# Grafische voorstelling van Riemann-sommen met Derive

*Koen Stulens*

In deze workschop tonen we hoe je Derive kan gebruiken om het begrip Riemann-integraal te visualiseren en hoe je op een numerieke manier ingewikkelde bepaalde integralen kan benaderen. Eerst een theoretische introductie.

Er geldt dat iedere continue functie $f:[a,b]\to IR$ Riemann-integreerbaar is. We verdelen het interval in $n$ gelijke deelintervallen door $n$ – 1 punten te kiezen tussen $a$ en $b$ met $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. In wat volgt kiezen we telkens gelijke deelintervallen.

Voor ieder deelinterval is de lengte $\dfrac{b-a}{n}$ .

Bovendien kiezen we in ieder deelinterval $[x_i, x_{i+1}]$ met $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ een willekeurig punt $c_i$. Er geldt $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\dfrac{(b-a)}{n}$ en voor n groot genoeg benaderen we als volgt : $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\dfrac{(b-a)}{n}$.

Vooraleer we enkele numeriek methoden bekijken, bereken we $\int_1^3 \dfrac{dx}{x}$.

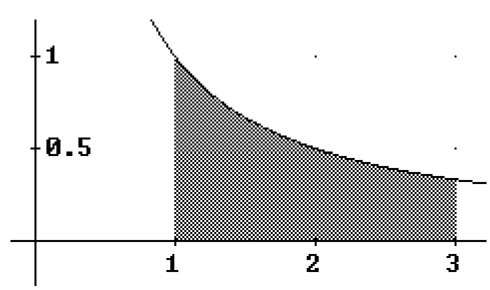
We definiëren hier voor de functie $f(x) := \dfrac{1}{x}$, berekenen $\int_1^3 f(x)dx$ en plotten het resultaat van het commando plotint(*f(x)*,*x*,*x*,1,3).

#1: $f(x) := \dfrac{1}{x}$

#2: $\int_1^3 f(x)\ dx$

#3: LN(3)

#4: 1.098612288



1. <u>Rechthoekige benaderingsmethodes</u>

We kiezen achtereenvolgens voor de getallen $c_i$ uit de deelintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ de beginpunten, de eindpunten en de middens van het deelinterval.

(i) ***Beginpunten***

Om een benadering voor $\int_1^3 \frac{dx}{x}$ te berekenen, definieer je :

$$\text{left}(a,b,n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)$$

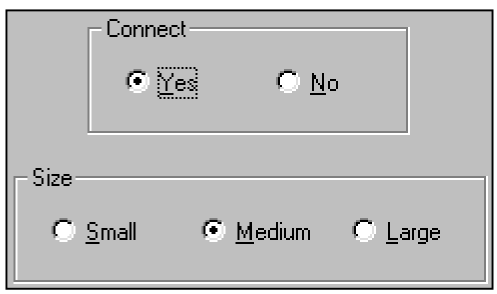
Bereken hiermee left(1,2,4).

In wat volgt gaan we de zonet berekende benaderende waarde grafisch voorstellen.

*<u>Intermezzo</u>*

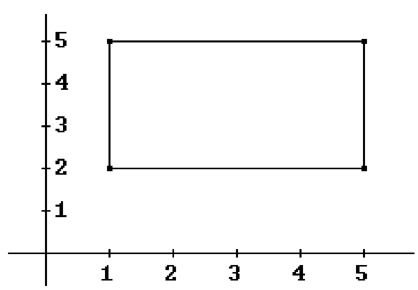
*Voor het plotten van een veelhoek definieer je eerst een matrix met als rijen de coördinaten van de hoekenpunten die met mekaar moeten verbonden worden.*

*Selecteer, 2D-plot-venster actief, de optie Points uit het submenu Display van het menu Options (Options → Display → Points). Vul het venster in zoals hieronder aangegeven en plot de matrix met de coördinaten van de hoekpunten.*




*Een voorbeeld:*

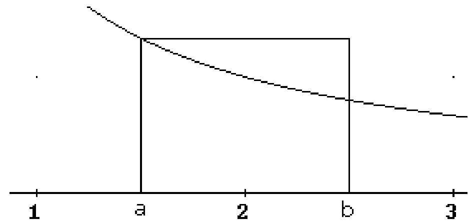
$$\#1: \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 5 & 5 \\ 5 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$




*Het arceren van de rechthoek doe je door het gebied in te voeren waarin de x- en y-coördinaten kunnen variëren :* $1 \le x \le 5 \wedge 2 \le y \le 5$.

De hieronder afgebeelde rechthoek teken je met de matrix :

$$\text{lbox}(a,b) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & f(a) \\ b & f(a) \\ b & 0 \end{bmatrix}.$$




Het arceren van deze rechthoek doe je met de uitdrukking:

$$\text{lshade}(a,b) := a \le x \le b \ \wedge \ \text{if}(f(a) > 0, 0 \le y \le f(a), f(a) \le y \le 0).$$

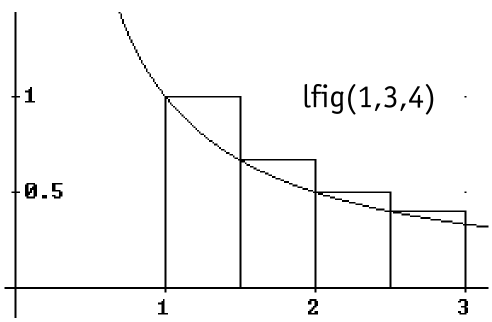
Definieer met lbox en lshade de volgende twee commando's :

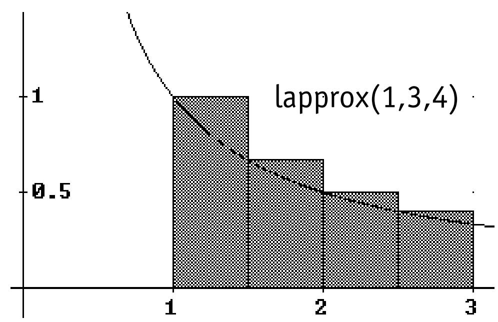
$$\text{lfig(a, b, n) := }\left[\text{f(x), VECTOR}\left(\text{lbox}\left(\text{a + }\frac{\text{i}\cdot\text{(b - a)}}{\text{n}}\text{, a + }\frac{\text{(i + 1)}\cdot\text{(b - a)}}{\text{n}}\right)\text{, i, 0, n - 1}\right)\right]$$

$$\text{lapprox(a, b, n) := }\left[\text{f(x), lfig(a, b, n), VECTOR}\left(\text{lshade}\left(\text{a + }\frac{\text{i}\cdot\text{(b - a)}}{\text{n}}\text{, a + }\frac{\text{(i + 1)}\cdot\text{(b - a)}}{\text{n}}\right)\text{, i, 0, n - 1}\right)\right]$$

Bepaal, **benaderend**, lfig(1,3,4) en lapprox(1,3,4).

Plot nadien beide resultaten.




(ii) ***Eindpunten***

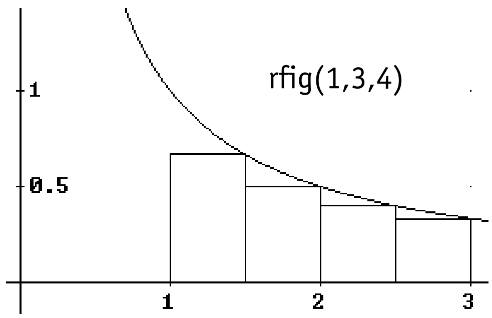
Pas de formules uit punt (i) als volgt aan (F3 = geselecteerde uitdrukking kopiëren naar de invoerregel) :

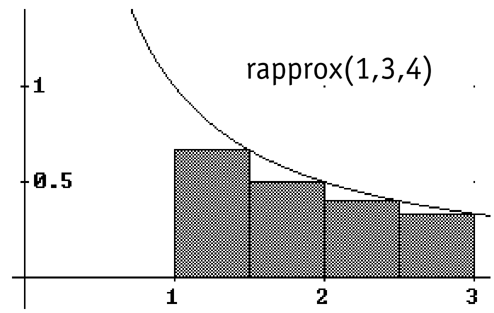
$$\text{right}(a,b,n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a + \frac{i(b-a)}{n}) \qquad \text{rbox}(a,b) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & f(b) \\ b & f(b) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{rshade}(a,b) := a \le x \le b \ \wedge \ \text{if}(f(b) > 0, 0 \le y \le f(b), f(b) \le y \le 0)$$

Definieer met rbox en rshade, op een analoge manier als in punt (i), de commando's rfig($a,b,n$) en rapprox($a,b,n$).

Bepaal, **benaderend**, right(1,3,4), rfig(1,3,4) en rapprox(1,3,4) .




(iii) ***Middens***

Definieer de volgende commando's :

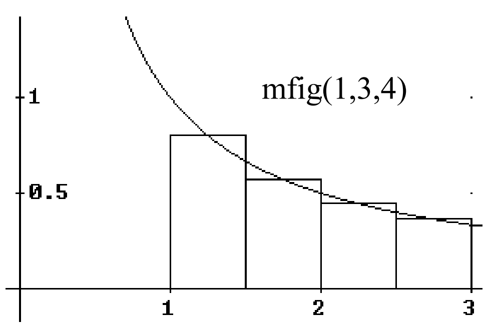
$$\text{mid}(a,b,n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + \frac{(i+½)(b-a)}{n}\right)$$

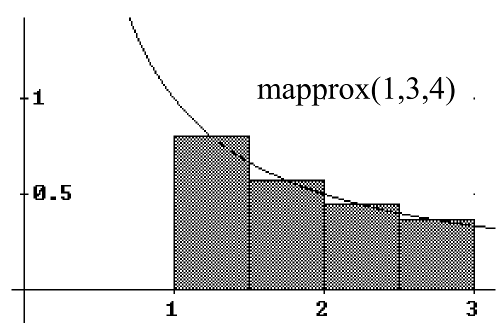
$$\text{mbox}(a,b) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ b & f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{mshade}(a,b) := a \le x \le b \;\wedge\; \text{if}\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0, 0 \le y \le f\left(\frac{a+b}{2}\right), f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le y \le 0\right)$$

Definieer met mbox en mshade weer op analoge manier de commando's mfig($a,b,n$) en mapprox($a,b,n$).

Bepaal, **benaderend**, mid(1,3,4), mfig(1,3,4) en mapprox(1,3,4).



2. De trapeziumregel

We vervangen de rechthoeken in de bovenstaande methodes door trapezia met als basis de deelintervallen $[x_i, x_{i+1}]$ en als overige hoekpunten $(x_i, f(x_i))$ en $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$.

De benaderende numerieke waarde wordt in dit geval als volgt bepaald :

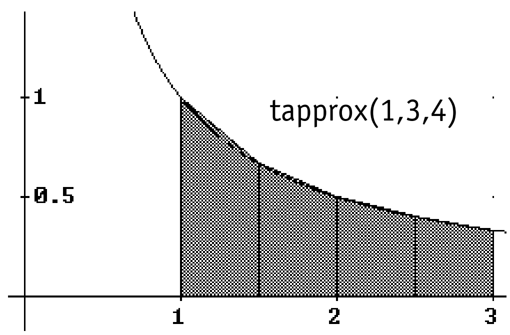
$$\text{trap}(a,b,n) := \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{f\left(a+\frac{i(b-a)}{n}\right)+f\left(a+\frac{(i+1)(b-a)}{n}\right)}{2}$$

$$\text{tbox}(a,b) := \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & f(a) \\ b & f(b) \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Definieer de functie $t(x,a,b) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ en tshade als volgt :

$\text{tshade}(a,b) := a \le x \le b \ \wedge\ \text{if}(t(x,a,b) > 0, 0 \le y \le t(x,a,b)\ ,\ t(x,a,b) \le y \le 0)$.

Met tbox en tshade kunnen weer de commando's tfig(a,b,n) en tapprox(a,b,n) definiëren. Bepaal, **benaderend**, trap(1,3,4), tfig(1,3,4) en tapprox(1,3,4).




3. Vergelijkende tabel

Het commando vector([k, left(1, 3, k), right(1, 3, k), mid(1, 3, k), trap(1, 3, k)], k, 1, 5) genereert de onderstaande matrix die je kan beschouwen als een vergelijkende tabel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.6666666666 | 1 | 1.333333333 |
| 2 | 1.5 | 0.8333333333 | 1.066666666 | 1.166666666 |
| 3 | 1.352380952 | 0.9079365079 | 1.083333333 | 1.130158730 |
| 4 | 1.283333333 | 0.95 | 1.089754689 | 1.116666666 |
| 5 | 1.243600843 | 0.9769341769 | 1.092857142 | 1.110267510 |

We willen een hoofding toevoegen aan de tabel met functiewaarden. We doen dit met het append-commando. Voer de onderstaande commando's uit om de output van dit commando te illustreren.

append([1,2],[3,4])  append([[1,2]],[[3,4]])  append([["a","b"]],[[1,2]]])

Construeer dan de volgende tabel :

| n | LEFT | RIGHT | MID | TRAP |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 0.6666666666 | 1 | 1.333333333 |
| 2 | 1.5 | 0.8333333333 | 1.066666666 | 1.166666666 |
| 3 | 1.352380952 | 0.9079365079 | 1.083333333 | 1.130158730 |
| 4 | 1.283333333 | 0.95 | 1.089754689 | 1.116666666 |
| 5 | 1.243600843 | 0.9769341769 | 1.092857142 | 1.110267510 |
| 6 | 1.217857142 | 0.9956349206 | 1.094581235 | 1.106746031 |
| 7 | 1.199844393 | 1.009368203 | 1.095634920 | 1.104606298 |
| 8 | 1.186544011 | 1.019877344 | 1.096324724 | 1.103210678 |
| 9 | 1.176324724 | 1.028176576 | 1.096800421 | 1.102250650 |
| 10 | 1.168228993 | 1.034895659 | 1.097142094 | 1.101562326 |

## 4. De methode van Simpson

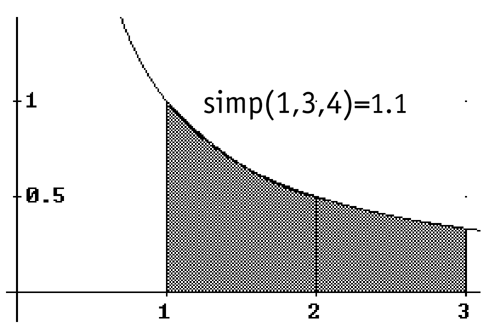
De methode bestaat erin om door iedere drie opeenvolgende punten van de verdeling een parabool te tekenen en de oppervlakte onder deze parabolen te bepalen en op te tellen. Deze methode geldt enkel indien we het interval waarover we integreren in een even aantal deelintervallen verdelen.

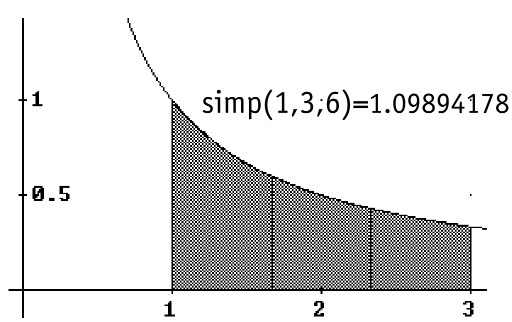
We laten het aan de lezer over om aan te tonen dat de oppervlakte onder de parabool door de punten $(x_o, f(x_0)),(x_1, f(x_1)),(x_2, f(x_2))$ gelijk is aan

$$\frac{1}{3}h(f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)).$$

Dit geeft ons weer een methode om een bepaalde integraal benaderend te berekenen. Indien we het interval $[a,b]$ verdelen in een even aantal deelintervallen, $n$, is :

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+\ldots+2f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n))$$




Het grafische voorstellen van de benadering met de methode van Simpson is een uitdaging voor de lezer.

*Opmerking*

De methode van Simpson werkt exact voor een derdegraadsfunctie.

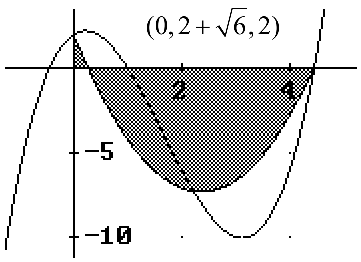
$$f(x) := x^3 - 5\cdot x^2 + 2\cdot x + 2$$

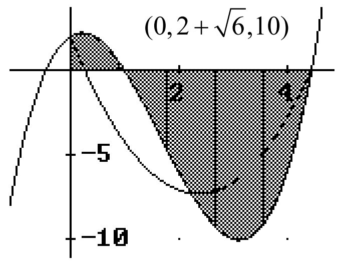
$$\int_0^{2+\sqrt{6}} f(x)\,dx$$

$$-20.13129230$$

$$\mathrm{simp}(0,\ 2 + \sqrt{6},\ 2)$$

$$-20.13129230$$




Referentie

Guido Herweyers, Koen Stulens, *Wiskunde verkennen met DERIVE*, ACCO 2002.