De homografische functie en het gedrag van vogels

Renée Gossez, Athénée Royal d'Uccle I en Université Libre de Bruxelles, Brussel

Inleiding

Langs de Atlantische kust van Noord-Amerika vindt men een kraai die zich op een speciale manier voedt.
Zijn geliefkoosde maaltijd is een dik weekdier (zie blz. 6) waarvan de vogel de schelp moet breken om het heerlijke vlees te kunnen opeten. De gebruikte techniek vereist nogal veel energie : de vogel neemt zijn prooi mee in de lucht en laat die op de grond vallen. Hij pikt zijn prooi opnieuw mee in de lucht en laat die weer vallen, …. Dit spelletje herhaalt de vogel zo vaak tot de sterke schelp uiteindelijk breekt.

Een Amerikaanse zoöloog die het gedrag van de kraaien bestudeerde, heeft opgemerkt dat de vogels meestal hun prooi laten vallen van een hoogte van ongeveer 5 meter.
Waarom 5 meter ? Zou dat soms de "optimale" hoogte zijn, d.w.z. de hoogte waarmee de door de vogel verbruikte energie om zijn maaltijd te kunnen verorberen minimaal is ?

In de volgende bladzijden zullen we uitleggen hoe de zoöloog heeft aangetoond dat het gedrag van de kraaien redelijk optimaal is.

Het onderwerp is een mooie toepassing van de homografische functie en van lineaire regressierechten en is geschikt voor leerlingen van het 5de jaar secundair onderwijs.

Wiskundig model

We noemen

H, de hoogte waarvan de vogel zijn prooi laat vallen;

N, het nodige aantal schelp-worpen om de schelp uiteindelijk te breken;

W, de hoeveelheid arbeid verricht door de vogel om een schelp te breken.

De hoeveelheid arbeid is recht evenredig met H en N. Men mag dus veronderstellen dat

$$\boxed{W = N \cdot H} \quad (1)$$

Het doel is te bewijzen dat W minimaal is als H ongeveer 5 meter is.

Maar N is een functie van H. Inderdaad, de schelp zal vlugger breken als ze van hoger valt. Men moet dus eerst de functie N(H) bepalen.

Bepaling van N(H)

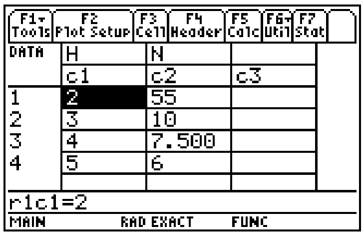
Daartoe heeft onze zoöloog het volgende experiment uitgevoerd met schelpen:

Hij heeft een aantal schelpen van ongeveer dezelfde grootte genomen en heeft ze laten vallen van verschillende hoogten. Voor elke hoogte heeft hij het gemiddeld aantal worpen, nodig om de schelp te breken, genoteerd.

De resultaten vind je in de volgende tabel :

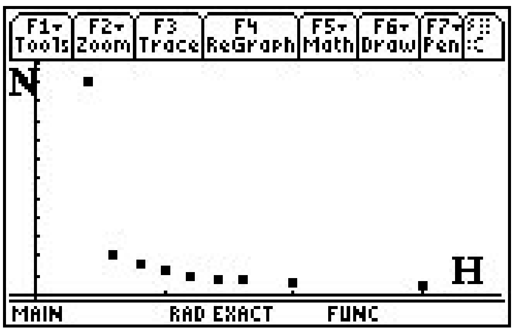
Hoogte in meter	Gemiddeld aantal worpen
2	55
3	10
4	7,5
5	6
6	5
7	4
8	4
10	3
15	2,5

We voeren deze tabel in in de TI 89:



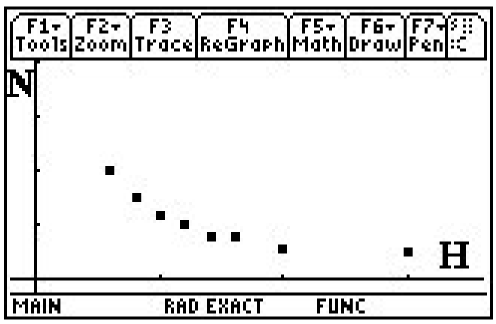
Figuur 1

Een grafiek van de data met N als functie van H levert :



Figuur 2

In een ander venster :



Figuur 3

Dit is blijkbaar een deel van de grafiek van een homografische functie !

Iedereen weet dat de grafiek van een homografische functie asymptoten bevat.
Is dat plausibel voor de grafiek van N(H) ? Zeker !

We verwachten immers :

- een horizontale asymptoot met vergelijking $N = 1$
- een verticale asymptoot met vergelijking $H = H_0$

Inderdaad :

- Om de schelp te breken moet men ze ten minste één keer laten vallen.
  N vermindert als de hoogte H groter wordt, en als de hoogte zeer groot wordt mag men verwachten dat de schelp bijna na één worp zal breken.
- Als je een schelp gooit van een hoogte H die kleiner wordt, wordt N groter maar er zal een hoogte H_0 zijn waarvoor je niet meer hoog genoeg bent om de schelp nog te kunnen breken …

We vermoeden dus dat $$\boxed{N = 1 + \frac{k}{H - H_0}} \quad (2)$$

Het doel is nu H_0 en k te bepalen zodat de grafiek van N(H) zo goed mogelijk door de punten van figuur 2 loopt.

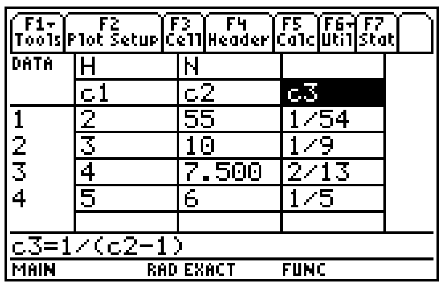
Op de TI 89 heb je een aantal regressiekrommen (lineaire, exponentiële, logaritmische, kwadratische regressie, …), maar geen hyperbolische regressie…

Het idee is dan (2) als volgt te transformeren :

$$N = 1 + \frac{k}{H - H_0} \Leftrightarrow \frac{1}{N-1} = \frac{1}{k} \cdot (H - H_0)$$

En nu is $\frac{1}{N-1}$ een lineaire functie van H !

❖ We berekenen $\frac{1}{N-1}$ in de tabel van figuur 1 :



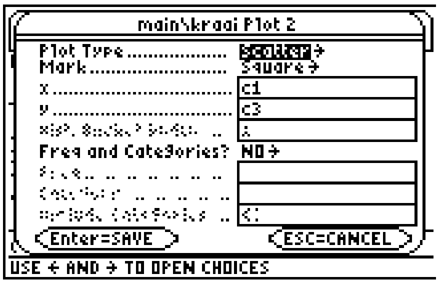
DATA	H	N	
	c1	c2	c3
1	2	55	1/54
2	3	10	1/9
3	4	7.500	2/13
4	5	6	1/5

c3=1/(c2-1)

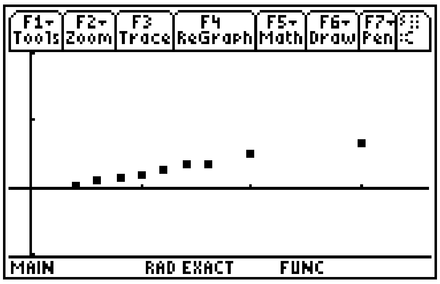
MAIN RAD EXACT FUNC

Figuur 4

❖ De grafiek van $\dfrac{1}{N-1}$ als een functie van H levert:

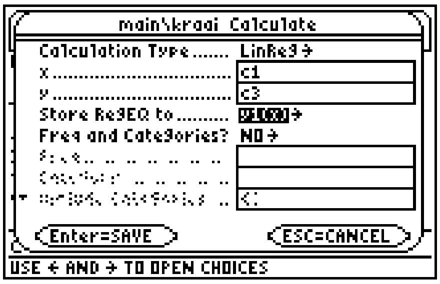


Figuur 5

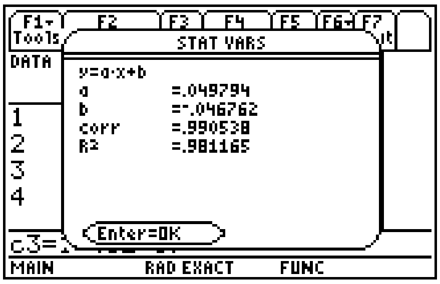


Figuur 6

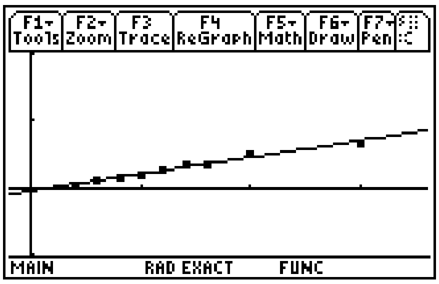
❖ We benaderen deze data door lineaire regressie :



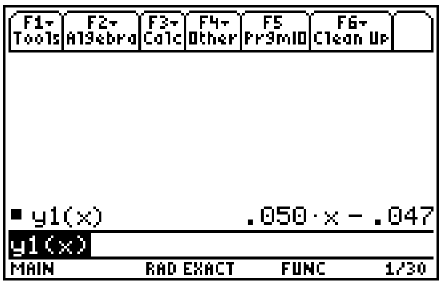
Figuur 7



Figuur 8



Figuur 9



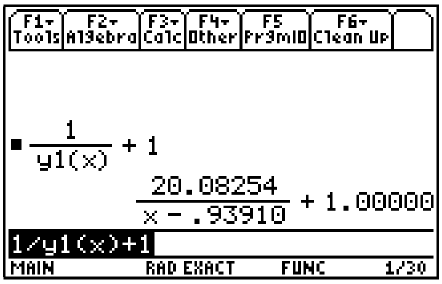
Figuur 10

Men mag dus $\dfrac{1}{N-1}$ benaderen door $\dfrac{1}{N-1} = 0.050 \cdot H - 0.047$.

Berekening van N :

Op de machine is $y_1(x) = \dfrac{1}{N-1}$

$$\Leftrightarrow N = \frac{1}{y_1(x)} + 1$$



Figuur 11

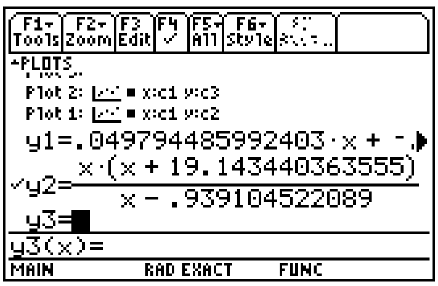
Uiteindelijk verkrijgen we : $$\boxed{N = N(H) = \frac{20.08254}{H - 0.93910} + 1} \quad (3)$$

En nu het bewijs dat een kraai geen domme vogel is …

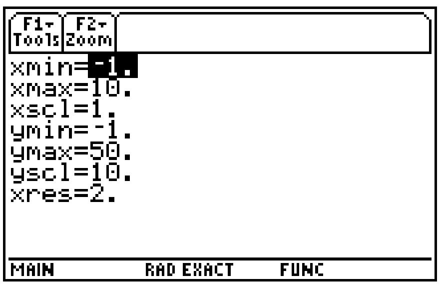
Uit (1) en (3) volgt de hoeveelheid energie verricht door een kraai om een schelp te breken, in functie van de hoogte van waaruit de vogel de schelp laat vallen :

$$\boxed{W = N \cdot H = (\frac{20.08254}{H - 0.93910} + 1) \cdot H = \frac{(H + 19.14344) \cdot H}{H - 0.93910}} \quad (4)$$

We maken de grafiek van die functie in een goed gekozen venster :

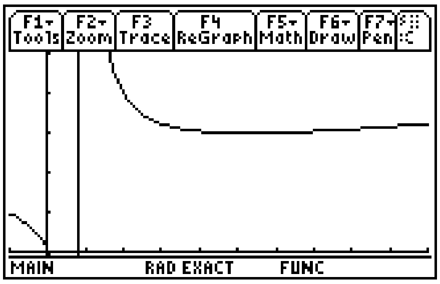


Figuur 12



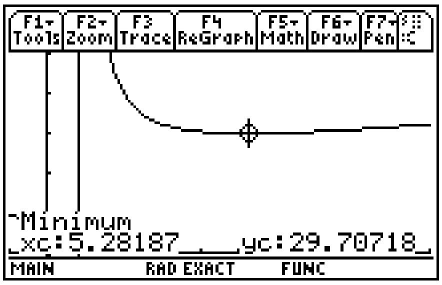
Figuur 13

Dit levert :



Figuur 14

en het minimum van die functie is ……



Figuur 15

… *ongeveer 5 meter* !

Is dat niet verbazend ?

Een woordje over de prooi …

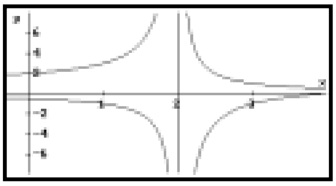
In Microsoft® Encarta® Online Encyclopedia 2000
http://encarta.msn.com
leest men voor "WHELK" :

Whelk, common name applied to marine gastropod, also known as a sea snail, having a spiral shell. The common northern whelk has a thick, spiral shell, usually about 7.5 to 15 cm (about 3 to 6 in) in length, with a wide aperture and ridged whorls. It is active and carnivorous, feeding on living or dead animals, which it grasps with its foot. The mouth is located at the end of a large proboscis, and the radula, or tongue, is toothed and capable of boring holes in the shells of other mollusks on which the whelk preys.
Common along the northern coasts of the North Atlantic Ocean, the whelk occurs from the low-water mark to a depth of about 180 m (about 600 ft). Several hundred eggs are laid in individual capsules; the latter are attached to each other, forming spongelike masses. In many countries the whelk is used for food. See also Conch.

Scientific classification: Whelks belong to the order Neogastropoda. The common northern whelk is classified as Buccinum undatum.

Literatuur

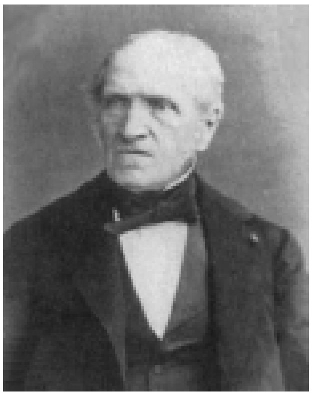
The Mathematics Teacher, Vol. 92, n°6,
p. 475-489, September 1999.



Meer over de homografische functie

Wie heeft de naam 'homografische functie" aan de functie $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ gegeven

en waarom was die naam gekozen ?



Michel Chasles 1793-1880

http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/~history/

Het is **Michel Chasles**, rond 1850.

Het woord "homografisch" komt van het Grieks ;
homos = gelijkvormig en *graphein* = schrijven, tekenen.

Voor Chasles waren twee figuren "homografisch" als ze "gelijkvormige tekeningen" hadden, anders gezegd, als de ene het beeld van de andere was door een projectieve transformatie.

Aangezien de functies van de vorm

$$x \to \frac{ax+b}{cx+d}$$

projectieve transformaties van een rechte voorstellen, heeft hij ze "homografisch" genoemd.

Woord van dank

Ik dank Prof. Francis Buekenhout (Université Libre de Bruxelles)
en Prof. Jean Doyen (Université Libre de Bruxelles) voor de documentatie waarmee ze mij hebben voorzien.

Ik dank mijn leerlingen voor hun enthousiasme gedurende de wiskundelessen.