Obstakels bij het werken met computeralgebra

Werkgroep T^3-symposium Oostende, augustus 1999.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut / Algemeen Pedagogisch Studiecentrum

Doel

Reflecteren over obstakels die leerlingen kunnen ervaren wanneer ze met computeralgebra (leren) werken.

Programma

1. Inleiding (10')
2. Werken in groepjes uit lesmateriaal (50')
3. Nabespreken en identificatie van obstakels aan de hand van leerlingenuitwerkingen (30')

Bij 2. Werken in groepjes uit lesmateriaal

- De fragmenten op de volgende pagina's komen uit de lespakketten '*Introductie TI-92*' en uit '*Optimaliseren met een symbolische rekenmachine*', die ontwikkeld zijn in het kader van het Kortlopend Onderwijsonderzoek Symbolische Rekenmachine, dat door het Freudenthal in 1998 is uitgevoerd.
- Werk deze fragmenten één voor één door in twee fasen:
  - Eerst met de ogen van een *leerling*. Besteed met name aandacht aan de opgaven waar een pijl voor staat! Als u een opgave of voorbeeld al kent - sommige zijn vorig jaar op dit symposium gebruikt, andere zijn beschreven in artikelen - , sla het dan rustig over.
  - Ten tweede vanuit het perspectief van de *docent*. Bespreek met elkaar welke moeilijkheden de leerlingen mogelijk ervaren bij het gebruik van computeralgebra in deze situatie.
- Wanneer u de fragmenten heeft doorgewerkt, kunt u eventueel vast een blik werpen op het artikel dat als bijlage achteraan is toegevoegd: '*De symbolische rekenmachine in de wiskundeles*'. Het is afkomstig uit *De Nieuwe Wiskrant, Tijdschift voor Nederlands Wiskundeonderwijs*, nummer 18-3, uit 1999.

3.4 Formules en grafieken

Op de vorige pagina's heb je gezien dat een formule op verschillende manieren geschreven kan worden. Op deze pagina zal blijken dat elke schrijfwijze een ander aspect van de bijbehorende grafiek belicht.
Bij het herschrijven zijn soms 'slimme' substituties nodig.

24 Ga naar het functiebestand en voer in:

$$y1(x) = x^2 - 6x + 8$$

Laat de grafiek van y1 tekenen.
Aan de formule kon je al zien dat de grafiek een parabool zou zijn.

25 Laat in het HOME-screen y1(x) in factoren ontbinden. In de gedaante die je zo krijgt, kun je de nulpunten van y1 eenvoudig aflezen.

26 Het vinden van een gedaante waaruit de top van de parabool is af te lezen is moeilijker.
Je weet dat de x-coördinaat van de top 'midden tussen de twee nulpunten ligt', dus x=3.
Daarom een truuk. Stel x = z + 3:

$$y1(x) \mid x = z + 3$$

Uit het resultaat blijkt dat –1 het minimum is.

27 Voer als y2 in:

$$y2(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x}$$

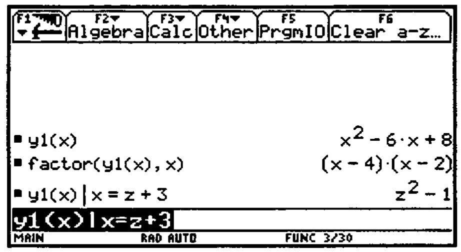
Herschrijf y2(x) in een vorm waaruit de nulpunten zijn af te lezen, en één waarin de scheve asymptoot zichtbaar is.

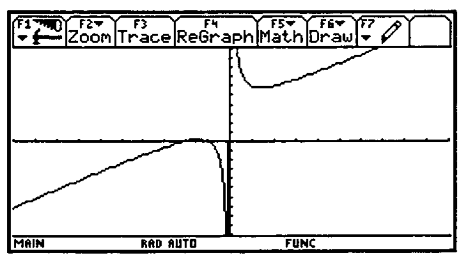
28 Neem als derde functie:

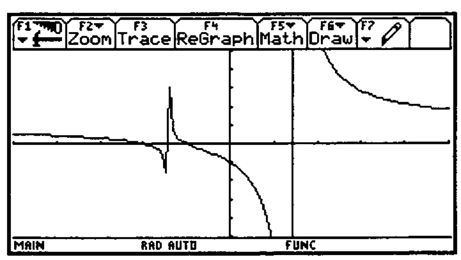
$$y3(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 - 2}$$

Probeer gedaantes voor y3(x) te vinden die de nulpunten, de horizontale en de vertikale asymptoten zichtbaar maken.

29 Bedenk zelf een functie die zich leent voor een soortgelijke opdracht als de bovenstaande, en leg deze aan een medeleerling (of aan je docent) voor.







5 Onderzoeksopdracht

5.1 Nullen aan het einde van faculteitsgetallen

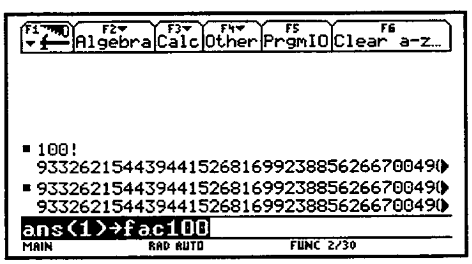
Sommige faculteitsgetallen, zoals bijvoorbeeld 6!, eindigen op een 0. Andere, neem bijvoorbeeld 12!, eindigen op 2 nullen.
In deze opdracht ga je onderzoeken hoe het aantal nullen aan het einde van n! afhangt van n. Als uiteindelijk resultaat zul je weten op hoeveel nullen 1998! eindigt.

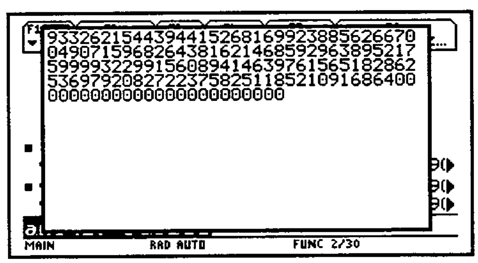
Weet je wat een faculteitsgetal is?
Neem bijvoorbeeld ‘6 faculteit’. Dat schrijf je als 6!, en het is gelijk aan $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, 720 dus. Op dezelfde manier geldt: $12! = 12 \times 11 \times 10 \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = 479001600$.
Zoals je ziet, worden faculteitsgetallen snel groot.
De uiteindelijke vraag van deze opdracht is: op hoeveel nullen eindigt 1998!?
Om hierop een antwoord te vinden, staan hieronder enkele vragen. Let bij deze opdrachten op de volgende aandachtspunten:

- werk goed samen;
- leg de bevindingen vast in een net en overzichtelijk verslag;
- beschrijf in het verslag ook het proces, dus vermoedens, pogingen en mislukkingen.

1 Bereken een aantal faculteitsgetallen. Het faculteitsteken voer je in met 2nd W, of met MATH Probibility.

2 Bereken 100!. Een deel van dit getal valt buiten beeld. Door er met de cursor op te gaan staan en op ▶ te drukken, worden de volgende cijfers zichtbaar.
Je kunt het gehele getal op de volgende manier in beeld krijgen.
Sla het met STO▶ op onder een geschikte naam, bijvoorbeeld fac100.
Ga naar het VAR-LINK menu, zet de cursor op de betreffende variabele en kies F6: Contents.





3 Wat is de grootste waarde van n waarvoor de TI-92 n! exact uitrekent? En tot welke waarde van n wordt een benadering van n! gegeven?

4 Probeer een verband te ontdekken tussen het aantal nullen op het einde van n! en de waarde van n.

5 Controleer het gevonden verband en zoek er een verklaring voor.

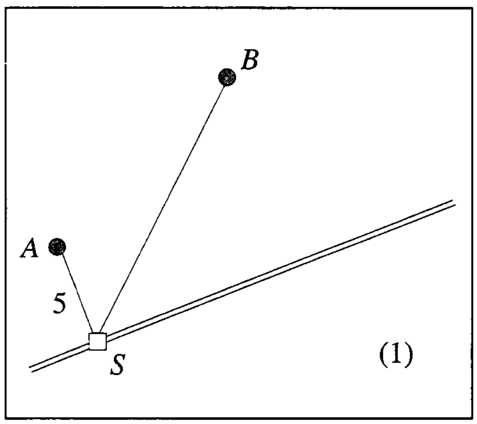
6 Op hoeveel nullen eindigt 1998!?

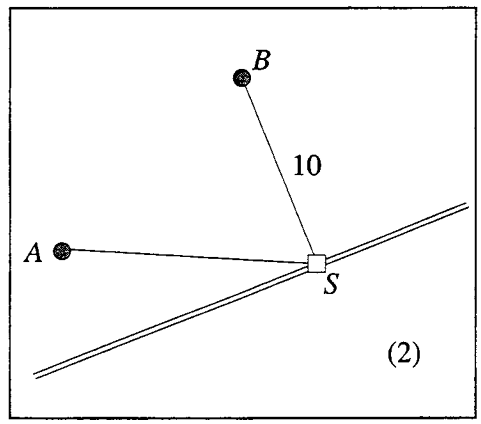
7 Voor gevorderden: probeer een functie te definiëren die voor elke op te geven waarde van n onmiddellijk het aantal nullen op het einde geeft.

2 Waar komt het station?

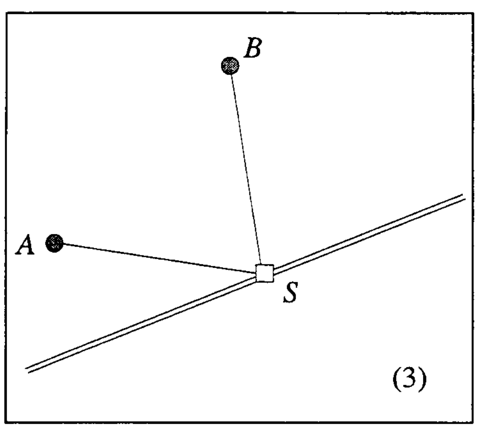
De gemeenten *A* en *B* liggen aan dezelfde kant van een spoorlijn resp. op afstand 5 km en 10 km van die lijn. De afstand van *A* tot *B* is (hemelsbreed) 13 km.
De spoorwegmaatschappij wil een station aan genoemde spoorlijn bouwen en overlegt met diverse instanties waar de beste plaats voor het station (*S*) is. Het terrein aan de kant van de spoorlijn waar *A* en *B* liggen is nog braak en munt niet uit door natuurschoon, zodat men voor de aanleg van de wegen *AS* en *BS* alle vrijheid heeft.

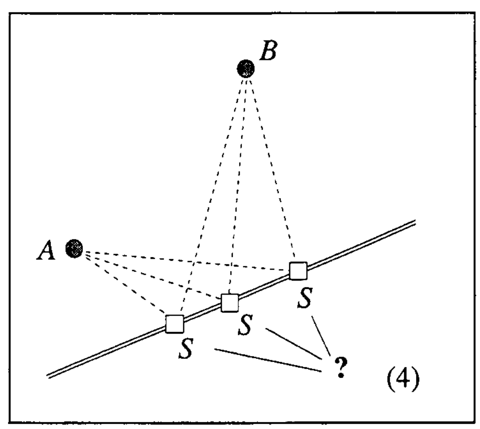
Gemeente *A* wil natuurlijk dat *S* zo dicht mogelijk bij *A* ligt (1).
Gemeente *B* wil *S* zo dicht mogelijk bij *B* hebben (2).





Het provinciebestuur zou het liefst zien dat *S* op hemelsbreed gelijke afstanden van *A* en *B* komt te liggen (3). Tenslotte wil de provinciale busmaatschappij dat de totale afstand $AS + SB$ zo klein mogelijk is (4).





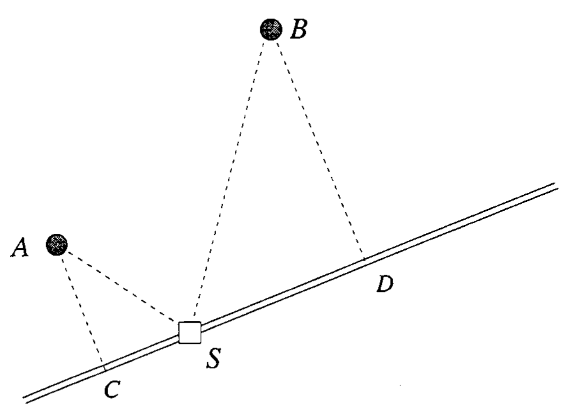
1 **a.** Bereken de totale weglengte $AS + SB$ in geval (1) in 1 decimaal nauwkeurig.
b. Dezelfde opdracht voor geval (2).
c. In geval (3) is $AS + BS$ iets lastiger te berekenen. Het probleem kan worden opgelost met een vergelijking. Schuif vanuit situatie (2) het station x km langs de spoorlijn (richting *A*) en druk achtereenvolgens *BS* en *AS* uit in x.

2 **a.** Stel $BS = y_1(x)$ en $AS = y_2(x)$;
Voer y_1 en y_2 in het functiebestand van de SR in.
Kies een geschikt venster en bekijk de grafieken van y_1 en y_2.
Lees nu af waar S volgens (3) moet liggen en bereken $AS + BS$.
b. De vergelijking $AS = BS$ laat zich ook exact oplossen. Doe dat.
c. Hoe zou je geval (3) meetkundig kunnen aanpakken?

3 Nu het plan van de busmaatschappij waarbij het gaat om de minimale totale afstand.
a. Voer de functie $y_3 = y_1(x) + y_2(x)$ in en bepaal grafisch de minimale waarde van y_3.
b. Lees uit de grafieken op het scherm af, hoe groot de verhouding van de afstanden AS en BS is in het geval de totale afstand $AS + BS$ minimaal is.

4 **a.** Probeer met de SR de exacte waarde van x te berekenen waarvoor y_3 minimaal is.
Hoe kun je zien dat het antwoord slechts een benadering is?

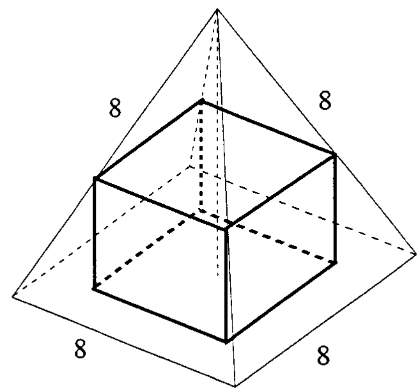
Je kunt de machine een handje helpen.
Als $y_3' = y_1' + y_2' = 0$, dan geldt $y_1' = -y_2'$ en dus $(y_1')^2 = (-y_2')^2$.
b. Los deze laatste vergelijking op met de SR.
c. Waar komt het antwoord $x = 24$ nu vandaan?



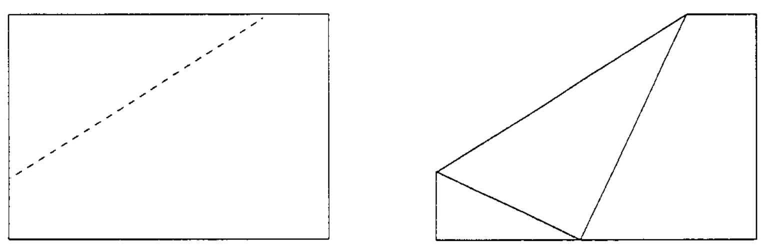
5 Hierboven is de optimale situatie getekend bedoeld in (4).
AC en BD zijn de afstanden hemelsbreed van A en B tot de spoorlijn.
Het resultaat van opgave 2 wijst er op dat AS en BS (en ook CS en DS) zich verhouden als AC en BD.
Ga na of dat ook klopt als A wat verderaf of wat dichterbij de spoorlijn ligt. Neem voor het gemak aan dat de plaats van C niet verandert; in het functiebestand hoef je dan bij y_2 maar één getal te wijzigen!

Het probleem van het vinden van de plaats S zodat $AS + SB$ minimaal is, werd in de 17e eeuw door verschillende wiskundigen aangepakt. Er bestonden toen nog geen spoorlijnen, maar wel spiegels: de route ASB was in de probleemstelling de gang van een lichtstraal uitgaande van de lichtbron A en na terugkaatsing in een vlakke spiegel, aankomend bij B. Er werd wiskundig bewezen dat in zo'n geval de 'hoek van inval' gelijk moet zijn aan de 'hoek van terugkaatsing' of, wat op hetzelfde neerkomt, dat de driehoeken ACS en BDS gelijkvormig zijn. Een feit dat uit observatie al was gebleken.

7 Gegeven een piramide met vierkante bodem. Alle ribben hebben de lengte 8.
In de piramide past een balk, waarvan het grondvlak op de bodem van de piramide staat en waarvan het bovenvlak tegen de opstaande ribben van de piramide rust.
Bereken bij welke afmetingen de balk een maximale inhoud heeft.



8 Een vel papier van het formaat A4 meet 21 bij 29,7 cm. Het papier wordt zo gevouwen dat een hoekpunt op de overstaande lange zijde komt te liggen; zo ontstaat er in een van de hoeken een rechthoekig driehoekje (grijs in de figuur).



Als je dit met zo'n vel papier uitvoert, zie je al gauw dat je hele 'smalle' rechthoekige driehoeken kunt krijgen met een kleine oppervlakte en minder smalle driehoeken met een grotere oppervlakte.

a. De vraag is natuurlijk: welke rechthoekige driehoek heeft de maximale oppervlakte?
Bereken de zijde x van die optimale driehoek.

b. Hoe zit het met een rechthoek met lengte a cm en breedte b cm? Neem aan dat a groter is dan b.

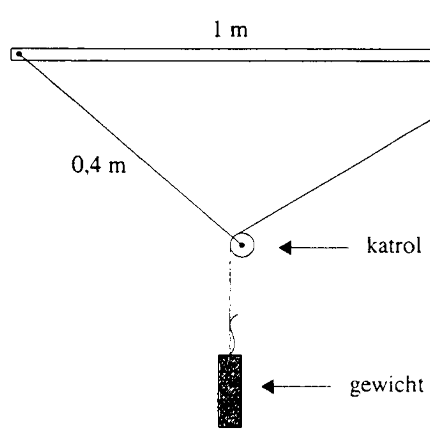
c. Welke 'speciale' vorm heeft de driehoek met de grootste oppervlakte in deze situatie?

2 Een gewichtig probleem

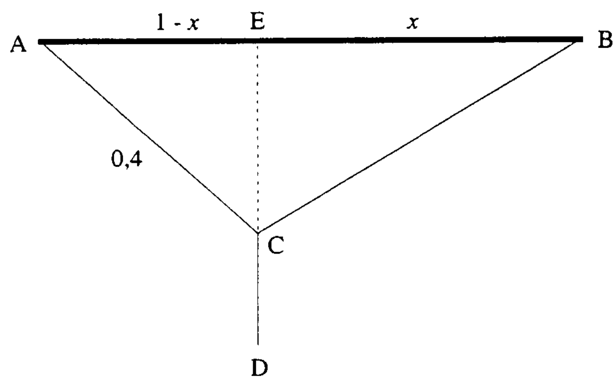
L'Hôpital (1661-1704)
Bernoulli (1667-1748)

Markies de l'Hôpital was een wiskundige die leefde in de 17e eeuw. In 1696 publiceerde hij het boek 'Analyse des infiniment petits', dat als één van de eerste leerboeken in de analyse wordt beschouwd. De inhoud van dit boek is grotendeels niet door l'Hôpital zelf bedacht, maar door zijn leermeester Johann Bernoulli, die een veel groter wiskundige was. De (niet zo rijke) Bernoulli had met de kapitaalkrachtige markies een contract afgesloten, dat l'Hôpital het recht gaf om alle wiskundige ontdekkingen van Bernoulli te publiceren. Zo leeft de naam van l'Hôpital dus nog steeds voort in de zogenaamde *stelling van l'Hôpital*, die bedacht is door Bernoulli...

Het volgende probleem is afkomstig uit 'Analyse des infiniment petits'. In de 17e eeuw werd de techniek van het differentiëren uitgevonden. Lang niet iedereen was direct overtuigd van het nut hiervan. Met het volgende probleem wilde l'Hôpital de kracht van de differentiaalrekening bij optimaliseringsproblemen duidelijk maken.
Aan een horizontaal opgestelde meetlat van 1 meter zit aan de linkerkant een touwtje van 40 cm lang. Aan het einde van het touwtje is een katrol bevestigd. Een gewicht zit aan het touw van 1 meter dat via de katrol verbonden is met het rechter eindpunt van de meetlat.



De vraag is nu, welke positie het katrol en het gewicht zullen innemen als het geheel in evenwicht is. In een schematische tekening is de opstelling als volgt:



Bij dit optimaliseringsprobleem verwaarlozen we het gewicht van de katrol en de touwtjes ten opzichte van het gewicht van het blok. Uit de natuurkunde is bekend dat het blok de laagst mogelijk positie zal innemen.

1 Misschien is er in de klas een proefopstelling beschikbaar.
Als dat het geval is, bepaal dan experimenteel de rustpositie van het gewicht.

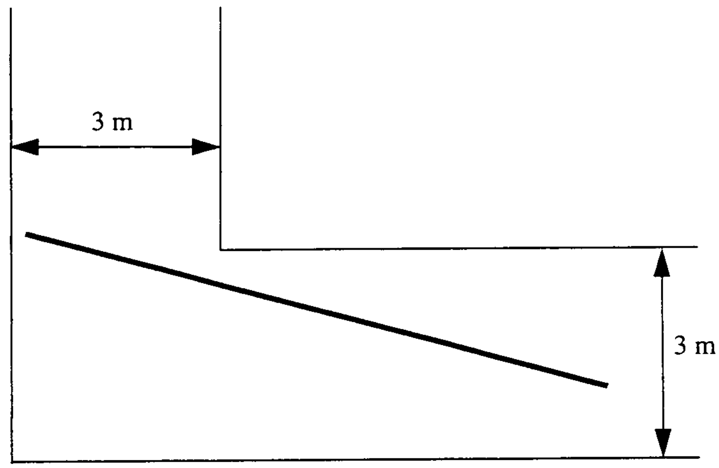
2 Indertijd stelde l'Hôpital AE gelijk aan x.
Handiger is echter om EB als x te nemen.
Hoe kun je dit probleem met grafieken op de SR aanpakken?

3 L'Hôpital had geen rekenmachine om grafieken te tekenen. Hij gebruikte dit probleem om de kracht van de differentiaalrekening aan te tonen. Doe hem dit na.

4 Wat verandert er, als de lengte van het linker touwtje niet 0,4 m is maar a m?

3 Door de bocht

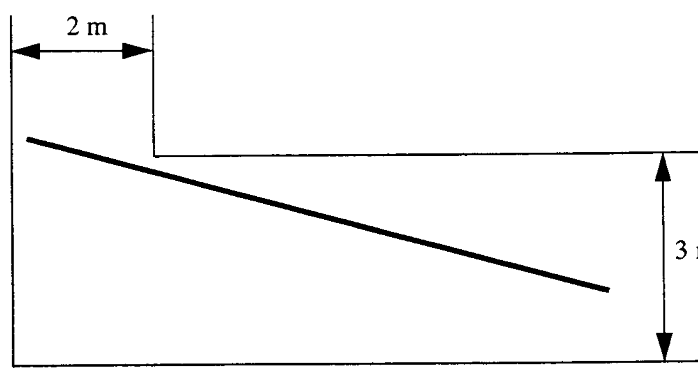
1



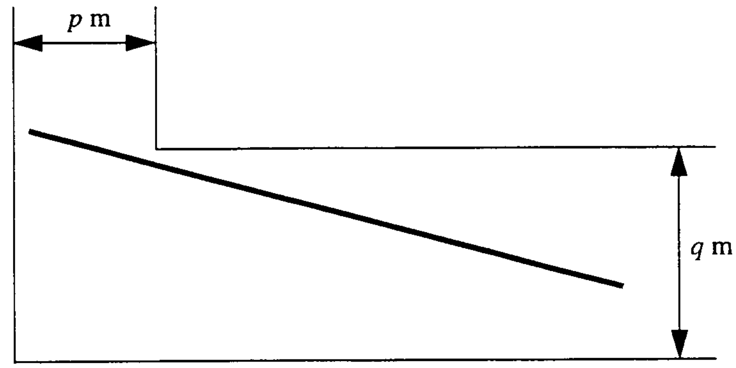
Hierboven zie je een bovenaanzicht van een gang van drie meter breed, waarin een hoek zit. Twee personen proberen met een dunne buis van 8,5 meter lengte door deze bocht te manoevreren. De vraag is of dat zal lukken...

a. Probeer met behulp van je geodriehoek in de tekening uit, of de operatie kans van slagen heeft.
b. Onderbouw het antwoord van **a.** met een berekening.
c. Hoe lang is de langste buis die nog zonder problemen de bocht door kan?
d. Natuurlijk kunnen de dragers nog een beetje helpen door de buis niet horizontaal te houden, maar schuin. Hoe lang is de langste buis die op deze manier de hoek om kan, als de gang 2,5 meter hoog is?

2 Om de bocht versmalt de gang tot een breedte van 2 meter. Hoe verandert dit de antwoorden van de vragen **c.** en **d.** van de vorige opgave?



3 Nu algemeen: de gang is eerst q meter breed en na de bocht p meter. De hoogte is overal gelijk aan r meter. Onderzoek hoe lang de langste buis is die de bocht om kan. Maak onderscheid tussen het geval dat de buis horizontaal gedragen wordt en het geval dat die schuin gehouden kan worden.



Leerlingen van een 5vwo klas werkten gedurende vier weken met een symbolische rekenmachine, een 'computeralgebra-machine-in-zakformaat'. Ondanks het enthousiasme van de leerlingen waren er ook wat hobbels te nemen. Paul Drijvers inventariseert de plussen en de minnen.

De symbolische rekenmachine in de wiskundeles

Inleiding

Bij eerdere gelegenheden (zie bijvoorbeeld [1]) heb ik de ontwikkeling van de symbolische rekenmachine beschreven. Een symbolische rekenmachine (SR) heeft de afmetingen en mogelijkheden van een grafische rekenmachine, maar kan bovendien algebraïsche bewerkingen uitvoeren doordat een computeralgebra programma beschikbaar is. In verschillende andere landen wordt al op grote schaal met de SR in de klas geëxperimenteerd[2]. Ook in Nederland zijn voorzichtig de eerste schreden op dit pad gezet[3].

In 1998 is een kort project uitgevoerd dat de stand van zaken rond de SR in kaart brengt. Door het uitvoeren van een veldexperiment is onderzocht of de leerlingen de SR daadwerkelijk en efficiënt gebruiken en hoe ze reageren op het inzetten van de machine als 'black box'. Over dit klasse-experiment gaat dit artikel. Uitgebreidere informatie over de resultaten van dit project kunt u vinden in het eindrapport[4].

De aanvangssituatie

Het experiment vond plaats bij wiskunde B in een 5vwo klas van het Liemers College in Zevenaar. De leerlingen van deze school gebruiken vanaf het begin van de vierde klas een grafische rekenmachine. Dit kan de overstap naar de SR vereenvoudigen. Verder is het Liemers College één van de Profi-scholen die met de nieuwe programma's van de Tweede Fase werken. Dus kan worden aangesloten bij het nieuwe curriculum.
De klas bestaat uit 22 leerlingen, acht meisjes en veertien jongens. In 5vwo hebben de leerlingen eerst het Profi-pakket *Som & verschil, afstand & snelheid* doorgewerkt. Hierin worden de hoofdlijnen van de differentiaal- en integraalrekening uitgezet. Daarna zijn enkele paragrafen behandeld uit *Techniek van het differentiëren*, zodat de leerlingen de nulpunten van de afgeleide kunnen gebruiken bij het zoeken van extreme waarden. Het repertoire van functies die de leerlingen kunnen differentiëren bleef nog beperkt tot de machtsfuncties. De regels voor differentiëren waren nog niet bekend.

Toen, begin oktober, begon het SR-experiment. Gedurende vier lesweken, onderbroken door de herfstvakantie, kreeg elke leerling de beschikking over een SR, de TI-92 van Texas Instruments. Twee lespakketten zijn doorgewerkt, *Introductie TI-92* en *Optimaliseren met een symbolische rekenmachine*. Het eerste pakket maakt de leerling wegwijs op de machine. Tevens brengt het enkele lastige aspecten van het werken met computeralgebra over het voetlicht, zoals het verschil tussen numerieke en exacte antwoorden. In het tweede pakket, een aangepaste versie van het reeds bestaande Profi-pakket 'Optimaliseren', worden optimaliseringsproblemen grafisch/numeriek, analytisch en meetkundig aangepakt. Beide pakketten eindigen met onderzoeksopdrachten.
Tijdens het experiment zijn de lessen geobserveerd. Leerlingenuitwerkingen en toetsresultaten zijn verzameld. Na afloop van de lessenserie hebben de leerlingen een vragenlijst ingevuld en zijn nagesprekken gevoerd.

Plussen ...

Terugkijkend op de gang van zaken in de klas springen positieve en minder positieve ervaringen in het oog.
Positief was het feit dat de meeste leerlingen de SR daadwerkelijk bij hun schoolwerk gebruikten. Het lesmateriaal voor wiskunde B nodigde daar natuurlijk sterk toe uit, maar ook bij andere vakken, zowel in de les als thuis, kwam de SR regelmatig van pas. In de vragenlijst gaven zestien van de 22 leerlingen aan de SR in de lessen van andere vakken gebruikt hebben. Over de aard van het gebruik heb ik geen informatie. Genoemd werden:

vak	frequentie
wiskunde A	8
natuurkunde	10
scheikunde	9
biologie	1
economie	8

Hoewel de SR dus daadwerkelijk functioneerde, gaven achteraf toch 13 van de 22 leerlingen de voorkeur aan de grafische rekenmachine. Daarmee waren de leerlingen toch meer vertrouwd, na ruim een jaar ervaring. Sommigen vonden de grafische rekenmachine eenvoudiger in gebruik. Bovendien vond men de gebruikte SR nogal groot. Leerlingen die de voorkeur gaven aan de SR, roemden vooral de uitbreiding van de mogelijkheden, bijvoorbeeld bij differentiëren en het oplossen van vergelijkingen.
Verrassend in positieve zin was de reactie van de leerlingen op de volgende vraag: 'Kun je met de SR tijd besparen, doordat bepaalde bewerkingen sneller gaan dan met de hand?' Hierop antwoordden alle 22 leerlingen positief. Vooral bij differentiëren en bij het oplossen van vergelijkingen werkte de SR efficiëntieverhogend, vonden ze. Kennelijk duurde het experiment lang genoeg om een 'standaardrepertoire' aan machinehandelingen te ontwikkelen. Een van de leerlingen mengde wiskunde- en machinetaal om zo'n standaardprocedure te beschrijven:

? $I = x \cdot u \cdot w = x \cdot \frac{x}{2} \cdot (120-5x)$.
solve$(0 = I' = (-15x \cdot (x-16))/2, x) \Rightarrow x = 16$ of $\cancel{x=0}$
$16 \cdot \frac{16}{2} \cdot (120 - 5 \cdot 16) = 5120$ = optimale inhoud
Bij $x=16$, $u=8$, $w=40$.

... en minnen

Niet zo verrassend, maar wel belangrijk, is het feit dat de leerlingen tegen een aantal moeilijkheden aanliepen bij het gebruik van de SR. In de loop van het experiment kwamen die misschien wel minder frequent voor, maar echt overwonnen werden ze niet altijd. De meest voorkomende moeilijkheden vallen onder de noemers syntax, interpretatie en navigatie.
Syntaxproblemen kennen we ook van de grafische rekenmachine. Denk aan het werken met haakjes, of aan het verschil tussen de toestands-min en de bewerkings-min. De uitgebreidere mogelijkheden van de SR leiden ook tot een toenemende complexiteit van de syntax. Wanneer leerlingen bijvoorbeeld de nulpunten van de afgeleide van een functie f willen bepalen, kan er van alles mis gaan. Omdat ze nog vrijwel geen functies met de hand kunnen differentiëren, wordt dat uitbesteed aan de SR. De differentieer-opdracht in machinetaal luidt:

dif($f(x)$,x).

Die toevoeging 'x' wordt vergeten, ook omdat leerlingen de zin er niet van zien; die wordt pas duidelijk wanneer er sprake is van een functie van twee variabelen:

Melanie heeft problemen met de afgeleide naar y. De docent geeft aan hoe ze de afgeleide naar x en die naar y van z(x,y) kan berekenen.

In één regel meteen de nulpunten van de afgeleide berekenen, is vragen om problemen:

solve(dif($f(x)$,x) = 0,x).

Hier wordt soms de noodzakelijke toevoeging '= 0' vergeten. Opsplitsing van het proces in deelstappen – eerst de afgeleide, dan de nulpunten – maakt de syntax overzichtelijker.
Ook de *interpretatie van de uitvoer* van de machine geeft soms problemen: leerlingen begrijpen foutmeldingen niet, of de machine geeft antwoorden in de ogen van de leerlingen op een ongebruikelijke manier weer.
Zo werd een leerling bijvoorbeeld in verwarring gebracht toen de machine de afgeleide van een functie zo weergaf:

$$\frac{x-12}{\sqrt{x^2-24x+169}},$$

terwijl het antwoord achterin het lespakket luidde:

$$-\frac{(12-x)}{\sqrt{25+(12-x)^2}}.$$

Wie heeft nu gelijk, het antwoordenboek, de machine, allebei of geen van beide?
Verder is het *navigeren door de schermen en menu's* van de machine niet vanzelfsprekend. Welke optie is waar te vinden? Is een functie die in het functiebestand wordt ingevoerd, ook op te vragen in het algebrascherm? Dergelijke zaken waren soms niet duidelijk, al bleken deze problemen vaak eenvoudig op te lossen.
Overigens staan veel van de hierboven beschreven moeilijkheden zelden op zichzelf; vaak is er een samenhang met (een gebrek aan) wiskundige kennis. Zo wilde een leerling weten voor welke x geldt dat $\cos(x) = 35/18$. Invoer van $\cos^{-1}(35/18)$ gaf de foutmelding 'non-real result'. Natuurlijk begreep hij die foutmelding niet; toch zou je hopen dat die boodschap aanleiding is om de invoer te controleren en te bedenken dat de cosinus de waarde 35/18 niet aanneemt.

De SR als 'Black Box'

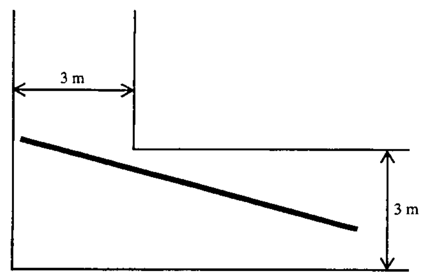
De tweede helft van de lessenserie hebben de leerlingen gewerkt aan optimaliseringsopgaven. Daarbij kwamen functies aan de orde die ze nog niet met de hand konden differentiëren. Dat deed de SR voor hen, die als een 'black box' afgeleiden bepaalde en vergelijkingen oploste. De vraag hierbij was nu of de leerlingen deze 'black box' kunnen gebruiken zonder dat ze de grote lijn van het oplossingsproces uit het oog verliezen.
De resultaten op dit punt zijn gematigd positief. De meeste leerlingen wisten goed waar ze mee bezig waren. Het inzicht in de methode van het zoeken naar horizontale raaklijnen leek niet geschaad te worden door het uitbesteden van de techniek. Sommigen vonden het zelfs overzichtelijk om op deze manier het rekenwerk 'apart te zetten'.

De SR helpt bij het overzicht en geeft ook meer overzicht.

Toch voelde een aantal leerlingen zich hierbij niet prettig: *Ik voelde me onzeker bij dat differentiëren zonder dat we dat al gehad hadden. Hadden jullie ons niet beter eerst techniek van het differentiëren kunnen laten doen?*

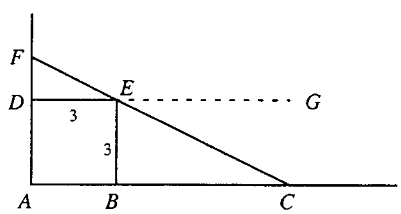
Onderzoeksopdrachten met de SR

Het lesmateriaal bevatte ook enkele onderzoeksopdrachten (zie ook [5]). Algemeen gesproken functioneerde de SR hierbij goed: de leerlingen konden lastige rekenklussen aan de machine overlaten en voelden zich vrij om te experimenteren.
Een van de onderzoeksopdrachten was het bekende probleem van de buis die door de bocht moet. Het begint zo:



Hierboven zie je een bovenaanzicht van een gang van drie meter breed, waarin een hoek zit. Twee personen proberen een dunne buis van 8,5 meter lengte door deze bocht te manoeuvreren. De vraag is of dat zal lukken...

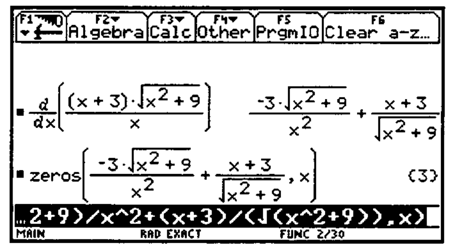
Leerlingen zien snel dat de buis het beste tegen de 'binnenhoek' kan worden gehouden.
Schematisch kan de situatie als volgt worden getekend:



Aardig aan deze opgave is, dat die op verschillende manieren kan worden aangepakt. In de verslagen van de leerlingen staan de volgende methoden:

1. Stel BC gelijk aan x. Dan geldt: $EC = \sqrt{x^2 + 3^2}$. Uit gelijkvormigheid van CBE en EDF volgt dat $DF = 3^2/x$. Dus, weer met Pythagoras: $EF = \sqrt{3^2 + (3^2/x)^2}$. De totale afstand is de som van CE en EF. Dat geeft dus twee wortels, die eventueel door handig kwadrateren weg te werken zijn. De keuze $DF = x$ leidt tot dezelfde formules.
2. Als manier 1, maar dan met behulp van de gelijkvormigheid van CBE en CAF. De vermenigvuldigingsfactor is $\frac{x+3}{x}$. De totale lengte CF is de lengte van EC vermenigvuldigd met deze factor.
3. Als manier 1, maar bereken de totale lengte CF met $\sqrt{AC^2 + AF^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (3^2/x + 3)^2}$. Dit geeft maar één wortel.
4. Stel AC gelijk aan x. Dan is BC gelijk aan $x - 3$, en kan verder gegaan worden op één van bovenstaande manieren. De formules ogen wat ingewikkelder.
5. Stel de hoek CEG gelijk aan x. De totale lengte is dan gelijk aan $\frac{3}{\sin x} + \frac{3}{\cos x}$.

Elk van deze methoden leidt tot een functie waarvan de leerlingen met de SR het minimum kunnen bepalen. Neem bijvoorbeeld de tweede manier:



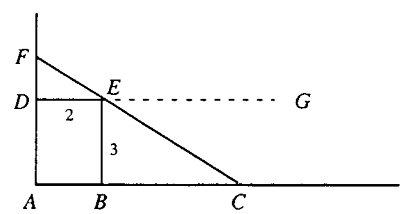
Esther en Henk kiezen de derde aanpak. In hun verslag schrijven ze:

We hebben de wortel weggelaten zodat de SR het makkelijker kan uitrekenen:

$$\left(3 + \frac{9}{x}\right)^2 + (3 + x)^2$$

Manier 5 heeft de complicatie dat de SR de ongebruikelijke notatie @n hanteert voor de k in $k \cdot \pi$. Dat snapt het tweetal dat deze aanpak volgt natuurlijk niet.

Dan wordt de situatie gewijzigd:

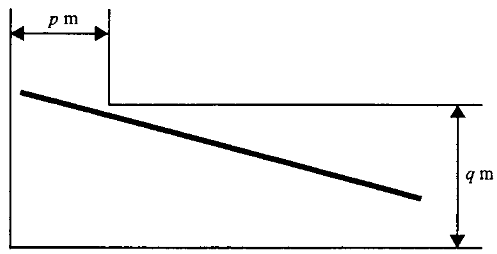


Carolien en Hanneke kiezen manier 4 en krijgen de volgende formule:

$$\sqrt{2^2 + \left(\frac{6}{x-2}\right)^2} + \sqrt{3^2 + (x-2)^2}$$

Bij het nulstellen van de afgeleide hiervan lopen ze tegen de beperkingen van de SR aan: de machine geeft geen antwoord. Alvorens over te schakelen op methode 2 schrijven ze vergoeilijkend in hun verslag:
Dit is een erg moeilijke berekening. Daarom is het makkelijker om gelijk de maximale lengte te berekenen.

Tenslotte de generalisatie:



De meeste leerlingen volgen dezelfde aanpak als in de concrete gevallen en komen zo tot een goede formule. Maar dan ontstaan er enkele moeilijkheden. Esther en Henk voeren in:

$$\left(\frac{pq}{x} + q\right)^2 + (p + x)^2$$

maar ze zetten geen vermenigvuldigingsteken tussen p en q. Omdat de SR ook variabelennamen met meer dan één letter toestaat, vat de machine pq op als één variabele. Daarmee kan best gerekend worden, maar dat leidt tot onbegrijpelijke antwoorden als je je dit niet realiseert.
Bij Dennis en Niels zit het probleem dieper. Ook in hun verslag staat geen algemene oplossing. Ze beschrijven wel de te volgen methode, maar lijken te denken dat voor p en q eerst waarden moeten worden gesubstitueerd. Ook in de klassikale nabespreking komt dit naar voren:

Dennis: *Je moet toch eerst voor p en q waarden invullen?*
Docent: *Je kunt ook eerst oplossen, dan krijg je het antwoord uitgedrukt in p en q.*

Kennelijk is de kracht van computeralgebra nog niet helemaal tot hen doorgedrongen. Een vergelijkbaar misverstand zien we ook bij Irene, die aan een andere onderzoeksopdracht heeft gewerkt:

Als we dit op nul herleiden, geeft de SR geen uitkomst, maar er blijft staan:

$$\sqrt{-(x^2-2x-a^2+1)} + (x-1).\sqrt{2x+a^2-1} = 0$$

Eigenlijk is dat ook niet mogelijk als je geen getal voor a invult. Dus als je wilt weten hoe laag 't gewicht maximaal kan hangen, vul je in deze laatste formule de lengte van het linkertouwtje (= AC) in. Dan hoef je bij elke opstelling in deze vorm niet steeds het hele differentieerwerk langs te gaan, maar is deze formule genoeg.

Vooral de zinssnede 'Eigenlijk is dat ook niet mogelijk als je geen getal voor a invult' is veelzeggend.
Een ander punt waar leerlingen op gewezen moesten worden, is het onderscheid dat een computeralgebraprogramma maakt tussen exacte en decimale getallen. In een van de andere onderzoeksopdrachten speelt een touwtje van 40 cm een rol. Wanneer de leerlingen dit invoeren als 0.4 meter, wordt dit als een decimaal getal beschouwd en geeft de SR geen exacte antwoorden meer.
Ondanks deze 'hobbels' en misverstanden wekken de verslagen van de leerlingen de indruk dat de SR een onderzoekende houding van de leerlingen stimuleert. De oplossingsmethoden van de leerlingen hebben een behoorlijk niveau van complexiteit.

Gemengde gevoelens

Terugkijkend op het experiment geven de meeste leerlingen aan dat ze de SR een prettige en nuttige machine vonden. Toch lopen de meningen wat uiteen. De twee onderstaande fragmenten uit de nagesprekken geven de twee uitersten aardig weer.

Vraag: *Hoe vond je het experiment?*
Jasper: *Leuk! Echt heel leuk. Makkelijker ook.*
Vraag: *Wat vond je makkelijker?*
Jasper: *De commando's zijn simpeler en natuurlijker. Het is heel mooi dat hij wiskundige notaties gebruikt.*
Vraag: *Stimuleerde de SR je of blokkeerde hij je juist?*
Jasper: *Hij stimuleerde enorm. Ik vond de lessen ook veel leuker zo.*

Vraag: *Hoe vond je het experiment?*
Marieke: *Leuk, maar niet echt nuttig.*
Vraag: *Wat bedoel je daarmee?*
Marieke: *Je bent de hele tijd dingen blind aan het intikken zonder te weten wat je precies doet.*
Vraag: *Dus je hebt weinig vertrouwen in het apparaat?*
Marieke: *Dat wel, hij zal heus wel goed doen wat je invoert. Ik ben alleen gewoon nieuwsgierig naar wat er nou achter zit. Ik wil dat apparaat best gebruiken, maar alleen als ik het zelf ook had gekund.*
Vraag: *Was de SR in de afgelopen maand een blokkade of juist een stimulans?*
Marieke: *Het was niet echt een blokkade, maar ook absoluut geen stimulans, omdat het niet echt helpt nieuwe wiskunde te leren.*

Conclusie

Hieronder vat ik de belangrijkste conclusies uit het project samen.

- De beschikbaarheid van de symbolische rekenmachine leidt tot daadwerkelijk gebruik bij leerlingen, ook thuis en bij andere vakken.
- De belangrijkste barrières voor een zinvol gebruik van de SR vormen de syntax van de machine, de interpretatie van de uitvoer en het navigeren door schermen en menu's.
- Wanneer de SR gebruikt wordt voor een beperkt repertoire van 'standaardhandelingen', kan het gebruik van de machine al snel efficiënt zijn.
- Het is mogelijk om werk aan de SR over te laten dat

leerlingen zelf niet met de hand kunnen uitvoeren. Dit hoeft niet te leiden tot verlies van overzicht; wel voelt een deel van de leerlingen zich niet prettig bij het gebruik van de SR als 'black box'. Die gevoelens moeten zeker serieus genomen worden, lijkt me.

- Bij onderzoeksopdrachten kan de beschikbaarheid van de SR de onderzoekende houding stimuleren.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut, Utrecht

Noten

[1] Drijvers, P. (1997). 'Oude wiskunde en nieuwe technologie'. *De Nieuwe Wiskrant 16*(3) pp. 49 - 53.

[2] Drijvers, P. (1998). 'De symbolische rekenmachine over de grens'. *De Nieuwe Wiskrant 18*(1) pp. 47 - 53.

[3] Drijvers, P. (1999). 'Experiment met de symbolisch rekenmachine op College De Klop'. *Euclides 74*(6).

[4] Drijvers, P. (1998). *De symbolische rekenmachine in de wiskundeles.* Utrecht: ISOR Onderwijsresearch / Freudenthal Instituut.

[5] Drijvers, P. (1999). 'Op hoeveel nullen eindigt 1998!?' *Te verschijnen in jaargang 74 van Euclides.*

[6] Dit onderzoek (projectnummer 97.1.4.1) is gefinancierd uit het budget dat het ministerie van OC&W jaarlijks ter beschikking stelt aan de LPC ten behoeve van Kortlopend Onderwijsonderzoek, dat uitgevoerd wordt op verzoek van het onderwijsveld.

Overzicht van de obstakels:

1 Verschil numeriek - algebraïsch rekenen

2 Verschil representatie CAS - handwerk

3 Beperkingen van CAS

4 Onvermogen om van CAS optimaal te profiteren

5 Gebrek aan inzicht in variabelen en parameters

6 Weerstand tegen Black-Box karakter van CAS-gebruik