Analyse voor de 3de graad TSO (leerplan 4u) met de TI-83 Plus

Geert Delaleeuw

<u>Woord vooraf</u>

Ik ben leraar wiskunde in de derde graad Boekhouden-Informatica en Informaticabeheer aan het Technisch Instituut Heilige Familie te Ieper. Deze afdelingen krijgen 4 uur wiskunde per week. Er wordt hierbij heel wat aandacht besteed aan analyse.

Het grafisch rekentoestel (in mijn geval de TI83 Plus) is een onmisbaar hulpmiddel geworden tijdens mijn wiskundelessen.
Ik ondervind dat de leerlingen meer **inzicht** in de leerstof verwerven dank zij het gebruik van dit rekentoestel.
Er gaat enorm veel kracht uit van **<u>tabellen en grafieken</u>** die in de plaats komen van "tijdrovende" en "tempo-brekende" berekeningen. Zo komt er meer tijd vrij voor redeneerwerk en probleemoplossend denken.
Dank zij het grafisch rekentoestel zijn de leerlingen ook beter in staat om zelf bepaalde eigenschappen te vermoeden of te ontdekken.

De volgende tekst behandelt enkele onderwerpen uit de analyse. Het is een greep uit mijn lessen die ik vorig schooljaar gegeven heb. Er is telkens een korte beschrijving van de beginsituatie. Per onderwerp heb ik ook enkele opdrachten voorzien; de oplossingen zijn achteraan terug te vinden.

De behandelde onderwerpen zijn de volgende:

1. Ogenblikkelijke snelheid

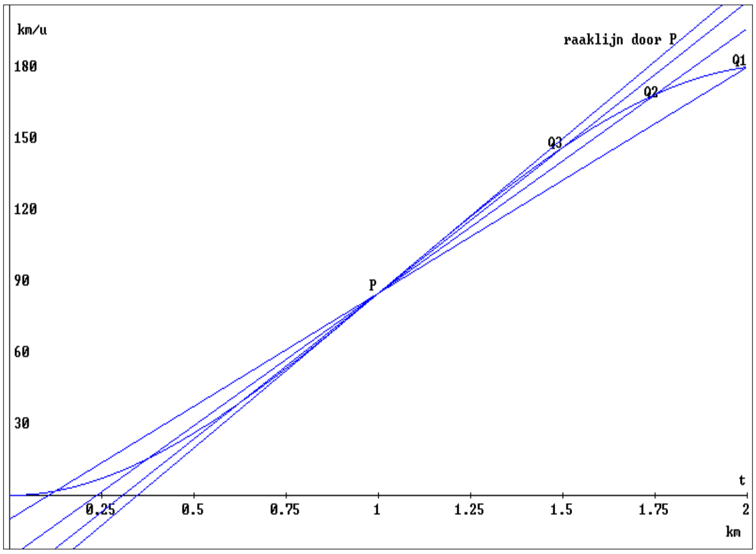
Beginsituatie:

Als van een bepaalde beweging de afgelegde weg gekend is in functie van de tijd, dan zijn de leerlingen in staat de gemiddelde snelheid te berekenen. Ze weten ook dat de gemiddelde snelheid gelijk is aan de richtingscoëfficiënt van de rechte die het beginpunt van de grafiek met het eindpunt verbindt.

1.1 Een autorit

We maken een autorit van 2 uur. De afgelegde weg in functie van de tijd wordt beschreven door de functie *f* met vergelijking $f(t) = -40t^3 + 125t^2$.
De tijd is uitgedrukt in uren en de afgelegde weg in kilometer.

Hieronder vind je de grafiek van *f* met $0 \leq t \leq 2$:



- De gemiddelde snelheid (uitgedrukt in km/u) in het tijdsinterval [1;2], d.w.z. tussen het 1$^{\text{ste}}$ en 2$^{\text{de}}$ uur is:

  $$\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{180-85}{1} = \frac{95}{1} = 95.$$

  95 is de richtingscoëfficiënt van de rechte door Q_1 (2;180) en P(1;85).

- In het tijdsinterval [1;1,75] is de gemiddelde snelheid:

  $$\frac{f(1{,}75)-f(1)}{1{,}75-1} = \frac{168{,}4375-85}{0{,}75} = \frac{83{,}4375}{0{,}75} = 111{,}25.$$

  111,25 is de richtingscoëfficiënt van de rechte door Q_2 (1,75;168,4375) en P(1;85).

- In het tijdsinterval [1;1,5] is de gemiddelde snelheid:
  $\dfrac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1} = \dfrac{146{,}25-85}{0{,}5} = \dfrac{61{,}25}{0{,}5} = 122{,}5$.
  122,5 is de richtingscoëfficiënt van de rechte door $Q_3(1{,}5;146{,}25)$ en P(1;85).

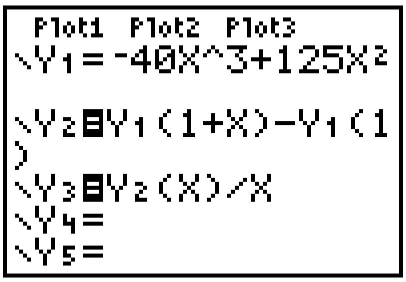
- In het tijdsinterval [1;1,25] is de gemiddelde snelheid:
  $\dfrac{f(1{,}25)-f(1)}{1{,}25-1} = \dfrac{117{,}1875-85}{0{,}25} = \dfrac{32{,}1875}{0{,}25} = 128{,}75$.
  128,75 is de richtingscoëfficiënt van de rechte door (1,25;117,1875) en P(1;85).
  Om de leesbaarheid van de grafiek ten goede te komen, hebben we deze rechte niet meer geconstrueerd.

- In het tijdsinterval [1;1,1] is de gemiddelde snelheid:
  $\dfrac{f(1{,}1)-f(1)}{1{,}1-1} = \dfrac{98{,}01-85}{0{,}1} = \dfrac{13{,}01}{0{,}1} = 130{,}1$.
  130,1 de richtingscoëfficiënt van de rechte door (1,1;98,01) en P(1;85).
  Ook deze rechte hebben we niet meer geconstrueerd.

De gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1;1 + h] (met h een willekeurige waarde) is gelijk aan $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

In de noemer staat het tijdsverschil (beginnend op het moment dat men juist 1 uur rijdt). In de teller staat het verschil in afgelegde weg. In de vorige berekeningen hebben we achtereenvolgens h gelijk genomen aan 1; 0,75; 0,5; 0,25 en 0,1.

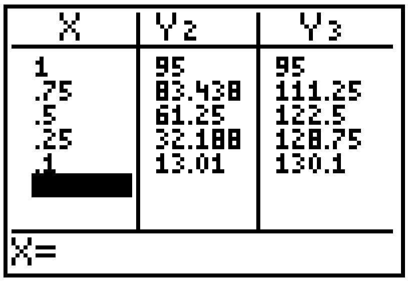
Deze berekeningen kunnen we ook (en veel sneller!) door de TI83 Plus laten uitvoeren.
We voeren daartoe de volgende functies in:



De functienamen Y_1, Y_2, … ,Y_0 kunnen we bekomen via **"VARS, Y-VARS, 1: Functie"**.
We kiezen dan de gewenste functienaam en drukken op ENTER.

De functie Y_2 stelt hier $f(1+h)-f(1)$ voor (met *x* in plaats van *h*).
De functie Y_3 stelt $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ voor (met *x* in plaats van *h*).

Om nu de beeldwaarden van deze functies te kennen voor *h* achtereenvolgens gelijk 1; 0,75; 0,5; 0,25 en 0,1, zullen we werken met een tabel waarbij we de stapgrootte *niet* vastzetten. Om dat te kunnen bekomen gaan we naar het scherm van de tabelinstelling (via **"2nd TBLSET"**) en kiezen we op de lijn **"Onafh:"** voor de optie "**Vraag**".
De tabel die we dan zullen opvragen (via **"2nd TABLE"**) zal dan leeg zijn, maar wanneer we een waarde invoeren in de kolom X, zullen de *y*-waarden automatisch berekend en weergegeven worden.



In de eerste kolom lezen we het tijdsverschil (vanaf het moment dat men juist 1 uur rijdt). In de tweede kolom staat het verschil in afgelegde weg en in de derde kolom de gemiddelde snelheid.

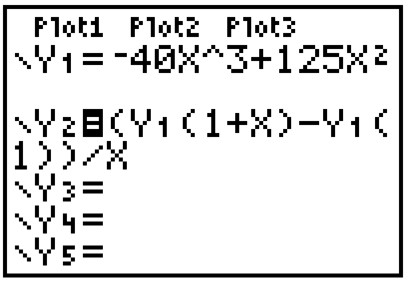
We stellen vast:

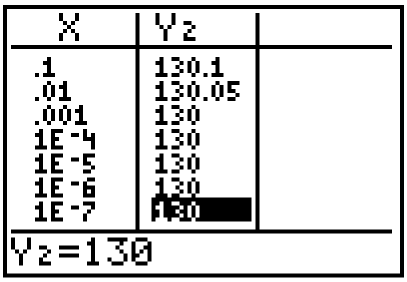
Hoe kleiner we het tijdsinterval nemen, hoe beter de gemiddelde snelheid de snelheid benadert die exact na 1 uur rijden bereikt wordt.
De rechten PQ_1, PQ_2, PQ_3, …evolueren naar de raaklijn in het punt P.

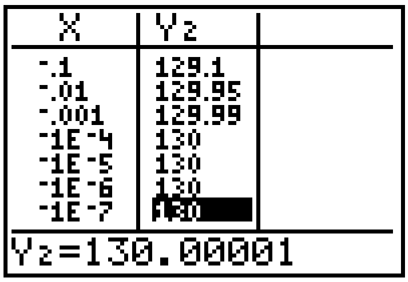
Anders gezegd: de ogenblikkelijke snelheid na 1 uur – notatie: v(1) -, is gelijk aan de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P.

1.2 Berekening van de ogenblikkelijke snelheid

Hoe dichter we *h* laten naderen van 0, hoe beter we dus $v(1)$ benaderen.
Daarom laten we de TI83 Plus nu de gemiddelde snelheid berekenen voor *h*-waarden die heel dicht bij 0 liggen. Het verschil in afgelegde weg laten we nu niet meer berekenen; we concentreren ons enkel op de gemiddelde snelheid:







De waarden die we in de tweede kolom vinden, benaderen heel goed de ogenblikkelijke snelheid na 1 uur. We mogen stellen dat $v(1) = 130$ km/u.
Ook voor negatieve *h*-waarden komen we tot dezelfde vaststelling.

De ogenblikkelijke snelheid na 1 uur kunnen we ook bekomen zonder beroep te moeten doen op de TI83 Plus.

We weten dat de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1;1 + h] (met h een willekeurige waarde) gelijk is aan $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$.

Aangezien $f(t) = -40t^3 + 125t^2$, is de uitdrukking $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ gelijk aan:

$$\frac{-40(1+h)^3 + 125(1+h)^2 - 85}{h}$$

$$= \frac{-40\left(1+3h+3h^2+h^3\right)+125\left(1+2h+h^2\right)-85}{h}$$

$$= \frac{-40-120h-120h^2-40h^3+125+250h+125h^2-85}{h}$$

$$= \frac{130h+5h^2-40h^3}{h} = \frac{h\left(130+5h-40h^2\right)}{h} = 130+5h-40h^2$$

Om $v(1)$ te bekomen, moeten we dus in de uitdrukking $130+5h-40h^2$ de letter *h* vervangen door 0. Zo bekomen we 130. Wat we reeds vonden met de TI83 Plus, wordt hier bevestigd: $v(1) = 130$.

We zeggen:

De ogenblikkelijke snelheid na 1 uur wordt bekomen door de gemiddelde snelheid te berekenen over het tijdsinterval [1;1+h] en h te laten naderen van 0.

*Anders gezegd: de snelheid op het tijdstip 1 is de **limiet** van de gemiddelde snelheid over het tijdsinterval [1;1+h] voor h naderend van 0.*

Notatie: $v(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = 130$.

Dit bekomen resultaat 130 is meteen ook de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt P(1;85).

Conclusie:

Beschrijft de functie f met vergelijking s = f(t) de afgelegde weg van een beweging in functie van de tijd t, dan is de snelheid op het ogenblik t_1 gelijk aan:

$$v(t_1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t_1+h)-f(t_1)}{h} .$$

Deze waarde kan ook op de grafiek van f teruggevonden worden:
$v(t_1)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn aan de grafiek van f in het punt $(t_1, f(t_1))$.

OPDRACHT 1

Concentreren we ons nogmaals op de functie $f(t) = -40t^3 + 125t^2$ *(autorit van 2 uur).*

1) *Bereken de snelheid na een half uur rijden op de wijze zoals beschreven in punt 1.2 (eerst met, daarna zonder de TI83 Plus).*
2) *De grafiek in het punt* $(0{,}5; f(0{,}5))$ *verloopt minder steil dan in* $(1; f(1))$.
   Wat kan je hieruit besluiten over de snelheid na een half uur en deze na 1 uur rijden?
   Wordt deze vaststelling bevestigd door je gevonden resultaten in vraag 1)?

OPDRACHT 2

Een steen wordt verticaal omhoog geworpen. De hoogte van de steen wordt vrij nauwkeurig beschreven door de functie $f(t) = -5t^2 + 20t$. *Hierbij stelt t de tijd voor in seconden (gerekend vanaf het begin van de worp) en* $f(t)$ *de hoogte in meter op het ogenblik t.*

1) *Laat de TI83 Plus de grafiek van f construeren. Zorg voor geschikte venstervariabelen.*
2) *Hoe hoog is de steen na 1 seconde?*
3) *Bereken de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1;2].*
4) *Laat de TI83 Plus de gemiddelde snelheid berekenen voor de volgende tijdsintervallen:*
   [1;2], [1;1,5], [1;1,2], [1;1,1], [1;1,01], [1;1,001] enerzijds
   en [0;1], [0,5;1], [0,8;1], [0,9;1], [0,99;1], [0,999;1] anderzijds.
   Kan je uit de gevonden resultaten opmaken waaraan de ogenblikkelijke snelheid op het tijdstip $t = 1$ *gelijk is?*
5) *Bereken nu eens* $v(1)$ *zonder beroep te doen op de TI83 Plus.*
6) *Controleer met de TI83 Plus of de gevonden ogenblikkelijke snelheid overeenkomt met de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt* $(1, f(1))$. *De raaklijn kan gevonden worden via* ***"2nd DRAW, TEK, 5: Raaklijn"*** *en het invoeren van de waarde 1.*
7) *Zoek nu eens de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt* $(3, f(3))$, *met andere woorden:* $v(3)$. *Verklaar waarom* $v(3)$ *hier negatief is.*

OPDRACHT 3

Een toren is 80 meter hoog. Laat je van die toren een steentje vallen, dan weet je dat de snelheid waarmee het steentje naar beneden valt, steeds toeneemt.
Meet je de afgelegde weg na elke seconde, dan kan je vaststellen dat $s = 5t^2$ *vrij nauwkeurig de afgelegde weg (in meter) beschrijft in functie van de tijd t (in seconden).*
Beantwoord de volgende vragen door gebruik te maken van de TI83 Plus.
Doe dit eerst door de gemiddelde snelheid te berekenen in steeds kleiner wordende tijdsintervallen. Daarna door de raaklijn te laten construeren en berekenen.

1) *Welke snelheid heeft het steentje als het 1 seconde aan het vallen is?*
2) *Welke snelheid heeft het steentje als het 2 seconden aan het vallen is?*
3) *Met welke snelheid valt het steentje op de grond?*

2. De afgeleide van enkele basisfuncties

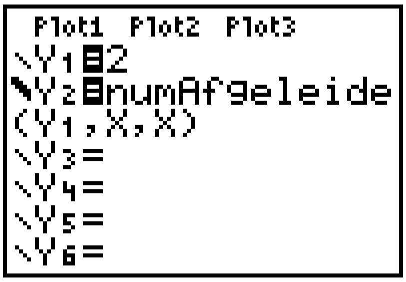
Beginsituatie:

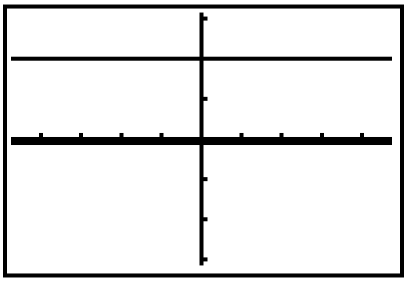
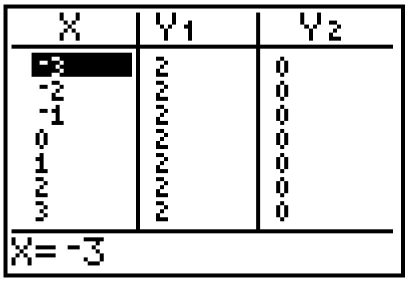
De leerlingen kunnen het voorschrift van de afgeleide functie bepalen, maar tot nu toe slechts enkel door toepassing van de formule: $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

2.1 De afgeleide van de constante functie f(x) =c

Voorbeeld: $\boldsymbol{f(x) = 2}$

We laten de TI83 Plus de grafiek van de afgeleide functie samen met de grafiek van de functie zelf op één scherm construeren.
De afgeleide functie voeren we in vanuit het Y-scherm via **"MATH, WSK, 8: numAfgeleide"**.
Via een tabel kunnen we dan ook de functiewaarden van de afgeleide functie aflezen.



We stellen vast dat de afgeleide steeds gelijk is aan 0, met andere woorden: $f'(x) = 0$.

Deze vaststelling is ook grafisch gemakkelijk te verklaren: de grafiek van een constante functie is een rechte evenwijdig met de x-as. De raaklijn in elk punt van de grafiek is uiteraard de rechte zelf en staat dus horizontaal. De raaklijn in elk punt van de grafiek heeft dus richtingscoëfficiënt 0; de afgeleide is dus overal gelijk aan 0.

Algemeen:

Als $f(x) = c$, dan kunnen we ook zonder rekenmachine gemakkelijk aantonen dat $f'(x) = 0$:

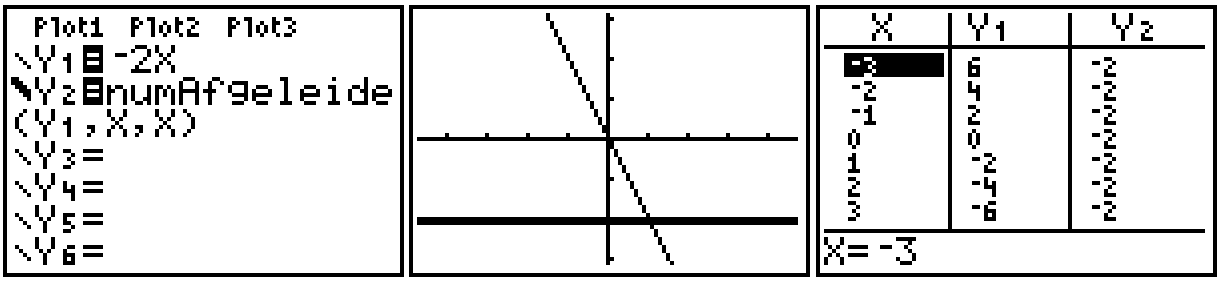
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0 .$$

Conclusie: $\boxed{\boldsymbol{D(c) = 0}}$.

2.2 De afgeleide van de functie f(x) = ax

<u>Voorbeeld:</u> $f(x) = -2x$

We laten de TI83 Plus weer de grafiek van de afgeleide functie samen met de grafiek van de functie zelf op één scherm construeren en we vragen een tabel van functiewaarden op:



We stellen vast dat de afgeleide steeds gelijk is aan -2, met andere woorden: $f'(x) = -2$.

Deze vaststelling is ook grafisch gemakkelijk te verklaren: de grafiek van de functie $f(x) = ax$ is een rechte door de oorsprong. De raaklijn in elk punt van de grafiek is uiteraard de rechte zelf. Met andere woorden: de raaklijn in elk punt van de grafiek heeft richtingscoëfficiënt *a*; de afgeleide is dus overal gelijk aan *a*.

<u>Algemeen:</u>

Als $f(x) = ax$, dan kunnen we ook zonder rekenmachine gemakkelijk aantonen dat $f'(x) = a$ **:**

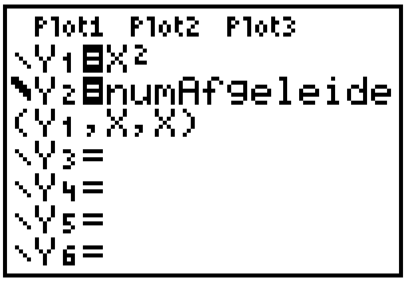
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{a(x+h)-ax}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ax+ah-ax}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ah}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} a = a \end{aligned}$$

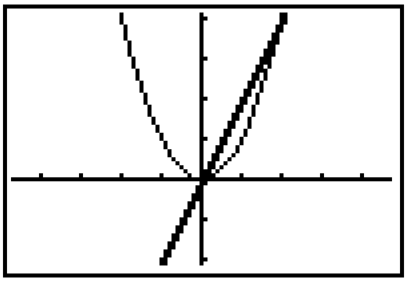
<u>Conclusie</u>: $\boxed{\boldsymbol{D(ax) = a}}$.

2.3 De afgeleide van de functie f(x) = x^n (n is een natuurlijk getal groter dan 1)

<u>Voorbeeld 1:</u> $f(x) = x^2$

We laten de TI83 Plus weer de grafiek van de afgeleide functie samen met de grafiek van de functie zelf op één scherm construeren en we vragen een tabel van functiewaarden op:



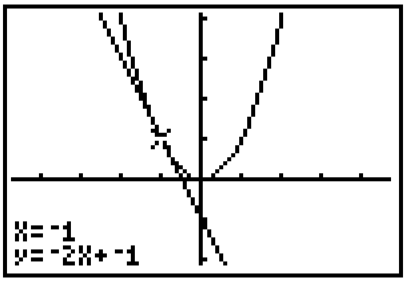


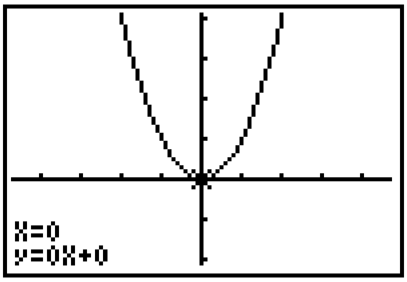
X	Y1	Y2
-3	9	-6
-2	4	-4
-1	1	-2
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	9	6

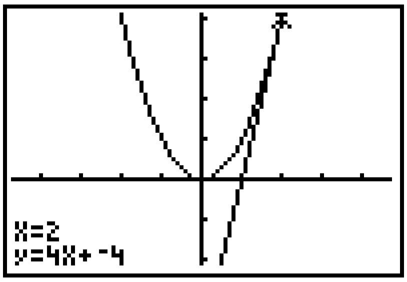
X= -3

We stellen vast dat de afgeleide functie een rechte door de oorsprong is. En als we de tabel bestuderen, hebben we een sterk vermoeden dat $f'(x) = 2x$.

We laten de TI83 Plus de raaklijnen aan de grafiek van *f* opsporen voor de *x*-waarden –1, 0 en 2. We stellen vast dat de richtingscoëfficiënten gelijk zijn aan de waarden die we in de tabel kunnen aantreffen:

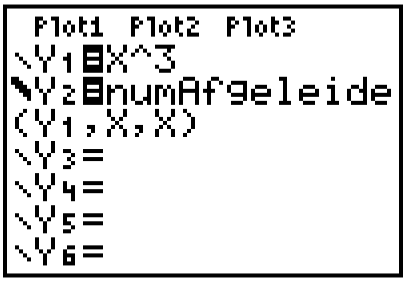


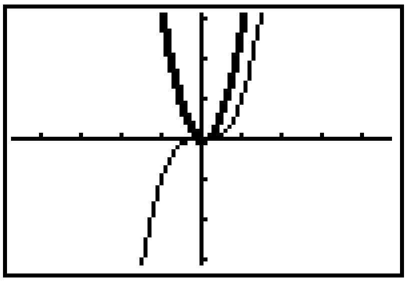




<u>Voorbeeld 2:</u> $f(x) = x^3$

We laten de grafiek van de functie en haar afgeleide op één scherm construeren en we vragen een tabel van functiewaarden op:





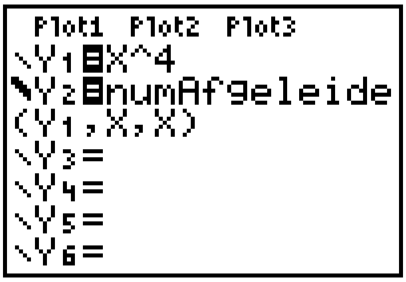
X	Y1	Y2
-3	-27	27
-2	-8	12
-1	-1	3
0	0	1E-6
1	1	3
2	8	12
3	27	27

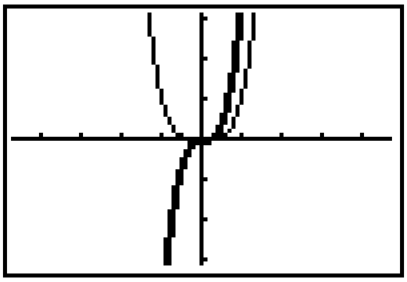
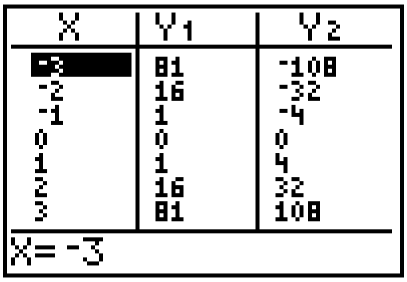
X= -3

Het ziet er hier naar uit dat de grafiek van de afgeleide functie een parabool is met (0;0) als top. En aangezien die parabool het punt (1;3) bevat, vermoeden we sterk dat $f'(x) = 3x^2$.

Voorbeeld 3: $f(x) = x^4$

We laten de grafiek van de functie en haar afgeleide op één scherm construeren en we vragen een tabel van functiewaarden op:



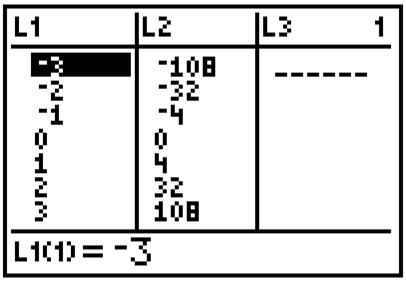



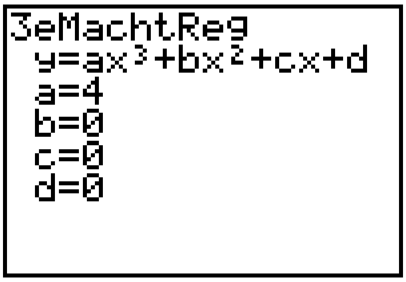
Hier is het niet meer eenvoudig om het voorschrift van de afgeleide functie op te stellen!

In de vorige twee voorbeelden hebben we echter vastgesteld dat de graad van de afgeleide functie telkens één lager is dan de graad van de functie zelf. Nemen we nu even aan dat dit hier ook het geval is. Dan zou de afgeleide functie een derdegraadsfunctie zijn.

Die veeltermfunctie van de derde graad kunnen we door de TI83 Plus laten berekenen als we minimaal vier koppels via lijsten ingeven. Daartoe drukken we op **"STAT,EDIT, 1: Bewerken"**. De x-waarden voeren we in in de lijst L1, de y-waarden in de lijst L2.
We zullen hier bijvoorbeeld alle koppels invoeren die op het tabelscherm voorkomen.

Via **"STAT, REKEN, 6: 3eMachtsReg"** en het invoeren van de twee lijstnamen (gescheiden door een komma), bekomen we dan de vergelijking van de derdegraadsfunctie die deze koppels bevat:





We stellen vast dat $f'(x) = 4x^3$.

OPDRACHT 4

1) *Probeer op analoge manier het voorschrift te vinden van de afgeleide van* $f(x) = x^5$.
2) *Probeer nu uit de afgeleiden van* $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^4$ *en* $y = x^5$ *een algemene formule te ontdekken voor de afgeleide van* $y = x^n$.

3. Schuine asymptoten van rationale functies

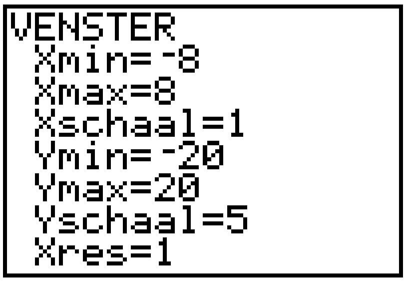
Beginsituatie:

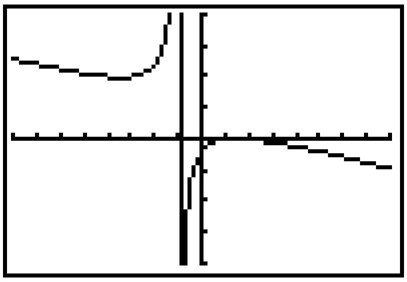
De leerlingen kunnen verticale en horizontale asymptoten van rationale functies opsporen en de ligging van de grafiek t.o.v. de asymptoten bespreken.

3.1 Opsporen van een schuine asymptoot m.b.v. het grafisch rekentoestel

We beschouwen de rationale functie $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{-x^2+3x-2}{x+1}}$.

We laten de TI83 Plus de grafiek van deze functie construeren:

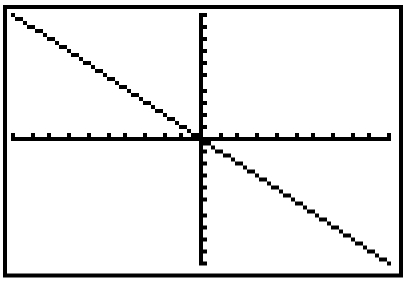




Het is duidelijk dat de rechte $x = -1$ een verticale asymptoot is. We zouden hier echter het gedrag van de functie willen bestuderen als de *x*-waarden steeds maar groter of steeds maar kleiner worden. Op de grafiek zien we hier echter heel duidelijk dat er geen horizontale asymptoot is. Trouwens, de graad van de teller is groter dan de graad van de noemer. Dat betekent dat $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; er kan hier dus geen sprake zijn van een horizontale asymptoot!

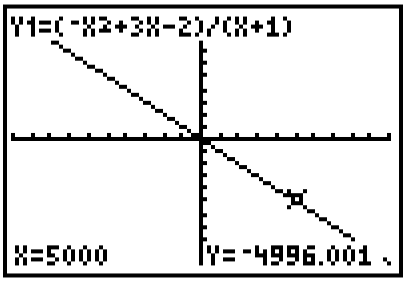
Als we ons heel goed op de grafiek concentreren, dan merken we dat het misschien wel mogelijk is een *dalende rechte* te tekenen waar de grafiek gaat tegen aanleunen, zowel voor kleiner wordende *x*-waarden als voor groter wordende *x*-waarden. Anders gezegd: als de *x*-waarden groot zijn in absolute waarde, zou het kunnen dat de grafiek van *f* ongeveer het gedrag van een rechte vertoont!

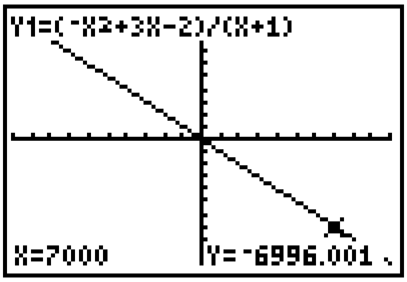
We zullen daarom de venstervariabelen aanpassen zodat we de grafiek kunnen bestuderen voor *x*-waarden die groot zijn in absolute waarde:

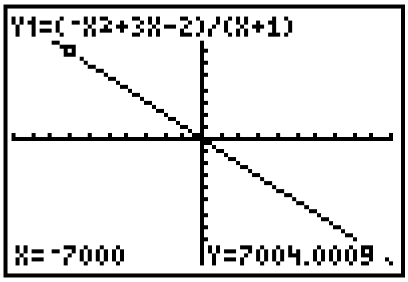


Doordat we voldoende grote *x*-waarden (en natuurlijk ook aangepaste *y*-waarden) hebben genomen, verdwijnt het detailbeeld rond de verticale asymptoot en lijkt de grafiek inderdaad op een rechte.

Via **"TRACE"** en het invoeren van (eenvoudige!) *x*-waarden die groot zijn in absolute waarde, proberen we nu een lineair verband te zoeken tussen de *x*- en de *y*-waarden:

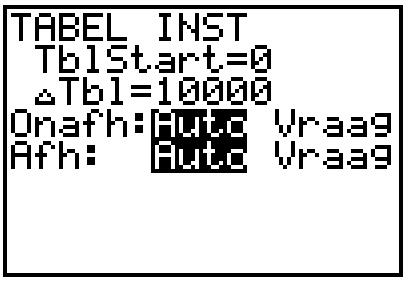


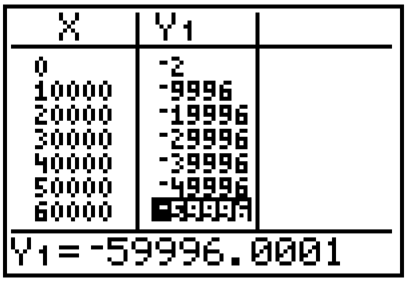


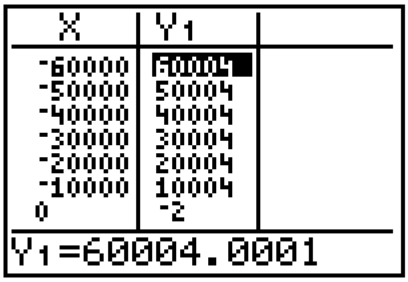


Er wordt hier gesuggereerd dat de grafiek meer en meer gaat aanleunen tegen de rechte $y = -x + 4$, als de *x*-waarden steeds groter worden in absolute waarde.

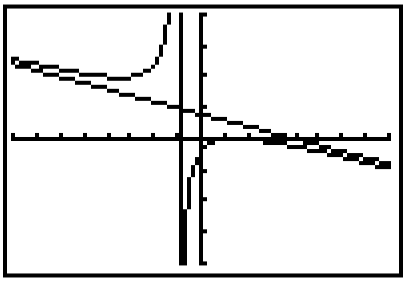
We komen tot dezelfde conclusie als we een tabel met coördinatenkoppels opvragen:







We laten de TI83 Plus nogmaals de grafiek van *f* tekenen, samen met de rechte $y = -x + 4$.
We gebruiken weer de oorspronkelijke venstervariabelen:



We zien inderdaad dat zowel voor groter wordende *x*-waarden als voor kleiner wordende *x*-waarden de beeldpunten dichter en dichter bij de rechte $y = -x + 4$ komen te liggen.
De rechte $y = -x + 4$ is dus een asymptoot. En aangezien deze rechte niet horizontaal noch verticaal is, spreken we dus van een *schuine asymptoot* (S.A.).

3.2 Opstellen van de vergelijking van de schuine asymptoot

Dank zij de TI83 Plus hebben we een sterk vermoeden dat de rechte $y = -x + 4$ S.A. is van $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x + 1}$.

Dé vraag blijft natuurlijk nog: hoe kunnen we de vergelijking van die S.A. exact berekenen?

Er zijn twee methodes om de vergelijking van de S.A. op te stellen. We zullen de twee methodes aanbrengen aan de hand van ons voorbeeld.

3.2.1 Eerste methode: uitvoeren van de Euclidische deling

Als we de Euclidische deling van $-x^2 + 3x - 2$ door $x + 1$ uitvoeren, dan bekomen we een quotiënt van de eerste graad:

$$\begin{array}{rr|l} -x^2 & +3x-2 & x+1 \\ \cline{3-3} \pm x^2 & \pm\ x & -x+4 \\ \cline{1-2} & 4x-2 & \\ & \mp 4x \mp 4 & \\ \cline{1-2} & -6 & \end{array}$$

Met dit quotiënt bepalen we de eerstegraadsfunctie $g(x) = -x + 4$.
We onderzoeken het verband tussen de gegeven functie *f* en de nieuwe functie *g*.

Volgens de definitie van de Euclidische deling geldt:

$-x^2 + 3x - 2 = (x + 1).(-x + 4) - 6$ *(deeltal = deler . quotiënt + rest)*

De functiewaarde $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x + 1}$ kunnen we nu schrijven als volgt:

$$\begin{aligned} \frac{-x^2 + 3x - 2}{x + 1} &= \frac{(x + 1).(-x + 4) - 6}{x + 1} \\ &= -x + 4 - \frac{6}{x + 1} \end{aligned}$$ *(beide leden delen door x + 1)*

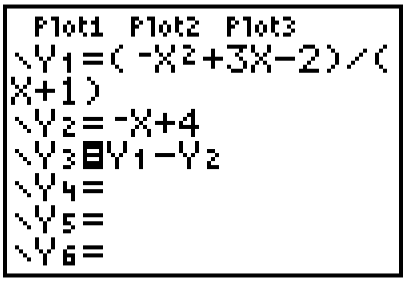
Het verschil van de functiewaarden van *f* en *g* is bijgevolg:

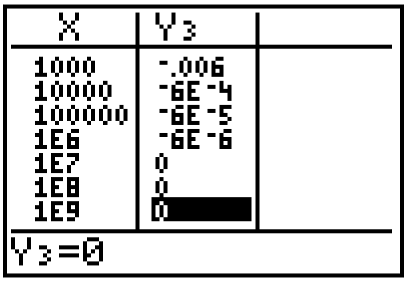
$f(x) - g(x) = -x + 4 - \dfrac{6}{x + 1} - (-x + 4) = \dfrac{-6}{x + 1}$.

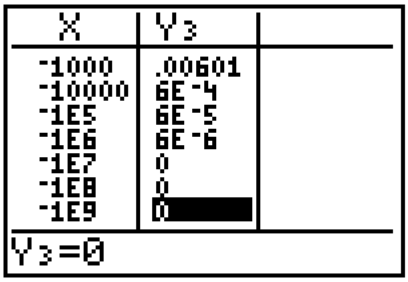
Als we *x* nu laten naderen tot $-\infty$ of tot $+\infty$, dan geldt:

$\lim\limits_{x \to \infty} \big(f(x) - g(x)\big) = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-6}{x + 1} = \dfrac{-6}{\infty} = 0$.

We stellen dus vast dat het verschil tussen de functiewaarden van de gegeven functie *f* en de eerstegraadsfunctie *g* nadert tot nul als de x-waarden groter worden in absolute waarde.
Deze vaststelling wordt bevestigd door de TI83 Plus:







Grafisch betekent dit dat zowel voor groter wordende *x*-waarden als voor kleiner wordende *x*-waarden, de grafiek van *f* dichter gaat aanleunen tegen de rechte $y = -x + 4$. Deze rechte is dus de S.A.

Merk op:

Uit vorige werkwijze blijkt ook dat een rationale functie alleen een S.A. zal hebben als de graad van de teller één groter is dan de graad van de noemer!
De grafiek van een rationale functie heeft geen schuine asymptoot als de graad van de teller niet juist één groter is dan de graad van de noemer. We weten immers dat onder die voorwaarde het quotiënt van de teller door de noemer niet van de eerste graad is.

Algemeen:

Als bij een rationale functie $f(x) = \dfrac{t(x)}{n(x)}$ de graad van $t(x)$ één groter is dan de graad van $n(x)$ en $ax + b$ het quotiënt is van de Euclidische deling van $t(x)$ door $n(x)$, dan noemen we de rechte met vergelijking $y = ax + b$ de schuine asymptoot van de grafiek van f.

3.2.2 Tweede methode: algemeen

Het uitvoeren van de Euclidische deling is een methode die alleen geschikt is om de S.A. van een rationale functie op te sporen. Deze methode is niet algemeen.

Een methode die wel van toepassing is voor om het even welke soort functie, bestaat in het berekenen van twee limieten. We aanvaarden deze methode zonder bewijs:

Als de S.A. van de functie f bestaat, is ze een rechte met vergelijking y = ax + b.
Hierin zijn de coëfficiënten a en b gelijk aan:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \textbf{\textit{en}} \qquad b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - ax \right)$$

We passen deze methode toe op de functie $f(x) = \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x+1}$:

- $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x+1}}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{(x+1).x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x^2 + x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2}{x^2}$
  $= \lim\limits_{x \to \infty} (-1) = -1$

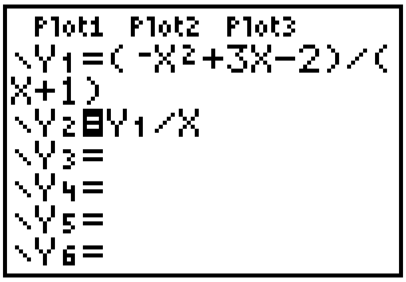
- $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - ax\right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x+1} - (-1).x \right) = \lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{-x^2 + 3x - 2}{x+1} + \dfrac{x.(x+1)}{x+1} \right)$
  $= \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{-x^2 + 3x - 2 + x^2 + x}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x-2}{x+1} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4x}{x} = \lim\limits_{x \to \infty} 4 = 4$

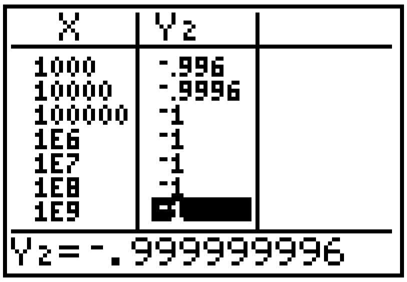
Conclusie: a = -1 en b = 4; de vergelijking van de S.A. is dus $y = -x + 4$.

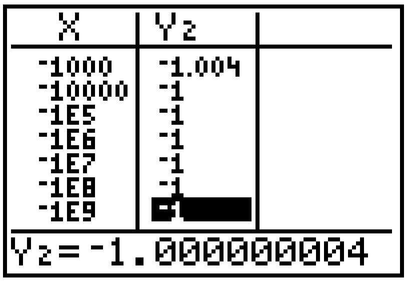
<u>*Merk op:*</u>

We stellen vast dat het berekenen van de S.A. van een rationale functie vlotter verloopt via de Euclidische deling (dit is trouwens ook een methode die specifiek is voor rationale functies!).

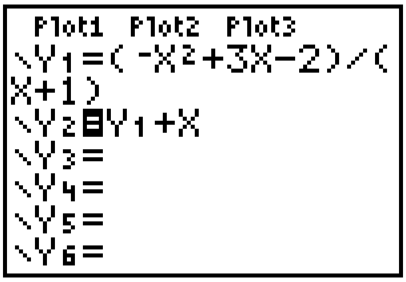
De gevonden limieten kunnen we echter ook (bij benadering) door de TI83 Plus laten berekenen:

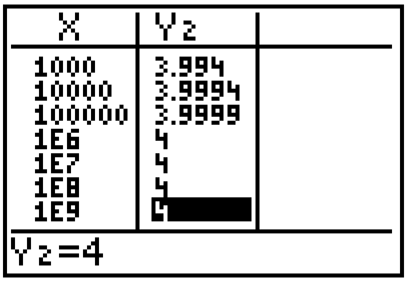


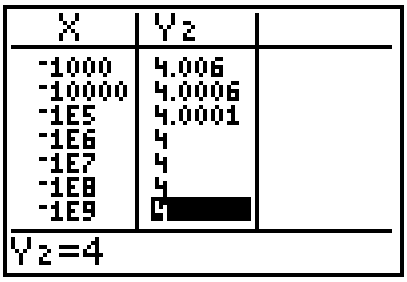




We mogen dus a gelijkstellen aan –1.



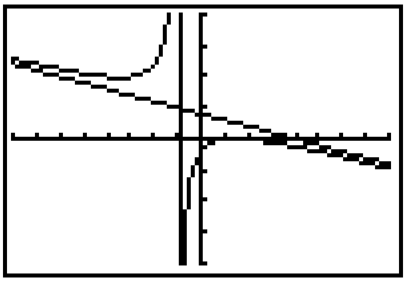




En b is dus blijkbaar gelijk aan 4.

3.3 Ligging van de grafiek t.o.v. de schuine asymptoot

De ligging van de grafiek t.o.v. de S.A. is heel goed te bepalen vanuit het grafiekvenster:

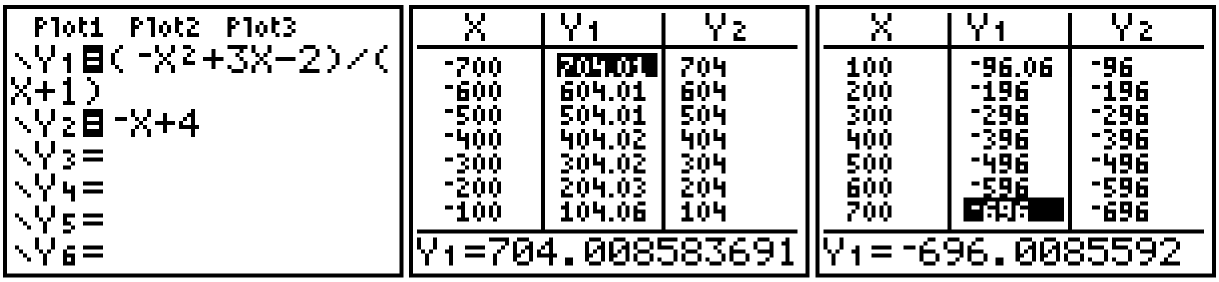


We stellen vast:

- Als x zeer klein wordt, dan zullen de y-waarden van de functie heel dicht bij de y-waarden van de S.A. komen, maar toch nog iets groter blijven. Het aanleunend deel van de grafiek zal dan dus boven de S.A. liggen.

- Als x zeer groot wordt, dan zullen de y-waarden van de functie ook heel dicht bij de y-waarden van de S.A. komen, maar nu iets kleiner blijven. Het aanleunend deel van de grafiek zal dan dus onder de S.A. liggen.

Deze vaststelling wordt bevestigd door enkele tabellen met functiewaarden te beschouwen:



Om de ligging van de grafiek t..o.v. de S.A. na te gaan *zonder* beroep te doen op het grafisch rekentoestel, volstaat het de functiewaarden van f en van de S.A. met elkaar te vergelijken voor een voldoende grote en een voldoende kleine x-waarde:

$f(-100) = 104{,}060606061$
S.A.: $-(-100)+4 = 104$
Aangezien $104{,}060606061 > 104$, zal voor $x \to -\infty$ het aanleunend deel van de grafiek van f boven de S.A. liggen.

$f(100) = -96{,}059405941$
S.A.: $-100+4 = -96$
Aangezien $-96{,}059405941 < -96$, zal voor $x \to +\infty$ het aanleunend deel van de grafiek van f onder de S.A. liggen.

OPDRACHT 5

Gegeven de functie $f(x)=\dfrac{3x^4-2x^2+1}{x^3-3x+2}$.

1) *Probeer de S.A. op te sporen door gebruik te maken van de TI83 Plus.*
2) *Bereken de exacte vergelijking van de S.A. door het uitvoeren van de Euclidische deling.*
3) *Spoor nu eens de S.A. op door gebruik te maken van de algemene methode. Maak hierbij gebruik van de TI83 Plus.*
4) *Onderzoek de ligging van de grafiek t.o.v. de asymptoot (eerst zonder, daarna, ter controle, met de TI83 Plus).*

OPDRACHT 6

Gegeven de functie $f(x)=\dfrac{(x+2)^3}{3.(x+1)^2}$.

1) *Probeer de S.A. op te sporen door gebruik te maken van de TI83 Plus. Tip: als het zoeken van een lineair verband tussen de x- en y-waarden te moeilijk is, werk dan met lineaire regressie!*
2) *Bereken de exacte vergelijking van de S.A. door het uitvoeren van de Euclidische deling.*
3) *Spoor nu eens de S.A. op door gebruik te maken van de algemene methode. Maak hierbij gebruik van de TI83 Plus.*
4) *Onderzoek de ligging van de grafiek t.o.v. de asymptoot (eerst zonder, daarna, ter controle, met de TI83 Plus).*

4. Toepassingen op exponentiële functies

Beginsituatie:

De leerlingen kennen het verschil tussen lineaire en exponentiële groei (of afname). Ze kunnen vlot de groeifactor bepalen en het exponentieel verband opstellen tussen twee grootheden. Het exponentbegrip werd uitgebreid en de grafieken van exponentiële functies van de vorm $f(x) = p.a^x$ werden besproken (invloed van het grondtal en de coëfficiënt).

De tijd is dus rijp om enkele lessen te voorzien waarin de leerlingen allerhande toepassingen op exponentiële functies kunnen maken (soms in de vorm van groepswerk).
We geven enkele voorbeelden.

4.1 Exponentiële groei tegenover lineaire groei

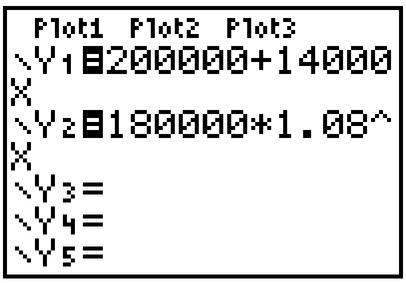
De bevolking van een bepaalde stad groeit elk jaar met 8 %. In het jaar 2001 waren er 180000 inwoners. Het stadsbestuur voorziet een jaarlijkse toename van de woongelegenheid voor 14000 mensen. In 2001 was er woongelegenheid voor 200000 mensen.
Zal die stad op een bepaald moment te kampen hebben met woningnood? Zo ja, in de loop van welk jaar?

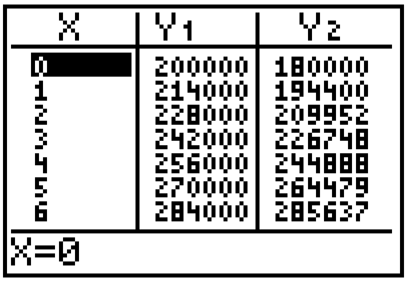
Oplossing

De woongelegenheid neemt elk jaar toe met een vast aantal, namelijk met 14000. Er is hier dus sprake van een lineaire groei.
De woongelegenheid na x jaar is dus gelijk aan: $w(x) = 200000 + 14000x$
(het jaar 2001 komt overeen met $x = 0$).

Het inwonersaantal daarentegen groeit exponentieel aan met een groeifactor gelijk aan
1 + 8 % = 1 + 0,08 = 1,08.
Het inwonersaantal na x jaar is dus gelijk aan: $i(x) = 180000.1{,}08^x$.

We vergelijken de woongelegenheid en het inwonersaantal voor de komende jaren door middel van een tabel:



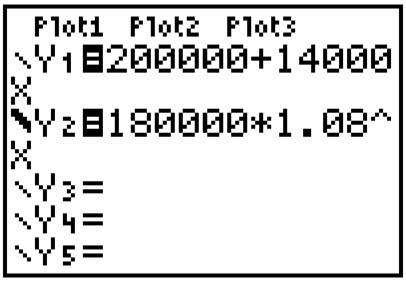


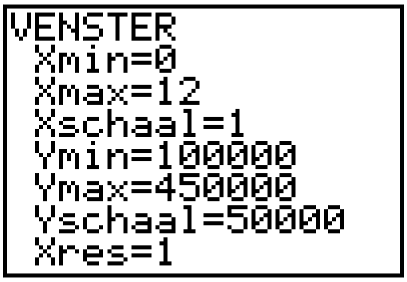
X	Y1	Y2
0	200000	180000
1	214000	194400
2	228000	209952
3	242000	226748
4	256000	244888
5	270000	264479
6	284000	285637

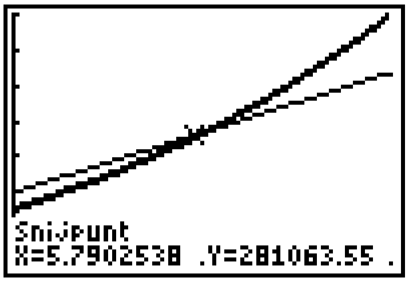
X=0

We stellen vast dat het inwonersaantal de woongelegenheid overschreden heeft als $x = 6$. Er treedt dus woningnood op **in de loop van het jaar 2006**.

We konden dit probleem ook oplossen door de grafieken van beide functies te laten construeren en het snijpunt te zoeken.
Het snijpunt kan gevonden worden via **2nd CALC, 5: snijden”**.



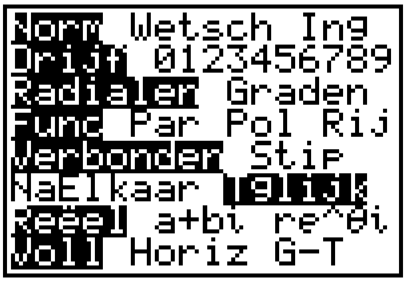




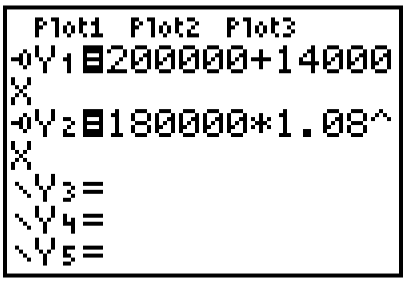
We vinden een snijpunt voor $x = 5{,}7902538$.
Er is dus woningnood in de loop van het jaar 2006, meer bepaald vanaf september (0,7902538.12 = 9,4830456).

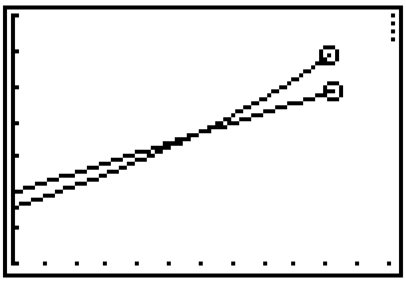
Merk op:

We zien dus dat de exponentiële groei uiteindelijk de bovenhand haalt op de lineaire groei. Dit kunnen we met de TI83 Plus zeer goed demonstreren: we kunnen er namelijk voor zorgen dat ons grafisch rekentoestel de twee grafieken *gelijktijdig* plot! Via **“MODE”** kunnen we de TI83 Plus op die manier instellen. Dan gaan we naar de zesde lijn. Als de machine in de standaardinstelling staat, dan staat “NaElkaar” gemarkeerd (bij het plotten van geselecteerde functies is de TI83 Plus immers standaard zodanig ingesteld dat hij eerst de eerste functie volledig berekent en in een grafiek weergeeft vooraleer hij de volgende functie berekent en in grafiek weergeeft). We gaan nu met de cursor naar **“Tglijk”** en duwen op ENTER:



Als grafieken gelijktijdig op het scherm geplot worden, is het interessant ze te laten opbouwen door een cirkelvormige cursor. Daarvoor moeten we het pictogram “-0” kiezen. We moeten daarvoor de cursor links van de lijnen Y1 en Y2 plaatsen en blijven op ENTER duwen totdat we het juiste symbool verkrijgen.
We verkrijgen op die manier een gelijktijdige en geanimeerde opbouw van de twee grafieken:





OPDRACHT 7

In een riviervlakte wordt grint gebaggerd. Zo ontstaat een meer. Bij het begin van de werken is er 800 m² water. Door de baggerwerken wordt het meer elke week 550 m² groter.
Na het baggeren wil men het meer zo vlug mogelijk voor waterrecreatie gebruiken. Daarom wordt de kwaliteit van het water regelmatig gecontroleerd. Bij het begin van de werken vindt men 5 m² van een bepaalde algensoort in het meer. Tijdens de volgende weken blijkt deze oppervlakte per week te verdubbelen. Iemand merkt op dat hier iets aan gedaan moet worden. Het meer zal anders vlug volledig bedekt zijn met algen. Maar de beambte van het ministerie van volksgezondheid ziet voorlopig geen gevaar: "Het meer wordt toch elke week 550 m² groter."
Wat denk jij hiervan?

4.2 Radioactieve uitstraling

Levend organisch materiaal bevat steeds 10^{-6} *mg per kg van de radioactieve koolstofisotoop* ${}^{14}_{6}C$. *Na het afsterven daalt de concentratie van dit radioactieve element door radioactieve uitstraling met slechts 0,012 % per jaar zodat na vele duizenden jaren nog meetbare hoeveelheden overblijven. Aan de hand van de gemeten concentratie, kan men dan de ouderdom van het materiaal bepalen. Deze methode om de ouderdom van bijvoorbeeld boom- en plantenresten te bepalen, staat bekend als de C-14 methode.*

1) *Hoe evolueert de concentratie van het koolstofisotoop in de eerste 20000 jaar na het afsterven?*
2) *Bereken de concentratie van het koolstofisotoop 4325 jaar na het afsterven?*
3) *Het hout van een scheepswrak bevat* $0{,}812.10^{-6}$ *mg* ${}^{14}_{6}C$ *per kg. Hoe oud is dat wrak?*

Oplossing

Het beschreven fenomeen is duidelijk een geval van exponentiële afname.
De groeifactor is gelijk aan $1 - 0{,}012\ \% = 1 - 0{,}00012 = 0{,}99988$.

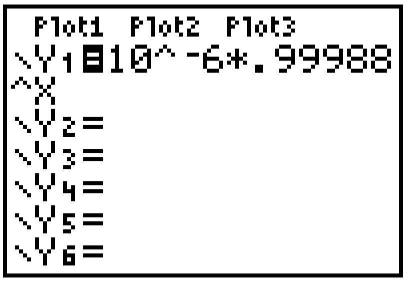
De exponentiële functie die dit proces beschrijft, heeft dus als voorschrift:

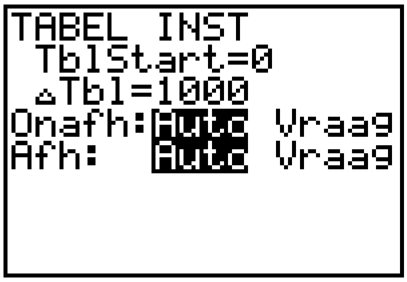
$$\boxed{f(x) = 10^{-6}.0{,}99988^{x}}$$

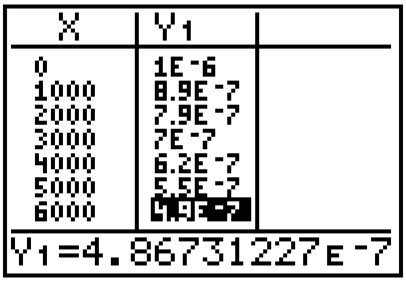
Hierbij stelt x het aantal jaren voor sinds het afsterven.
De concentratie van het koolstofisotoop na x jaren, uitgedrukt in mg per kg, wordt voorgesteld door $f(x)$.

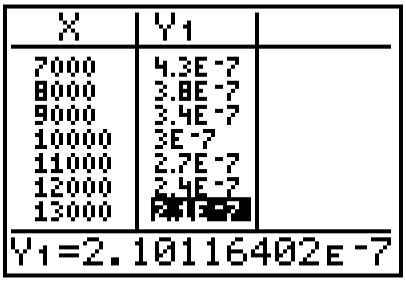
1) *Evolutie van de concentratie van het koolstofisotoop in de eerste 20000 jaar na het afsterven.*

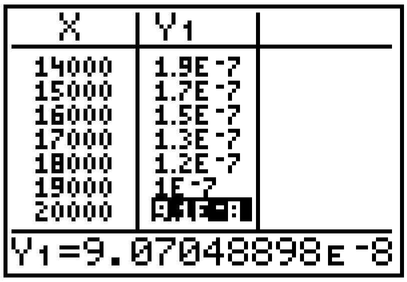
We slaan de functie f op in de TI83 Plus en vragen de tabellen op met de functiewaarden voor *x*-waarden van 0 tot 20000 in stappen van 1000. Zo zullen we duidelijk kunnen zien wat er met de concentratie van het koolstofisotoop gebeurt om de 1000 jaar:





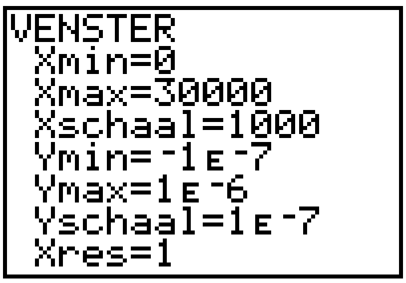


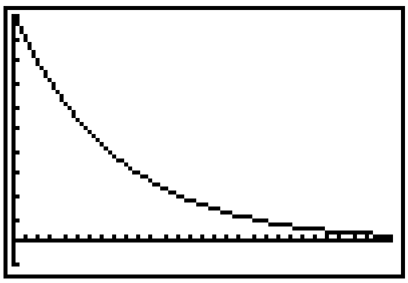




We stellen vast dat de daling van de concentratie van het koolstofisotoop bijzonder traag verloopt. Na 20000 jaar blijft er nog altijd een meetbare hoeveelheid over.

De evolutie van de concentratie zal ook heel goed te zien zijn op de grafiek van deze functie. Vooraleer de grafiek te laten plotten, moeten we uiteraard zorgen voor aangepaste venstervariabelen. We zullen de x-waarden laten lopen van 0 tot 30000 met om de 1000 een markering. De y-waarden komen niet hoger dan $10^{-6} = 0{,}000001$. We zullen op de y-as markeringen laten plaatsen bij de veelvouden van 0,0000001. Ymin zullen we niet laten starten bij 0, maar bij –0,0000001. Als we straks de TRACE-functie zullen gebruiken, zullen de gevonden getallen dan netjes onder de grafiek blijven staan en de leesbaarheid bijgevolg niet schaden:



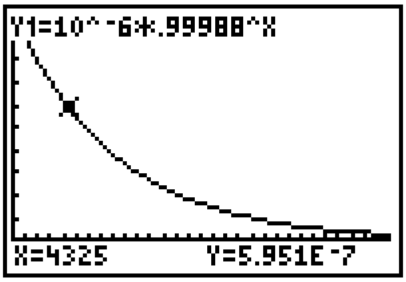


We stellen dus vast dat de grafiek langzaam maar zeker gaat aanleunen bij het positieve deel van de x-as (wat normaal is voor een exponentiële functie met grondtal tussen 0 en 1).

2) De concentratie van het koolstofisotoop 4325 jaar na het afsterven.

De gevraagde concentratie is te vinden door in het functievoorschrift van f de x-waarde te vervangen door 4325: $f(4325) = 10^{-6}.0{,}99988^{4325} = 5{,}950968328.10^{-7}$.

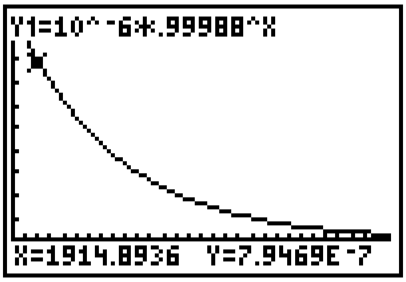
Deze concentratie kunnen we natuurlijk ook op de grafiek aflezen via **"TRACE"**, het intikken van 4325 en de ENTER-toets:

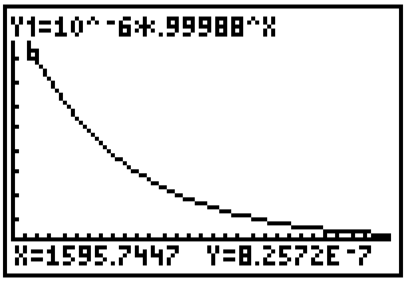


We stellen dus vast dat de concentratie van het koolstofisotoop na 4325 jaar nog $\mathbf{5{,}951.10^{-7} = 0{,}5951.10^{-6}}$ **mg per kg** bevat. Dat betekent dat er na 4325 jaar nog 59,51 % van de oorspronkelijke hoeveelheid overgebleven is!

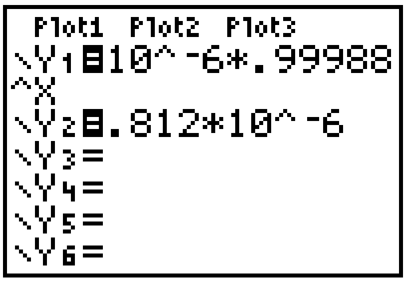
3) Het hout van een scheepswrak bevat $\mathbf{0{,}812.10^{-6}}$ ***mg*** $^{14}_{6}C$ ***per kg. Hoe oud is dat wrak?***

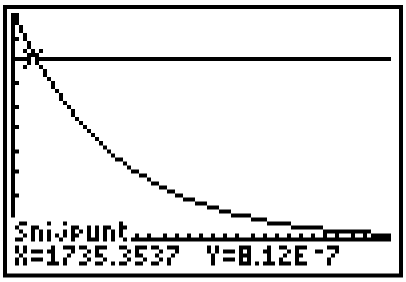
We moeten hier dus op zoek gaan naar de x-waarde die als functiewaarde $0{,}812.10^{-6}$ heeft. Via "TRACE" en de pijltjestoetsen, stellen we vast dat die x-waarde moet liggen tussen 1914,8936 en 1595,7447:





Dat scheepswrak is dus tussen 1596 en 1915 jaar oud.
We kunnen echter ons antwoord preciezer maken door het snijpunt te zoeken van de functie *f* met de horizontale rechte $y = 0{,}812.10^{-6}$:





Dat scheepswrak is dus **1735 jaar** oud!

OPDRACHT 8

Radioactief afval van bijvoorbeeld kerncentrales en ziekenhuizen, blijft nog vele jaren gevaarlijk. Bij radioactiviteit veranderen de atoomkernen waarbij de straling of energie vrijkomt en bijgevolg vermindert het aantal radioactieve atoomkernen. Van bijvoorbeeld het radioactieve element "radium" vermindert het oorspronkelijke aantal radioactieve kernen met 0,146 % per jaar.

1) *Welk percentage van de oorspronkelijke hoeveelheid blijft er nog over na 1000 jaar?*
2) *Na hoeveel jaar is de oorspronkelijke hoeveelheid gehalveerd?*
3) *Men veronderstelt dat na 10 halveringstijden het radioactief materiaal niet meer gevaarlijk is. Hoelang zal dit duren voor radium?*

4.3 Het schaakspel

Het schaakspel is volgens een legende uitgevonden in India. Een sjah, de ontwerper van het "schaak"-spel, mocht van de koning een wens doen die zou ingevolgd worden. Hij wenste op het eerste veld van zijn schaakbord 1 graankorrel, op het tweede veld 2 graankorrels, op het derde veld 4 graankorrels en op elk van de volgende velden telkens het dubbele aantal graankorrels van het voorgaande veld. De koning dacht dat het een redelijke wens was en zond snel een onderdaan weg om een zak graan te halen…
Maar… het totaal aantal graankorrels zou zo groot zijn dat we heel België onder een 50 meter dikke laag graan kunnen bedekken!!

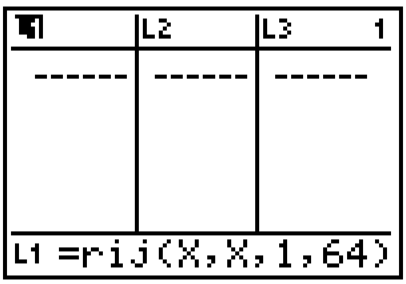
Illustreer deze exponentiële groei met behulp van de TI83 Plus.
Maak hierbij gebruik van lijsten waarop we het aantal graankorrels per veld en het totaal aantal graankorrels kunnen aflezen.

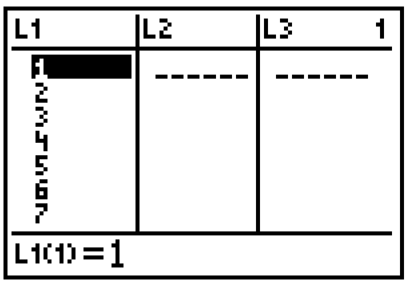
Oplossing

LIJST 1: DE VELDNUMMERS

We nemen de veldnummers op in L1. L1 is dus niets anders dan {1, 2, …, 64}.
Deze lijst voeren we het best in door gebruik te maken van een getallenrij.

Dit kunnen we bijvoorbeeld doen via **"STAT, EDIT, 1: Bewerken"**. Dan gaan we met de cursor op de lijstnaam L1 staan en drukken we op **"ENTER"**. Vervolgens drukken we op **"2nd LIST, BWRK, 5: rij("**. Om alle natuurlijke getallen van 1 tot en met 64 te bekomen, voeren we **"X, X, 1, 64)"** in en drukken we tenslotte op **"ENTER"**:

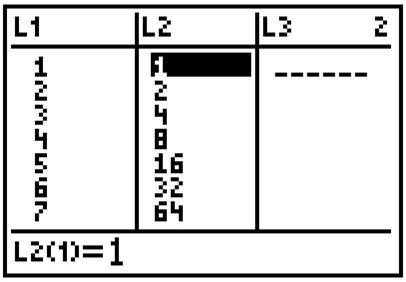




LIJST 2: HET AANTAL GRAANKORRELS OP EEN VELD

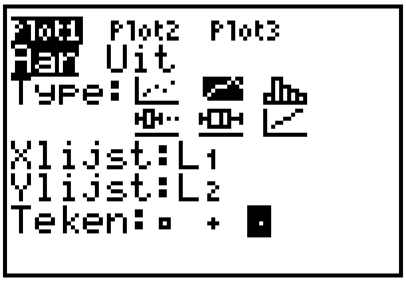
Veldnummer	***Aantal korrels***
1	$1 = 2^0$
2	$2 = 2^1$
3	$4 = 2^2$
4	$8 = 2^3$
5	$16 = 2^4$
6	$32 = 2^5$
…	…
64	2^{63}

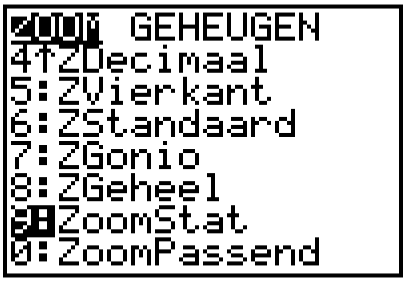
We bouwen L2 op analoge manier op als L1, maar nu zullen we dus moeten werken met **"rij(2^(X-1), X, 1, 64)"**. Zo bekomen we:

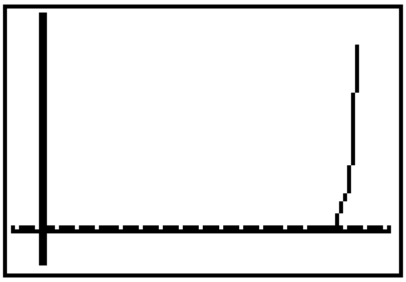


Om een idee te hebben van het aantal korrels per veld, kunnen we met behulp van de pijltjestoetsen de cursor door de lijsten laten bewegen (als we een druk op een pijltjestoets laten voorafgaan door **"ALPHA"**, dan verspringt de cursor 6 plaatsen omhoog of omlaag!).

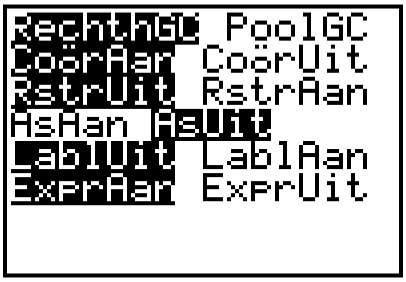
GRAFISCHE VOORSTELLING VAN HET AANTAL GRAANKORRELS PER VELD:

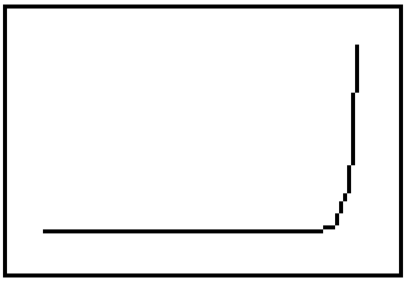




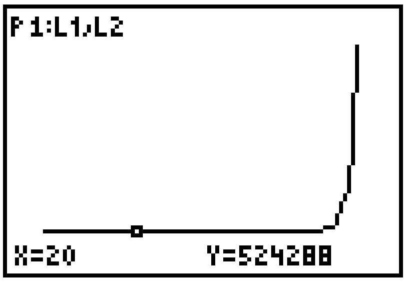


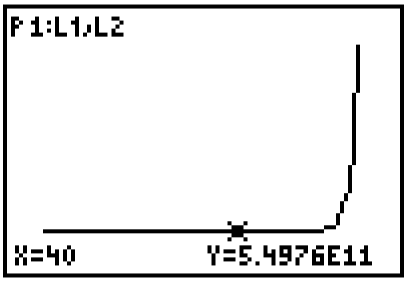
Vinden we dat de assen “storend” werken, dan kunnen we ze weglaten via **“2nd FORMAT, AsUit”**:

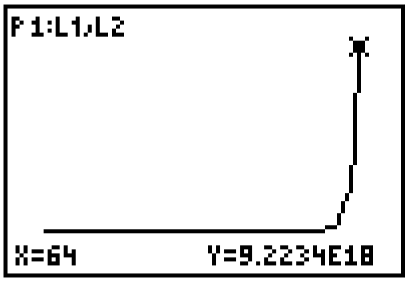




We krijgen uiteraard ook een idee van het aantal graankorrels per veld via **“TRACE”**:







<u>OPDRACHT 9</u>

1) *Hoe groot is het totale aantal graankorrels?*
   Om hierop te kunnen antwoorden maak je het best gebruik van een lijst die de cumulatieve som van het aantal graankorrels per veld weergeeft.

2) *Ik heb een cilindervormig busje. De diameter van het grondvlak is 1,5 cm en de hoogte is 5,2 cm. Ik heb het busje gevuld met graankorreltjes. Er passen precies 118 korreltjes in. Als je weet dat België een oppervlakte heeft van 30513 km², is het dan realistisch te stellen dat het totaal aantal korrels zo groot is dat we heel België onder een 50 meter dikke laag kunnen bedekken?*

5. Oneigenlijke integralen

Beginsituatie:

De leerlingen kennen het verband tussen georiënteerde oppervlakte en bepaalde integraal. Ze kunnen basisintegralen oplossen en kunnen ook integreren met de substitutiemethode.

5.1 Oneigenlijke integralen van de eerste soort

Oneigenlijk integralen van de eerste soort zijn bepaalde integralen waarbij minstens één grens oneindig is.

5.1.1 Eerste voorbeeld:

We proberen de volgende integraal te berekenen: $\boxed{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}$.

Met het grafisch rekentoestel:

Om bepaalde integralen te laten berekenen vanuit het basisscherm werken we via **"MATH, WSK, 9: numIntegraal("**. Dan wordt het functievoorschrift ingegeven (hetzij rechtstreeks, hetzij met een functievariabele), de variabele X, de ondergrens en de bovengrens.

De integraal $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ zullen we met ons grafisch rekentoestel niet correct kunnen berekenen, aangezien $+\infty$ niet kan ingegeven worden.
We kunnen die integraal wel benaderen door steeds grotere bovengrenzen te nemen:

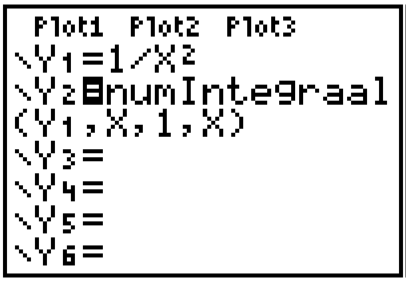
```
numIntegraal(1/X
²,X,1,100)
              .99
numIntegraal(1/X
²,X,1,1000)
             .999
```

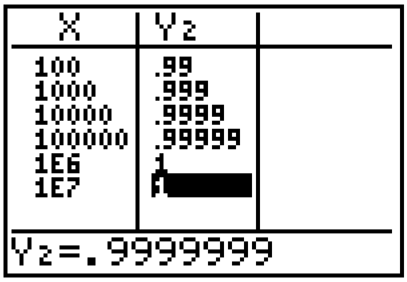
```
numIntegraal(1/X
²,X,1,10000)
            .9999
numIntegraal(1/X
²,X,1,100000)
           .99999
```

Merk op:

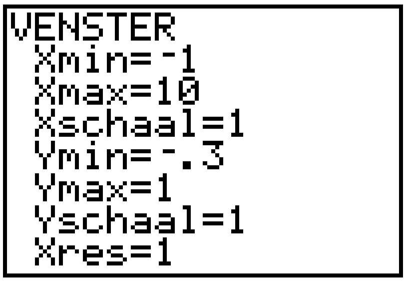
We werken hier het best via **"2nd ENTRY"**. Zo hoeven we telkens alleen maar de bovengrens aan te passen.

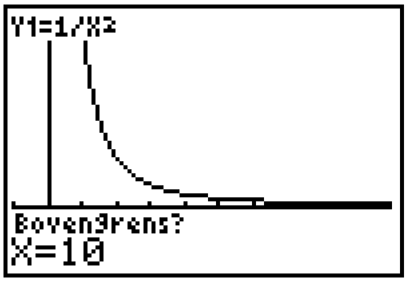
We merken dat de bepaalde integraal steeds dichter komt van 1. Deze “evolutie” kunnen we ook nagaan door de bepaalde integraal in te geven als een functie waarbij de ondergrens vastgelegd wordt op 1 en de bovengrens veranderlijk wordt gelaten. Als we dan in het TABLE SETUP scherm voor de onafhankelijke variabele de optie **“VRAAG”** kiezen, verkrijgen we een lege tabel en kunnen we de *x*-waarden één voor één invoeren:

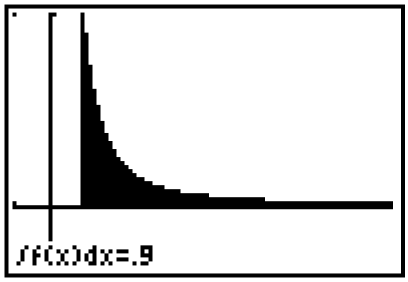




Willen we die integraal benaderen vertrekkende vanuit de grafiek, dan werken we via **“2nd CALC, 7: $\int f(x)dx$”**. We moeten we er wel voor zorgen dat de gekozen integratiegrenzen niet buiten de venstervariabelen terechtkomen!







<u>*Merk op:*</u>

Het gearceerd oppervlak is een tekening. Indien we willen, kunnen we het dus wissen via **“2nd DRAW, TEK, 1: WisTek”**.

<u>Zonder grafisch rekentoestel:</u>

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^{+\infty} x^{-2}\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^{+\infty} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} - \left(-\frac{1}{1}\right) = 0 + 1 = 1 .$$

$\dfrac{1}{+\infty}$ betekent niets anders dan: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$.

Dat wil dus zeggen dat we 1 delen door een getal dat steeds maar groter wordt. De uitkomst zal dus steeds dichter bij 0 komen te liggen. Met andere woorden: $\dfrac{1}{+\infty} = 0$.

5.1.2 Tweede voorbeeld:

We concentreren ons nu op de integraal: $\boxed{\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx}$.

Met het grafisch rekentoestel:

In tegenstelling met het vorig voorbeeld, stellen we hier vast dat de integraal steeds maar kleiner wordt (heel traag!), als we de ondergrens steeds kleiner nemen:

Het wordt hier moeilijk om met behulp van de TI83 Plus na te gaan of deze tendens wordt verder gezet; de berekeningen duren immers zeer lang en als de x-waarde té klein genomen wordt, zet de machine de berekeningen stop. Op de tabel zien we echter wel dat integraalwaarden niet direct de neiging hebben om naar een bepaald getal te streven. We hebben een vaag vermoeden dat de gevraagde integraal misschien wel eens zou kunnen gelijk zijn aan $-\infty$.

Om hieromtrent zekerheid te bekomen, zullen we de integraal manueel uitrekenen:

Zonder grafisch rekentoestel:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln|x|\right]_{-\infty}^{-1} = \ln 1 - \ln(+\infty) = 0 - (+\infty) = -\infty .$$

$\ln(+\infty)$ betekent: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x$. Aangezien $y = \ln x$ een stijgende functie is, zal bij steeds groter wordende x-waarden $\ln x$ ook steeds groter worden. Met andere woorden: $\ln(+\infty) = +\infty$.

Merk op:

Zowel de grafiek van $y = \frac{1}{x^2}$ als van $y = \frac{1}{x}$ heeft de x-as als horizontale asymptoot. En toch is de gevraagde oppervlakte in het eerste voorbeeld “eindig” en in het tweede voorbeeld “oneindig”!

OPDRACHT 10

Maak een schatting van de volgende integralen met behulp van de TI83 Plus.
Bereken daarna de integralen zonder beroep te doen op het rekentoestel.

1) $\displaystyle\int_{3}^{+\infty}(2x-1)^2\,dx$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}e^{2x}\,dx$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx$

5.2 Oneigenlijke integralen van de tweede soort

Oneigenlijk integralen van de tweede soort zijn bepaalde integralen waarbij een integratiegrens samenvalt met een verticale asymptoot of waarbij er zich een verticale asymptoot tussen de integratiegrenzen bevindt.

We berekenen de volgende integraal: $\boxed{\displaystyle\int_0^2\frac{6}{(3x-1)^2}\,dx}$.

Stel $t=3x-1$, dan is $dt=d\,(3x-1)=3dx$ en bijgevolg is $dx=\frac{1}{3}dt$.

Als $x=0$, dan is $t=-1$ en als $x=2$, dan is $t=5$.

Zo bekomen we:

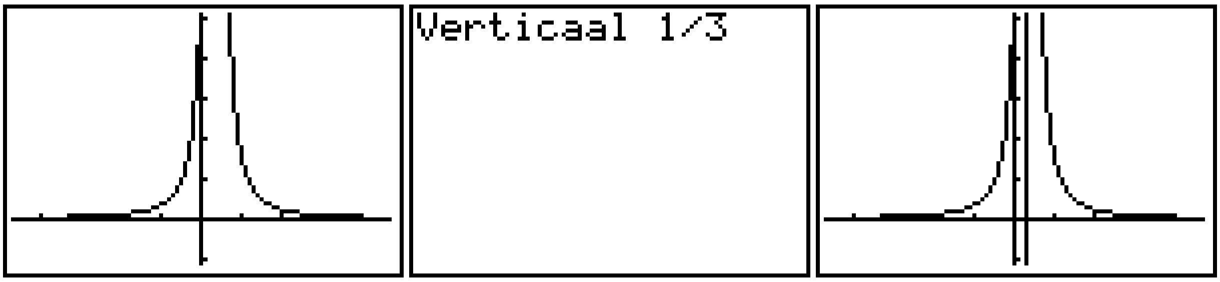
$$\int_0^2\frac{6}{(3x-1)^2}dx=\int_{-1}^{5}\frac{6}{t^2}.\frac{1}{3}dt=2.\int_{-1}^{5}t^{-2}\,dt=2.\left[\frac{t^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{5}=2.\left[\frac{-1}{t}\right]_{-1}^{5}=2.\left[\frac{-1}{5}-\left(\frac{-1}{-1}\right)\right]=-\frac{12}{5}=-2{,}4\,.$$

We controleren ons antwoord met behulp van de TI83 Plus:

```
numIntegraal(6/(
3X-1)²,X,0,2)
```

We stellen echter vast dat de TI83 Plus blijft rekenen en niet tot een antwoord komt!

Als we de grafiek laten construeren, dan zien we wat er aan de hand is!



De georiënteerde oppervlakte tussen de x-waarden 0 en 2, vertoont een onderbreking.
Tussen de onder- en de bovengrens bevindt er zich een verticale asymptoot, namelijk: $x = \frac{1}{3}$
(de V.A. kunnen we laten construeren vanuit het basisscherm via **“2nd DRAW, TEK, 4: Verticaal”** gevolgd door het ingeven van de bewuste x-waarde en ENTER).

Om de georiënteerde oppervlakte te berekenen tussen de grenzen 0 en 2, zijn we verplicht deze georiënteerde oppervlakte op te splitsen in twee delen: van 0 tot $\frac{1}{3}$ enerzijds, en van $\frac{1}{3}$ tot 2 anderzijds:

- $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6}{(3x-1)^2}\, dx = 2.\int_{-1}^{0} t^{-2}\, dt = 2.\left[\frac{-1}{t}\right]_{-1}^{0} = 2.\left[\frac{-1}{0^-} - \left(\frac{-1}{-1}\right)\right] = 2.(+\infty - 1) = 2.(+\infty) = +\infty$.

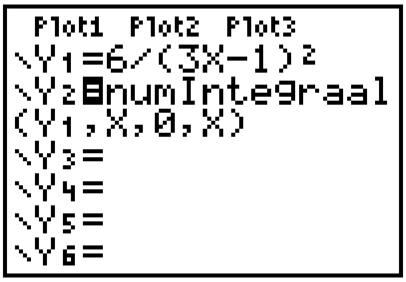
  Als $x = \frac{1}{3}$, dan is t uiteraard gelijk aan 0.
  $\frac{-1}{0^-}$ betekent: $\lim\limits_{t \to 0^-}\left(\frac{-1}{t}\right)$. Aangezien we integreren van –1 naar 0, bevinden we ons aan de kant die kleiner is dan 0; er moet dus met een linkerlimiet gewerkt worden.

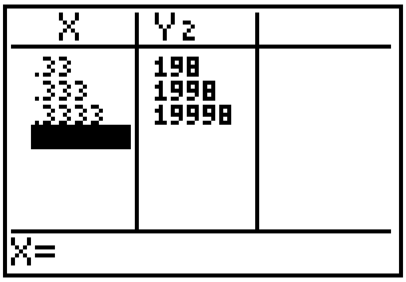
- $\int_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{6}{(3x-1)^2}\, dx = 2.\int_0^5 t^{-2}\, dt = 2.\left[\frac{-1}{t}\right]_0^5 = 2.\left[\frac{-1}{5} - \left(\frac{-1}{0^+}\right)\right] = 2.\left[\frac{-1}{5} - (-\infty)\right] = 2.(+\infty) = +\infty$.

  $\frac{-1}{0^+}$ betekent: $\lim\limits_{t \to 0^+}\left(\frac{-1}{t}\right)$. Aangezien we integreren van 0 naar 5, bevinden we ons aan de kant die groter is dan 0; er moet dus met een rechterlimiet gewerkt worden.

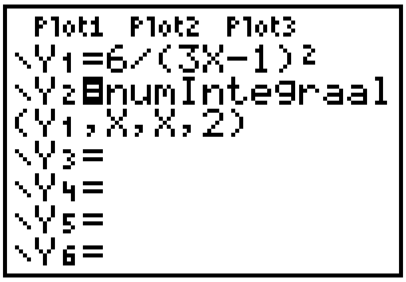
Conclusie: de gevraagde georiënteerde oppervlakte is gelijk aan: $+\infty + (+\infty) = +\infty$.

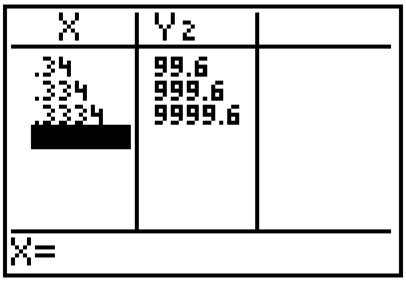
We controleren dat antwoord even met ons grafisch rekentoestel:





Het is duidelijk dat $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6}{(3x-1)^2}\,dx = +\infty$.





En ook hier is het duidelijk dat $\int_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{6}{(3x-1)^2}\,dx = +\infty$.

Opgepast:

Bij het benaderen van $\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{6}{(3x-1)^2}\,dx$ moeten de ingegeven x-waarden "kleiner" zijn dan $\frac{1}{3}$.

Bij het benaderen van $\int_{\frac{1}{3}}^{2} \frac{6}{(3x-1)^2}\,dx$ moeten ze "groter" zijn dan $\frac{1}{3}$.

Verklaar!

OPDRACHT 11

Maak een schatting van de volgende integralen met behulp van de TI83 Plus.
Bereken daarna de integralen zonder beroep te doen op het rekentoestel.

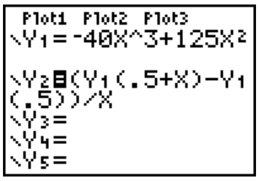
1) $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx$

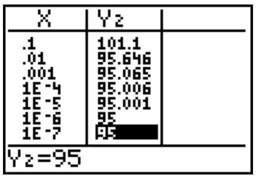
2) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$

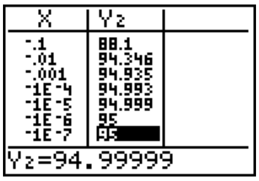
Oplossingen van de opdrachten

OPDRACHT 1

1) **Met de TI83 Plus:**







We stellen vast dat $v(0{,}5) = 95$ (uitgedrukt in km/u).

Zonder TI83 Plus:

Aangezien $f(t) = -40t^3 + 125t^2$, is de uitdrukking $\dfrac{f(0{,}5+h) - f(0{,}5)}{h}$ gelijk aan:

$$\frac{-40(0{,}5+h)^3 + 125(0{,}5+h)^2 - 26{,}25}{h}$$

$$= \frac{-40\left(0{,}125 + 0{,}75h + 1{,}5h^2 + h^3\right) + 125\left(0{,}25 + h + h^2\right) - 26{,}25}{h}$$

$$= \frac{-5 - 30h - 60h^2 - 40h^3 + 31{,}25 + 125h + 125h^2 - 26{,}25}{h}$$

$$= \frac{95h + 65h^2 - 40h^3}{h}$$

$$= \frac{h\left(95 + 65h - 40h^2\right)}{h}$$

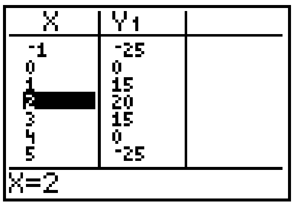
$$= 95 + 65h - 40h^2$$

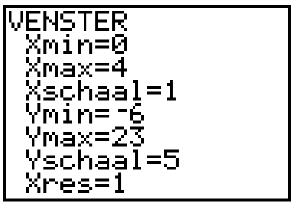
Bijgevolg: $v(0{,}5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0{,}5+h) - f(0{,}5)}{h} = 95$.

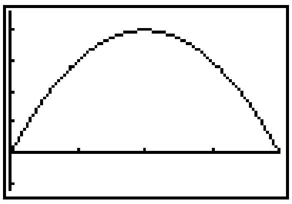
2) Aangezien de grafiek in het punt $(0{,}5; f(0{,}5))$ minder steil verloopt dan in $(1; f(1))$, zal $v(0{,}5) < v(1)$.
En inderdaad: $95 < 130$.

OPDRACHT 2

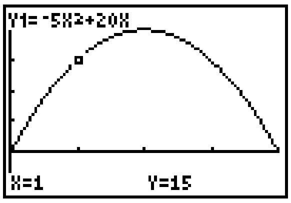
1) Om geschikte venstervariabelen te vinden, kunnen we eventueel eerst een tabel van koppels opvragen.





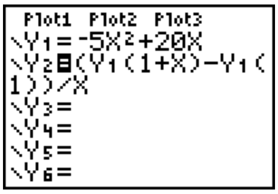


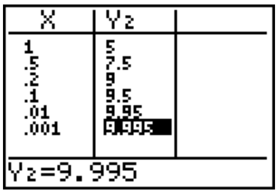
2) $f(1) = 15$; na 1 seconde is de steen dus 15 meter hoog.
Dit resultaat wordt bevestigd door de TI83 Plus via **“TRACE”**:

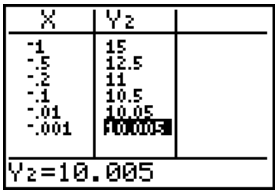


3) $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1} = \dfrac{20-15}{1} = 5$; de gemiddelde snelheid in het tijdsinterval [1,2] is dus 5 m/sec.

4)







We hebben een heel sterk vermoeden dat de ogenblikkelijke snelheid na 1 seconde gelijk is aan 10m/sec.

5) $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h} = \dfrac{-5\,(1+h)^2+20\,(1+h)-15}{h} = \dfrac{-5\,(1+2h+h^2)+20\,(1+h)-15}{h} = \dfrac{-5-10h-5h^2+20+20h-15}{h}$

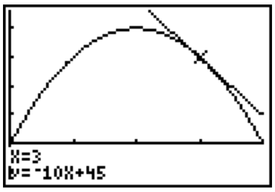
$= \dfrac{-5-10h-5h^2+20+20h-15}{h} = \dfrac{10h-5h^2}{h} = \dfrac{h\,(10-5h)}{h} = 10-5h\cdot$

En als we nu h vervangen door 0, dan bekomen we inderdaad 10.

6)

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is 10, met andere woorden: de snelheid na 1 seconde is 10m/sec.

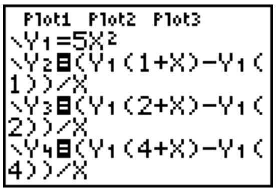
7) De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is -10, met andere woorden: de snelheid na 3 seconden is -10m/sec. Dat betekent dat die steen met een snelheid van 10m/sec “naar beneden valt”!

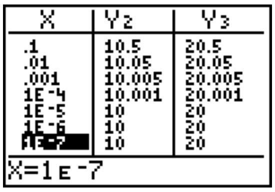


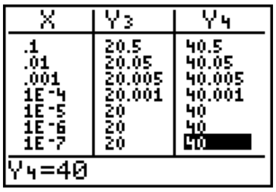
OPDRACHT 3

Via steeds kleiner wordende tijdintervallen:

We zien snel in dat $5t^2 = 80$ als $t = 4$



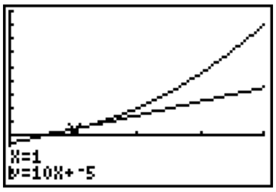


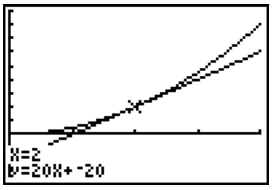


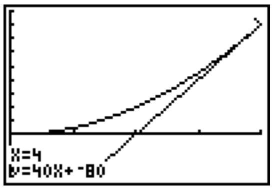
Antwoorden: 1) 10m/sec: 2) 20m/sec; 3) 40m/sec.

Via de raaklijn:

richtingscoëfficiënt = 10 20 40

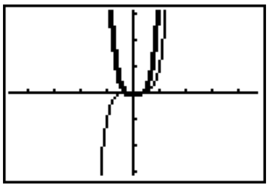


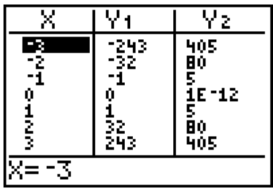


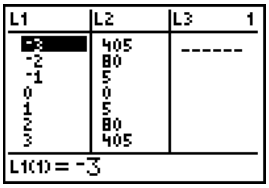


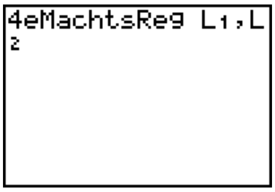
OPDRACHT 4

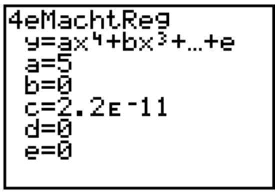
1)









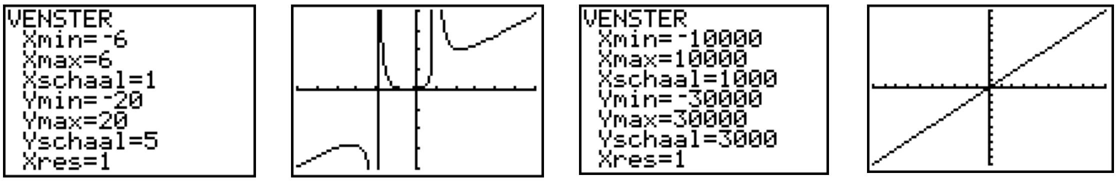


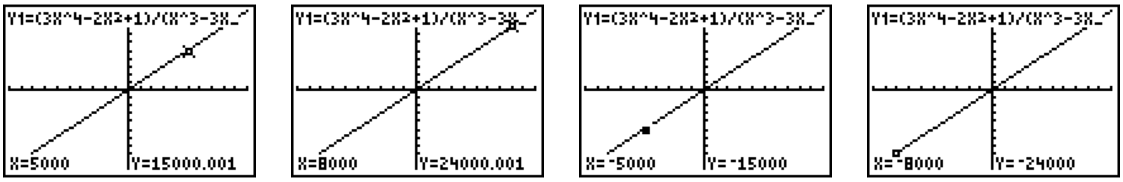
a is 5; *b*, *d* en *e* zijn 0 en *c* is nagenoeg 0; we kunnen dus stellen dat $f'(x) = 5x^4$.

2) $D\left(x^n\right) = nx^{n-1}$

OPDRACHT 5

1)





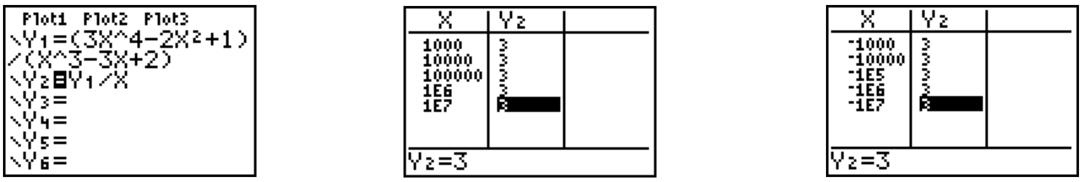
We hebben een sterk vermoeden dat de S.A. als vergelijking $y = 3x$ heeft.
Een tabel met coördinaten koppels brengt ons uiteraard tot dezelfde conclusie:

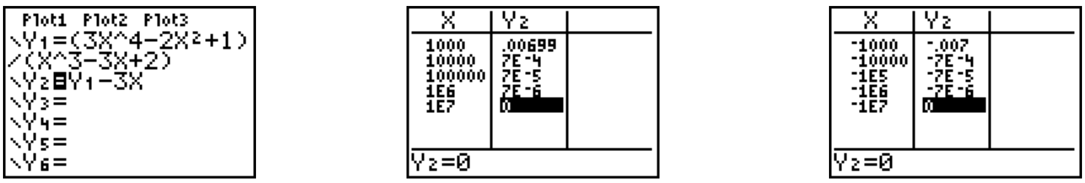
2)

$$
\begin{array}{r|l}
3x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 & x^3 - 3x + 2 \\ \hline
\pm 3x^4 \qquad \pm 9x^2 \mp 6x & 3x \\ \hline
7x^2 - 6x + 1 &
\end{array}
$$

De vergelijking van de S.A. is dus inderdaad $y = 3x$.

3)





a = 3 en b = 0 ; de S.A. heeft dus als vergelijking: $y = 3x$.

4) $f(-100) = -300{,}07062233$

S.A.: $3.(-100) = -300$

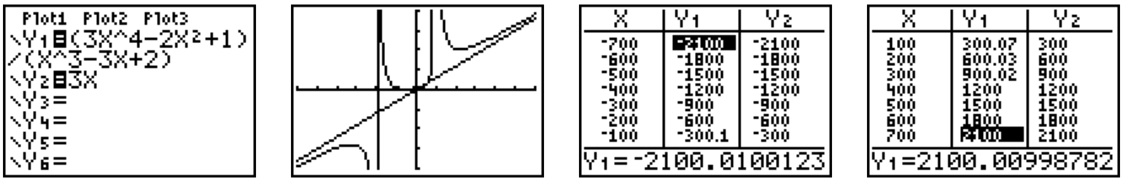
Als x zeer klein wordt in absolute waarde, ligt het aanleunend deel van de grafiek van f onder de S.A..

$f(100) = 300{,}069421688$

S.A.: $3.100 = 300$

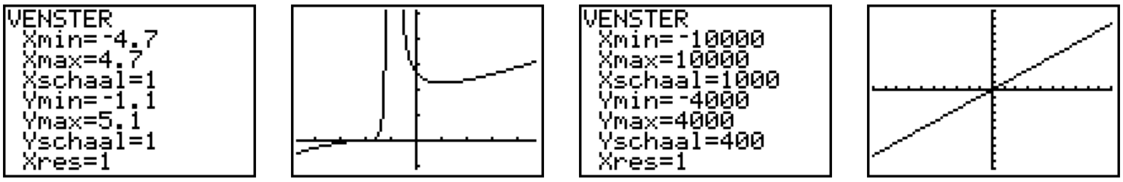
Als x zeer groot wordt in absolute waarde, ligt het aanleunend deel van de grafiek van f boven de S.A..

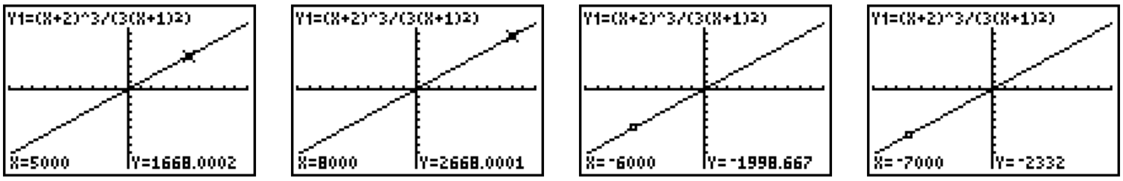
Controle met de TI83 Plus:



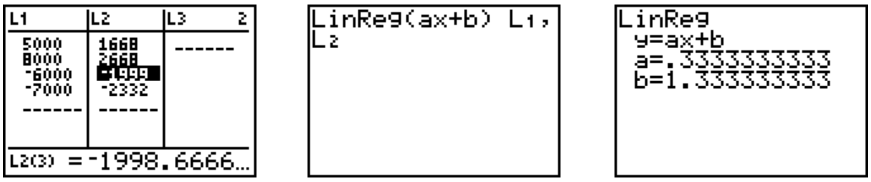
OPDRACHT 6

1)





We konden hier uiteraard ook weer *x*- en *y*- waarden via tabellen bekomen hebben. Hoe dan ook, het is hier niet zo evident om een lineair verband te vinden tussen de *x*- en *y*-waarden. Daarom slaan we de *x*- en *y*-waarden op in lijsten en zoeken we het lineair verband via **"STAT, REKEN, 4: LinReg(ax+b)"**:



De vergelijking van de S.A. zal dus hoogstwaarschijnlijk gelijk zijn aan: $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

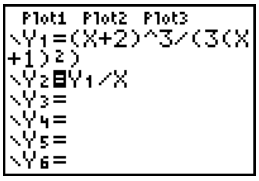
2) $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

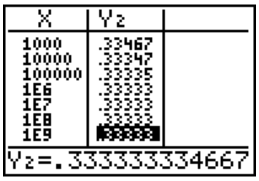
$3.(x+1)^2 = 3.\left(x^2 + 2x + 1\right) = 3x^2 + 6x + 3$

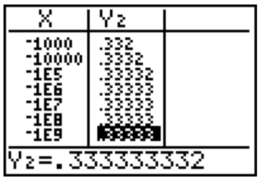
$$
\begin{array}{r|l}
x^3 + 6x^2 + 12x + 8 & 3x^2 + 6x + 3 \\ \cline{2-2}
\mp x^3 \mp 2x^2 \mp \ \ x & \frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \\ \cline{1-1}
4x^2 + 11x + 8 & \\
\mp 4x^2 \mp 8x \mp 4 & \\ \cline{1-1}
3x + 4 &
\end{array}
$$

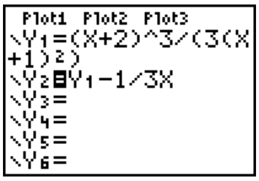
De vergelijking van de S.A. is dus inderdaad $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

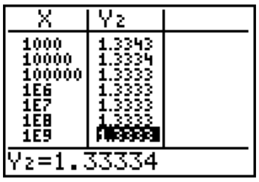
3)

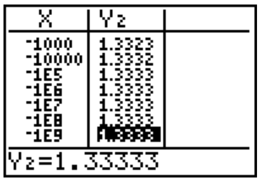












a = $\frac{1}{3}$ en b = $\frac{4}{3}$; de S.A. heeft dus als vergelijking: $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.

4) $f(-100) = -32{,}010067$

S.A.: $\frac{1}{3}.(-100) + \frac{4}{3} = -32$

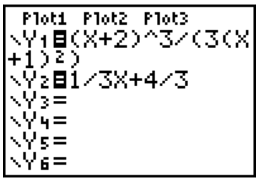
Als x zeer klein wordt in absolute waarde, ligt het aanleunend deel van de grafiek van f onder de S.A..

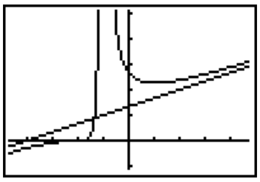
$f(100) = 34{,}6766003333$

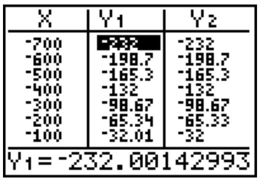
S.A.: $\frac{1}{3}.100 + \frac{4}{3} = 34{,}666666667$

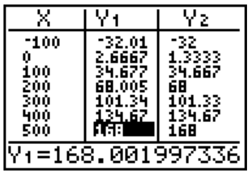
Als x zeer groot wordt in absolute waarde, ligt het aanleunend deel van de grafiek van f boven de S.A..

Controle met de TI83 Plus:







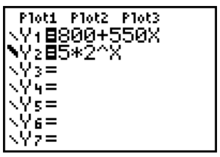


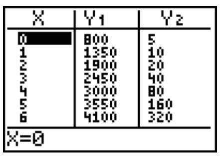
OPDRACHT 7

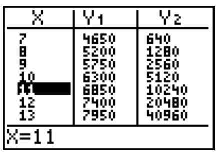
De grootte van het meer (uitgedrukt in m²) na x weken baggeren: $f_1(x) = 800 + 550x$.

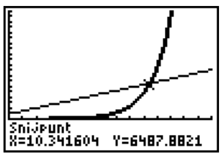
Algenoppervlakte na x weken: $f_2(x) = 5.2^x$.

Door middel van een tabel vergelijken we , week na week, de oppervlakte van het meer met de oppervlakte van de algen. We stellen vast dat in de loop van de tiende week na het begin van de werken, het meer volledig bedekt zal zijn met algen. Als we het snijpunt van beide grafieken opsporen, wordt deze vaststelling bevestigd.









OPDRACHT 8

De groeifactor per jaar is hier gelijk aan: 1 – 0,146 % = 1 – 0,00146 = 0,99854.
Stellen we het oorspronkelijk aantal radioactieve kernen gelijk aan *n*, dan wordt de hoeveelheid radioactieve kernen na *x* jaar voorgesteld door: $f(x) = n.0{,}99854^x$.

1) $f(1000) = n.0{,}99854^{1000} = n.0{,}2319886482$
Na 1000 jaar blijft er dus ongeveer 23,2 % van de oorspronkelijke hoeveelheid over.

2) We moeten *x* zoeken zodat $n.0{,}99854^x = 0{,}5.n \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}99854^x = 0{,}5$.

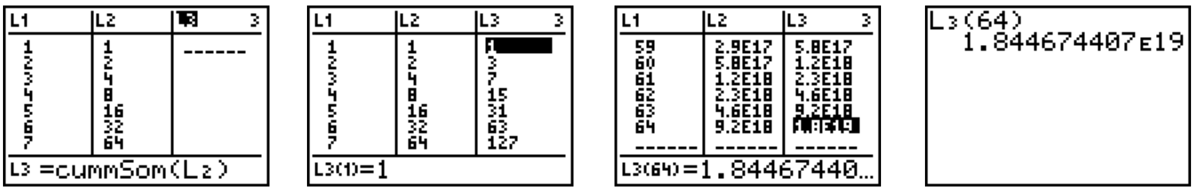
De oorspronkelijke hoeveelheid is gehalveerd na iets meer dan 474 jaar.

3) 10 keer 474,41168 = 4744,1168. Het radioactief materiaal is niet meer gevaarlijk na ongeveer 4774 jaar.

OPDRACHT 9

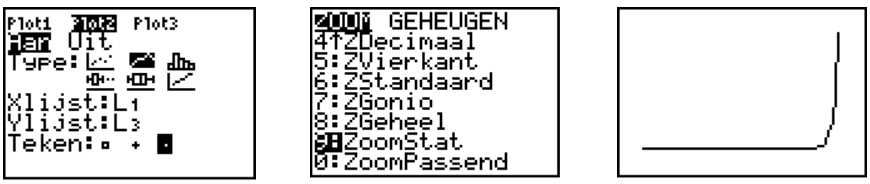
1) LIJST 3: DE CUMULATIEVE SOM VAN HET AANTAL GRAANKORRELS PER VELD

We werken weer via **"STAT, EDIT, 1: Bewerken"**. We zetten de cursor op L3 en drukken op **"ENTER"** en **"2nd LIST, BWRK, 6: cummSom("**. Daarna drukken we op **"2nd L2"** en tenslotte op **"ENTER"**:
We stellen vast dat het totaal aantal korrels gelijk is aan $1{,}844674407371.10^{19}$.
Dit resultaat konden we ook in het basisscherm bekomen via **"L3(64)"**.

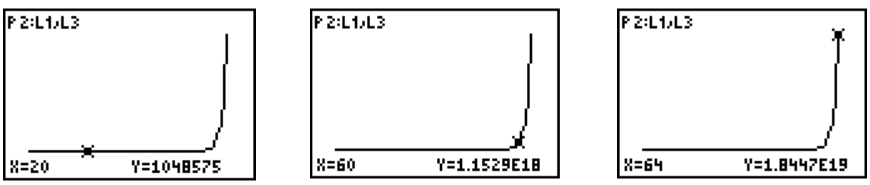


GRAFISCHE VOORSTELLING VAN HET CUMULATIEF AANTAL GRAANKORRELS PER VELD:

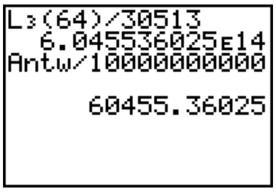
We laten hier weer de assen weg.

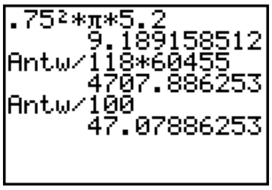


En via **"TRACE"** kunnen we uiteraard voor om het even welk veld het cumulatief aantal korrels kennen:



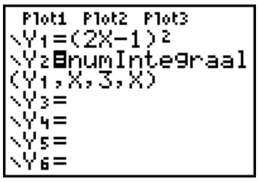
2) Om het aantal graankorrels per km² te kennen, moeten we L3(64) delen door 30513.
Dit aantal moeten we dan delen door 10 miljard om het aantal graankorrels per cm² te kennen:
Dat betekent dus dat er op een oppervlakte van 1 cm² een laag bestaande uit 60455 graankorrels moet gestapeld worden!
De inhoud van het busje is ongeveer 9,189 cm³.
Indien het grondvlak 1 cm² was geweest, zouden 118 korrels dus een hoogte hebben van 9,189 cm.
Dan zouden 60455 korrels een hoogte innemen van 4707 cm, dus ongeveer 47 meter!

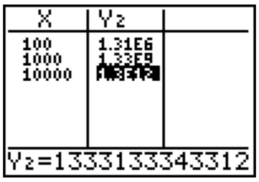


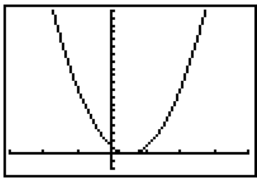


OPDRACHT 10

1) **Met de TI83 Plus:**
Het is overduidelijk dat de gevraagde integraal gelijk is aan $+\infty$. De grafiek is immers een parabool; de oppervlakte tussen die parabool, de *x*-as en rechts van de verticale door 3 is inderdaad oneindig groot.







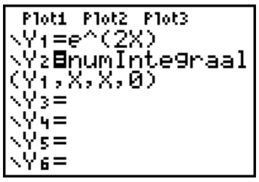
Zonder TI83 Plus:

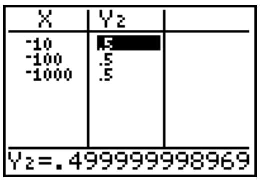
$t = 2x - 1 \quad \Rightarrow \quad dt = d(2x-1) = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{1}{2}dt$

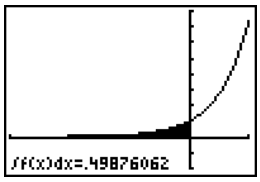
$x = 3 \quad \Rightarrow \quad t = 5 \qquad\qquad x = +\infty \quad \Rightarrow \quad t = +\infty$

$$\int_3^{+\infty} (2x-1)^2\, dx = \int_5^{+\infty} t^2 . \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} . \left[\frac{t^3}{3}\right]_5^{+\infty} = \frac{1}{2} . \left[\frac{(+\infty)^3}{3} - \frac{5^3}{3}\right] = \frac{+\infty}{6} - \frac{125}{6} = +\infty .$$

2) **Met de TI83 Plus:**
De gevraagde integraal is zonder twijfel gelijk aan 0,5. Zelfs met ondergrens –3 ligt het resultaat al heel dicht bij 0,5 (zie grafiek).







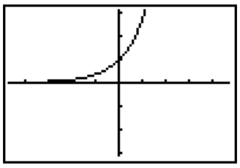
Zonder TI83 Plus:

$t = 2x \quad \Rightarrow \quad dt = d(2x) = 2dx \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{1}{2}dt$

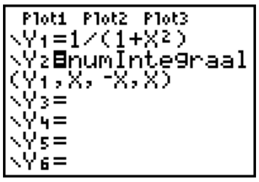
$x = -\infty \quad \Rightarrow \quad t = -\infty \qquad\qquad x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

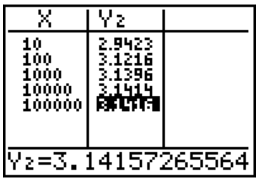
$$\int_{-\infty}^{0} e^{2x}\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^t . \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} . \left[e^t\right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{2} . \left(e^0 - e^{-\infty}\right) = \frac{1}{2} . (1-0) = \frac{1}{2} .$$

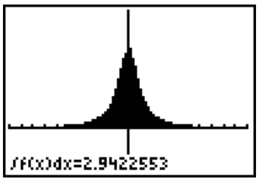
Merk op: door redenering op de grafiek van $y = e^x$, vinden we: $e^{-\infty} = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$



3) **Met de TI83 Plus:**
We hebben de indruk dat de integraal gelijk is aan π.
Op de grafiek hebben we de integraal gezocht tussen de grenzen –10 en 10.





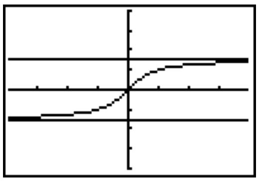


Zonder TI83 Plus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \left[Bg\tan x\right]_{-\infty}^{+\infty} = Bg\tan(+\infty) - Bg\tan(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi\,.$$

Merk op: door redenering op de goniometrische cirkel of op de grafiek van $y = Bg\tan x$, vinden we:

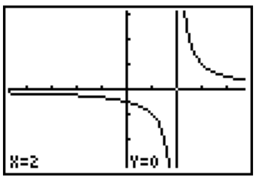
$Bg\tan(+\infty) = \lim\limits_{x \to +\infty} Bg\tan x = \dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ $Bg\tan(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} Bg\tan x = -\dfrac{\pi}{2}$

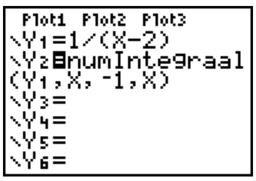


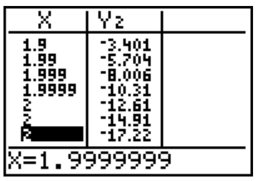
Er zijn immers twee horizontale asymptoten: $y = \dfrac{\pi}{2}$ en $y = -\dfrac{\pi}{2}$.

OPDRACHT 11

1) **Met de TI83 Plus:**
De rechte $x = 2$ is verticale asymptoot.
Door de bovengrens te laten naderen van 2, stellen we vast dat de integraal steeds kleiner wordt. We vermoeden dat de gevraagde integraal $-\infty$ zal zijn, maar we zijn het niet helemaal zeker.







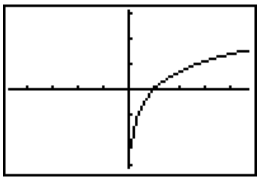
Zonder TI83 Plus:

$t = x - 2 \quad \Rightarrow \quad dt = d(x-2) = dx$

$x = -1 \quad \Rightarrow \quad t = -3 \qquad\qquad x = 2 \quad \Rightarrow \quad t = 0$

$$\int_{-1}^{2} \frac{1}{x-2}\,dx = \int_{-3}^{0} \frac{1}{t}\,dt = \left[\ln|t|\right]_{-3}^{0} = \ln 0 - \ln 3 = -\infty - 1{,}098612289 = -\infty \cdot$$

Merk op: door redenering op de grafiek van $y = \ln x$, vinden we: $\ln 0 = \lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty \cdot$

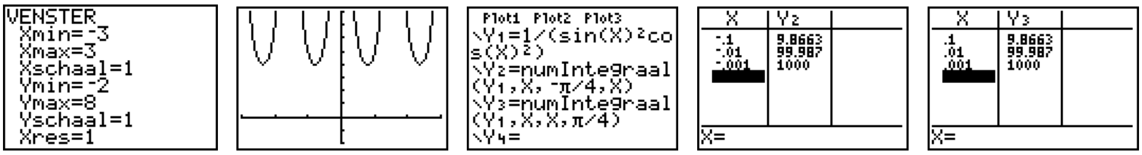


2) **Met de TI83 Plus:**

Tussen de integratiegrenzen vertoont de grafiek een onderbreking voor $x = 0$.
Door beroep te doen op de TI83 Plus kunnen we hier zonder enige twijfel stellen dat:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx = +\infty \qquad \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx = +\infty$$

De gevraagde integraal zal dus gelijk zijn aan $+\infty$.



Zonder TI83 Plus:

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x.\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}$$

- $$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx = \left[\tan x - \cot x\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

  $$= \tan 0 - \cot 0 - \left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0 - (-\infty) - \left(-1 - (-1)\right) = +\infty$$

  Merk op: aangezien we ons hier aan de linkerkant van 0 bevinden, moet cot 0 geïnterpreteerd worden als: $\lim\limits_{x \to 0^-} \cot x = -\infty \cdot$

  Deze limiet is te vinden door redenering op de goniometrische cirkel of door de grafiek van $y = \cot x$ te beschouwen.

- $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin^2 x.\cos^2 x}\,dx$:analoog.