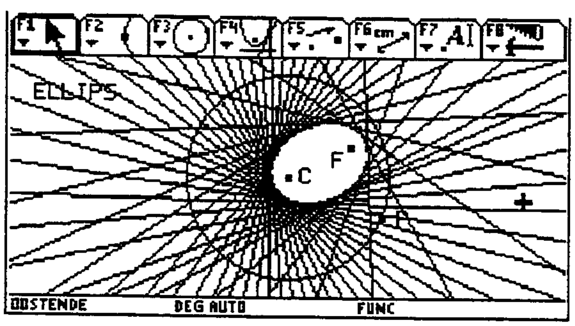
T³ E U R O P E

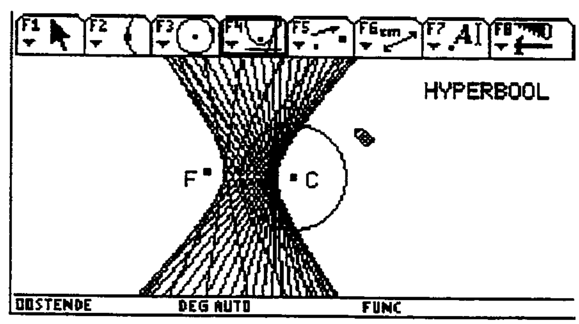
MEETKUNDE
ANDERS BEKEKEN

TOEPASSINGEN OP EEN TI-92





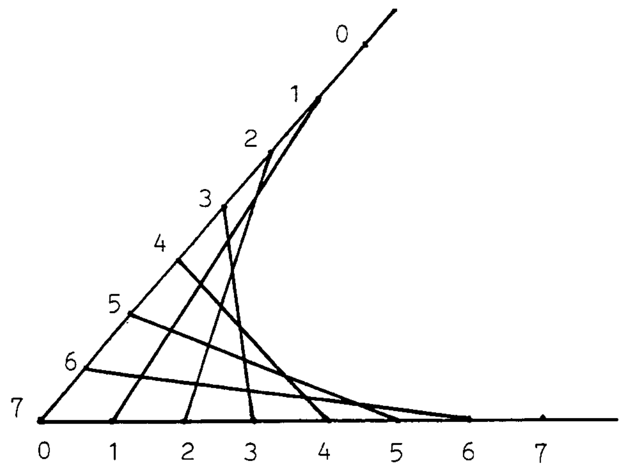




dr.Luc Gheysens

Verantwoording

Jaren geleden ontdekte ik in een boekje over 'speelse wiskunde' een eenvoudige en elegante manier om een parabool te tekenen. Teken daarvoor twee elkaar snijdende rechten en duid daarop vanaf het snijpunt een aantal punten aan die telkens op gelijke afstanden van elkaar gelegen zijn. Nummer vervolgens de punten in tegenovergestelde richting, zoals op de onderstaande tekening. De rechten die punten met hetzelfde nummer met elkaar verbinden, blijken een parabool uit te tekenen.



Deze parabool wordt *de omhullende* van de familie rechten genoemd. In feite wordt op die manier een parabool niet als een verzameling punten getekend, maar als een verzameling raaklijnen : zowel de twee oorspronkelijke rechten als elke andere getekende rechte raakt aan de parabool.

Het meetkundepakket CABRI laat toe computertekeningen te maken van meetkundige plaatsen als verzamelingen van punten en als verzamelingen van rechten (omhullenden). In deze bijdrage wordt een poging ondernomen om kegelsneden op beide manieren te schetsen op een TI-92-toestel. De middelloodlijn van een lijnstuk speelt hierbij een fundamentele rol. Naast de klassieke definities van ellips, hyperbool en parabool (blz. 4), worden de kegelsneden gedefinieerd als omhullenden van een familie middelloodlijnen (blz. 8-12). In de opdrachten 5, 6 en 7 op het einde wordt uitgelegd hoe kegelsneden ook kunnen worden geschetst als omhullenden van een familie cirkels.

Misschien geraak ook jij in de ban van deze 'MEETKUNDE ANDERS BEKEKEN'!

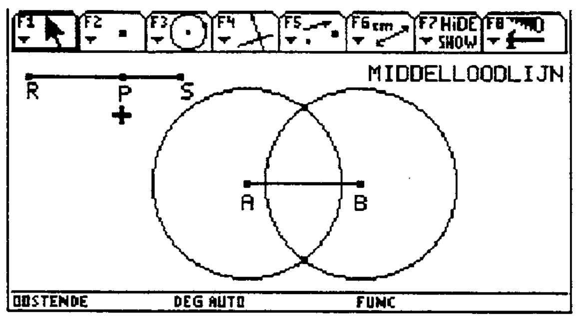
Dank aan collega Guido Herweyers voor de talrijke 'omhullende' suggesties.

dr. Luc Gheysens
T^3-Europe Symposium
Oostende, augustus 1998

1. De middelloodlijn van een lijnstuk

De middelloodlijn van een lijnstuk [AB] is de meetkundige plaats van de punten M van het vlak waarvoor de afstanden tot A en B gelijk zijn.

Om overeenkomstig deze definitie punten van de middelloodlijn van een lijnstuk [AB] te construeren op een TI-92, volstaat het de snijpunten van twee cirkels met een gelijke straal en als middelpunten A en B te bepalen. Wanneer de straal varieert, bekomt men een verzameling punten op de middelloodlijn van [AB].

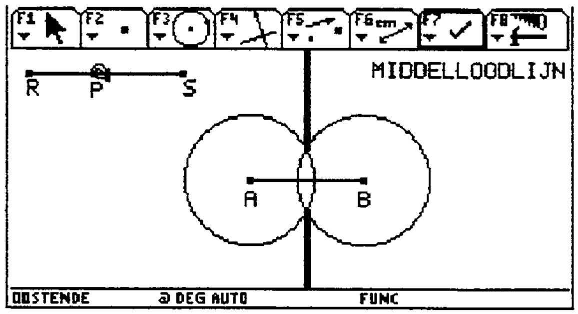


Voer daarvoor de volgende reeks opdrachten uit.

[APPS][8:Geometry][3:New]	Kies bij *Variable* een passende naam en druk tweemaal op [ENTER].
[F2][5:Segment]	Teken een lijnstuk [AB] midden op het scherm. Via [F7][4:Label] kan je de punten benoemen.
[F2][5:Segment]	Teken een lijnstuk [RS] in de linkerbovenhoek.
[F2][2:Point on Object]	Duid een punt P aan op [RS].
[F4][8:Compass]	Teken een cirkel met straal $\lvert RP \rvert$ en middelpunt A. Wijs daarvoor eerst R aan, daarna P en tenslotte A. Bevestig telkens met [ENTER].
[F4][8:Compass]	Herhaal deze procedure voor de cirkel met straal $\lvert SP \rvert$ en middelpunt B.
[F2][3:Intersection Point]	Duid de twee snijpunten van de cirkels aan en bevestig telkens met [ENTER]. Hopelijk koos je de straal van de cirkels groot genoeg!

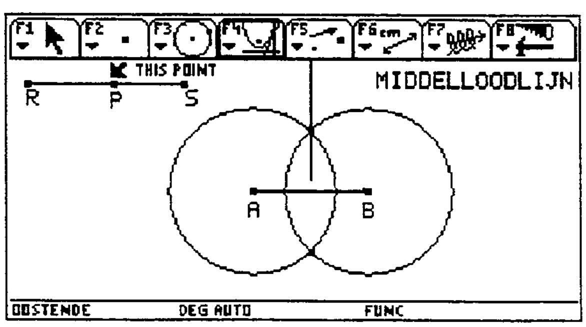
Drie mogelijkheden om de meetkundige plaats te construeren.

1. Puntsgewijze constructie.
   Gebruik de instructie [F7][2:Trace On/Off] en duid de twee snijpunten aan van de cirkels. Druk telkens op [ENTER]. Verplaats vervolgens de cursor tot op het punt P, hou het handje (de toets linksboven) ingedrukt en verplaats tegelijk de cursor naar links of naar rechts via de cursorbesturingstoets.
   Via [CLEAR] kan je de getekende punten weer wissen.



2. Constructie via animatie.
   Verifieer via [F7][2:Trace On/Off] dat de snijpunten van de cirkels nog geselecteerd zijn. Kies dan de instructie [F7][3:Animation], verplaats de cursor naar P en gebruik tegelijkertijd het handje en de cursorbesturingstoets om de animatie te starten.
   Met [ENTER] wordt de animatie onderbroken (pauze) en via [ENTER] wordt ze opnieuw gestart.
   Met [ON] breek je de animatie definitief af.
   Via [CLEAR] worden de punten van de middelloodlijn gewist.

3. Automatische constructie van de meetkundige plaats.
   Via [F4][A:Locus] wordt de meetkundige plaats van een gekozen punt M geconstrueerd wanneer een punt P een kromme doorloopt. Dat punt P moet dan wel via [F2][2:Point on Object] op de passende kromme gekozen zijn. Duid daarom eerst het punt van de meetkundige plaats aan (één van de snijpunten van de cirkels), bevestig met [ENTER], duid dan het punt P aan en bevestig weer met [ENTER].
   Via [♦][Z] kan de laatste actie geannuleerd worden.
   Om een meetkundige plaats (LOCUS) te wissen gebruik je de instructie [F8][7:Delete]. Verplaats dan de cursor naar die meetkundige plaats, bevestig de keuze met [ENTER] en druk dan op de toets met het pijltje (←).



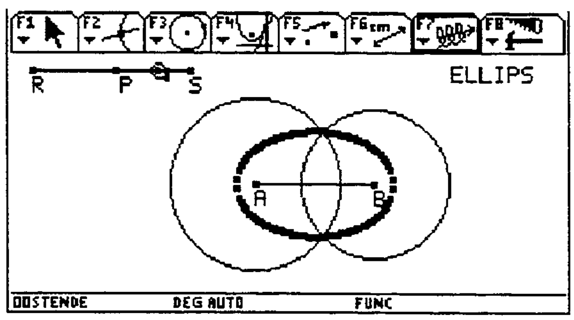
2. Kegelsneden als meetkundige plaatsen

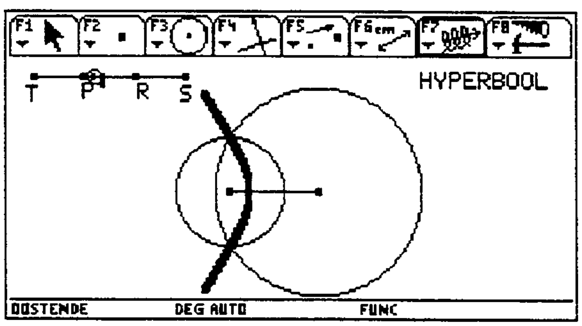
Een ellips is de meetkundige plaats van de punten M van het vlak waarvoor de som van de afstanden tot twee gegeven punten A en B gelijk is aan een gegeven getal k, met $k > |AB|$.

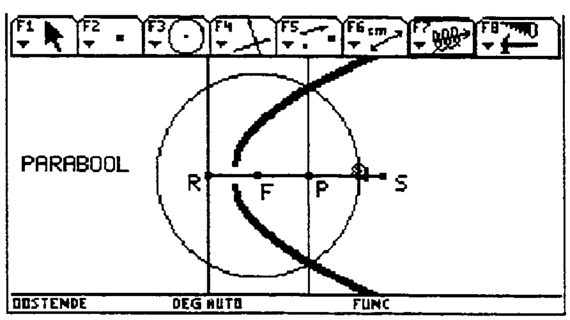
Een hyperbool is de meetkundige plaats van de punten M van het vlak waarvoor de absolute waarde van het verschil van de afstanden tot twee gegeven punten A en B gelijk is aan een gegeven getal k, met $k < |AB|$.

Een parabool is de meetkundige plaats van de punten M van het vlak waarvoor de afstanden tot een gegeven punt F en een gegeven rechte f gelijk zijn, met $f \notin F$.

Maak gebruik van deze definities om de kegelsneden te construeren op een TI-92. De onderstaande figuren kunnen daarbij als inspiratiebron worden gebruikt.







Hints. Voor de ellips werd gebruik gemaakt van de instructie [F4][8:Compass] om cirkels te construeren met A en B als middelpunt en |RP| en |SP| als straal.

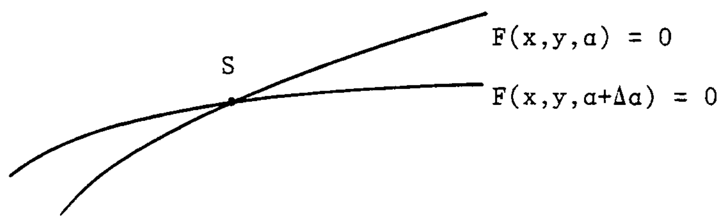
Voor de hyperbool zijn de stralen van de twee cirkels eveneens |RP| en |SP|. Het punt P beweegt op het lijnstuk |RT|. Denk eraan om dit lijnstuk apart te definiëren vooraleer het punt P erop te kiezen via [F2][2:Point on Object]. De twee takken van de hyperbool moeten apart geconstrueerd worden.

Bij de parabool is de loodlijn f op het lijnstuk [RS] in het punt R precies de richtlijn van de parabool. Door P werd via [F4][2:Parallel Line] de rechte evenwijdig met f getekend. Via [F4][8:Compass] werd de cirkel geconstrueerd met middelpunt F (het brandpunt van de parabool) en straal |RP|. Het punt P doorloopt het lijnstuk |RS|.

3. De omhullende van een familie krommen

a. Definitie

Neem aan dat $F(x,y,\lambda) = 0$ de vergelijking is van een familie krommen in het vlak met λ als parameter. Wanneer aan men aan deze parameter eerst de waarde α toekent en daarna de waarde $\alpha + \Delta\alpha$, bekomt men twee naburige exemplaren uit die familie.



Als S een snijpunt is van deze twee krommen en als $\Delta\alpha$ tot nul nadert, zal S meestal tot een limietstand M naderen. Dit punt M noemt men *het karakteristiek punt* van de familie op de kromme met parameterwaarde α.

De verzameling van de karakteristieke punten van een familie krommen noemt men de omhullende van die familie.

b. De cartesische vergelijking van de omhullende

De coördinaten van het snijpunt S voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 \\ F(x,y,\alpha+\Delta\alpha) = 0 \end{cases}$$

en bijgevolg ook aan het gelijkwaardig stelsel

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 \\ \dfrac{F(x,y,\alpha+\Delta\alpha) - F(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha} = 0 \,. \end{cases}$$

Wanneer $\Delta\alpha$ nadert tot nul blijkt dat de coördinaten van het karakteristieke punt M voldoen aan het stelsel

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 \\ \lim\limits_{\Delta\alpha \to 0} \dfrac{F(x,y,\alpha+\Delta\alpha) - F(x,y,\alpha)}{\Delta\alpha} = 0 \end{cases}$$

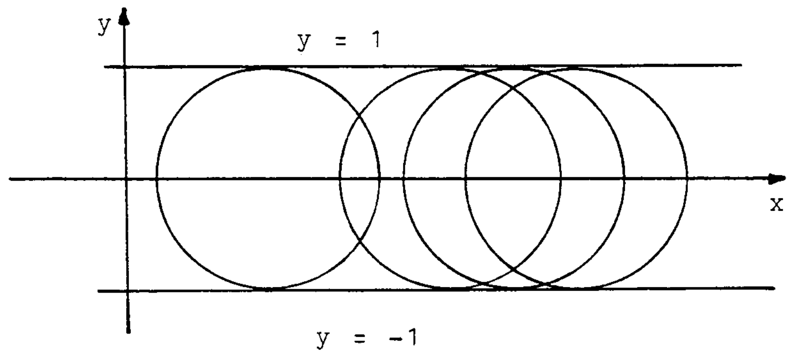
of aan het stelsel

$$\begin{cases} F(x,y,\alpha) = 0 & (1) \\ F'_\alpha(x,y,\alpha) = 0 & (2). \end{cases}$$

Deze twee vergelijkingen vormen een stel parametervergelijkingen van de omhullende. Eliminatie van de parameter α uit (1) en (2) levert de cartesische vergelijking op van de omhullende.

c. Voorbeeld

$(x - \alpha)^2 + y^2 = 1$, met $\alpha \in \mathbb{R}$, stelt een familie cirkels voor met straal $r = 1$ en waarbij het middelpunt op de x-as gelegen is.



De cartesische vergelijking van de omhullende van deze familie cirkels bekomt men door α te elimineren uit

$$\begin{cases} (x - \alpha)^2 + y^2 = 1 & (1) \\ -2(x - \alpha) = 0 & (2). \end{cases}$$

Het resultaat is $y^2 = 1$. De omhullende bestaat bijgevolg uit de rechten $y = 1$ en $y = -1$.

Merk op dat de omhullende van een familie krommen raakt aan elk exemplaar van die familie.

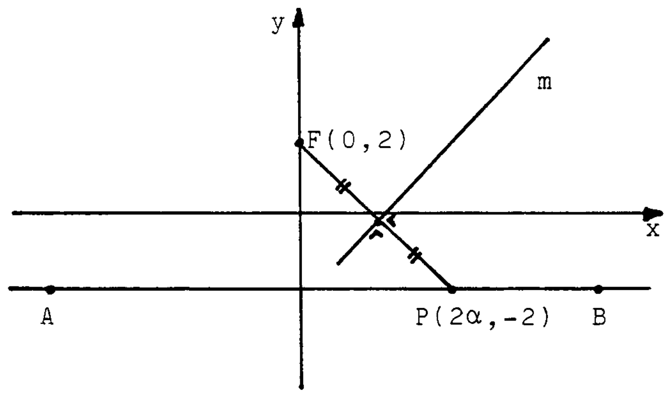
4. Kegelsneden als omhullenden van een familie rechten

4.1. Parabool

Teken een rechte AB en een vast punt F dat niet op AB gelegen is. Kies een willekeurig punt P op AB. De omhullende van de familie middelloodlijnen van het lijnstuk [FP] is een parabool.

a. Analytisch bewijs

Voor de keuze van het assenstelsel en de coördinaten van F en P verwijzen we naar de onderstaande figuur.



Dan is de vergelijking van de middelloodlijn m van [FP] : $2y - \alpha x + \alpha^2 = 0$, zodat men om de cartesische vergelijking van de omhullende te bekomen de parameter α moet elimineren uit

$$\begin{cases} 2y - \alpha x + \alpha^2 = 0 \\ -x + 2\alpha = 0\ . \end{cases}$$

Hieruit vindt men de vergelijking van een parabool : $y = x^2/8$ met brandpunt F en richtlijn AB.

Opmerkingen.

1. Het punt M van de rechte m dat op de parabool gelegen is, is het snijpunt van m met de loodlijn in P op de rechte AB.
2. m is de raaklijn in M aan de parabool. Dit kan men analytisch verifiëren of afleiden uit de eigenschap dat de raaklijn en de normaal in een punt M van een parabool de bissectrices zijn van MF en de evenwijdige door M met de symmetrie-as.

b. Constructie op een TI-92

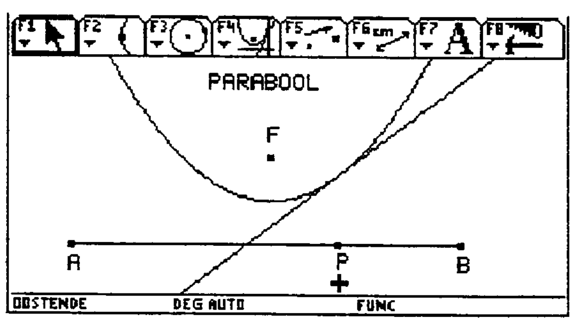
Controleer vooraf de instellingen van het toestel via [♦][F] :

# of Locus Points	:	dit bepaalt het aantal gewenste punten van de meetkundige plaats (kies bijvoorbeeld 20).
Link Locus Points	:	kies 'ON', dan worden de getekende punten met elkaar verbonden.
Envelope of Lines	:	kies 'ON' dan wordt de omhullende van de geselecteerde familie rechten getekend.

Verlaat dit menu via [ESC].

Voer dan de volgende reeks opdrachten uit.

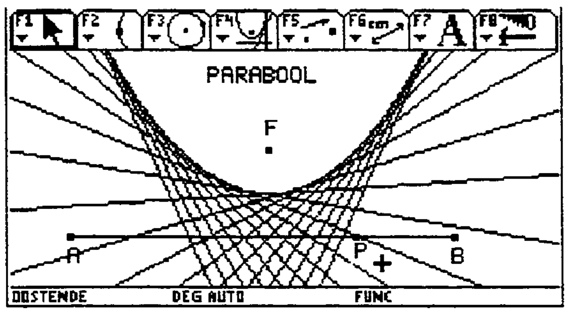
[APPS][8:Geometry][3:New]	Kies bij *Variable* een passende naam en druk tweemaal op [ENTER].
[F2][1:Point]	Teken een punt F.
[F2][5:Segment]	Teken een lijnstuk [AB].
[F2][2:Point on Object]	Kies een punt P op [AB].
[F4][4:Perpendicular Bisector]	Teken de middelloodijn van [FP]. Wijs hiervoor eerst F aan, dan P en bevestig telkens met [ENTER].
[F4][A:Locus]	Wijs eerst de middelloodlijn aan en dan het punt P. Bevestig telkens met [ENTER].



Door het punt P over [AB] te verplaatsen kan men verifiëren dat de getekende rechte telkens raakt aan de parabool.

Wis de parabool uit met [♦][Z] en verander één van de instellingen onder [♦][F] : maak onder de rubriek *Envelope of Lines* de keuze *OFF* en bevestig met tweemaal [ENTER].

Kies opnieuw [F4][A:Locus], wijs weer de middelloodlijn aan en dan het punt P. Bevestig telkens met [ENTER]. In plaats van de omhullende wordt nu de familie middelloodlijnen getekend. Zo wordt de parabool als een familie raaklijnen getekend. Door nu op [CLEAR] te drukken wordt de familie rechten opnieuw getekend.

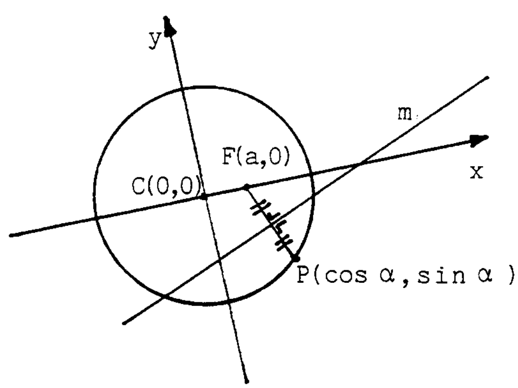


4.2. Ellips

Teken een cirkel met middelpunt C, kies een vast punt F binnen de cirkel en een willekeurig punt P op de cirkelomtrek. De omhullende van de familie middelloodlijnen van [FP] is een ellips.

a. Analytisch bewijs

Voor de keuze van het assenstelsel en van de coördinaten van C, F en P verwijzen we naar de onderstaande figuur. Door de keuze van F binnen de cirkel is $0<a<1$.



Dan is de vergelijking van de middelloodlijn m van het lijnstuk [FP] : $\sin\alpha.y + \cos\alpha.x = ax - a^2/2 + 1/2$, zodat men, om de cartesische vergelijking van de omhullende te bekomen, de parameter α moet elimineren uit

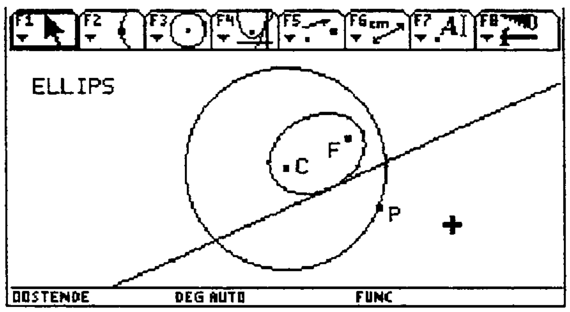
$$\begin{cases} \sin\alpha.y + \cos\alpha.x = ax - a^2/2 + 1/2 \\ \cos\alpha.y - \sin\alpha.x = 0. \end{cases}$$

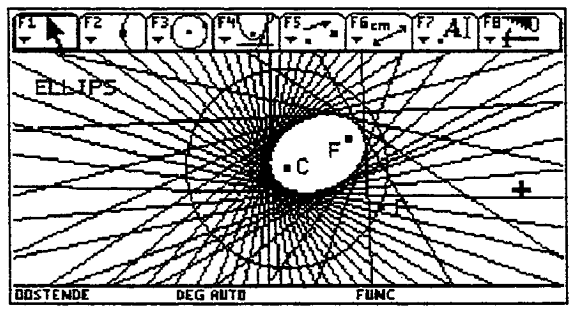
Kwadrateer hiervoor beide vergelijkingen en tel ze bij elkaar op. Na wat rekenwerk bekomt men uiteindelijk de gezochte cartesische vergelijking :

$$4(1-a^2)(x - a/2)^2 + 4y^2 = 1 - a^2.$$

Dit is een ellips met middelpunt (a/2,0) en als brandpunten C(0,0) en F(a,0).

Om een ellips te schetsen op een TI-92 volgens het zopas beschreven principe kunnen de onderstaande figuren als inspiratiebron dienen.





Opmerkingen.

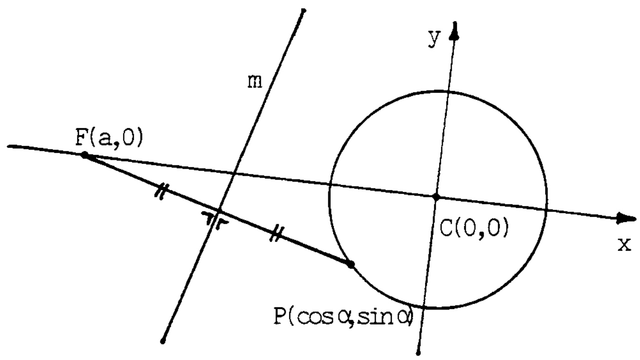
1. Het punt M van de rechte m dat op de ellips gelegen is, is het snijpunt van m met PC. Dit volgt uit het feit dat $|CM| + |FM| = |CP|$ en dit is precies de straal van de cirkel.
2. m is de raaklijn in M aan de ellips. Dit kan men analytisch verifiëren of afleiden uit de eigenschap dat de raaklijn en de normaal in een punt M van een ellips de bissectrices zijn van het rechtenpaar door M en de brandpunten C en F van de ellips.

4.3. Hyperbool

Teken een cirkel met middelpunt C, kies een vast punt F buiten de cirkel en een willekeurig punt P op de cirkelomtrek. De omhullende van de familie middelloodlijnen van [FP] is een hyperbool.

a. Analytisch bewijs

Voor de keuze van het assenstelsel en van de coördinaten van C, F en P verwijzen we naar de onderstaande figuur. Door de keuze van F buiten de cirkel is $|a|>1$.

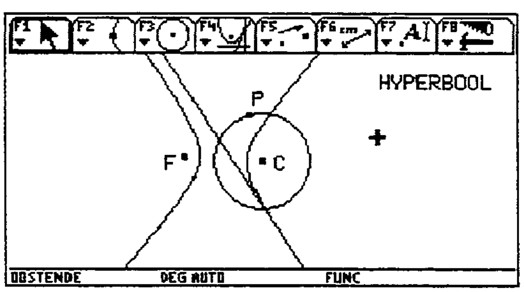


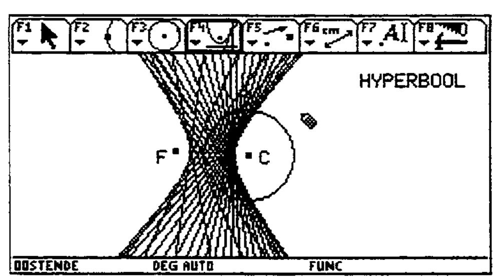
Via analoog rekenwerk als voor een ellips, bekomt men nu als cartesische vergelijking van de omhullende :

$$4(a^2-1)(x - a/2)^2 - 4y^2 = a^2 - 1.$$

Dit is een hyperbool met middelpunt (a/2,0) en als brandpunten C(0,0) en F(a,0).

Om een hyperbool te schetsen op een TI-92 volgens het zopas beschreven principe kunnen de onderstaande figuren als inspiratiebron dienen.





Opmerkingen.

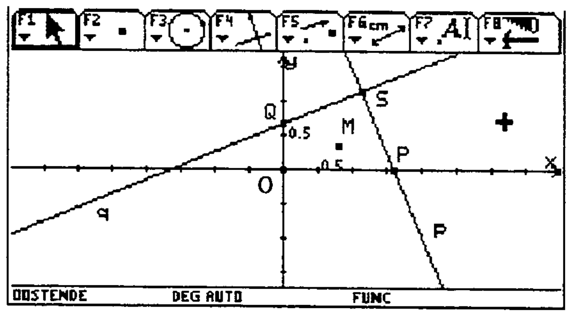
1. Het punt M van de rechte m dat op de hyperbool gelegen is, is het snijpunt van m met PC. Dit volgt uit het feit dat $||CM| - |FM|| = |CP|$ en dit is precies de straal van de cirkel.
2. m is de raaklijn in M aan de hyperbool om dezelfde reden als bij een ellips.

5. TI-92-opdrachten

Opdracht 1. Twee rechten p en q snijden elkaar orthogonaal in een punt S dat niet op één van de coördinaatassen gelegen is. p snijdt de x-as in P en q snijdt de y-as in Q.

Construeer de meetkundige plaats van het midden M van [PQ] wanneer het rechtenpaar (p,q) wentelt rond S.

Toon analytisch aan dat die meetkundige plaats de middelloodlijn is van het lijnstuk [OS].

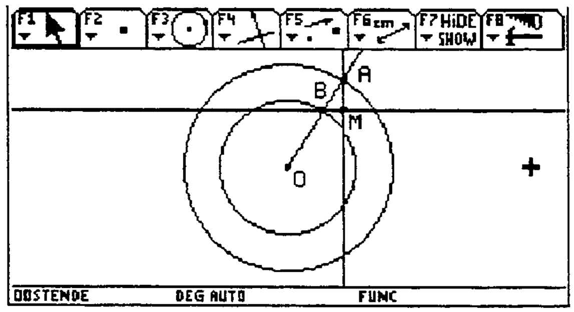


Hints. De geijkte coördinaatassen worden op het scherm getekend nadat men via [♦][F] onder de rubriek *Coordinate Axes* heeft gekozen voor *RECTANGULAR*.

Kies eerst het punt S en een P op de x-as ([F2][2:Point on Object]). Teken de rechte PS en daarna de loodlijn in S op PS. Duid het punt Q aan met [F2][3:Intersection point]. Bepaal tenslotte het midden M van [PQ] via [F4][3:Midpoint] : hiervoor volstaat het de twee eindpunten van het lijnstuk aan te wijzen en telkens op [ENTER] te drukken.

Opdracht 2. Teken twee concentrische cirkels en een halfrechte door hun middelpunt O. Deze halfrechte snijdt de grootste cirkel in A en de kleinste in B. Teken een horizontale rechte door B en de loodlijn erop door A.

Construeer de meetkundige plaats van het snijpunt M van deze twee rechten wanneer de halfrechte wentelt rond O.



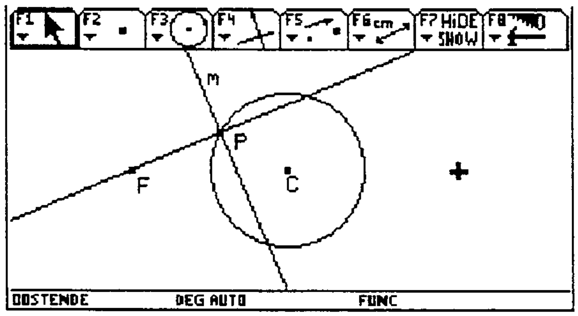
Hints. Via [F2][6:Ray] kan de halfrechte getekend worden.

De opdracht [F4][A:Locus] kan hier niet uitgevoerd worden omdat er geen punt, dat via [F2][2:Point on Object] werd vastgelegd, op een kromme beweegt. Gebruik daarom [F7][2:Trace On/Off] om het punt M te selecteren. Geef eerst aan dat halfrechte moet wentelen rond O via [F1][2:Rotate] en wijs dan de halfrechte aan. Kies tenslotte [F3][3:Animation] en gebruik het handje in combinatie met de cursorbesturingstoets om de halfrechte in beweging te zetten.

Opdracht 3. Teken een cirkel met middelpunt C. Kies een vast punt F buiten de cirkel en een willekeurig punt P op de cirkelomtrek. Teken de loodlijn m in P op FP.

Construeer de omhullende van de familie rechten m, die ontstaat wanneer P de cirkel doorloopt.

Welk punt M van m ligt op de omhullende (en is dus het raakpunt met m als raaklijn)?

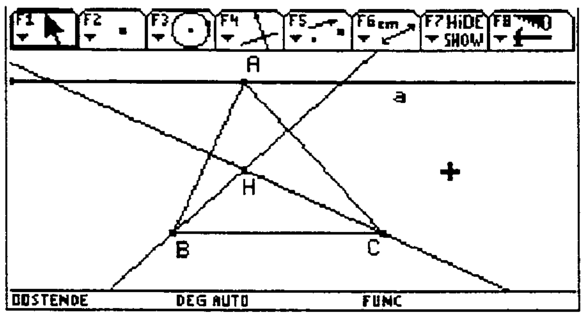


Opmerking. De voetpuntskromme van een gegeven punt t.o.v. een gegeven kromme is de meetkundige plaats van de loodrechte projectie van dat punt op een willekeurige raaklijn aan die kromme.

Wat is de voetpuntskromme van een brandpunt van een hyperbool t.o.v. deze hyperbool? En wat is het verband tussen deze opgave en de bovenstaande opdracht?

Opdracht 4. Teken een lijnstuk [BC] en een rechte a evenwijdig met BC. Kies een punt A op a.

Construeer de meetkundige plaats van het hoogtepunt H van driehoek ABC, wanneer A de rechte a doorloopt.

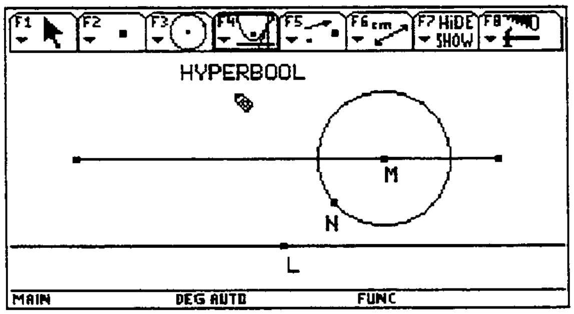


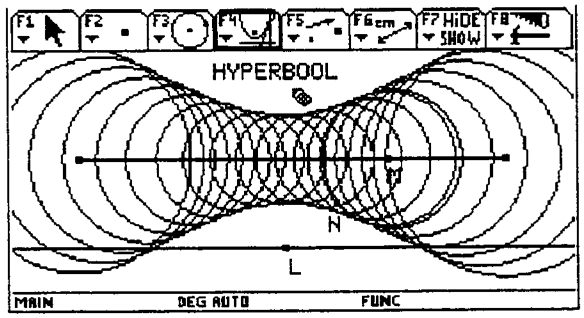
Hints. Wanneer de punten A, B en C gekozen zijn, kan de driehoek ABC worden getekend via [F3][3:Triangle]. Wijs dan achtereenvolgens elk hoekpunt aan en bevestig telkens met [ENTER].

Via [♦][F] kan men het gewenste aantal punten van de meetkundige plaats kiezen (maximaal 99) onder de rubriek *# of Locus Points*.

Opdracht 5. L is een vast punt op een gegeven rechte l en M is een punt op een rechte m, die parallel is met l. N is het midden van het lijnstuk [ML]. Toon aan dat de omhullende van de familie cirkels met middelpunt M en straal |MN|, die ontstaat wanneer M de rechte m doorloopt, een hyperbool is met L als brandpunt.

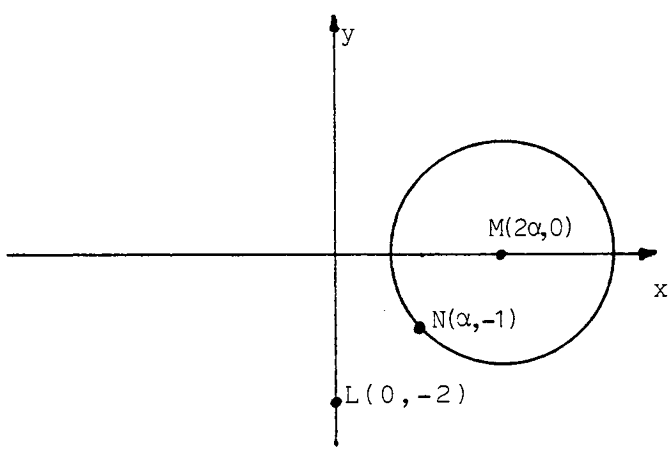
Constructie op een TI-92. (De rechte m werd vervangen door een lijnstuk).





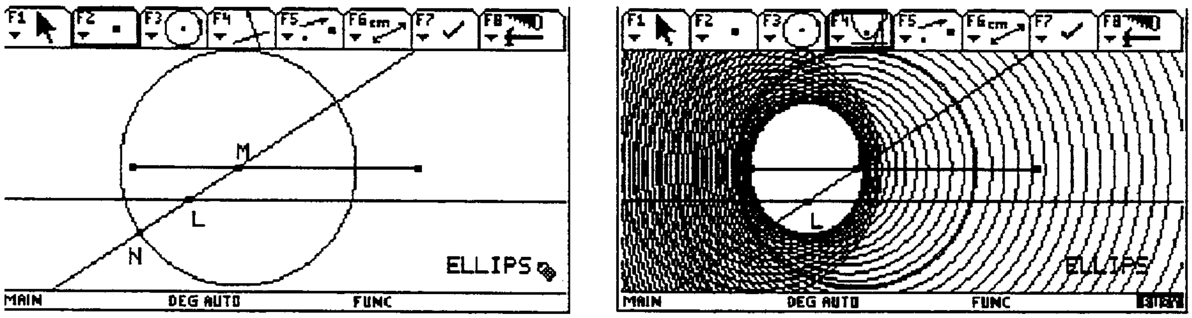
Berekening (analytisch).

Maak gebruik van het onderstaande assenstelsel om aan te tonen dat de omhullende de hyperbool is met als vergelijking $y^2 - x^2/3 = 1$.



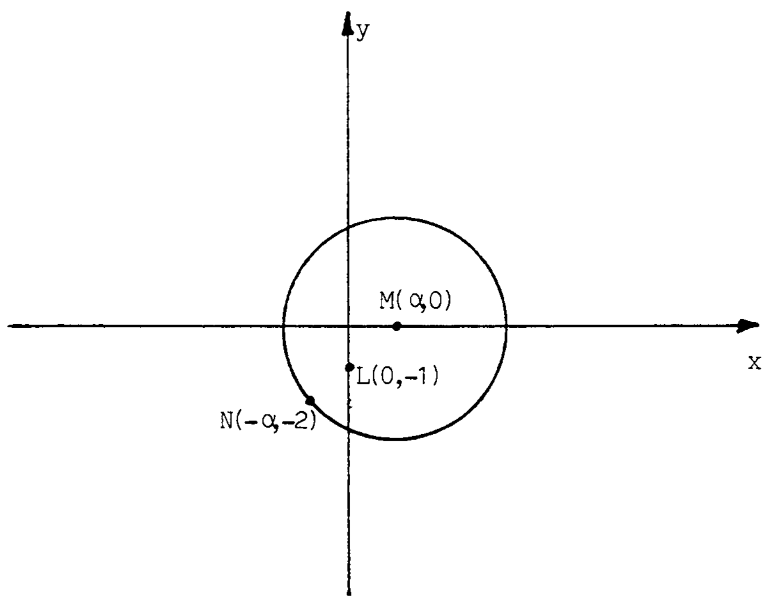
Opdracht 6. L is een vast punt op een gegeven rechte l en M is een punt op een rechte m, die parallel is met l. N is het punt zodat L het midden is van het lijnstuk [MN]. Toon aan dat de omhullende van de familie cirkels met middelpunt M en straal |MN|, die ontstaat wanneer M de rechte m doorloopt, een ellips is met L als brandpunt.

Constructie op een TI-92. (De rechte m werd vervangen door een lijnstuk).

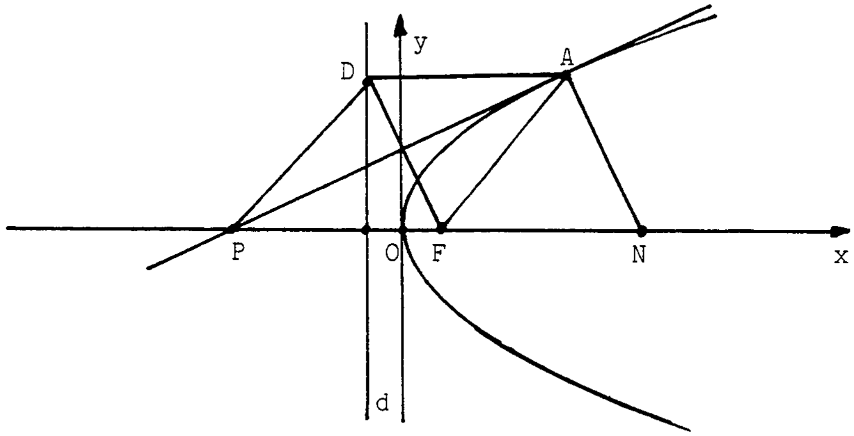


Berekening (analytisch).

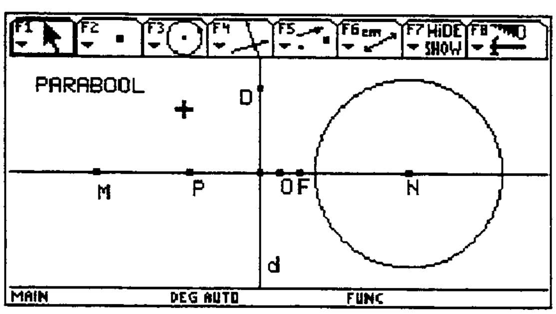
Maak gebruik van het onderstaande assenstelsel om aan te tonen dat de omhullende de ellips is met als vergelijking $x^2/3 + y^2/4 = 1$.

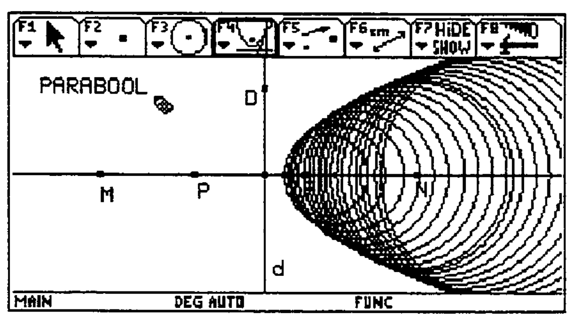


Opdracht 7. Construeer een parabool als omhullende van een familie cirkels. Maak gebruik van de onderstaande figuur en de bijhorende eigenschappen.



De raaklijn in een punt $A(\alpha,\beta)$ van de parabool $y^2 = 2px$ snijdt de x-as in $P(-\alpha,0)$ en de normaal in A snijdt de x-as in $N(\alpha+p,0)$. De horizontale rechte door A snijdt de richtlijn d in D. Dan is de vierhoek ADPF een ruit. De normaal AN is evenwijdig met DF. Hieruit kan men afleiden dat een parabool de omhullende is van een familie cirkels met middelpunt N en straal $|DF|$.





Hints voor de constructie op een TI-92 (zie: bovenstaande afbeeldingen). P is een variabel punt dat via [F2][2:Point on Object] op het lijnstuk [OM] werd gekozen. Met [F5][5:Symmetry] werden het spiegelbeeld van F t.o.v. O en het spiegelbeeld van N van P t.o.v. F getekend. De cirkel met middelpunt P en straal $|PF|$ snijdt de richtlijn d in D. Met [F7][1:Hide /Show] werd deze cirkel verborgen gehouden. Via de instructie [F4][8:Compass] werd tenslotte de cirkel met middelpunt N en straal $|DF|$ getekend. Wanneer P het lijnstuk [OM] doorloopt wordt de gewenste familie cirkels getekend.

Bibliografie

1. **D. Wells**, *Woordenboek van merkwaardige en interessante meetkunde*, Uitgeverij Bert Bakker, Amsterdam, 1993.

2. **D. T. Porzio**, *Conics with TI-92 Cabri II Geometry*, Department of Mathematical Sciences, Northern Illinois University, 1998.

3. **J. Deprez, L. Gheysens, G. Herweyers, K. Stulens, J. Van Hee,** Informatietechnolgie in de wiskundeles : kennismaking, Academische Lerarenopleiding Wiskunde, K.U.Leuven (coördinatie D. Janssens), 1998.

4. **W. Reuter, A. Goddijn,** *Afstanden, grenzen en gebieden, Voortgezette meetkunde deel 1.Nieuwe wiskunde tweede fase*, Profiel N&T, Freudenthal-instituut, Utrecht, 1996. Bijdrage in Uitwiskeling, Aggregatie Wiskunde K.U. Leuven, mei 1998.