

Integratie ICT in het wiskundeonderwijs

A. van Streun, University of Groningen

Probleemstelling

Al zo'n 20 jaar bestaat er goede wiskundige software, waar wiskundige problemen mee kunnen worden aangepakt. In het wiskundeonderwijs van een aantal landen heeft die goede wiskundige software op bepaalde microcomputers een wijde verspreiding gevonden. Denk aan Groot-Brittannië met de BBC-computer en aan de Verenigde Staten van Amerika met de Apple-II en later de MacIntosh. Toch is het computergebruik ook in die landen heel lang een bijverschijnsel in het onderwijs gebleven. Wiskundeleraars waren vrij om al dan niet iets met de computer te doen en scholen verschaften soms wel en vaak niet de middelen om binnen de school goede computerfaciliteiten te realiseren. Al met al bleef tot voor kort het gebruik van computers in het wiskundeonderwijs vrijblijvend en beperkt tot een vorm van hobbyïsme. De inhoud en de doelen van het wiskundeonderwijs werden niet wezenlijk door de introductie van computers aangetast.

Die tijd is voorbij. De ontwikkeling in Nederland staat model voor wat zich in alle westerse landen aan het voltrekken is. In de eerste plaats is de druk van de maatschappij groot om leerlingen in het secundair onderwijs goed voor te bereiden op een tijdperk waarin computers in nagenoeg alle beroepen een essentiële rol spelen. Zo'n goede voorbereiding houdt in dat de ICT wordt geïntegreerd in het onderwijs van de schoolvakken. Daarnaast wordt ook in het hoger onderwijs bij de universiteiten en hogescholen steeds meer gebruik gemaakt van zware wiskundige software, zoals Maple, Mathematica, SPSS, Matlab enzovoort. De directe beschikbaarheid van die software heeft zelfs de inhoud van het wiskundig en toegepast wetenschappelijk onderzoek sterk beïnvloed.

Kijken we in het bijzonder naar de Nederlandse situatie dan zijn er drie factoren aan te wijzen die ervoor zorgen dat ICT in het wiskundeonderwijs een essentiële plaats gaat krijgen. In alle landelijke examenprogramma's voor de wiskundevakken in het secundair onderwijs is het gebruik van computers in het schoolexamen voorgeschreven. In de bovenbouw van havo-vwo (16-18 jaar) is vervolgens in de recent geformuleerde examenprogramma's vastgelegd dat op de centrale schriftelijke examens het gebruik van een grafische rekenmachine noodzakelijk is. Alle wiskundemethoden introduceren daarom, meer of minder overtuigend, de grafische rekenmachine in het vierde leerjaar havo-vwo. De derde factor is dat de grote uitgeverij zich hebben gerealiseerd dat in minstens 80 % van de gezinnen met schoolgaande kinderen in die leeftijdsgroep thuis computers beschikbaar zijn. Zij leveren daarom standaard met de schoolboeken ook bijpassende software, wat ongetwijfeld tot gevolg zal hebben dat veel leerlingen in het toepassen van die software hun leraren zullen overtreffen.

Dat is mooi, niet waar? De randvoorwaarden worden steeds beter vervuld dus de integratie van de computer in het wiskundeonderwijs gaat in het vervolg vanzelf. Wat is het probleem, de probleemstelling? In januari van dit jaar 1999 organiseerden de wiskundeleraars van het hoger beroepsonderwijs in Nederland een congres over de dreigende noodtoestand in het wiskundeonderwijs van hun instellingen. Net als bij de universiteiten had de ruim beschikbare statistische software, zoals SPSS, de behoefte aan statistiekonderwijs al sterk doen afnemen. Wat overbleef was meer een instructie voor de te gebruiken software dan onderwijs in de basis aan statistische begrippen, principes en methoden. Met de introductie van Derive of Maple wordt recentelijk het wiskundeonderwijs aan hogescholen geminimaliseerd. De aandacht voor fundamentele wiskundige begrippen en de opbouw van belangrijke cognitieve schema's, ook essentieel voor de toepasbaarheid van wiskunde, dreigt helemaal te verdwijnen.

Terug naar het secundair onderwijs dat algemeen vormend hoort te zijn. Wat is in deze tijd algemeen vormend wiskundeonderwijs? De invoering van de grafische rekenmachine, verrijkt

met de numerieke benaderingen van oplossingen van vergelijkingen en de benaderingen van grafieken van afgeleide functies enzovoort maakt een groot deel van het klassieke algebraïsche rekenwerk overbodig. Of vindt u van niet? Goed dan wachten we nog een paar jaar en de leerlingen gaan de symbolische rekenmachine gebruiken met een programma als Derive. Of moeten ze dan nog met de hand afgeleide functies of integralen berekenen, terwijl hun machientje dat ook voor hen doet? Hoe staat het eigenlijk met de staartdeling en staartvermenigvuldiging sinds de gewone rekenmachine gemeengoed is geworden? Zo kom ik op de probleemstelling van mijn bijdrage aan het symposium. Gegeven de ruime beschikbaarheid van geavanceerde rekenmachines en computers, met een laptop voor elke leerling in het verschiet, wat moet de inhoud van het wiskundeonderwijs worden? Welke oude doelen kunnen we schrappen en welke 'nieuwe' doelen komen erbij? Hoe en waarvoor zetten we ICT in om die doelen te bereiken? Toegespitst op de analyse van functies, wat doen we daar nog aan? Zijn er nog algebraïsche vaardigheden nodig? Welke dan? Hoe groot moet de rol van toepassingen worden? Wat wordt de inhoud van de meetkunde als we met een programma als Cabri alle berekeningen kunnen uitvoeren en eigenschappen kunnen verifiëren? En moet het onderwijs in de kansrekening en statistiek niet veel meer in de richting van maatschappelijk relevante toepassingen worden ontwikkeld?

Historische ontwikkeling

Deze maand is het 35 jaar geleden dat ik als wiskundeleraar begon te werken. Wat is er in die periode in Nederland veranderd in het schoolvak algebra en waardoor is die verandering tot stand gekomen? Toen ik eindexamen HBS B deed in 1959 bestond de algebra uit de studie van speciale functies (kwadratische, exponentiële, logaritmische en andere functies) en uit het algebraïsch oplossen van bijbehorende vergelijkingen. De differentiaalrekening werd toen nog te moeilijk geacht voor het secundair onderwijs. Die was al ingevoerd toen ik in 1964 les begon te geven. De logaritmen en de logaritmetafel waren vanaf leerjaar 3 een belangrijk hulpmiddel bij het uitvoeren van berekeningen. Ondanks veel verzet van wiskundeleraars werd in 1968 tegelijk met een nieuw onderwijsstelsel mavo-havo-vwo de rekenliniaal als hulpmiddel ingevoerd. Een aantal jaren later volgde de gewone rekenmachine. Welke invloed hebben die veranderingen gehad op de inhoud van het wiskundeonderwijs? Wat hebben we te verwachten als de grafische en daarna de symbolische rekenmachine integraal wordt ingevoerd? In mijn referaat illustreer ik de historische ontwikkeling met enkele voorbeelden.

Het einde van het wiskundeonderwijs?

Op het genoemde congres over de positie van het vak wiskunde in het hoger beroepsonderwijs werd professor Freudenthal geciteerd die eens voorspelde dat in het jaar 2000 het wiskundeonderwijs niet meer zou bestaan. Het lijkt er nu op, aldus sommige sprekers, dat het einde van het wiskundeonderwijs nabij is omdat computers al het algebraïsch en meetkundig rekenwerk (en tekenwerk) gaan overnemen. Ter plekke bleek wel dat dit niet zomaar een grapje is. Vanouds is in het onderwijs veel werk gemaakt van het leren beheersen van algoritmische procedures, bijvoorbeeld voor het oplossen van vergelijkingen of het standaardonderzoek van het gedrag van functies. In het laatste geval was de grafiek dan het eindproduct! Naar mijn mening ontkomen wij er niet aan om opnieuw fundamenteel na te denken over de doelen en inhoud van het wiskundeonderwijs. Eertijds had het leren rekenen in het primaire onderwijs tot doel een hoge mate van accuratesse en snelheid te bereiken, omdat in de maatschappij al het cijferen nog met de hand moest gebeuren. Analoog was het aanleren van algebraïsche en meetkundige procedures te verdedigen

op basis van het nut dat leerlingen daar in het vervolgonderwijs van hadden. Nu gaat het er veel meer om dat wij onze leerlingen leren met inzicht en gezond verstand de wiskundige hulpmiddelen, zoals rekenmachines en software, te gebruiken om wiskundige en toegepaste problemen op te lossen. Het was de eminente wiskundige en didacticus Polya die al in 1946 schreef dat het in algemeen vormend wiskundeonderwijs om twee hoofddoelen gaat. In de eerste plaats moeten leerlingen leren problemen op te lossen, hun hersens leren gebruiken. Wiskunde en meetkunde in het bijzonder zijn bijzonder geschikte terreinen om denkmethoden onder de knie te krijgen. In de tweede plaats moeten leerlingen leren toegepaste situaties te formuleren in wiskundige modellen, zoals formules of vergelijkingen, want daar gaat het om bij het toepassen van wiskunde. Voor de wiskundige bewerking of analyse van die modellen huur je later, aldus Polya, maar wiskundigen in. Tegenwoordig kun je daarvoor ook vaak wiskundige software inzetten.

Onderzoekend Wiskunde Leren

Het concept Onderzoekend Leren is een overkoepelend concept voor de programmering van de leeractiviteiten zoals beoogd in het Studiehuis havo-vwo. Toegespitst op het wiskundeonderwijs betekent dat een definitieve keuze in de oude discussie tussen twee onderwijsvisies. Aan de ene kant staat de overtuiging dat leerlingen of studenten in de eerste plaats de wiskundige systemen en structuren, voorheen ontwikkeld en in boeken beschreven, moeten leren en op tentamens reproduceren. Daar past de rol van de docent als uitlegger en overbrenger van die wiskunde bij, terwijl de leerlingen en studenten moeten proberen te begrijpen wat er staat geschreven en door oefenen met opgaven in staat moeten zijn om de theorie en de technieken te reproduceren. In de New Math beweging uit de zestiger jaren en in een deel van het universitaire wiskundeonderwijs heeft die visie gedomineerd. Onder invloed van prominente wiskundigen als Polya, Freudenthal, Kline en anderen is eveneens sinds de zestiger jaren een andere onderwijsvisie ontwikkeld, die stelt dat het niet gaat om het reproduceren van kant-en-klare wiskunde, maar om de wiskundige activiteiten zelf.

Onder het concept Onderzoekend Wiskunde Leren valt in dat geval het zelf opsporen van verbanden en stellingen, het zelf kiezen en aanpakken van een wiskundige onderzoeksvraag, het zelf leren axiomatiseren van een deelgebied, het zelf mathematiseren van een realistische probleemsituatie, het zelf exploreren, vermoedelijke eigenschappen formuleren en die vervolgens proberen te bewijzen. Deze opvatting heeft nu in een bredere onderwijskundige kring voor allerlei vakgebieden ondersteuning gevonden in de constructivistische leertheorieën. Kort gezegd komen die er op neer dat kennisoverdracht niet mogelijk is maar dat kennis steeds opnieuw moet worden geconstrueerd door de lerende. Gebeurt dat laatste niet dan is er geen sprake van een zinvolle, geïntegreerde en functionele kennis, die wendbaar kan worden ingezet voor het oplossen van problemen. 'Knowledge how' is daarom veel belangrijker dan 'Knowledge what'.

De verschuiving van imiteren en reproduceren naar onderzoekend wiskunde leren met de nadruk op betekenis en inzichtelijk handelen kan in hoge mate worden ondersteund door de nieuwe computertechnologie, die het voor leerlingen mogelijk maakt om zelf begrippen, methoden en relaties te exploreren. Een viertal activiteiten zijn daarbij van belang:

- **Exploreren**
- **Onderzoeken**
- **Controleren**
- **Reflecteren**

Kijken we naar de nieuwe editie van de wiskundemethoden voor de Tweede Fase havo-vwo in Nederland, dan zien we dat voor de analyse of algebra de traditionele kleine opgaven nog overheersen. Stap voor stap wordt een methode of begrip uitgelegd, waarbij dan nu de grafische rekenmachine soms als hulpmiddel mag worden gebruikt. Alleen in grote verwerkings- of onderzoeksopdrachten is het concept van onderzoekend leren terug te vinden. Naar mijn mening kunnen hele paragrafen of zelfs hoofdstukken worden hergeformuleerd in grote onderzoeksopdrachten, waarin de leerlingen zelf actief wiskundig bezig gaan.

Beperken we ons even tot de klassieke bestudering van functies. Met een gewone grafische rekenmachine bij de hand kunnen leerlingen zelf de volgende families van functies op hun kenmerken onderzoeken en de relatie leggen tussen de grafische kenmerken en de eigenschappen van het algebraïsch functievoorschrift. Hun eindproduct is dan niet een antwoord maar een eigen verslag met plotjes en argumentaties. In dat verslag moeten dan de conclusies bijvoorbeeld ondersteund worden door een procesbeschrijving van de verschillende activiteiten, zoals exploreren, systematisch onderzoeken, controleren en reflecteren. Om de gedachten te bepalen geef ik een paar voorbeelden die in het referaat verder worden uitgewerkt.

Voorbeeld 1. Precalculus.

$$f(x) = ax^2 + bx + c, f(x) = a(x-m)(x-n), f(x) = a(x-p)^2 + q.$$

Onderzoek de invloed van de parameters op de grafieken en leg een verband tussen de drie verschillende representaties.

Voorbeeld 2. Calculus.

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Onderzoek de kenmerken van de grafieken in relatie tot de parameters en leg een verband met de grafiek van de afgeleide functie $f'(x)$.

Voorbeeld 3. Precalculus.

Onderzoek de grafieken van het product van twee en van drie lineaire functies.

Doe hetzelfde voor het quotiënt van een kwadratische en een lineaire functie.

Analoog voor het quotiënt van het product van drie lineaire functies en van twee lineaire functies.

Op dit type opdrachten zijn talrijke variaties mogelijk met machtsfuncties, periodieke functies enzovoort. Een ander aspect van het inzetten van de grafische rekenmachine voor onderzoekend wiskunde leren is natuurlijk de ondersteuning van abstracte begrippen door middel van visuele en numerieke ondersteuning. In het begin van de differentiaalrekening kan het intuïtieve begrip van helling, snelheid van verandering, afgeleide goed worden ontwikkeld en heel lang worden vastgehouden door de formule voor de numerieke benadering met de bijpassende hellingfunctie centraal te stellen:

$$\frac{Y_1(x + 0,01) - Y_1(x)}{0,01}$$

Leerlingen kunnen dan zelf formules voor afgeleide functies opsporen en in contexten het begrip interpreteren en toepassen. De klassieke nadruk op de rekenregels, die vaak al snel het inzicht verduisterde, kan daarmee worden vermeden.

Een derde type opdrachten geschikt voor het stimuleren van onderzoekend leren betreft de zelfstandige onderzoeken. Leerlingen krijgen een indicatie van een probleemstelling en kunnen met behulp van hun wiskundige kennis en de computertechnologie hun eigen variaties op het probleem kiezen en dat onderzoek verder uitwerken. In de nieuwe wiskundeboeken voor de Tweede Fase havo-vwo en op Internet zijn een aantal goed voorbeelden te vinden.

Leren modelleren

Er is enige hoop dat op korte termijn de twee belangrijkste algemene leerdoelen van het wiskundeonderwijs, het modelleren en het redeneren, in de uitwerking van nieuwe programma's zo centraal komt te staan, dat de noodzakelijke transfer naar andere vakgebieden verzekerd is. Lukt dat niet dan betekent dat m.i. op termijn het einde van de centrale plaats die altijd aan het vak wiskunde in allerlei takken van onderwijs is toegekend. De relevant geachte wiskundige methoden halen gebruikers van wiskunde wel uit een computer. In verschillende hogescholen en universiteiten is die door ons ongewenste ontwikkeling al aan de gang. De gebruikers van wiskunde zijn van mening, dat wiskunde-afdelingen niet meer nodig zijn voor dienstverlenend onderwijs, als het wiskunde-onderwijs de gewenste transfer naar de gebruikers zelf niet kan garanderen.

Dat houdt voor het secundair onderwijs in dat daar de basis voor die transfer moet worden gelegd. Toepassingen zijn niet meer alleen verwerkingsopdrachten nadat het wiskundig schema abstract en formeel is opgebouwd, maar zij worden geïntegreerd in de gehele opbouw. Een drietal aspecten van dat leren modelleren moet daarbij bijzondere aandacht krijgen:

- **vertaalvaardigheden**
- **brede cognitieve schema's**
- **modelleren van data**

Leerlingen moeten snel wiskundige essenties in toegepaste problemen kunnen herkennen en heen en weer kunnen pendelen tussen verschillende representaties, zoals de grafische, de numerieke, de analytische en de verbale representaties van een realistische situaties. Hun wiskundige kennis moet daarbij onderlinge samenhang vertonen en gekoppeld zijn aan wiskundige en toegepaste betekenissen. Alleen dan is er de zekerheid van transfer en kunnen leerlingen ook zelf leren modellen te maken en praktische situaties te modelleren. De abstractie van een begrip of methode versterkt daarbij de wendbaarheid en toepasbaarheid naar onbekende situaties. Het alternatief in sommige vormen van beroepsonderwijs, namelijk dat leerlingen of studenten per type toepassing de bijbehorende wiskunde leren, leidt daarentegen tot versnipperde en verkokerde kennis en vaardigheden zonder samenhang, overzicht en abstractie.

Statistische methoden

In de toepassing van statistiek gaat het vrijwel altijd om het trekken van conclusies uit databestanden, al dan niet gebaseerd op steekproefonderzoek. Het onderwijs in de kansrekening en statistiek van het secundaire onderwijs houdt zich tot nu toe evenwel voornamelijk bezig met kansen en leuke kansprobleempjes. Het opzetten van een databestand, het conclusies trekken uit verbanden tussen variabelen, de methodologie van statistisch onderzoek, het steekproefonderzoek, het krijgt weinig aandacht. In de nieuwe Nederlandse programma's voor havo-vwo is dat niet veel beter en is zelfs het onderwerp correlatie en regressie geschrapt. En dat terwijl de geavanceerde grafische rekenmachines met de opties voor verschillende vormen van regressie juist veel praktisch werk mogelijk maken. Ook voor het modelleren van data is die optie heel bruikbaar bij het zoeken naar een verband tussen variabelen.

Exploreren en redeneren

In de discussies over de gewenste inhoud van het programma wiskunde B voor het profiel Natuur & Techniek van het vwo is van veel kanten aangedrongen op meer aandacht voor het wiskundig redeneren en bewijzen. Die aandrang komt niet alleen vanuit de hoek van de universitaire wiskunde, maar ook uit nagenoeg alle disciplines

waar leerlingen met N&T kunnen gaan studeren. In het interuniversitaire overleg over de toelatingseisen en het belang van wiskunde B vallen dan termen als ‘logisch redeneren’, ‘precies formuleren’, ‘helder beargumenteren’, ‘noodzakelijke en voldoende voorwaarden onderscheiden’ enzovoort. De legitimering van het bewijzen is daarom veel breder dan het kennismaken met het bewijzen, zoals dat binnen de wiskunde als wetenschap gebruikelijk is. De maatschappij verwacht en eist transfer van bewijzen naar allerlei terreinen buiten de wiskunde.

De gemaakte keuze voor vlakke meetkunde is goed te verdedigen, omdat hier concrete representaties kunnen worden gekoppeld aan een deductieve opbouw. Eminente wiskundigen als Kline en Thom hebben op die grond gepleit voor een belangrijke plaats van de vlakke meetkunde in het voortgezet onderwijs. Het nieuwe onderdeel Vlakke Meetkunde in het vwo kan een bijdrage leveren aan het wiskundig redeneren en bewijzen als vanaf het begin wordt gewerkt aan een lokale deductieve opbouw, waarbij duidelijk onderscheid wordt gemaakt tussen de verschillende typen uitspraken en bewijsmethoden. De basisstellingen vormen tezamen met de basisdefinities het vooraf bekend veronderstelde kennisbestand, waar vanaf het begin een beroep op mag worden gedaan.

In tegenstelling tot het klassieke meetkundeonderwijs dat na 1968 in Nederland is geschrapt, zal de nadruk in het nieuwe onderwerp Vlakke Meetkunde veel meer liggen op het samen ontwikkelen van een opbouw en het zelf ontdekken van (nieuwe) stellingen. Computerprogramma's zoals Cabri geven ruime mogelijkheden om meetkundige situaties te exploreren. Weer is het beslist noodzakelijk om voor leerlingen duidelijk te maken waar je dan mee bezig bent. Na het exploreren en ontdekken van vermoedelijke stellingen met Cabri volgt het redeneren en precies bewijzen van de vermoedens. Met voorbeelden zal in het referaat duidelijk worden dat het dynamische karakter van Cabri niet alleen het vinden van vermoedens mogelijk maakt, maar ook een bijdrage levert aan het vinden van een bewijs.

Het denken bevorderen

Resumerend is mijn conclusie dat de computertechnologie het onderwijs in veel technische, algebraïsche en algoritmische vaardigheden overbodig maakt. Er zal een verschuiving in de inhoud en de doelen van het wiskundeonderwijs moeten plaats vinden, zodat leerlingen met inzicht de computertechnologie kunnen toepassen. De nieuwe ruimte kan worden benut door meer nadruk te leggen op probleem oplossen, modellen, redeneren. Polya schreef het al vijftig jaar geleden. Er is geen schoolvak zo geschikt als de wiskunde om het denken van leerlingen te bevorderen. Niet leren op computerknoppen drukken maar leren denken, gebruikmakend van het gereedschap dat de computertechnologie ons in ruime mate aanbiedt!