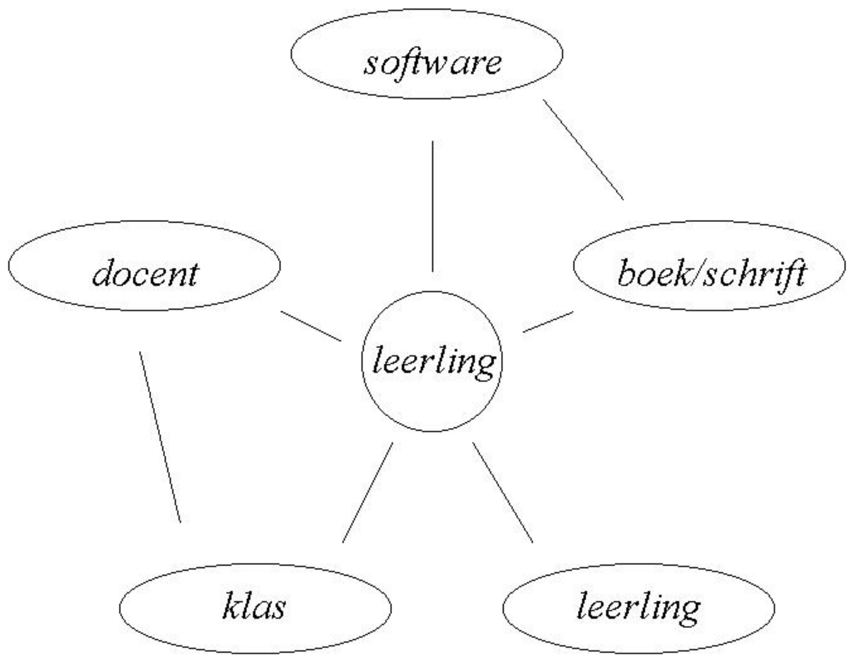
Interactie met TI-Interactive

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut / APS

Interactie

Interactie is een belangrijk aspect van het leren van wiskunde. Voor veel leerlingen lijkt te gelden dat slechts door interactie met anderen het geleerde 'op zijn plaats valt', grote lijnen zichtbaar worden en reflectie op het geleerde plaatsvindt.
De vraag is hoe het werken met ICT zich tot deze gewenste interactie verhoudt. Is het zo dat door het ICT-gebruik de aandacht van de leerling zich vooral op het scherm richt, waardoor er voor interactie met medeleerling of docent minder energie overblijft? Werkt ICT, al dan niet 'hand-held', individualiserend, zodat samenwerking niet meer plaatsvindt? Of is de uitvoer van het ICT-gereedschap juist aanleiding tot levendige discussie en interactie? Vervangt de interactie tussen leerling en technologie de interactie tussen leerling en docent? Of is de docent juist extra hard nodig? Op deze vragen wordt ingegaan aan de hand van het volgende 'interactieschema':



TI-Interactive

TI-Interactive is een softwareomgeving die vele functies biedt, waaronder die van

- tekstverwerker (ook lay-out, formules, plaatjes)
- rekenmachine
- grafiekentekenaar
- tabel- en rekenbladprogramma
- computeralgebra omgeving
- browser

TI-Interactive is dus te beschouwen als een combinatie van bij wijze van spreken Word, TI-83, Derive, Excel en Internet Explorer. Het duidelijk dat zo'n complete wiskundeomgeving mogelijkheden biedt om lesmateriaal te ontwikkelen, aan te bieden en te laten verwerken, of om leerlingen werkstukken in te laten maken. Door de veelzijdigheid van de omgeving kunnen leerlingen snel een veelheid van ervaringen opdoen, die de basis vormen voor conceptvorming. De vraag is hierbij hoe indringend die ervaringen zijn voor de leerling, en hoe die zich verhoudt met de ervaringen met pen en papier.
In deze voordracht zullen voorbeelden in TI-Interactive gepresenteerd worden in het licht van de interactie die daarbij al dan niet plaatsvindt tussen de 'partners' uit het interactieschema.

Verwijzingen

Bij de volgende bronnen kunt u meer informatie vinden in verband met deze voordracht.

- Op www.fi.uu.nl/~pauld/oostende2002 staat de powerpoint presentatie bij deze voordracht.
- Op www.fi.uu.nl/adlo staat lesmateriaal in TI-Interactive, waaronder enkele voorbeelden uit de voordracht.
- Bijgevoegd is een preprint van het artikel 'Wiskunde in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen', dat gepubliceerd wordt in De Nieuwe Wiskrant 22(1) van september 2002. Het behandelt de moeilijkheden die kunnen optreden tijdens de interactie tussen leerling en computeralgebra pakket.
- Informatie over de activiteiten van T3 Nederland staat op www.aps.nl/t3.

Het leren van wiskunde in een computeralgebra omgeving verloopt vaak niet zonder problemen. In dit artikel brengt **Paul Drijvers** een aantal veel gesignaleerde obstakels in kaart, die allemaal een conceptueel en een technisch aspect hebben. De conclusie van deze inventarisatie is dat het aanbeveling verdient om dergelijke obstakels tot onderwerp van gesprek te maken en ze zo om te buigen tot kansen voor het leren.

Wiskunde leren in een computeralgebra omgeving: obstakels en kansen

Inleiding

In de inleiding van deze ICT-special van de Nieuwe Wiskrant heeft Gerard Koolstra [1] de ontwikkelingen van digitale leeromgevingen geschetst. Hij wijst daarbij op omgevingen die behalve algemene voorzieningen voor tekstverwerking en Internet-toegang ook specifieke wiskundige voorzieningen bieden, zoals computeralgebra. Elders in dit nummer doet Carel van de Giessen [2] verslag van zijn ervaringen met zo'n computeralgebra omgeving in zijn klas.
Tijdens verschillende schoolexperimenten heb ik gezien dat zich bij het inzetten van computeralgebra voor het leren van wiskunde allerlei moeilijkheden kunnen voordoen ([3], [4]). In dit artikel leiden de ervaringen van een drietal schoolexperimenten tot een groeiende lijst van zulke obstakels. Daarnaast wordt betoogd dat dergelijke 'hobbels' in de klas kunnen worden uitgebuit en op die manier kunnen worden omgebogen tot kansen voor het leren.

Instapvoorbeeld

Toen ik kennis maakte met het fenomeen computeralgebra, ergens in de jaren 80, was ik meteen gefascineerd door de kracht en de snelheid van het computeralgebra systeem (CAS), in mijn geval Derive. Een deel van die fascinatie werd veroorzaakt door het gevoel dat wiskunde bedrijven in zo'n pakket zo simpel lijkt, terwijl het toch de nodige wiskundige expertise vraagt om de software efficiënt te kunnen gebruiken. Om de vinger achter de aard van die expertise te krijgen is een intrigerende maar lastige zaak.
Het is bijvoorbeeld eenvoudig om de haakjes in een uitdrukking als $(x+y)^3+1$ te laten verdrijven (zie regel #1 in fig. 1). Andersom, om $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$ door Derive te laten herleiden tot $(x+y)^3+1$, is niet zo eenvoudig als je niet weet hoe $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$ is gemaakt. Het commando factor, dat vaak het uitwerken van haakjes ongedaan maakt, geeft hier niet het eenvoudigste resultaat.
In dit geval moet je, bijvoorbeeld op basis van de symmetrie in de expressie, op het idee komen dat $x+y$ wel eens een factor zou kunnen zijn, die dan bijvoorbeeld z noemen, dan $y = z - x$ substitueren (of $x = z - y$), en uiteindelijk nog z vervangen door $x+y$. Niet zo moeilijk voor een wiskundige met computeralgebra ervaring, maar voor een leerling die zowel wiskundige expertise als ervaring met computeralgebra mist? Zo komen we bij de didactische vraag van dit artikel: met welke obstakels krijgen leerlingen te maken als ze met computeralgebra leren werken, en hoe ga je daar mee om als docent?

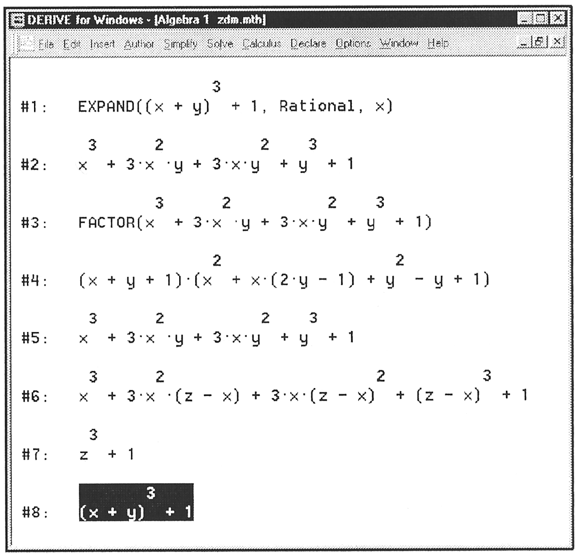


fig. 1 Terugzoeken van de factor x+y in Derive

Globale en lokale obstakels

Ervaringen tijdens het eerste schoolexperiment (zie [3]) hebben geleid tot een lijstje van meest opvallende obstakels waar leerlingen tegenaan lopen als ze leren werken met computeralgebra ([5]). Kort samengevat bevat deze eerste inventarisatie de volgende punten.

1. *Het verschil tussen de algebraïsche voorstelling die de computeralgebra omgeving geeft, en de vorm die de leerling verwacht en als eenvoudigste beschouwt.*
   Het gaat hier om moeilijkheden met het zien dat bij-

voorbeeld $-(x-12)$, gegeven door het CAS, equivalent is met de uitdrukking $12-x$ die de leerling had verwacht, of dat $\sqrt{s/4}$ gelijk is aan $1/2 \cdot \sqrt{s}$. Het herkennen van equivalentie is belangrijk bij algebra in een computeralgebra omgeving.

2. *Het verschil tussen numerieke en exacte berekeningen en de impliciete manier waarmee het CAS daarmee omgaat.*
   Voor veel leerlingen is bijvoorbeeld $\sqrt{2}$ niet echt een antwoord: ze beschouwen 1.41 als het uiteindelijke resultaat. Ze realiseren zich ook niet het statusverschil tussen de twee antwoorden: $\sqrt{2}$ 'bevat nog algebra' terwijl 1.41 puur numeriek is. De computeralgebra omgeving is niet altijd helder over dit statusverschil.
3. *De flexibele conceptie van variabelen en parameters die het gebruik van computeralgebra vereist.*
   In een computeralgebra omgeving 'zijn alle letters gelijk', om Orwell te parafraseren. In een bepaalde probleemsituatie heeft een variabele echter een bepaalde betekenis en een rol, zoals de rol van onbekende, parameter of veranderlijke. De leerling moet het verband blijven zien tussen de contextgebonden betekenis van de variabele in de probleemsituatie en het abstracte werken ermee in de computeralgebra omgeving. Omdat de rol van een variabele tijdens het oplossingsproces kan veranderen, vraagt efficiënt werken in een CAS om flexibiliteit in dit opzicht.
4. *De neiging om alleen numerieke en geen algebraïsche oplossingen te accepteren.*
   Leerlingen zijn vaak niet tevreden als de oplossing van een probleem luidt $x = 1/2 \cdot s - 1/2 \cdot v$. Ze willen dan weten welk getal x nu eigenlijk is. Dit wordt wel het 'expected answer obstacle' genoemd.
5. *De beperkingen van het CAS en de moeilijkheid om algebraïsche strategieën te vinden die die beperkingen omzeilen.*
   In sommige gevallen, zoals in het voorbeeld van de vorige paragraaf, is er geen commando dat ineens tot het gewenste resultaat leidt, of is het CAS niet in staat zonder hulp de gevraagde bewerking uit te voeren. Zulke gevallen vragen om coöperatie tussen de expertise van de gebruiker en de capaciteiten van het CAS.
6. *Het onvermogen om te weten wanneer en hoe computeralgebra van pas komt.*
   Ervaren gebruikers weten waarvoor het CAS ingezet kan worden en hoe het voor hen kan werken in bepaalde situaties. Onervaren gebruikers missen het gevoel voor wat redelijkerwijs van een computeralgebra omgeving verwacht kan worden.
7. *Het black-box karakter van het CAS*
   In het algemeen geeft de computeralgebra omgeving geen inzicht in de manier waarop het zijn resultaat vindt. Dat betekent dat leerlingen het vaak niet kunnen verifiëren. Daarmee krijgt het CAS het karakter van een black box. Dat kan leerlingen het gevoel geven zich op glad ijs te bevinden, omdat ze zijn 'overgeleverd' aan een moeilijk controleerbare machine.

Als ik deze lijst van obstakels overzie, vallen me twee zaken op. Ten eerste bevat de opsomming obstakels van verschillende aard. De obstakels 5, 6 en 7 hebben een globaal karakter: ze gaan over de manier waarop je in het algemeen de machine voor je kunt laten werken, en over de relatie tussen het oplossingsplan en de implementatie ervan in het CAS. De eerste vier obstakels daarentegen hebben een meer lokaal karakter. Ze hebben betrekking op een specifiek wiskundig onderwerp - in dit geval algebra - en op de manier waarop computeralgebra daarmee omgaat. Het woord 'lokaal' betekent niet dat ze niet belangrijk zijn; het eerste obstakel van de equivalente expressies is bijvoorbeeld essentieel voor algebraïsch inzicht. Het behelst echter niet de strategie van het probleemoplossen met computeralgebra in het algemeen. In het vervolg van dit artikel maken we dus onderscheid tussen globale obstakels en lokale.
Ten tweede roept de lijst de vraag op in hoeverre de obstakels door het gebruik van computeralgebra worden veroorzaakt. Het heeft er alle schijn van dat het eerder gaat om bestaande cognitieve obstakels, die zich bij het werken in een computeralgebra omgeving op een sterke manier manifesteren.
De lokale obstakels 1, 2, 3 en 4 gaan over algebra. Omdat dat het onderwerp is van mijn onderzoek, ben ik daarop gespitst; een andere invalshoek zou mogelijk tot andere lokale obstakels leiden. Van de andere kant ligt het verband computeralgebra - algebra natuurlijk wel voor de hand.

Locale obstakels en instrumentatie

Hoe kijk je nu als docent of als onderzoeker tegen zulkelokale obstakels aan? In mijn ogen kan de theorie van instrumentatie daarvoor een geschikt perspectief bieden. Wat daarover eerder (zie [4]) in de Nieuwe Wiskrant heeft gestaan, laat zich als volgt samenvatten.
Bij de instrumentatie van computeralgebra gaat het erom dat leerlingen leren het gereedschap, in dit geval het CAS, te gebruiken als een zinvol instrument. Dat betekent dat er zogenaamde instrumentatieschema's worden opgebouwd, die bruikbaar zijn voor een bepaalde klasse van veelvoorkomende problemen. Zo'n instrumentatieschema heeft twee kanten: een technische en een conceptuele kant. De technische kant heeft betrekking op de bediening van het pakket, op zaken als navigatie, syntax, oplostechnieken. De conceptuele kant betreft het inzicht van de leerling, de mentale voorstellingen die hij heeft van de wiskundige objecten en procedures waarmee wordt gewerkt. De clou is nu dat die technische en die inzichtelijke kant met elkaar verbonden zijn en elkaars ontwikkeling kunnen stimuleren. Instrumentatie komt dan neer op het opbouwen van schema's van technieken en concepties die met elkaar verweven zijn. Een gevolg daarvan is dat obstakels ook conceptuele hiaten aan het licht kunnen brengen en dat aandacht voor obstakels niet alleen een technisch karakter kan hebben.

In het voorbeeld van fig. 1, het herleiden van $x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+1$, is sprake van zo'n samenspel: het uitvoeren van een substitutie is een techniek, maar het bedenken dat $x+y$ een factor zou kunnen zijn is een mentale actie.

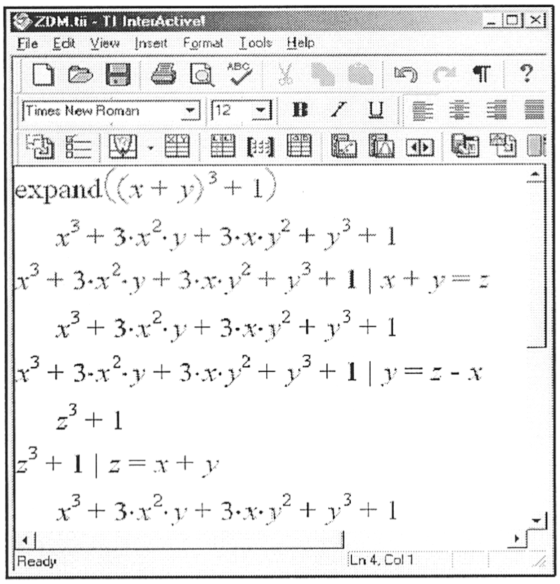


fig. 2 Substitutie in TI-Interactive

In dergelijke situaties proberen leerlingen soms ineens $z=x+y$ te substitueren. In TI-Interactive (zie fig. 2) heeft dit geen effect. Zo'n poging wijst enerzijds op een gebrek aan technische beheersing van het substitueren en anderzijds op een beperkt inzicht: omdat bij substitutie één variabele wordt vervangen door iets anders, moet de opdracht wel de vorm *variabele = uitdrukking* hebben. Weer de verwevenheid tussen techniek en concept dus. De laatste substitutie van $z=x+y$ in z^3+1 in fig. 2 geeft overigens niet het verwachte antwoord $(x+y)^3+1$ vanwege de automatische simplificatie van TI-Interactive. Dit toont aan dat de instrumentatie software-afhankelijk is. Was in dit voorbeeld Maple gebruikt, dan had het commando 'algsubs' de instrumentatie vereenvoudigd.
In het tweede schoolexperiment (zie [4]) leiden observaties van leerlingen vanuit het instrumentatieperspectief tot een drietal nieuwe lokale algebraïsche obstakels om toe te voegen aan de groeiende lijst:

8. *De beperkte conceptie van algebraïsche substitutie*
   Leerlingen hebben vaak een beeld van substitutie dat beperkt is tot het invullen van getallen. Dat beeld moet worden uitgebreid tot algebraïsche substitutie.
9. *De beperkte conceptie van algebraïsch oplossen*
   In veel computeralgebra omgevingen moet je expliciet aangeven naar welke variabele een vergelijking moet worden opgelost. Dat dwingt leerlingen om hun begrip van het algebraïsch oplossen aan te passen.
10. *De conceptie van een expressie als een proces, als een rekenvoorschrift, en niet als een object*
    Leerlingen beschouwen een expressie vaak als een compacte manier om een rekenproces, een serie handelingen weer te geven, en niet als een object, als een 'ding', dat bijvoorbeeld in een andere vergelijking gesubstitueerd kan worden.

De theorie van instrumentatie biedt dus een manier om tegen dergelijke obstakels aan te kijken: van een obstakel is sprake wanneer de technische en de conceptuele kant van een instrumentatieschema niet in evenwicht zijn, ofwel omdat de techniek niet gekoppeld is aan adequaat inzicht en betekenis, ofwel omdat de technische vaardigheid ontbreekt om een conceptueel idee uit te voeren. Als docent is het van belang te weten aan welke kant van de dimensie techniek - concept het probleem zit, voor het kan worden aangepakt.

De driehoek scherm - papier - hoofd

Een tweede manier om tegen obstakels aan te kijken is die van de driehoek scherm - pen - papier. Bij instrumentatie staat de relatie tussen de technieken in de computeralgebra omgeving en de mentale objecten in het hoofd van de leerling centraal. Leerlingen die leren werken met een CAS hebben echter meestal al een ruime ervaring met technieken in een ander medium, namelijk 'met-de-hand' technieken met pen-en-papier. Dat is voor hen het belangrijkste referentiekader, dus het is goed om te kijken hoe de nieuwe 'CAS technieken' en de oude 'pen-en-papier' technieken zich verhouden.
Idealiter vormen de mentale conceptie, de papier-en-pen techniek en de CAS techniek drie zijden van een geïntegreerde driehoek, die elkaar verstevigen: hoofd, papier en scherm werken samen en vullen elkaar aan. Voor wat betreft de verhouding tussen CAS en papier-en-pen gelden er twee voorwaarden: de CAS techniek en de papier-en-pen techniek moeten congruent zijn, en de CAS techniek moet transparant zijn voor de leerling.
Met congruentie wordt hier bedoeld dat eenzelfde techniek in beide media kan worden uitgevoerd en dat dan zichtbaar is dat het twee verschillende implementaties betreft van dezelfde techniek, in plaats van twee verschillende technieken die niets met elkaar te maken hebben. Dit vraagt bijvoorbeeld om syntax en notatie in de computeralgebra omgeving die 'natuurlijk' is en aansluit bij de papier-en-pen ervaring. Dat betekent niet dat de verschillen tussen de twee media worden ontkend; het is wel belangrijk dat leerlingen zich bewust zijn van de flexibiliteit van papier-en-pen en van de kracht van computeralgebra.
Met transparantie wordt bedoeld dat de leerling in staat is om de manier waarop het CAS een techniek uitvoert te doorzien op basis van zijn papier-en-pen ervaring. Hierboven is al aangegeven dat dit een zwak punt is van veel computeralgebra systemen, die zich als 'black box' voordoen.
Als aan de voorwaarden van congruentie en transparantie is voldaan, kunnen leerlingen de technieken in de twee media met elkaar in verband brengen. Dan vindt bijvoor-

beeld transfer plaats tussen de probleemaanpak van de papier-en-pen omgeving naar die van het CAS, of worden CAS-notaties overgenomen op papier. De volgende twee voorbeelden uit het derde schoolexperiment illustreren de interferentie tussen de technieken in de twee media.
In de eerste observatie probeert een leerling uit vwo-4 het volgende stelsel vergelijkingen op te lossen:

$$x \cdot y = 540$$
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 39$$

In de computeralgebra omgeving geeft deze leerling er de voorkeur aan om eerst in beide vergelijkingen y te isoleren, dus beide te herschrijven in de vorm $y = \ldots$, terwijl het sneller is om y in één van de twee vergelijkingen te isoleren en het resultaat in de andere te substitueren. Ik vermoed dat dit gedrag in de computeralgebra omgeving voortkomt uit gewoonten uit de pen-en-papier omgeving: in de schoolboeken zijn grafieken vaak de context voor vergelijkingen, en dan zijn de vergelijkingen vaak al geïsoleerd in y. Overigens kunnen veel computeralgebra systemen zo'n stelsel ook ineens oplossen, maar dat wist deze leerling nog niet.
Het tweede voorbeeld betreft een leerling die na afloop van een TI-89 experiment met pen-en-papier een stelsel vergelijkingen probeert op te lossen.

$$\underline{y} = a - x$$
$$\underline{x^2 + y^2 = 10} \mid y = a - x$$

fig. 3 Transfer van notatie

Zoals in fig. 3 te zien is, gebruikt deze leerling de verticale streep als symbool voor substitutie, een notatie die is overgenomen van de TI-89.
De transparantie en congruentie die voorwaarde zijn voor het integreren van CAS techniek en papier-en-pen techniek worden niet altijd gerealiseerd. Het werken met haakjes in het CAS is bijvoorbeeld een kwestie die leerlingen in verwarring kan brengen. Als wordt ingevoerd (x+5)/3, dan moeten er in veel computeralgebra pakketten haakjes gezet worden om de teller. Na invoer verschijnt de uitdrukking dan echter tweedimensionaal en zonder haakjes op het scherm. In feite kan de horizontale deelstreep in

$$\frac{x+5}{3}$$

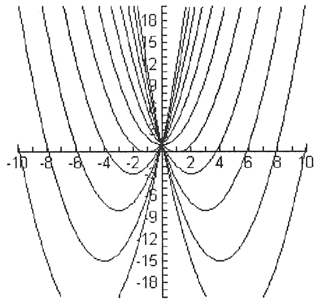
beschouwd worden als een manier van haakjes zetten, maar dat realiseren veel leerlingen zich niet. Op dezelfde manier verdwijnen de haakjes die nodig zijn bij het invoeren van een wortel van een expressie.
Samengevat is de integratie van mentale conceptie, papier-en-pen techniek en CAS techniek een belangrijke factor in het leren van wiskunde in een computeralgebra omgeving. Het black-box karakter van het CAS, genoemd in obstakel 7, kan de beoogde transparantie in de weg staan. Voor een docent kan het verhelderend zijn om zich af te vragen of een CAS-probleem van een leerling voortkomt uit gebrek aan congruentie met de papier-en-pen omgeving.
Het punt van de congruentie leidt tot een nieuw, globaal obstakel bij het werken met computeralgebra:

11. De moeilijkheid van transfer tussen CAS techniek en papier-en-pen techniek vanwege het gebrek aan congruentie tussen de technieken in beide media.
Wanneer de syntax of de notatie van het CAS zo afwijkt van wat met papier-en-pen gebruikelijk is, staat dit de samenhang tussen mentaal beeld, CAS techniek en papier-en-pen techniek in de weg.

Praktijkvoorbeeld

Hierboven is een onderscheid gemaakt tussen globale en lokale obstakels waar leerlingen mee te maken krijgen als ze wiskunde leren in een computeralgebra omgeving. Deze paragraaf bevat een lange observatie die illustreert hoe obstakels uit beide categorieën door elkaar heen kunnen lopen. Het gaat om een leerling uit vwo-4, Maria, die gedurende enkele weken met de TI-89 symbolische rekenmachine werkt. Voorafgaand aan de opgave in figuur 4 hebben Maria en haar klasgenoten de waarde van een parameter verschoven met behulp van een schuifbalk. Op die manier is het effect van de dynamische verandering van de parameter op de grafiek onderzocht. Een van de leerlingen formuleert het zo: de parameter is 'de letter die de plaats van de parabool bepaalt'.

Hieronder staat een bundel grafieken bij de familie $y = x^2 + b \cdot x + 1$.
We letten speciaal op de toppen van de parabolen.



a. Teken alle toppen in het plaatje en verbind ze met elkaar. Wat voor soort kromme lijk je zo te krijgen?
b. Druk de coördinaten van de top van een 'familielid' uit in b. Tip: de top ligt midden tussen twee nulpunten, als die er tenminste zijn.
c. Bepaal de vergelijking van de kromme door de toppen van de bundel en teken ter controle enkele grafieken.

fig. 4 Opgave over de kromme door de toppen

Bij vraag **a** denkt Maria dat ze de bundel na moet maken op het scherm van de TI-89. Dat lukt pas nadat verschillende kleine moeilijkheden (verkeerde letter ingetypt, verkeerde mintoets bij het instellen van het kijkvenster, geschikte waarden kiezen voor de parameter) zijn overwonnen. Allemaal kleine, lokale obstakels. Als de bundel uiteindelijk verschijnt, is Maria erg trots en tevreden:

> Maria: Hij doet het! Dit is een revolutie in mijn wiskunde-rekenmachinedinges.

Bij vraag **b** voert Maria in: solve(x^2+b*x+1,x). Dat geeft een foutmelding omdat '=0' na de expressie ontbreekt. Sommige andere computeralgebra pakketten tillen daar overigens niet zo zwaar aan en zouden deze invoer accepteren. In dit geval een instrumentatieprobleem met solve, obstakel 9.
Maria begint genoeg te krijgen van foutmeldingen:

> Maria: Hij haat mij, die rekenmachine.

Dan probeert ze solve(x^2+b*x+1,x|. Ze lijkt iets te willen substitueren (obstakel 8). Dan verandert ze de x in een b maar dat werkt evenmin: solve(x^2+b*x+1,b). Een voorbeeld van rolverwarring, obstakel 3. De moeilijkheden met oplossen en substitueren overwint ze niet en de les is voorbij.
De volgende les vergeet Maria eerst het vermenigvuldigingsteken tussen de b en de x: Y1=x^2+bx+1.

> Maria: O dat moet keer. Ja dat heb ik altijd, ik doe het nooit helemaal goed.

Ze repareert de invoer en krijgt weer de bundel grafieken op haar scherm. Dan wil ze opnieuw de nulpunten berekenen. Ze voert in solve(x^2+b*x+1=y,b), dus een y in plaats van 0 en oplossen naar b in plaats van naar x.

Dat geeft: $b = \dfrac{-(x^2 - y + 1)}{x}$

Ze richt zich kennelijk op b en houdt de rollen van de verschillende letters niet goed uit elkaar (obst. 4). Ze geeft b de waarde 5 (obst. 3), en lost dan op naar x, wat een uitdrukking voor x geeft in termen van y, die niet veel helpt.

> Maria: Ik snap het gewoon niet, ik ben gewoon te dom. Maar ik heb ook geen y natuurlijk.

Hier speelt het globale obstakel van het onvermogen om een oplossingsstrategie uit te werken in de computeralgebra omgeving (obst. 6). Het is overigens de vraag of Maria wel zo'n duidelijke strategie in haar hoofd heeft.
Met hulp van de observator krijgt Maria in de gaten dat de y-waarde 0 is, en dat leidt tot de algemene formule voor de nulpunten uitgedrukt in de parameter b (fig. 5).

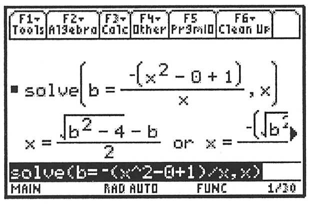


fig. 5 Nulpunten in termen van de parameter met de TI-89

Maria schrijft dit over in haar schrift, maar ze leest de formule niet helemaal goed, want het wortelteken loopt in haar schrift te ver door (zie fig. 6).

nulpunten = $\dfrac{\sqrt{b^2 - 4 - b}}{2}$ en $\dfrac{-(\sqrt{b^2 - 4 + b}}{2}$
midden = $-\frac{1}{2}b$.

fig. 6 Overschrijven van de oplossing in het schrift

Nu Maria de algemene oplossing heeft, wil toch graag concrete waarden voor b voor ze verder gaat:

> Maria: Maar je moet dan toch een waarde voor b invullen?

En, even later:

> Maria: Maar daar heb je toch niks aan als het tussen twee nulpunten ligt als je het niet uit kunt rekenen?

Hier komen de obstakels naar boven die te maken hebben met de voorkeur voor numerieke antwoorden (obst. 2) en met het accepteren van expressies als antwoord (obst. 10).
Weer met wat hulp van de observator is Maria bereid met de expressies verder te werken. Met wat moeite berekent ze het midden van de twee nulpunten en vindt zo dat de x-coördinaat van de top van de parabool gelijk is aan $-b/2$. Daar is Maria heel tevreden mee:

> Maria: Nou dat heb ik toch wel goed gevonden dan.

Om nu ook de y-coördinaat van de top uit te rekenen, substitueert Maria $x = -b/2$, maar daarvoor gebruikt ze het solve-commando solve(y=-0.5*b^2+b*-0.5*b+1,y), dus obstakels 8 en 9. Ze vergeet de haakjes om $0.5*b$, zodat alleen b wordt gekwadrateerd. Het resultaat, $y = 1 - b^2$, is dan ook niet correct. Over het verschil tussen 0.5 en 1/2 maakt Maria zich geen zorgen (obst. 2).
Bij vraag **c** ten slotte schrijft Maria in haar schrift dat de top coördinaten ($1/2\ b$, $1-b^2$) heeft en dat de vergelijking van de kromme door de toppen is $y = (1 - b^2) \cdot x - \frac{1}{2}b$. Mogelijk met hulp van haar buurvrouw verandert ze dat later in de correctie formule $y = 1 - x^2$.
Terugkijkend op de werkwijze van Maria valt op dat een aantal van de geïdentificeerde obstakels hierin te herkennen is, en dat die elkaar afwisselen en wellicht ook versterken. Mijn indruk is bijvoorbeeld dat lokale obstakels rond het oplossen van vergelijkingen en de rollen van de verschillende variabelen het Maria moeilijk maken om de globale lijn van het oplossingsproces aan te houden. Overigens is de vraag of Maria die grote lijn van te voren wel helder genoeg voor ogen had.
Verder blijken Maria's moeilijkheden vaak een samenspel te zijn van begripsmatige en technische problemen. De verwarring tussen oplossen en substitueren bijvoorbeeld geeft aan dat ze enerzijds de technische kant van deze opdrachten niet geheel beheerst, maar ook dat ze zich daarbij niet altijd de juiste voorstelling maakt.
Wat opvalt in Maria's commentaar is dat haar gevoelens van succes en frustratie vrij heftig zijn. Dat kan natuurlijk

een karaktereigenschap zijn van deze specifieke leerling, maar observaties als deze zijn in mijn ogen aanleiding om de obstakels van leerlingen serieus te nemen.
Behalve de reeds gesignaleerde obstakels en hun verwevenheid, is er een nieuw globaal obstakel naar voren gekomen:

12. Het interpreteren van de uitvoer van het CAS
Leerlingen hebben vaak moeite om de uitvoer van het CAS te begrijpen en te interpreteren. Zelfs het overschrijven van een antwoord kan tot fouten leiden. Ook foutmeldingen van het CAS worden vaak niet begrepen.

Obstakels zijn kansen

In het bovenstaande is een aantal obstakels geïdentificeerd, waarmee leerlingen te maken kunnen krijgen als ze wiskunde leren in een computeralgebra omgeving. Deze laten zich verdelen in globale en lokale obstakels. Bij de laatste categorie benadrukt het idee van instrumentatie de relatie tussen machinetechniek en wiskundige conceptie. Dat onderscheid kan van pas komen bij het omgaan met problemen in de klas. Verder kan behalve de machinetechniek en de mentale conceptie ook de papier-en-pen technieken een obstakel mede veroorzaken. De congruentie tussen beide soorten technieken laat soms te wensen over, evenals de transparantie van het computeralgebra gereedschap.
Bij de lijst van geïdentificeerde obstakels zijn enkele kanttekeningen te maken. Om te beginnen pretendeert deze opsomming niet om volledig te zijn; het gaat om obstakels die zich in de klas regelmatig voordeden, maar ongetwijfeld zijn er 'hobbels' die ontbreken. Verder is de collectie van lokale obstakels vooral tot stand gekomen op basis van mijn belangstelling voor algebra. Mogelijk zal observatie vanuit een ander wiskundig domein tot andere obstakels leiden. De lokale obstakels hebben met elkaar gemeenschappelijk dat ze zowel een technische als een conceptuele kant hebben.
Wat betekenen de bevindingen nu voor de praktijk in de klas? Naar mijn idee zijn er twee belangrijke redenen om de geconstateerde obstakels bij het gebruik van computeralgebra in de klas serieus te nemen. De eerste reden vormen de al genoemde gevoelens van ergernis en frustratie die de obstakels bij leerlingen kunnen veroorzaken. Natuurlijk hoort een zekere mate van frustratie bij het leren van wiskunde (en van andere zaken), maar een teveel ervan kan improductief worden. Het niet onderkennen van de obstakels in de klas kan dit effect versterken.
De tweede en wellicht belangrijker reden om obstakels in de klas serieus te nemen, is dat ze mogelijkheden bieden tot leren. Omdat obstakels vaak een technisch én een conceptueel aspect kennen, zal aandacht voor het overwinnen van een obstakel het technische niveau ontstijgen en leiden tot verdere begripsvorming. Eventuele misconcepties of hiaten in het inzicht kunnen aan de hand van de instrumentatieproblemen bij het gebruik van computeralgebra aan het licht komen. Zeker als we constateren dat deze obstakels vaak niet worden veroorzaakt worden door het gebruik van computeralgebra zelf, maar een conceptuele achtergrond hebben die zich in de computeralgebra omgeving manifesteert, ligt het voor de hand om het signaleren van obstakels op deze manier aan te grijpen. Het zoeken naar de werkelijke achtergrond van een obstakel, het bepalen van de logica achter de syntax van een commando, het ontdekken van de betekenis van de uitvoer, het ontwerpen van een strategie die haalbaar is in de computeralgebra omgeving, dergelijke activiteiten zijn kansen voor leren die zowel in individuele begeleiding als in klassegesprekken kunnen worden uitgebuit. Als dat goed gebeurt, kan dit naar mijn overtuiging een positief effect hebben op conceptuele ontwikkeling en wiskundige attitude.
De houding van de docent zou er naar mijn idee dus een moeten zijn die de obstakels niet negeert, maar ze tot onderwerp maakt van klassegesprekken waarin de betekenis van de technieken en concepten wordt ontwikkeld. De wiskundige ideeën achter de obstakels wordt geëxpliciteerd en de computeralgebra omgeving fungeert als inspirerend object van studie in plaats van als 'orakel'. Op deze manier kunnen de obstakels veranderen in kansen voor leren.

Paul Drijvers, Freudenthal Instituut

Noot

[1] Gerard Koolstra, dit nummer **AANVULLEN**
[2] Carel van de Giessen, dit nummer **AANVULLEN**
[3] Drijvers, P. (1999). De symbolische rekenmachine in de wiskundeles. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 18*(3), 34 - 38.
[4] Drijvers, P. en Van Herwaarden, O. (2000). Instrumentatie van ICT-gereedschap: algebra met computeralgebra. *Nieuwe Wiskrant, tijdschrift voor Nederlands wiskundeonderwijs, 20*(1), 38 - 43.
[5] Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*(3), 189 -209.
[6] Dit artikel is een bewerking van 'Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities', dat geaccepteerd is voor publicatie in *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, Vol 34*(5), najaar 2002.
[7] Dit artikel komt voort uit het onderzoek 'Algebra leren in een computeralgebra omgeving' dat mogelijk gemaakt is door NWO, projectnummer 575-36-03E.