

---

# Algebra leren met de TI-89

## Werkgroep T<sup>3</sup>-symposium Oostende augustus 2000

*Paul Drijvers*

*Freudenthal Instituut / Algemeen Pedagogisch Studiecentrum*

### **Doel**

Reflecteren op het leren van algebra in een computeralgebra-omgeving, en in het bijzonder op het omgaan met variabelen en parameters.

### **Programma**

1. Inleiding (15')
2. Werken in groepjes aan opgaven uit lesmateriaal (50')
3. Nabespreken en identificatie van obstakels aan de hand van leerlingen-uitwerkingen (25')

### **Bij 2. Werken in groepjes aan opgaven uit lesmateriaal**

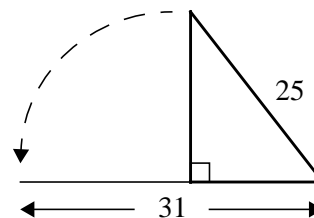
- De opgaven uit paragraaf 1 komen uit het pakket 'Veranderlijke Algebra' dat ontwikkeld is in het kader van het project 'Het leren van algebra met behulp van computeralgebra systemen' dat aan het Freudenthal Instituut wordt uitgevoerd. De opgaven uit paragraaf 2 zijn afkomstig uit nascholingsmateriaal van het Freudenthal Instituut. De laatste opgave is overgenomen uit een experimenteel eindexamen in Denemarken.
- Werk deze fragmenten één voor één door in twee fasen:
  - Eerst met de ogen van een *leerling*. Welke vaardigheid en deskundigheid heeft u bij het oplossen van de opgaven nodig? Let met name op het gebruik van letters hierbij.
  - Ten tweede vanuit het perspectief van de *docent*. Bespreek met elkaar welk beeld de leerlingen moeten hebben van variabelen en parameters om de opgaven tot een goed einde te brengen.
- In de nabespreking wordt met name ingegaan op de opgaven uit de eerste paragraaf.
- Na afloop kunt u de belangrijkste bevindingen van het klasse-experiment waarop deze werkgroep is gebaseerd nalezen in het artikel van Drijvers en Van Herwaarden, dat zal worden uitgedeeld.



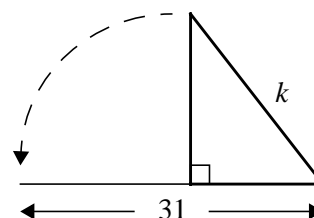
---

# 1 Substitutie

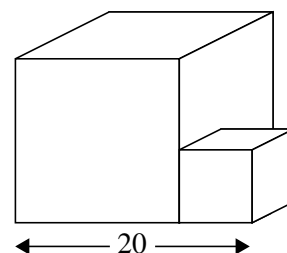
- 1 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van 25.
- Hoe lang zijn de rechthoekszijden?
  - Los het probleem ook op als de twee rechthoekszijden samen 35 zijn in plaats van 31.
  - Los het probleem in het algemeen op, dat wil zeggen zonder dat de getallen 31 en 25 gegeven zijn.



- 2 Twee rechthoekszijden van een rechthoekige driehoek zijn samen 31 lang. De schuine zijde heeft een lengte van  $k$ . De vraag is, hoe lang de rechthoekszijden zijn. Voor welke waarden van  $k$  heeft dit probleem geen oplossing?



- 3
- De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is 2240. Hoe groot is de ribbe van de grootste kubus?
  - De som van twee getallen is  $s$  en de som van hun derdemachten is  $d$ . Druk die getallen uit in  $s$  en  $d$ . Schrijf de formules in zo eenvoudig mogelijke vorm.
  - Hoe kun je in het antwoord van **b** zien, dat de twee oplossingen symmetrisch liggen rond  $\frac{1}{2}s$ ?



- 4 De ribben van twee kubussen zijn samen 20 lang. De totale inhoud van beide kubussen is  $d$ . Welke waarden kan de totale inhoud  $d$  aannemen?

historische noot:  
De Babyloniërs



Hierboven zie je een Babylonische kleitablet waarin spijkerschrift is geschreven, toen de klei nog nat was. Dit tablet is waarschijnlijk tussen 1900 en 1600 voor Christus gemaakt.

Sommige van dergelijke tabletten bevatten wiskundige problemen, bijvoorbeeld in de stijl van:

*Van een rechthoekig stuk land kennen we de oppervlakte ( $540 \text{ m}^2$ ) en de lengte van de diagonaal ( $39 \text{ m}$ ). Bereken de afmetingen van het stuk land.*

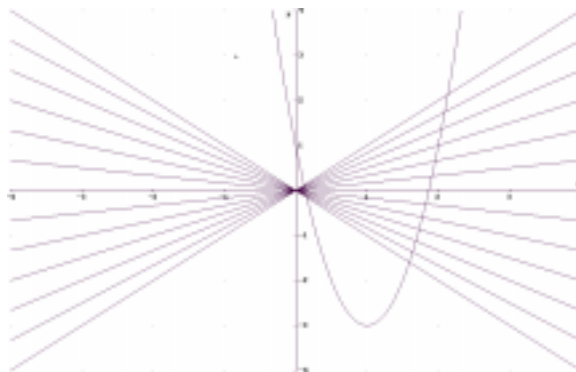
5 Probeer deze opgave op te lossen.

6 Een ander Babylonisch probleem, op eigentijdse manier geformuleerd: Voor welke waarden van  $x$  en  $y$  geldt:

$$x + y = 28$$

$$x - y + x \cdot y = 183 ?$$

7 Een ‘waaier’ van lijnen



Hierboven staat de grafiek van de functie  $y$  met  $y = 4x^2 - 8x + 1$ .

Ook is een ‘waaier’ van lijnen door de oorsprong getekend. Zoals je ziet, varieert het aantal snijpunten dat deze lijnen hebben met de parabool. Vragen zijn nu:

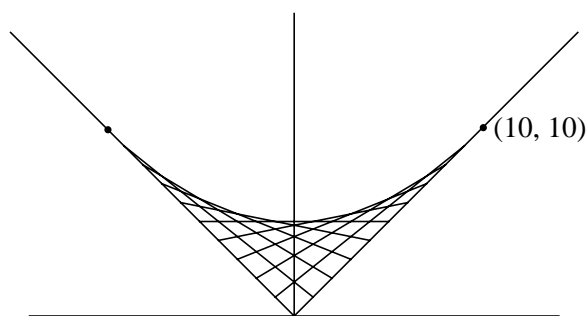
- Tussen welke waarden kan het aantal snijpunten variëren?
- Waarvan hangt het aantal snijpunten tussen lijn en kromme af?
- Bepaal een regel die aangeeft hoe je uit de vergelijking van de lijn het aantal snijpunten met de kromme kunt afleiden.

Bron: pakket ‘Veranderlijke Algebra’, Freudenthal Instituut, Utrecht

---

## 2 Raken aan een bundel

- 1 Gegeven is de verzameling functies  $y_n(x) = x \cdot (n + 1 - x^n)$  met  $n = 1, 2, 3, 4, \dots$
- a. Teken de grafieken van de functies  $y_1, \dots, y_9$  op het scherm ( met  $x$ -interval  $[0, 2]$ ,  $y$ -interval  $[0, 10]$ ).  
Wat valt op als je naar de toppen kijkt? Bewijs je vermoeden.
- b. Als we  $n$  niet alleen de natuurlijke getallen, maar alle reële postieve getallen laten doorlopen, dan ‘omhullen’ de grafieken een nieuwe kromme die min of meer al op het scherm te zien is.  
Een standaard methode om een vergelijking van die kromme te vinden is:
- differentieer  $y_n(x)$  naar  $n$
  - elimineer  $n$  uit de vergelijkingen  $y_n(x) = x \cdot (n + 1 - x^n)$  en  $\frac{\partial}{\partial n} y_n(x) = 0$
- Voer de eliminatie uit met de TI 89.
- c. Zet de verkregen expressie in  $x$  in het functiebestand en controleer (althans optisch) of de kromme aan de negen eerder getekende krommen raakt.
- 2 In de vorige opgave was de vraag om de formule te vinden van een kromme die aan een gegeven bundel raakt.  
Pas de daar gepresenteerde methode toe om in te laten zien dat de lijnen in onderstaande figuur een parabool omhullen. Welke vergelijking heeft deze parabool?



Bron: nascholingsmateriaal van de cursus ‘wiskunde en ICT’ van het Freudenthal Instituut

---

### 3 Een examenopgave

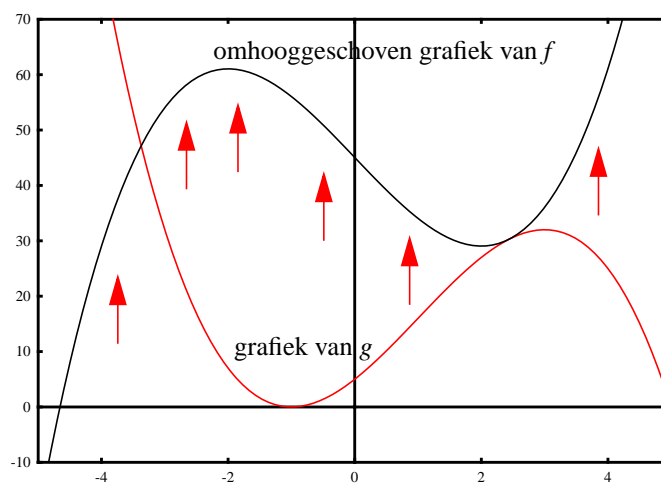
1 Gegeven zijn functies  $f$  en  $g$  met

$$f(x) = x^3 - 12x + 16$$

en

$$g(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 5.$$

In de figuur hieronder staat de grafiek van  $g$ . De grafiek van  $f$  is echter zodanig omhoog geschoven, dat deze de grafiek van  $g$  raakt. De vraag is in welk punt de grafieken elkaar raken.



Bron: experimenteel eindexamen waarbij leerlingen het computeralgebra pakket Mathematica gebruiken, Denemarken, 1997.