MEERWAARDE VAN HET GEBRUIK VAN EEN COMPUTERALGEBRAPAKKET.

1. De grafiek van de (rationale, irrationale, goniometrische, logaritmische, exponentiële ,...) functie is direct beschikbaar. Aan de hand van de grafiek kunnen o.a. de integratiegrenzen en de vlakke gebieden waarvan men de oppervlakte wil berekenen, worden bepaald.

2. Het verband tussen bepaalde integraal en oppervlakte wordt verduidelijkt. Men beschikt voor de oppervlakteberekening bovendien over een uniforme formule : de bepaalde integraal van de absolute waarde van de functie.

3. Aan de hand van voorbeelden kan de betekenis van de begrippen 'even en oneven functie' worden geïllustreerd. De implicatie naar de bepaalde integraal toe wordt gevisualiseerd :

oneven functie : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$,

even functie : $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$.

4. Manueel rekenwerk waarbij de integratiegrenzen rationale of irrationale getallen zijn, kan worden vermeden.
   Voorbeeld :de integratiegrenzen zijn de reële oplossingen van $x^4 = x^2 - 2$.

5. Het verband tussen meetkundige en algebraïsche eigenschappen wordt verduidelijkt.
   Voorbeelden : raken $\leftrightarrow$ dubbele wortel, tekenbepaling voor gebieden boven of onder de x-as.

6. Numeriek oplossen van vergelijkingen wordt mogelijk. Het interval waarin een nulpunt ligt, kan bovendien op de grafiek worden afgelezen.
   Voorbeelden : $\ln x = x - 2$, $\frac{1}{x} = 4 - x^2$.

7. Numerieke integratie wordt mogelijk voor functies waarvoor er geen primitieve functie kan gevonden worden.
   Voorbeelden. $f(x) = \frac{e^x}{x}$, $g(x) = \frac{\sin x}{x}$.

8. Men kan rechtstreeks het verband zien tussen bewerkingen met functies en de corresponderende grafieken. Zo is o.a. de grafiek van het verschil van twee functies $h(x) = f(x) - g(x)$ direct beschikbaar.

9. Een familie krommen kan worden bestudeerd via de vector-instructie.
   Voorbeeld. $f(x) = x^2 - kx$, met parameter k.

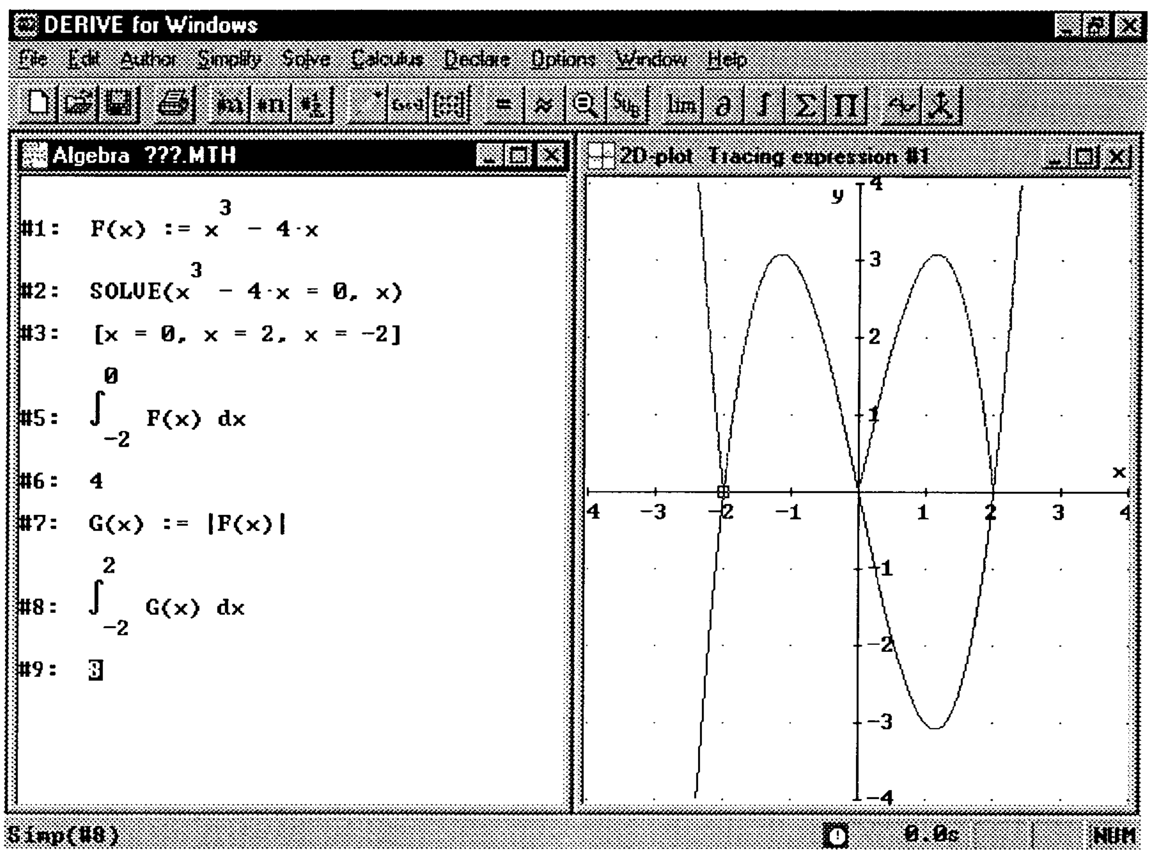
10. Oneigenlijke integralen waarbij een discontinuïteitspunt in het integratie-interval ligt, kunnen worden geïdentificeerd. Berekenen van 'lastige limieten' (wanneer één van de integratiegrenzen ∞ is) kan vermeden worden.

11. Een primitieve functie kan direct worden opgevraagd (onbepaalde integraal) : op die manier worden 'lastige' integratiemethoden vermeden.

12. Beschikken over een correcte uitkomst kan een uitdaging zijn tot correct manueel rekenwerk.

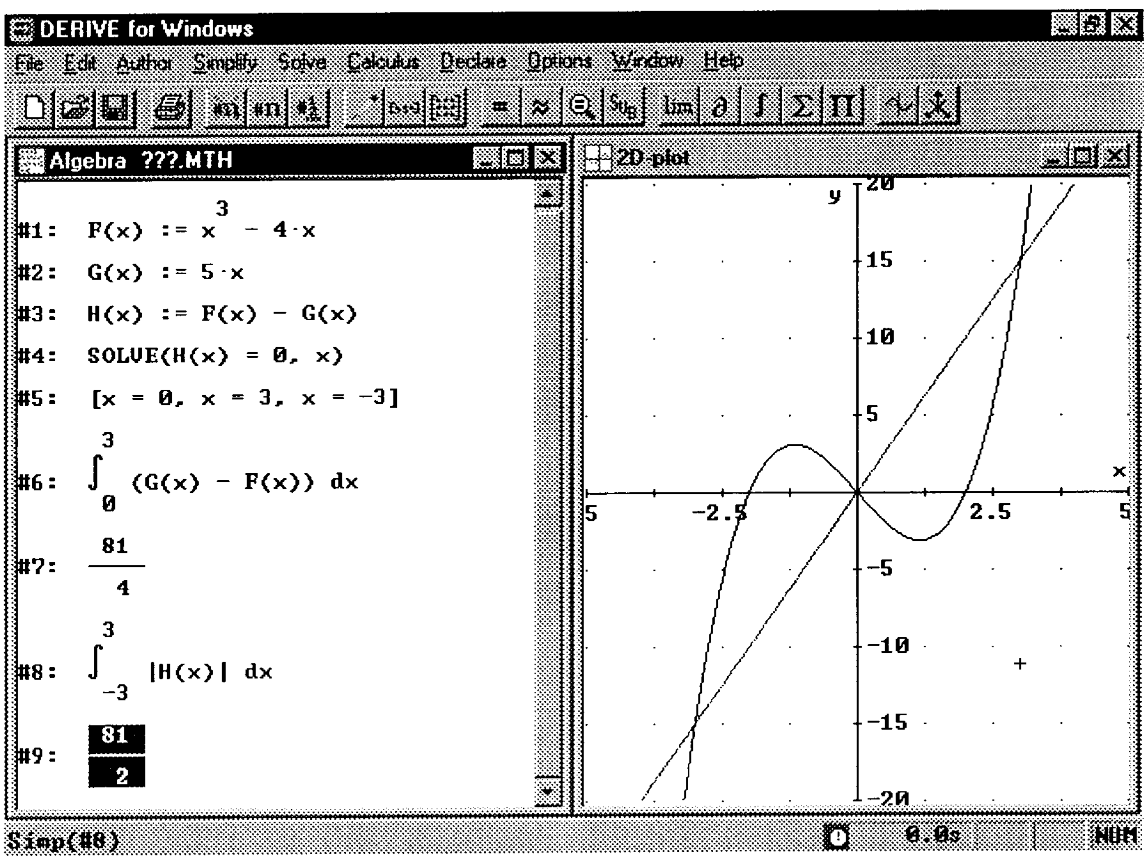
Opgave 1. Bereken de oppervlakte van het vlak gebied tussen de grafiek van de functie f en de X-as als $f(x) = x^3 - 4x$.

- Typ het functievoorschrift in op de Algebra-pagina : F(x) := x^3 - 4x.
- Schets de grafiek op het 2D-plot-scherm.
- Splits het scherm verticaal (Window - Tile Vertically) zodat het Algebra-scherm en het 2D-plot-scherm naast elkaar verschijnen.
- Doorloop de grafiek via F3 (Trace) en de pijltjestoetsen naar links of naar rechts. Kan je de snijpunten van de grafiek met de X-as aflezen?
- Bereken de nulpunten (op het Algebra-scherm!) via Solve - Algebraically.
- Bereken de gezochte oppervlakte. Hou rekening met het feit dat deze functie oneven is! Integratie gebeurt via Calculus - Integrate. Typ het functievoorschrift in en kies de optie *Bepaalde Integraal* (Definite Integral). Vul de passende integratiegrenzen in en bevestig met OK. Vraag de correcte uitkomst op. Je kan ook het ikoontje ∫ aanklikken om integralen te berekenen.
- Typ het functievoorschrift in voor de functie G(x) := abs F(x) (absolute waarde van F(x)).
- Schets de grafiek van deze functie en bereken de waarde van de integraal van deze functie over het interval [-2,2] .



Opgave 2. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de derdegraadsfunctie $y = x^3 - 4x$ en de rechte $y = 5x$.

- Wis eerst alle gegevens en de grafieken.
- Typ beide functievoorschriften in.
- Vraag de grafieken op.
- Kies aangepaste afmetingen voor het venster via Set-Range : [-5,5] x [-20,20] .
- Bereken de snijpunten van beide grafieken als nulpunten van de functie die het verschil is van beide functies. Definieer daarvoor H(x) := F(x) - G(x). Je kan de snijpunten ook benaderen via de Trace-functie (F3). Via de pijltjestoetsen omhoog en omlaag kan je dan van de ene grafiek op de andere overwippen.
- Hou rekening met de symmetrie (oneven functies) om de gezochte oppervlakte te berekenen.
- Hoe kan je dit resultaat ook bekomen door de absolute waarde van H(x) te gebruiken?

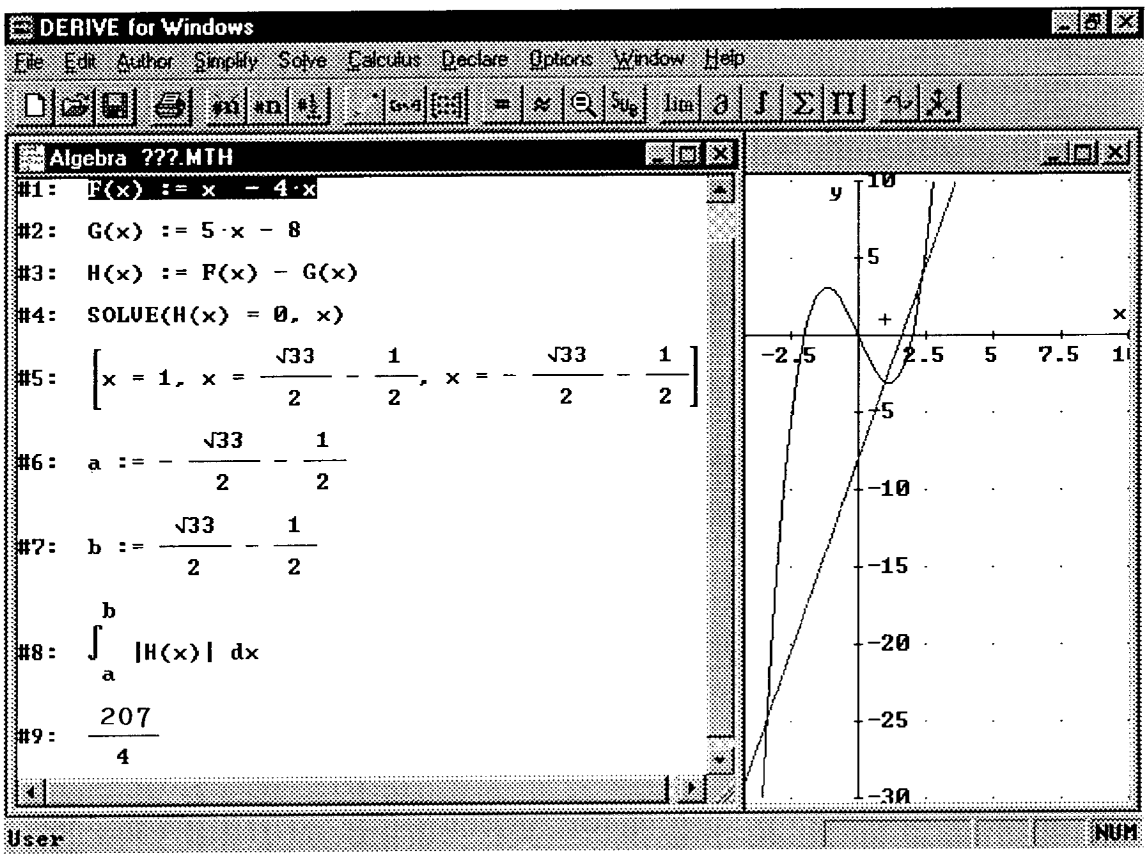


Opgave 3. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de derdegraadsfunctie $y = x^3 - 4x$ en de rechte $y = 5x - 8$.

- Wis eerst alle gegevens en grafieken.
- Typ beide functievoorschriften in.
- Vraag de grafieken op in een venster met als afmetingen [-10,10] x [-30,10].

Taak 1. Bereken manueel de abscissen van de snijpunten van beide grafieken.

- Bereken met DERIVE de snijpunten van beide grafieken op dezelfde wijze als in de vorige opgave. Ken aan de constante a de kleinste van deze waarden toe en aan de constante b de grootste waarde.
- Bereken met DERIVE de gezochte oppervlakte via de bepaalde integraal van de absolute waarde van het verschil van de twee oorspronkelijke functies over het interval [a,b].

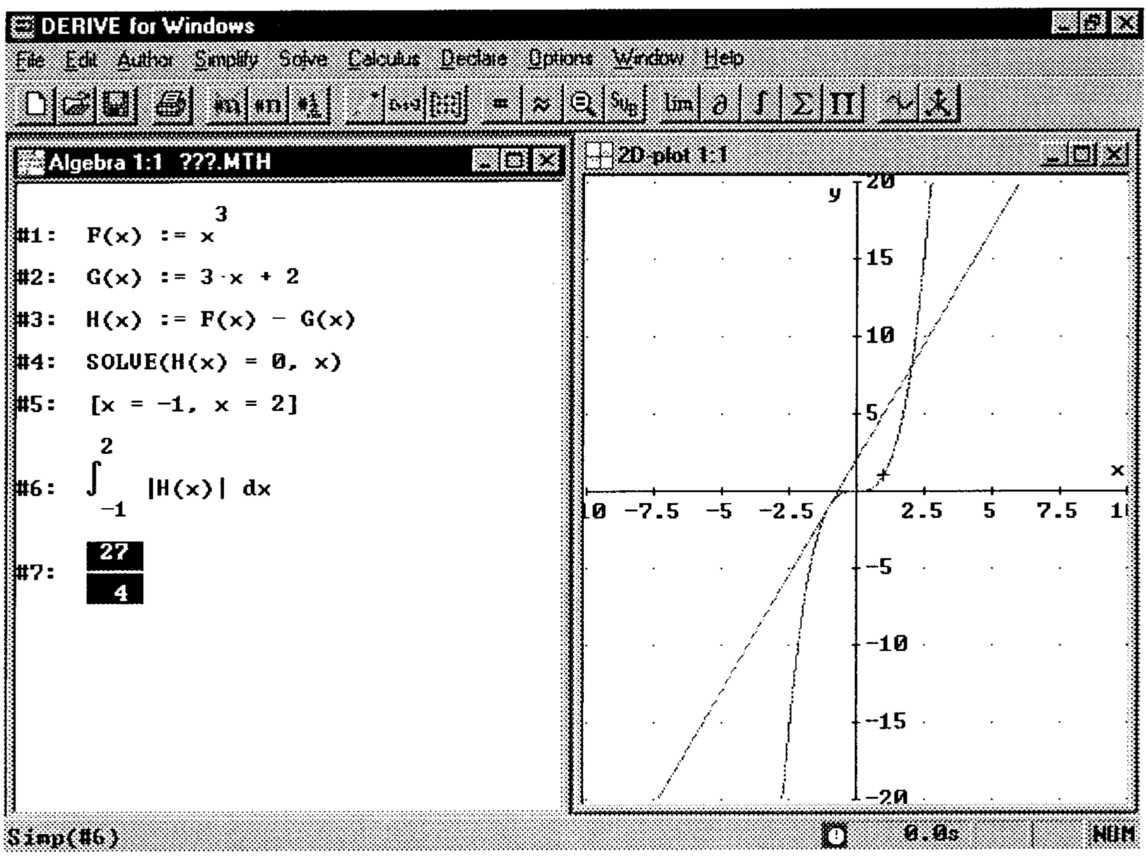


Opgave 4. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de functie $y = x^3$ en de rechte $y = 3x + 2$.

- Wis eerst alle gegevens en grafieken.
- Typ beide functievoorschriften in en schets de grafieken in een aangepast venster.
- Bereken de snijpunten van beide grafieken met DERIVE. Kan je verklaren waarom er slechts twee snijpunten gevonden worden?

Taak 2. Toon aan dat de rechte een raaklijn is aan de grafiek van $y = x^3$.

- Bereken de gezochte oppervlakte met DERIVE.



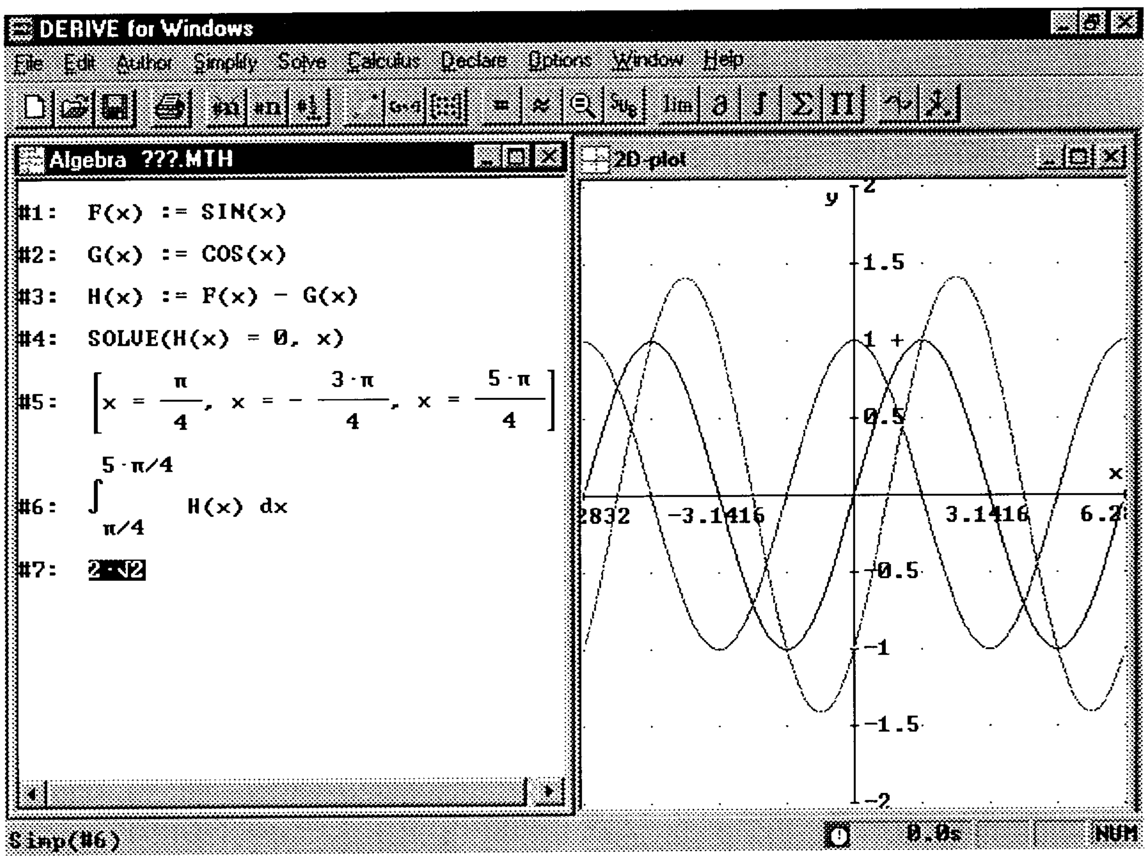
Opgave 5. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de goniometrische functies f(x) = sin x en g(x) = cos x tussen twee opeenvolgende snijpunten van deze functies.

- Wis alle gegevens en grafieken. Definieer beide functies en schets de grafieken in het venster $[-2\pi, 2\pi] \times [-2,2]$.
- Definieer en schets in hetzelfde venster de functie h(x) = sin x - cos x.
- Bereken via DERIVE twee opeenvolgende nulpunten van h(x).

Taak 3. Bereken manueel alle nulpunten van h(x).

- Bereken de gezochte oppervlakte via DERIVE.

Taak 4. Bereken deze oppervlakte manueel.

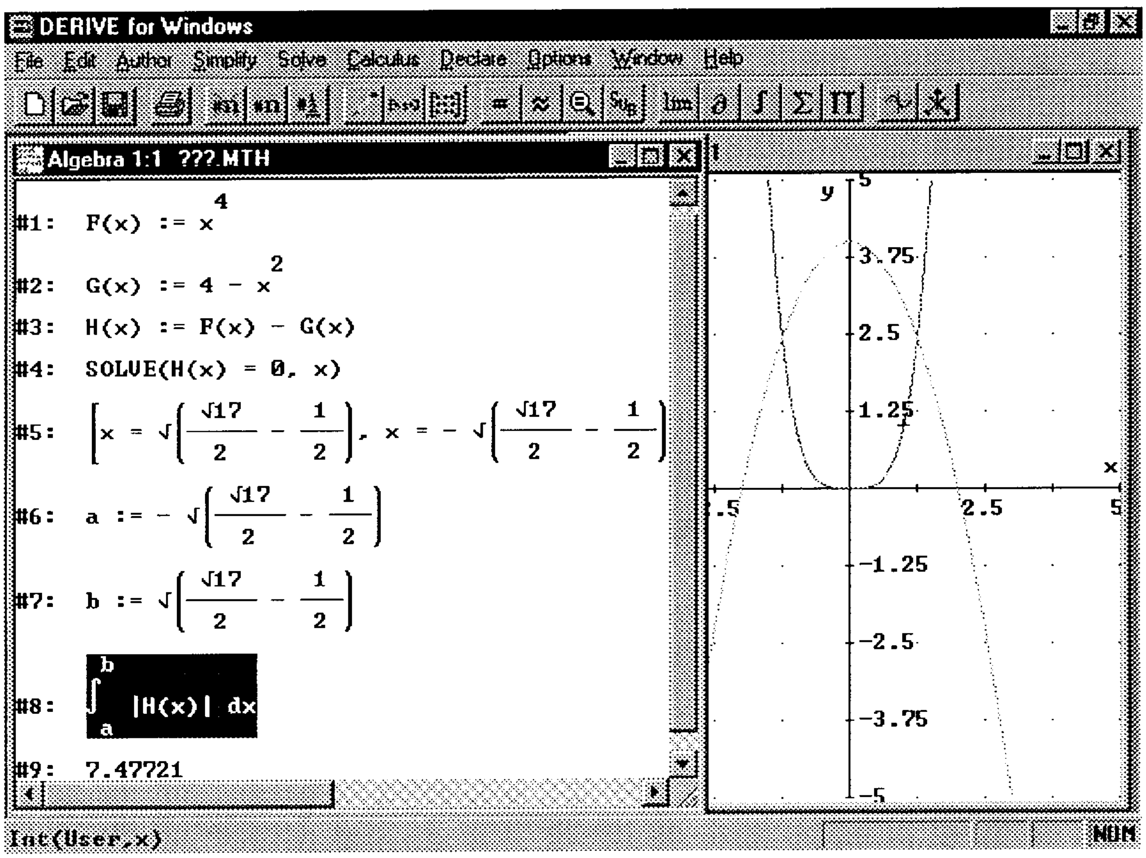


Opgave 6. Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de vierdegraadsfunctie $y = x^4$ en de parabool $y = 4 - x^2$ tot op 4 decimalen nauwkeurig.

- Wis alle vorige gegevens en grafieken, definieer beide functies en schets de grafieken in een aangepast venster. Welke symmetrie bemerk je? Verklaar.
- Bereken de snijpunten van beide grafieken via DERIVE. Ken vervolgens aan de constante a de kleinste waarde toe (ondergrens) en aan b de grootste waarde (bovengrens).

Taak 5. Bereken de snijpunten manueel.

- Bereken de oppervlakte met DERIVE (benaderde en exacte waarde). Hoe kan je deze oppervlakte berekenen rekening houdend met de symmetrie?



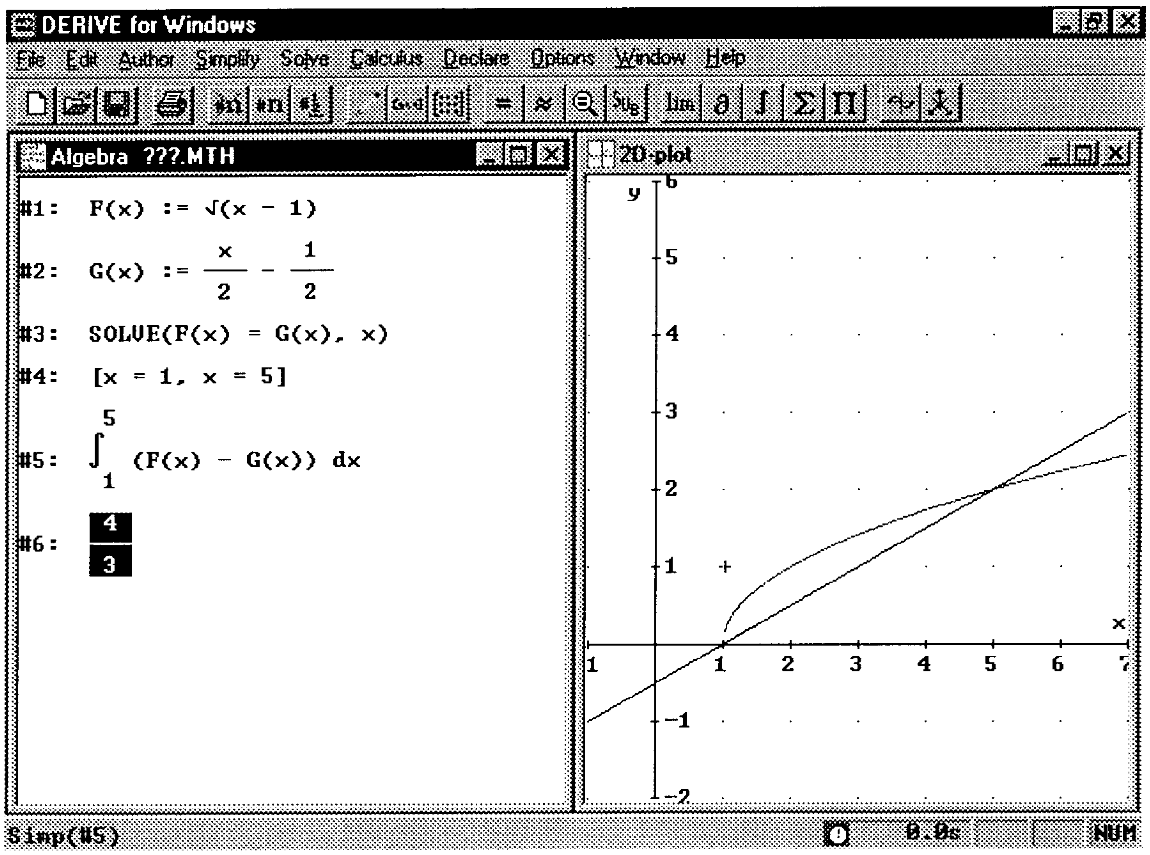
Opgave 7. Bereken de oppervlakte van het gebied gebrensd door de irrationale functie $y = \sqrt{x-1}$ en de rechte $x - 2y - 1 = 0$.

- Wis alle vorige gegevens en grafieken. Definieer beide functies en schets de grafieken in een aangepast venster.
- Bepaal de snijpunten van beide grafieken via DERIVE.

Taak 6. Bereken de snijpunten van beide grafieken manueel.

- Bereken de gezochte oppervlakte met DERIVE.

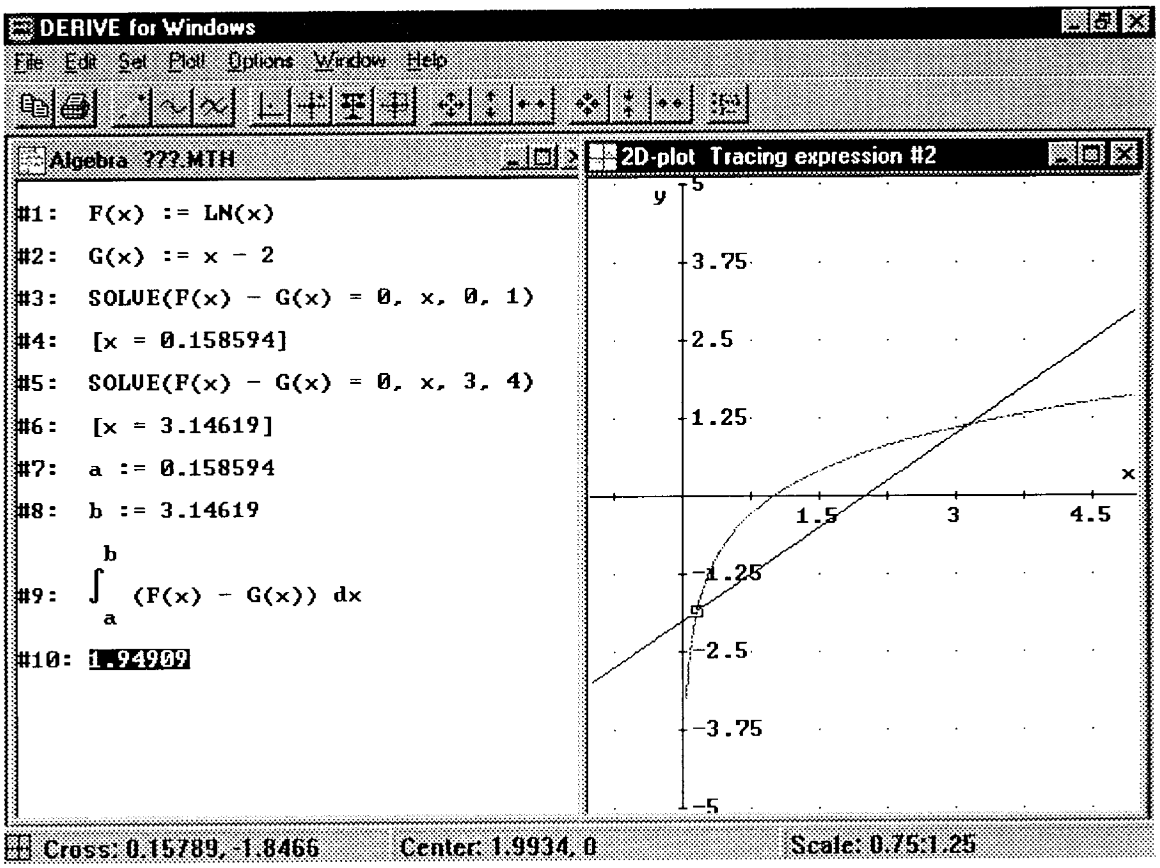
Taak 7. Bereken de oppervlakte manueel.



Opgave 8. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de natuurlijke logaritmische functie y = lnx en de rechte y = x - 2 tot op 5 decimalen nauwkeurig.

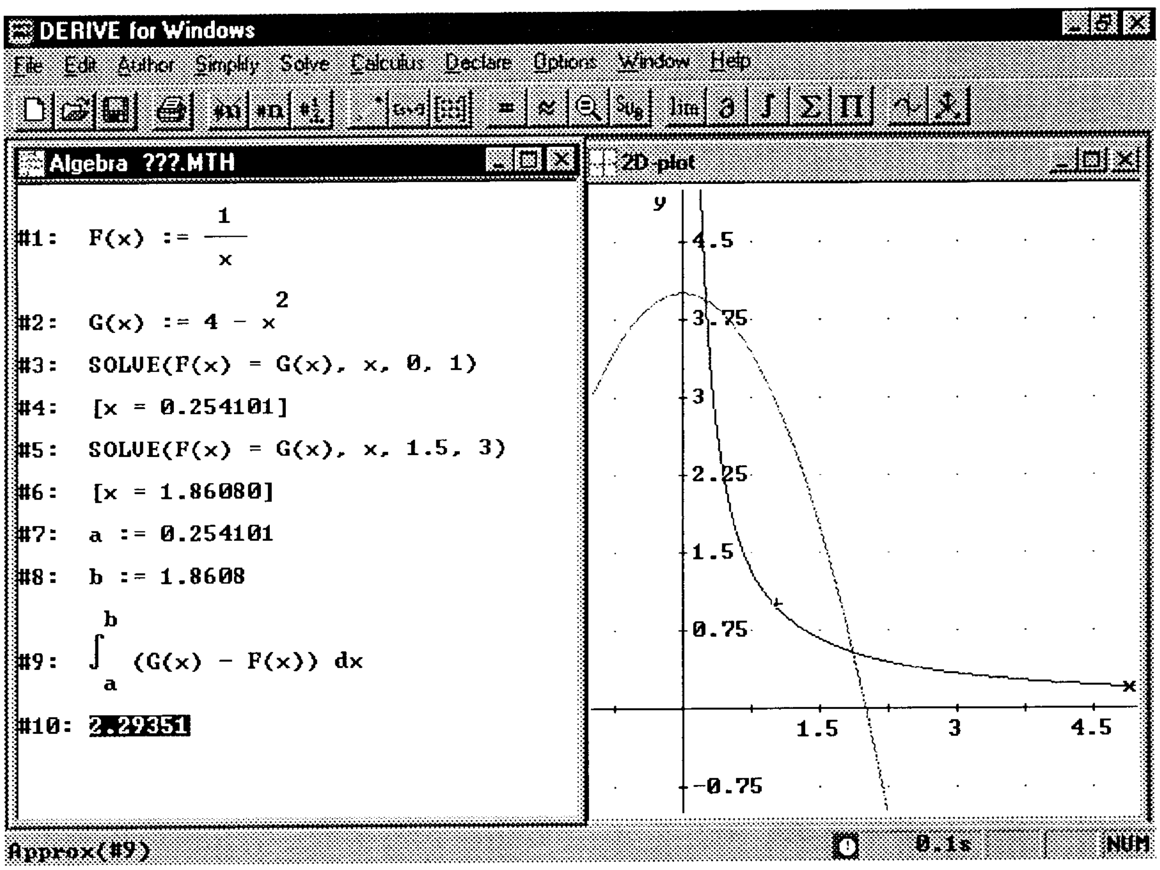
- Wis alle gegevens en grafieken. Definieer beide functies en schets de grafieken in het venster [-1,5] x [-5,5].
- Bepaal de snijpunten van beide grafieken tot op 5 decimalen nauwkeurig met behulp van DERIVE. Hiervoor gebruik je de instructie Solve - Numerically. De twee oplossingen van F(x) - G(x) = 0 worden afzonderlijk benaderd door telkens de grenzen van een interval te vermelden waarin een oplossing ligt. Op de grafiek kan je aflezen dat het eerste snijpunt in [0,1] ligt en het tweede in [3,4]. Gebruik deze intervalgrenzen (lower bound - upper bound) om de gezochte snijpunten te vinden. Waarom kan je snijpunten niet correct bepalen via manueel rekenwerk?
- Ken aan de constante a de kleinste waarde toe (ondergrens) en aan b de grootste waarde (bovengrens) en bereken de gezochte oppervlakte met DERIVE.

Taak 8. Bepaal manueel een primitieve functie van y = lnx - x + 2.



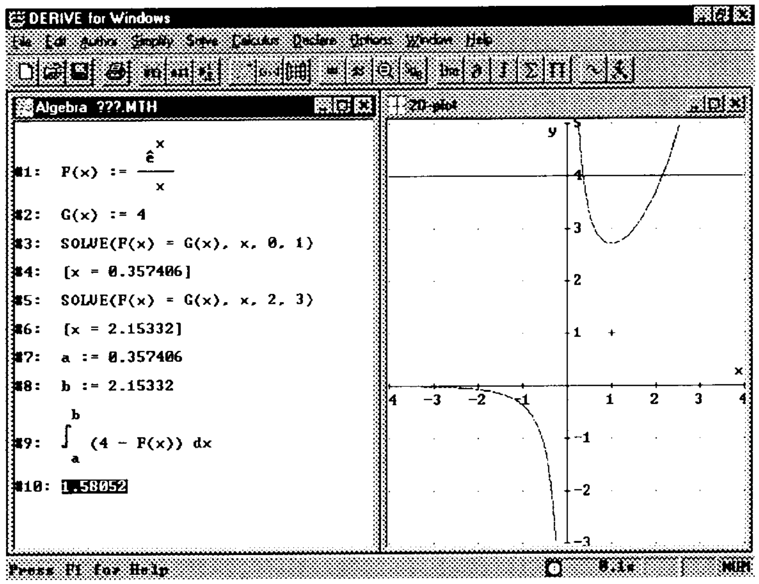
Opgave 9. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de hyperbool $y = 1/x$ en de parabool $y = 4 - x^2$ met $x > 0$, tot op 5 decimalen nauwkeurig.

- Wis de vorige gegevens en grafieken. Definieer beide functies en schets de de grafieken in het venster [-1,5] x [-1,5] .
- Bereken met behulp van DERIVE de snijpunten van beide grafieken tot op 5 decimalen nauwkeurig. Waarom kan je manueel de snijpunten niet exact bepalen? Ken je een benaderingsmethode?
- Ken aan de constante a de waarde van de ondergrens toe en aan b de waarde van de bovensgrens en bereken de gezochte oppervlakte met DERIVE.



Opgave 10. Bereken de oppervlakte van het gebied tussen de grafiek van de functie $y = \dfrac{e^x}{x}$ en de rechte y = 4.

- Volg de werkwijze van de vorige opgave. Kan je hier manueel de snijpunten van beide grafieken bepalen? En kan je een primitieve functie vinden voor $y = \dfrac{e^x}{x}$?



Opgave 11. Bereken de oppervlakte van het gebied begrensd door de grafiek van de functie f en de X-as als $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 9}$. Merk op dat f een even functie is. Bepaal de correcte waarde en geef ook een benadering tot op 5 decimalen nauwkeurig.

Taak 9. Bereken de oppervlakte manueel.

Oplossing . $2 - \dfrac{8}{3}\ln 2$ of ongeveer 0,15161 oppervlakte-eenheden.

Opgave 12. Bereken de oppervlakte van de driehoek met als zijlijnen de rechten
L : y - 2x = 0, M : 2y - x + 3 = 0 en N : x + y = 3.

Oplossing. 6 oppervlakte-eenheden.

Opgave 13. Bepaal de oppervlakte van het gebied begrensd door de parabool $y^2 = x$ en de rechte $y = x - 2$.

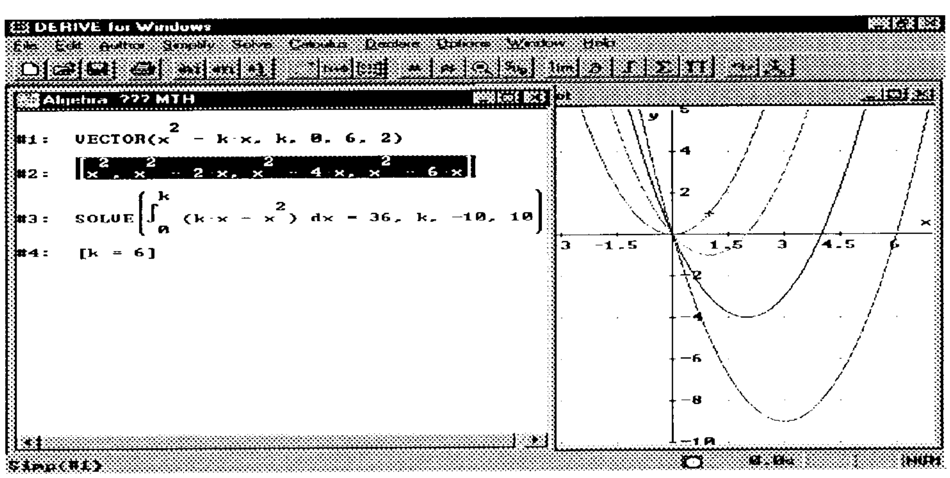
- Volg de gebruikelijke werkwijze. Definieer nu drie functies, namelijk $F(x) := \sqrt{x}$, G(x) := - F(x) en H(x) := x - 2.
- Bepaal de snijpunten via DERIVE en bereken de gezochte oppervlakte.

Taak 10. Bereken de oppervlakte manueel met behulp van de functies $y = x^2$ en $y = x + 2$. Je maakt hierbij in feite gebruik van een omwisseling van de assen.

Oplossing. 4,5 oppervlakte-eenheden.

Opgave 14. Bepaal k zodat de grafiek van f met de X-as een gebied insluit met een oppervlakte O = 36 oppervlakte-eenheden, waarbij $f(x) = x^2 - kx$.

- Wis de vorige grafieken en berekeningen.
- Definieer een familie parabolen $y = x^2 - kx$, waarbij k = 0, 2, 4, 6 via een vectorinstructie : VECTOR (x^2 - kx, k , 0, 6, 2). Hierbij is 0 de beginwaarde voor de parameter k, 6 de eindwaarde en 2 de sprong. Werk deze vectoruitdrukking uit via Simplify : Basic ... en OK (of klik op het ikoontje met het = - teken).
- Ga over naar het 2D-plot-scherm en klik op Plot! Meteen worden 4 parabolen getekend.
- Bereken via DERIVE de gezochte waarde voor k. Gebruik de instructie : Solve : Numerically en typ dan INT(kx - x^2, x, 0, k) = 36. Als grenzen van het interval waarin we een oplossing zoeken laten we -10 en 10 staan. Klik op OK en daarna op het ikoontje met het = -teken en bereken zo de oplossing in het interval [-10,10] .



Opgave 15. Oneigenlijke integralen van de eerste soort.

Schets telkens met DERIVE de grafiek van de gebruikte functie.

a. Bereken de bepaalde integraal van $-\infty$ tot 0 van de functie $y = e^{2x}$.
Oplossing. 1/2.

b. Bereken de oppervlakte van het gebied rechts van x = 3 en tussen de grafiek van $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ en de X-as. Oplossing. $\ln\sqrt{2}$ oppervlakte-eenheden.

c. Bereken de oppervlakte tussen de grafiek van de functie $y = \dfrac{8}{x^2 + 4}$ en haar asymptoot. Oplossing. 4π oppervlakte-eenheden.

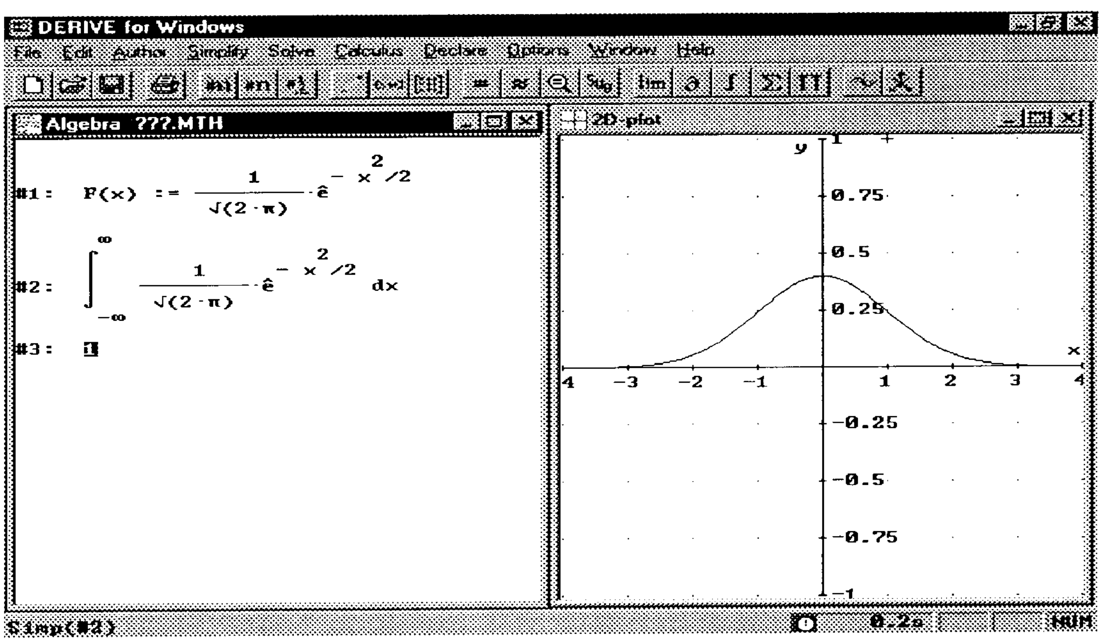
d. Bereken de bepaalde integraal van 1 tot $+\infty$ van de functie y = lnx.
Oplossing. De integraal divergeert naar $+\infty$.

e. De functie $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$ speelt een belangrijke rol in de kansrekening en werd naar Gauss genoemd. Ze wordt gebruikt bij de studie van de zogenaamde normale standaardverdeling.

Bereken de oppervlakte tussen de grafiek van deze functie en de X-as.
Oplossing. 1 oppervlakte-eenheid.

De oplossing van deze laatste opgave met DERIVE wordt hieronder weergegeven.

Taak 11. Bereken de resultaten van a, b,c en d manueel.



Opgave 16. Oneigenlijke integralen van de tweede soort.

Schets telkens met DERIVE de grafiek van de gebruikte functie.

a. Bereken de bepaalde integraal van $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ van 0 tot 1.

Oplossing. 2 .

b. Bereken de bepaalde integraal van $y = \dfrac{1}{6 - x}$ van 0 tot 6.

Oplossing. Deze integraal divergeert naar $+\infty$.

c. Bereken de oppervlakte boven de X-as tussen de grafiek van $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ en haar asymptoten.

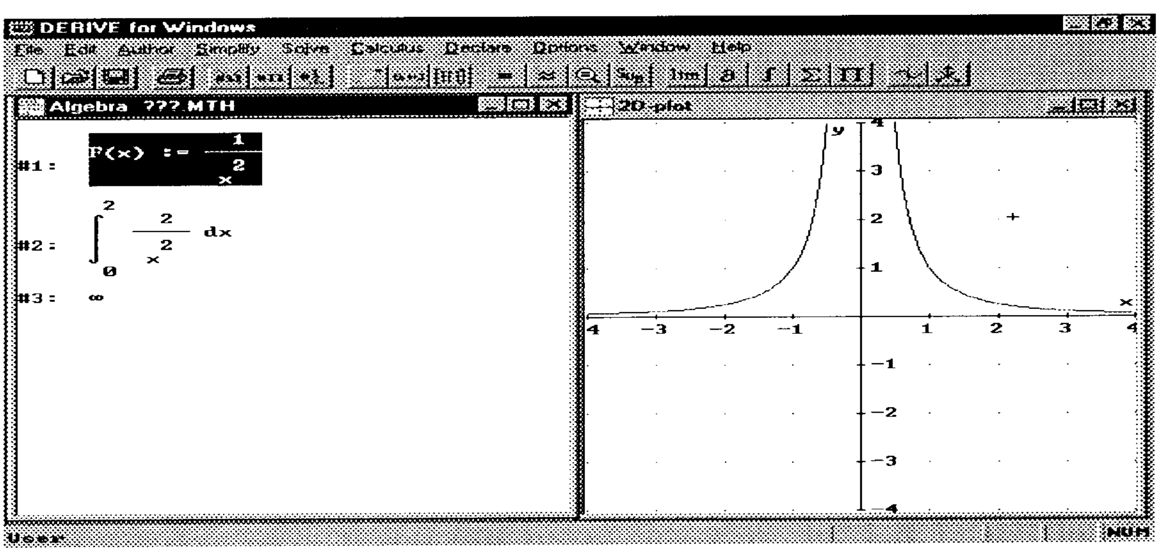
Oplossing. π oppervlakte-eenheden.

d. Bereken de bepaalde integraal van $y = \dfrac{1}{x^2}$ van -2 tot 2.

Oplossing. De integraal divergeert naar $+\infty$.

De oplossing met DERIVE van deze laatste opgave wordt hieronder weergegeven. Wat gebeurt er indien je via DERIVE de bepaalde integraal van deze functie berekent met als ondergrens -2 en bovengrens 2? Hoe verklaar je dit resultaat?

Taak 12. Bereken de resultaten van a, b, c en d manueel.



OPLOSSING VAN DE TAKEN.

1. $x^3 - 9x + 8 = 0$ heeft drie reële oplossingen :
   $x_1 = 1$, $x_2 = (-1+\sqrt{33})/2$ en $x_3 = (-1-\sqrt{33})/2$.

2. $x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2)$ heeft als dubbele wortel $x = -1$.
   De raaklijn in $(-1,-1)$: $y = 3x + 2$.

3. $\sin x - \cos x = 0$ is een homogene vergelijking. Deel door $\cos x$ en los $\operatorname{tg} x = 1$ op : $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. $f(x) = \sin x - \cos x$ heeft $F(x) = -\cos x - \sin x$ als primitieve functie.

5. $x^4 + x^2 - 4 = 0$ is een bikwadratische vergelijking.
   Stel $x^2 = t$, dan zijn de oplossingen van de bekomen vierkantsvergelijking : $t_1 = (-1+\sqrt{17})/2$ en $t_2 = (-1-\sqrt{17})/2$. Merk op dat t_2 negatief is.

6. Los op : $$\sqrt{x-1} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$$

   Bestaansvoorwaarde en kwadrateringsvoorwaarde : $x \geq 1$.

7. $$\int_1^5 \left(\sqrt{x-1} - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{x-1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}\right]_1^5$$
$$= \left(\frac{16}{3} - \frac{25}{4} + \frac{5}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$
$$= 4/3.$$

8. Via partiële integratie.
$$\int (\ln x - x + 2)\,dx = \int \ln x\,dx - \frac{x^2}{2} + 2x$$
$$= x\ln x + x - \frac{x^2}{2} + c$$

9. Via splitsen in partieelbreuken.
$$2\int_0^1 \frac{x^2-1}{x^2-9}\,dx = 2\int_0^1 \left(1 + \frac{8}{x^2-9}\right) dx$$
$$\frac{8}{x^2-9} = \frac{-\frac{4}{3}}{x+3} + \frac{\frac{4}{3}}{x-3}$$
$$2\left[x - \frac{4}{3}\ln|x+3| + \frac{4}{3}\ln|x-3|\right]_0^1 = 2 - \frac{8}{3}\ln 2.$$

10. $x^2 = x + 2$ heeft als oplossingen $x = -1$ en $x = 2$.

$$\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}$$
$$= \left(2+4-\frac{8}{3}\right)-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)$$
$$= \frac{9}{2}.$$

11. a. $$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\,dx = \lim_{t\to-\infty}\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{t}^{0}$$
$$= \frac{1}{2}-\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{2}e^{2t}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

b. $$\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x^2-1} = -\frac{1}{2}\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{2}\int_{3}^{+\infty}\frac{dx}{x-1}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to+\infty}\ln|t+1|-\ln 4\right)+\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to+\infty}\ln|t-1|-\ln 2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\lim_{t\to+\infty}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{1}{2}\ln 1$$
$$= \frac{1}{2}\ln 2$$
$$= \ln\sqrt{2}$$

c. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{8}{x^2+4}\,dx = 16\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4}$$
$$= 8\left(\lim_{t\to+\infty}\mathrm{Bgtg}\,\frac{t}{2}-\mathrm{Bgtg}\,0\right)$$
$$= 8.\frac{\pi}{2}$$
$$= 4\pi.$$

d. $$\int_{1}^{+\infty}\ln x\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left[x\ln x-x\right]_{1}^{t}$$
$$= \lim_{t\to+\infty}(t\ln t-t)-(0-1)$$

$$\lim_{t\to+\infty}(t\ln t-t) = \lim_{t\to+\infty}t.(\ln t-1) = +\infty.+\infty = +\infty$$

12. a. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 0} (2-2\sqrt{t})$

$= 2.$

b. $\displaystyle\int_0^6 \frac{dx}{6-x} = \lim_{t\to 6} \int_0^t \frac{dx}{6-x}$

$\displaystyle = \lim_{t\to 6} -\ln|6-t| + \ln 6$

$= +\infty.$

c. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = 2\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$\displaystyle = 2 \lim_{t\to 2} \int_0^t \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

$\displaystyle = 2\cdot\left(\lim_{t\to 2} \operatorname{Bgsin}\frac{t}{2} - \operatorname{Bgsin} 0\right)$

$\displaystyle = 2\cdot\frac{\pi}{2}$

$= \pi.$

d. $\displaystyle\int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2} = 2\int_0^2 \frac{dx}{x^2}$

$\displaystyle = 2\cdot \lim_{t\to 0} \int_t^2 \frac{dx}{x^2}$

$\displaystyle = 2\cdot \lim_{t\to 0} \left[-\frac{1}{x}\right]_t^2$

$\displaystyle = 2\left(-\frac{1}{2} + \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\right)$

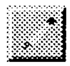
$= +\infty.$

NUTTIGE COMMANDO'S

Ctrl + Q of sqrt (afkorting voor 'square root') = √
Ctrl + P of pi = π
Ctrl + E = e (het getal van Euler)
Ctrl + 0 (nul) of inf = ∞
F1 = help.

Window - Tile Vertically : het scherm verticaal in twee delen splitsen om tegelijkertijd berekeningen te maken (Algebra-venster) en grafieken te bestuderen (2D-plot-venster).

Algebra-scherm :

 aanklikken om een uitdrukking in te typen op de invoerregel. Op deze regel kan je via de functietoets F3 een geselecteerde uitdrukking kopiëren of via F4 kopiëren en tussen haakjes plaatsen.

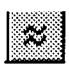
Home : naar het begin van de invoerregel.
End : naar het einde van de invoerregel.

LN : voor natuurlijke logaritmen.
ABS : voor absolute waarde.
^ : voor machten.

 aanklikken om uitdrukkingen te schrappen op het Algebra-scherm. Je kan ook de linkermuisknop ingedrukt houden om zo verschillende uitdrukkingen te selecteren en dan via de Delete-toets te wissen. Sneltoets : Ctrl + R (R verwijst naar 'Remove')

Solve - Algebraically : voor correcte oplossingen van vergelijkingen.
Solve - Numerically : voor benaderde oplossingen binnen een gekozen interval.

 aanklikken voor correcte waarden.

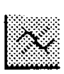
 aanklikken voor benaderde waarden.

Declare - Algebra State - Simplification - Precision : instellen van het aantal cijfers (Digits) voor benaderingen.

2D-plot-scherm :

F3 (Trace) : het traject van een kromme te volgen.
Plot! : de grafiek van de geselecteerde functie te schetsen.
Set-Range : de afmetingen van het venster vastleggen.
Set-Scale : de schaalaanduiding op de assen vastleggen.
Edit-Delete Plot-Last : laatste grafiek wissen.
Edit-Delete Plot-All : alle grafieken wissen.
Sneltoets : Ctrl + D (D verwijst naar 'Delete')

 aanklikken om een grafiek te tekenen.

 aanklikken om een grafiek te wissen.