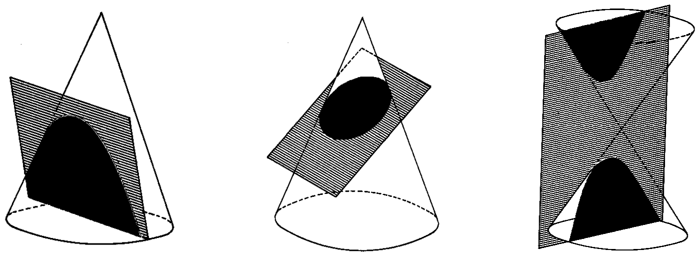
Kegelsneden als meetkundige plaatsen met Cabri

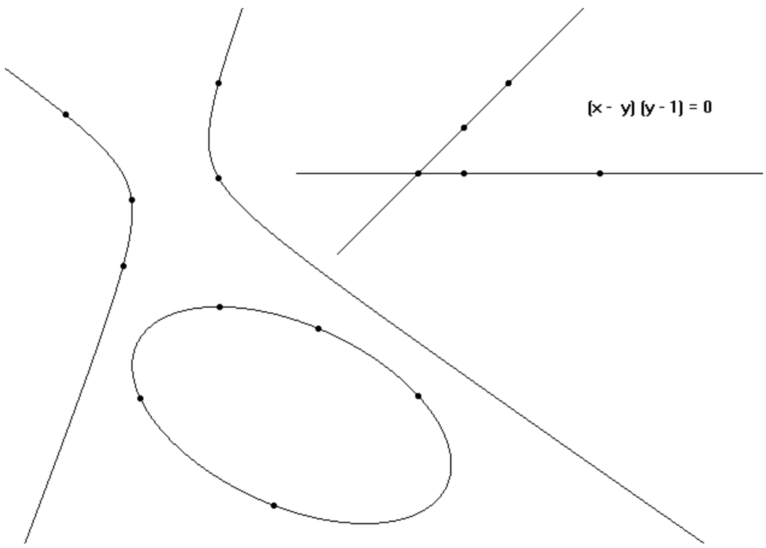
Koen Stulens



De algemene vergelijking van een kegelsnede is van de vorm :
$ax^2 + by^2 + 2cxy + 2dx + 2ey + f = 0$ met $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$.

Indien je vijf punten van een kegelsnede kent, kan je de parameters a,b,c,d,e,f bepalen.

De optie *Kegelsnede* van het *Krommen*-menu laat toe van een kegelsnede te construeren vertrekkende van vijf punten.



Meetkundig construeert men een kegelsnede echter niet op basis van de ligging van vijf punten. We bekijken enkele meetkundige constructies.

1. De parabool

1.1 Meetkundige constructie

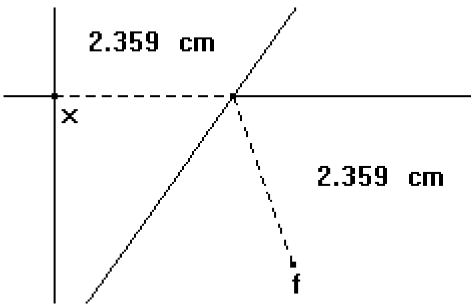
Een parabool is een meetkundige plaats van punten die even ver van een rechte als van een punt buiten deze rechte liggen.

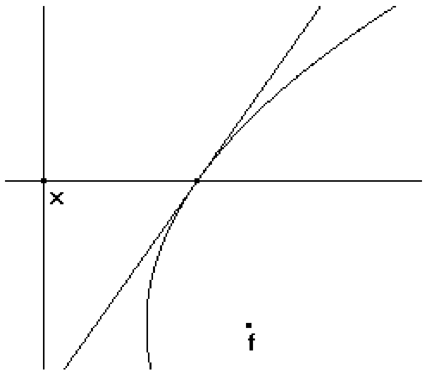
a. Teken een rechte en een punt f niet op de rechte.

b. Teken een punt x op de rechte en een loodlijn door dit punt.

c. Bepaal de middelloodlijn tussen de punten x en f.

d. Het snijpunt van de loodlijn en de middelloodlijn bepaalt de parabool.

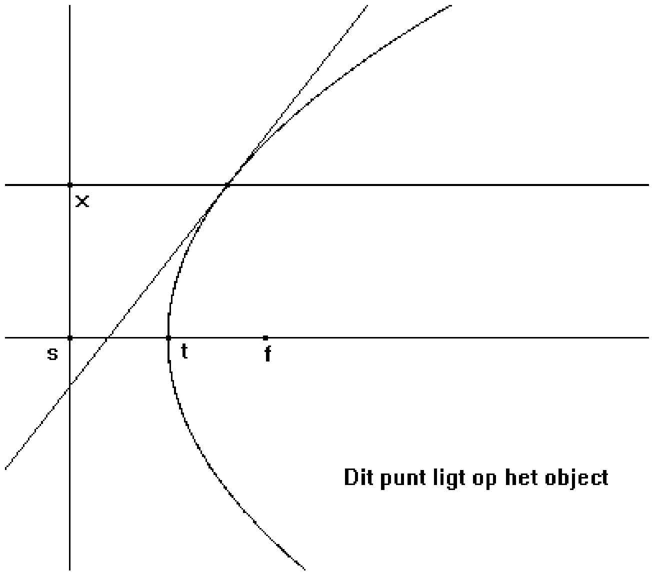




De gegeven rechte noemen we de richtlijn van de parabool en het gegeven punt het brandpunt. De middelloodlijn vormt de raaklijn aan de parabool.

e. Teken een loodlijn op de gegeven rechte door f en bepaal het midden t tussen het snijpunt s van de loodlijn met de gegeven rechte en het punt f.

f. Bepaal een kegelsnede door de meetkundige plaats en ga na of t op de parabool ligt.



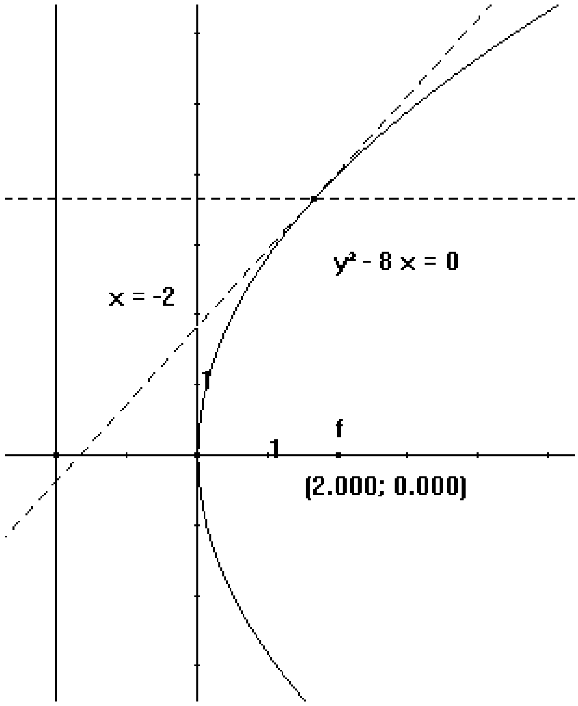
1.2 Vergelijking van een parabool

a. Toon het standaard assenstelsel en definieer hiermee een rooster. Plaats een punt op een roosterpunt op de x-as. Neem dit punt als brandpunt f.

b. Spiegel het brandpunt om de x-as en teken een loodlijn door dit spiegelpunt op de x-as. Neem deze rechte als richtlijn.

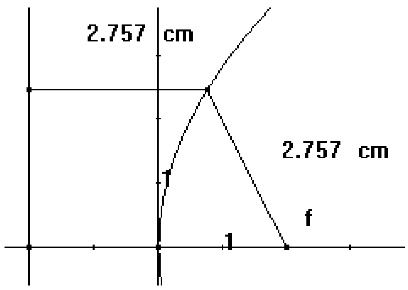
c. Construeer met deze richtlijn en brandpunt een parabool zoals in punt 1.1.

d. Bepaal de vergelijking van de parabool, de vergelijking van de richtlijn en de coördinaten van het brandpunt.



Vergelijk deze vergelijkingen met de x-coördinaat van het brandpunt als we het brandpunt verplaatsen op de x-as.

e. Bepaal de verhouding van de afstand tussen een punt p van de parabool en de richtlijn en de afstand tussen p en het brandpunt.



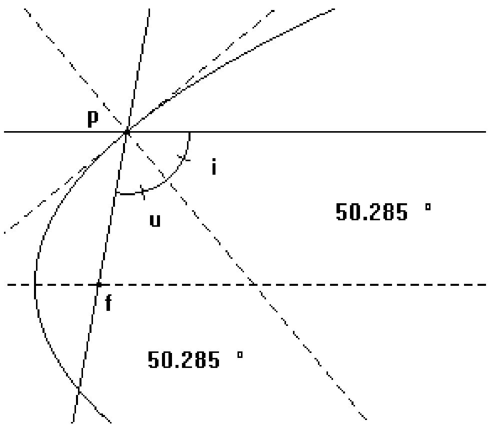
1.3 Optische eigenschap van de parabool

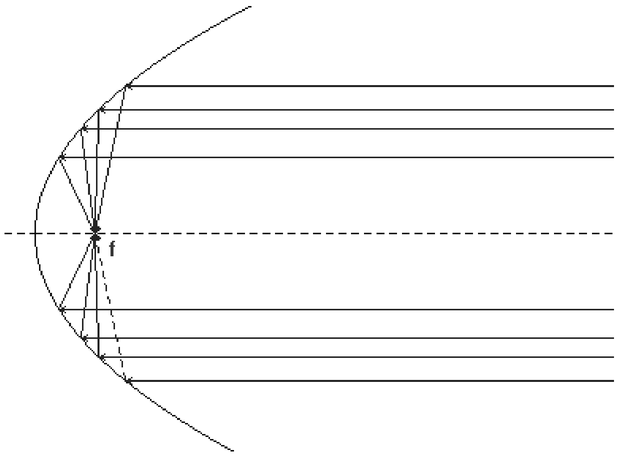
Een lichtstraal die parallel met de symmetrieas van een parabolische spiegel invalt, wordt weerkaatst door het brandpunt van de spiegel.

a. Teken een loodlijn door een punt p van de parabool op de raaklijn aan de parabool in dit punt. Deze loodlijn noemen we de normaal.

b. Teken een rechte door p evenwijdig met de x-as (d.i. in dit geval de symmetrieas) en een rechte door p en het brandpunt.

c. Meet de hoeken die de twee rechten uit punt b vormen met de normaal.

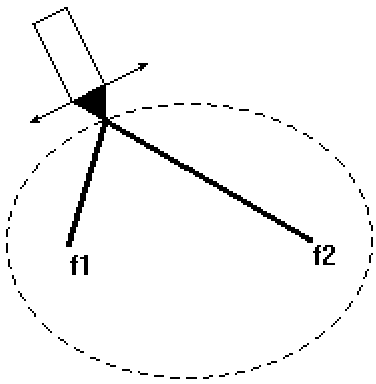




2. De ellips

2.1 Meetkundige constructie – *de tuiniersconstructie*

De uiteinden van een koord worden vastgemaakt in twee punten. Met een stok spant de tuinier de koord en tekent zo een ellips.



Een ellips is de meetkundige plaats van punten waarvoor de som van de afstanden tot twee punten constant is. Deze twee punten noemen we de brandpunten.

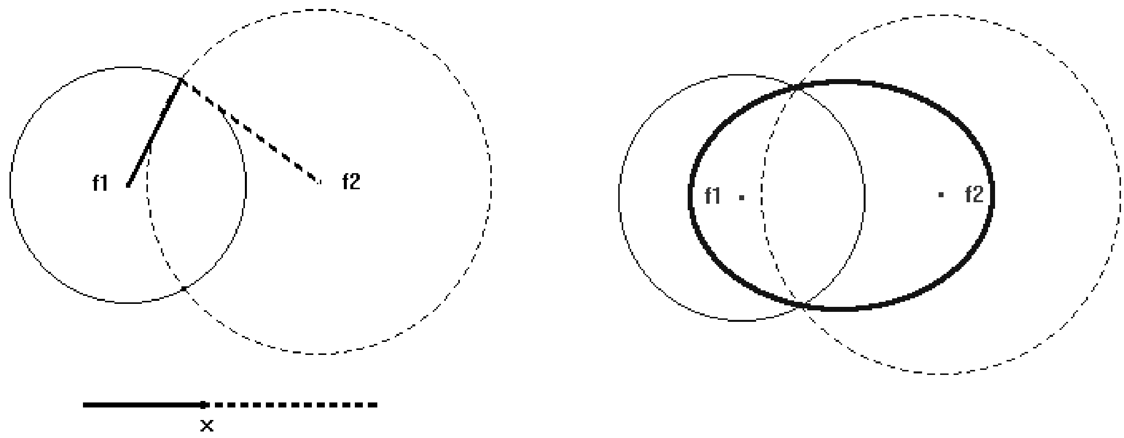
a. Teken twee punten, f1 en f2, en een lijnstuk waarvan de lengte groter is dan de afstand tussen de punten f1 en f2.

Plaats een punt x op het lijnstuk.

b. Pas de afstand tussen het beginpunt van het lijnstuk en x af vanuit f1 en de afstand tussen het eindpunt van het lijnstuk en x vanuit f2. Gebruik hiervoor het *Passer*-commando.

Bepaal de twee snijpunten van de geconstrueerde cirkels.

c. De snijpunten bepalen de ellips als x varieert op het lijnstuk. Teken deze meetkundige plaatsen en construeer een kegelsnede door deze meetkundige plaats.



2.2 Vergelijking van een ellips

We construeren een ellips door een cirkel uit te rekken in de richting van de X-as. Een analoge constructie kan uitgevoerd worden in de y-richting.

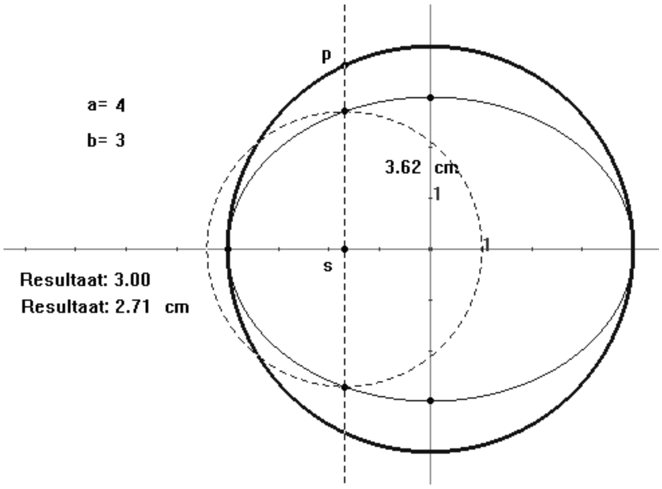
a. Toon het standaard assenstelsel en plaats de getallen 4 (=a) en 3 (=b) op het tekenblad. Teken een cirkel met straal a (= 4).

Bereken de verhouding b/a. Vermenigvuldig deze verhouding met a en breng dit resultaat over op de y-as. Spiegel het bekomen punt om de x-as.

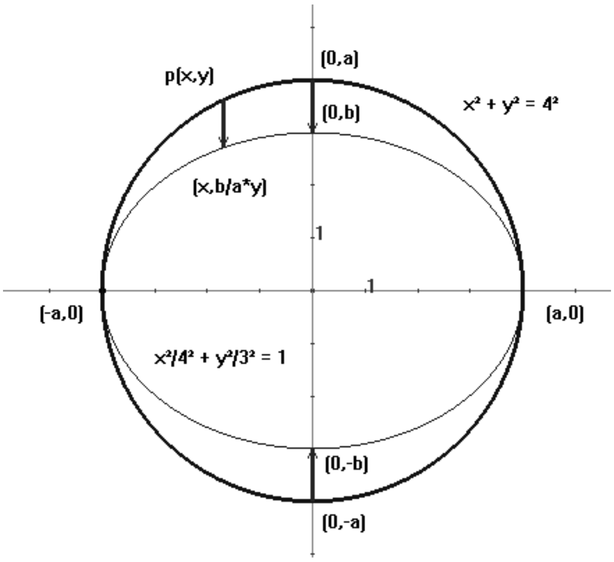
b. Plaats een punt p op de cirkel en teken een loodlijn door dit punt op de x-as. Bepaal het snijpunt s van de loodlijn met de x-as.

Bepaal de afstand tussen p en s, vermenigvuldig deze afstand met b/a en breng deze maat over vanuit het punt s. Bepaal de snijpunten van de bekomen cirkel met de loodlijn.

Teken de kegelsnede, een ellips, zoals hier onder aangegeven.



c. Bepaal de vergelijking van de cirkel en van de ellips.



d. Uit de vorige constructie kunnen we afleiden dat :

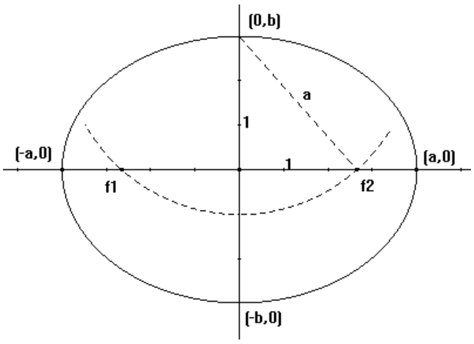
(x, y) behoort tot de ellips $\Leftrightarrow$ $(x, \frac{a}{b}y)$ behoort tot de cirkel $x^2 + y^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e. Constructie van de brandpunten

Teken een cirkel met als middelpunt (0,b) en als straal a.

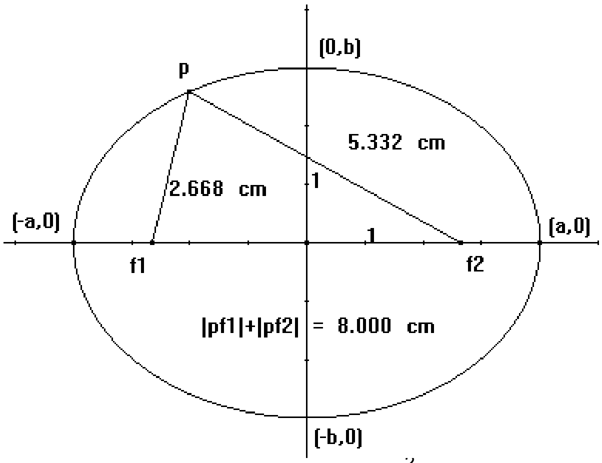
Bepaal de snijpunten met de x-as, f1 en f2.



Uit de constructie volgt dat de coördinaten van deze punten gelijk zijn aan :

f1 = (-c,0) en f2 = (c,0) met c = $\sqrt{a^2 - b^2}$.

f. Teken een willekeurig punt p op de ellips en bereken de som van afstanden |pf1| en |pf2|. Verplaats het punt p en bekijk deze som.

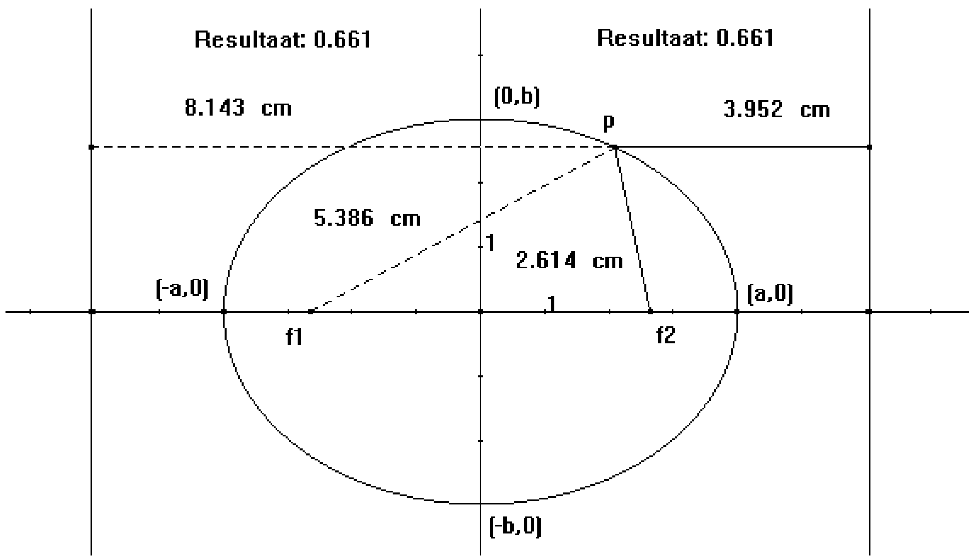


g. Teken de rechten met als vergelijking $D_1 \leftrightarrow x = -\frac{a^2}{c}$ en $D_2 \leftrightarrow x = \frac{a^2}{c}$.

De rechten noemen we de richtlijnen van de ellips t.o.v. respectievelijk de brandpunten f1 en f2.

Bepaal de verhouding van de afstand tussen een punt p van de ellips en een brandpunt en afstand tussen p en de richtlijn behorende bij dit brandpunt.

Doe dit voor beide richtlijnen.



Deze verhouding noemt men de excentriciteit van de ellips en is gelijk aan $\frac{c}{a}$.

Merk op dat de excentriciteit kleiner is dan 1.

h. We bekomen een nieuwe manier om een ellips te construeren met een bepaalde excentriciteit. We construeren een ellips met excentriciteit 0,5.

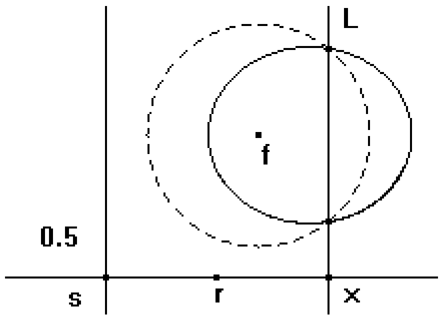
(i) Construeer twee rechten loodrecht op elkaar door een punt s en een punt f niet op één van de rechten.

(ii) Plaats op één rechte een punt x en door x een evenwijdige L aan de andere rechte.

(iii) Plaats het getal 0.5, de excentriciteit, op het tekenblad en bepaal het beeld van x onder een homothetie met als centrum s en als schaalfactor het getal 0.5. Noem dit beeld r.

(iv) Pas de afstand tussen de punten s en r af vanuit f. Verplaats x zodat de bekomen cirkel en de rechte L twee snijpunten hebben. Bepaal de meetkundige plaats van deze snijpunten als x varieert.

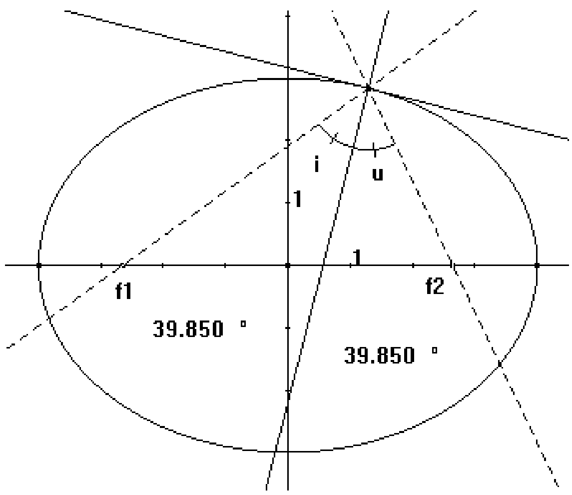
Bepaal een kegelsnede door de meetkundige plaats.



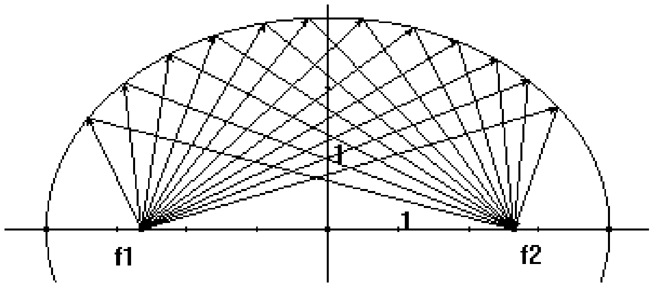
Controleer of de excentriciteit van deze ellips effectief 0.5 is.

2.3 Optische eigenschap van een ellips

Teken de raaklijn (zie punt 4) en de normaal in een punt van de ellips en meet de hoeken bepaald door de voerstralen en de normaal zoals hieronder aangegeven.



Deze eigenschap noemt men de optische eigenschap van een ellips. Lichtstralen die vanuit het ene brandpunt van een elliptische spiegel worden uitgezonden, weerkaatsen door het andere brandpunt.



3. De hyperbool

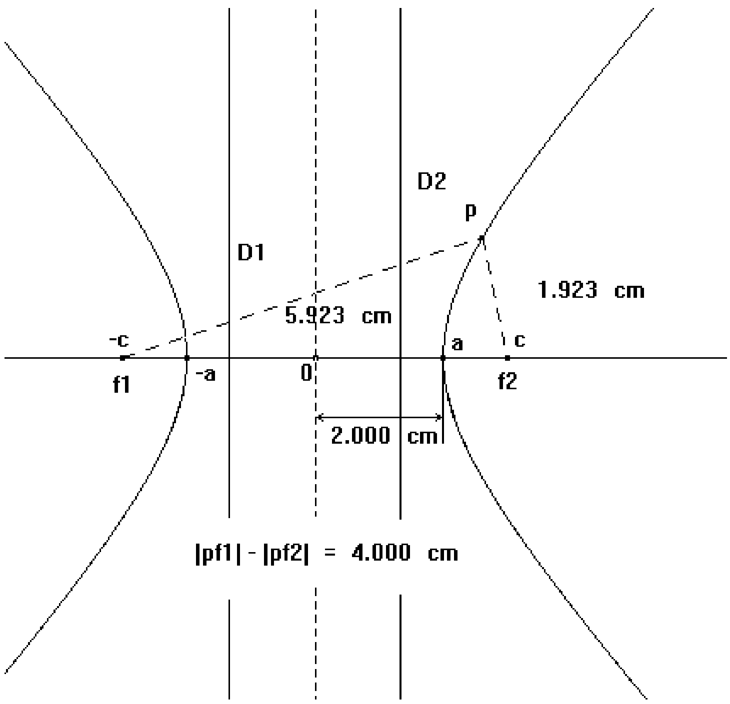
Een hyperbool is een meetkundige plaats van punten waarvan de verhouding tussen de afstand tot een gegeven punt, het brandpunt, en een gegeven rechte, de richtlijn, constant is en groter dan 1.

De constructie van een hyperbool verloopt analoog met de constructie van een ellips met een bepaalde excentriciteit. Verander de excentriciteit bv. in 1,5.

Spiegel het brandpunt en de richtlijn om de middelloodlijn tussen de twee toppen van de parabool.

Meet zoals hieronder afgebeeld de afstand tussen een punt p van de hyperbool en de brandpunten f1 en f2 en maak het verschil van deze twee afstanden.

Verwoord het resultaat van je waarneming in woorden.



4. Raaklijn aan een kegelsnede

Stelling van Pascal

De snijpunten van de drie paren overeenstaande zijden van een ingeschreven enkelvoudige zeshoek in een kegelsnede zijn collineair.

Een zeshoek is een figuur bepaald door een geordend zestal punten : A1, A2, A3, A4, A5, A6. We noemen de punten hoekpunten.

De rechten A1A2, A2A3, A3A4, A4A5, A5A6 en A6A1 noemen we de zijden.

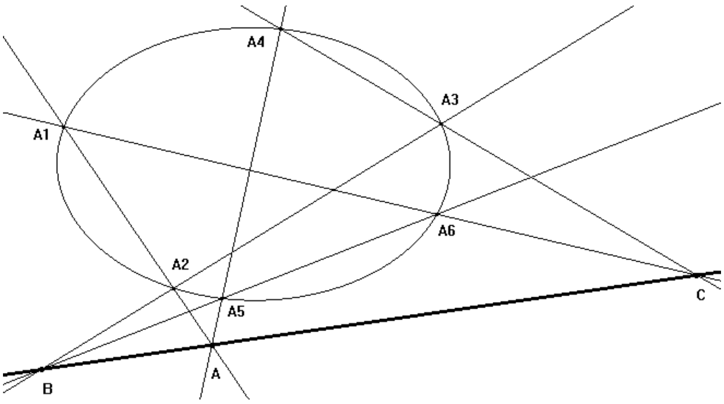
Een zeshoek is enkelvoudig als geen twee zijden samenvallen.

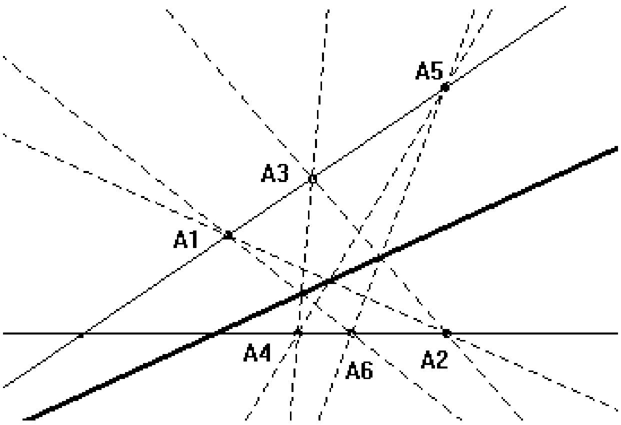
A1A2 en A4A5, A2A3 en A5A6, A3A4 en A6A1 zijn overeenstaande zijden.

We stellen $A1A2 \cap A4A5 = \{A\}$, $A2A3 \cap A5A6 = \{B\}$ en $A3A4 \cap A6A1 = \{C\}$.

De stelling van Pascal zegt dat A, B en C collineair zijn.

Ter illustratie twee voorbeelden.





De stelling van Pappus

De stelling van Pascal blijft gelden als er twee hoekpunten samenvallen.

De zijde wordt de raaklijn aan de kegelsnede in dat samenvallend hoekpunt.

(i) Teken een kegelsnede en plaats een punt op de kegelsnede. Laat in dit punt twee hoekenpunten, bv. A1 en A6, samenvallen.

(ii) Bepaal de snijpunten A en B.

(iii) De rechten A3A4 en AB snijden mekaar in het punt C.

(iv) Teken de rechte A1C. Dit is de raaklijn aan de kegelsnede in het punt A1.