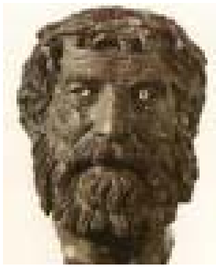
Te land, ter zee en in de lucht … met een TI-83+

Dr. Luc Gheysens (T³ Vlaanderen 2002)

Inleiding

De Griekse arts en wonderdoener Empedokles (450 v. Chr.) was één van de bekendste natuurfilosofen uit de oudheid. Van zijn werk zijn slechts fragmenten bewaard gebleven. Hieruit blijkt dat volgens zijn leer het heelal is opgebouwd uit de vier elementen aarde, water, lucht en vuur, die door de oerkrachten liefde en haat worden verenigd en gescheiden. Volgens een legende zou Empedocles zelfmoord gepleegd hebben door in de krater van de Etna te springen …



Wiskundigen kunnen ongetwijfeld in heel wat problemen uit de fysica (waar men o.a. bewegingen op het land, in het water of in de lucht bestudeert) inspiratie vinden voor hun lessen. Hier duiken immers vaak rationale, irrationale, goniometrische, logaritmische en andere functies op in concrete probleemsituaties. Bovendien is het vaak zo dat de grafieken, die horen bij deze functievoorschriften, niet gemakkelijk 'met de hand' kunnen geschetst worden. Technologische hulpmiddelen zijn hier dan ook zeker op hun plaats.

Hieronder worden drie concrete problemen behandeld uit de fysica waarbij respectievelijk aarde, water en lucht een rol spelen. Om ook het vierde natuurelement (vuur) even aan bod te laten komen, beginnen we met een geometrisch probleem in verband met een ster. De gelijkenis met de later behandelde problemen uit de fysica is drievoudig :

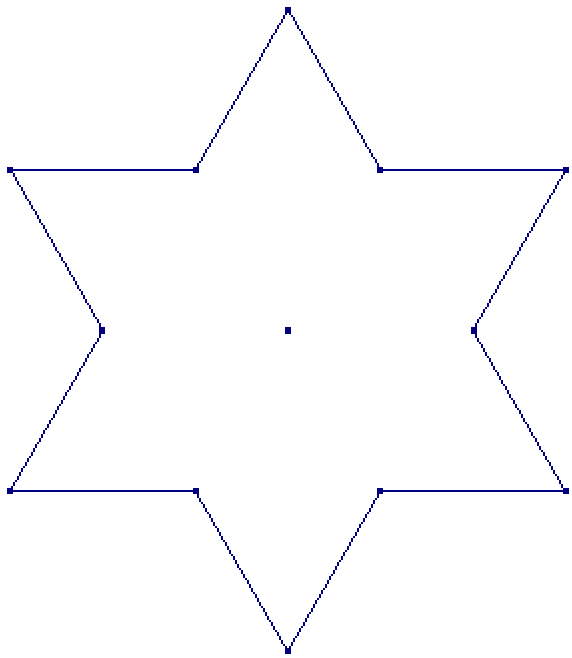
1. Er wordt vertrokken van een concreet probleem.
2. Door toepassing van relatief eenvoudige wiskunde kan de oplossing gevonden worden.
3. De oplossing kan gebruikt worden om over te gaan op een doe-activiteit. Bij problemen uit de fysica bestaat de doe-activiteit meestal in het uitvoeren van het experiment.

Van davidster tot gelijkzijdige driehoek …

Teken een davidster met diameter van 8 cm (d.w.z. dat de straal r van de omgeschreven cirkel gelijk is aan 4 cm). Construeer daarna een gelijkzijdige driehoek met dezelfde oppervlakte als de davidster.

Via berekening van de oppervlakte van beide figuren kan je gemakkelijk bepalen hoe groot de zijde van de gelijkzijdige driehoek is. We noemen 2r de diameter van de davidster en x de zijde van de gelijkzijdige driehoek.

Bereken het verband tussen x en 2r.



Te land …

Bij een verblijf in Oostende kan je het volgende experiment uitvoeren. Teken op het strand twee loodrechte assen, die wij de x-as en de y-as noemen. Aan het uiteinde van een stuk touw met een lengte van 5 meter is een steen vastgemaakt. Het touw wordt op de x-as gelegd, zodat de steen S op 5 meter van de oorsprong O ligt en zodat het vrije uiteinde van het touw in O ligt.
Veronderstel nu dat jij in het punt O staat en het vrije uiteinde P van het touw vastneemt. Vervolgens loop je langs de y-as van het punt O weg.

a. Welke baan volgt de steen? Bepaal het bijhorende functievoorschrift.
b. Schets de grafiek van deze functie met een grafisch rekentoestel in een passend venster. Deze kromme noemen we 'de sleepkromme'.
c. Welk punt van de sleepkromme ligt even ver van de x-as en de y-as verwijderd?
d. In welk punt van de sleepkromme vormt de raaklijn een hoek van 45° met de x-as?

Oplossingen.

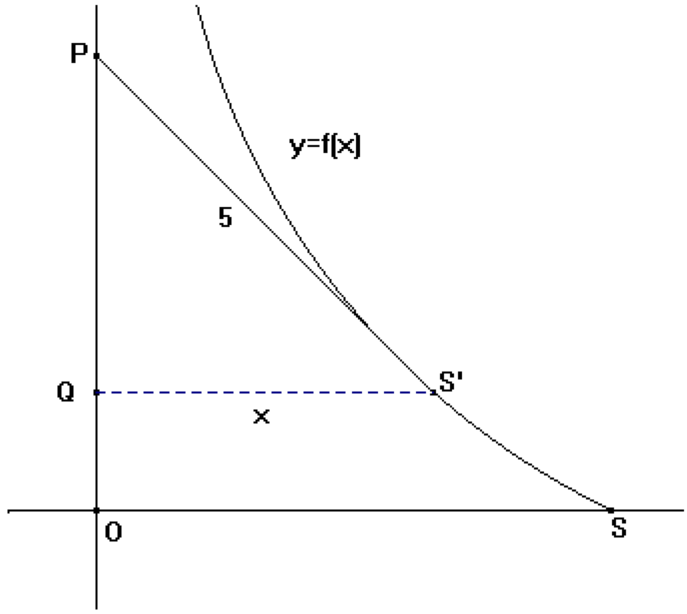
a. Uit de onderstaande figuur (waarbij S' een positie van de steen aanduidt) blijkt dat

f '(x) = ……………………………………

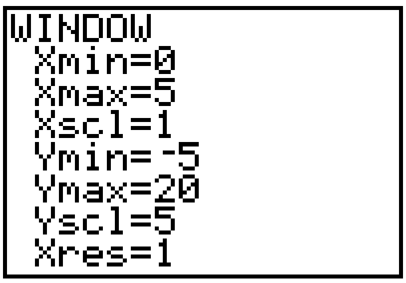
Via integratie (lees : computeralgebra) en rekening houdend met het feit dat S(5,0) op de grafiek ligt, vind je gemakkelijk het gezochte functievoorschrift :

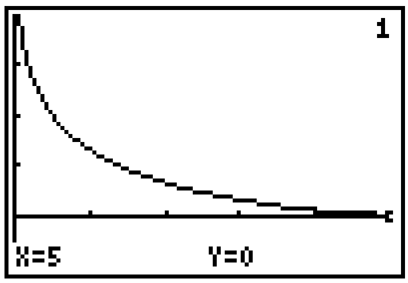
$$f(x) = -\sqrt{25-x^2} + 5\ \ln\frac{5+\sqrt{25-x^2}}{x}\ .$$

Hoe kan je met jouw grafisch rekentoestel controleren dat dit inderdaad het passende functievoorschrift is?



b.





c. Het punt (…… , ……) ligt even ver de x-as en de y-as verwijderd.

d. In het punt (…… , ……) maakt de raaklijn een hoek van 45° met de x-as.

Ter zee …

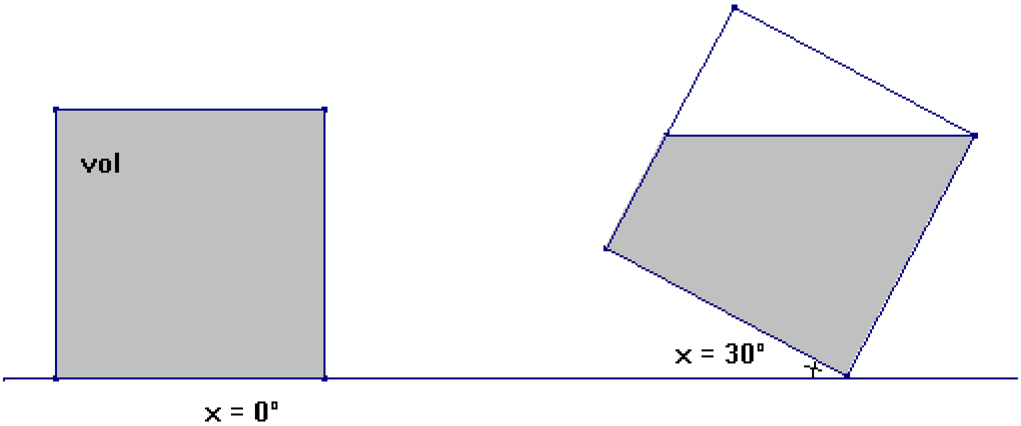
Een kubus met afmetingen 1 x 1 x 1 (dm) wordt gevuld met Oostends zeewater. Hoe kan je deze kubus gelijkmatig leeggieten, d.w.z. zodat de hoeveelheid water die eruit wordt gegoten evenredig is met de verlopen tijd?

STAP 1. Bereken de hoeveelheid vloeistof die uit de kubus is weggevloeid in functie van de draaiingshoek x.

$0° \leq x \leq 45°$

In stand 2 lees je af dat de hoeveelheid weggestroomde vloeistof een volume heeft dat gelijk is aan ……………………………………

Dan is algemeen (voor $0° \leq x \leq 45°$) : ………………….. = c . t , waarbij c een nog nader te bepalen constante is.

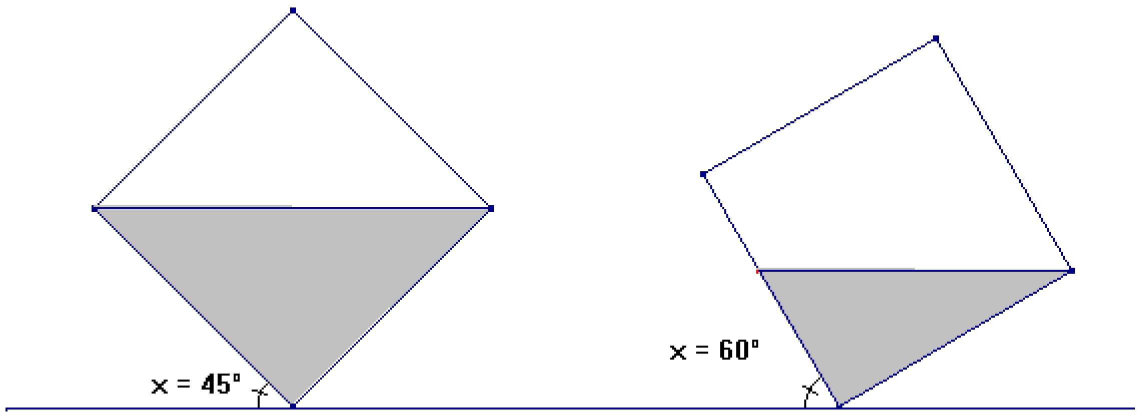


stand 1 stand 2

$45° \leq x \leq 90°$

In stand 4 lees je af dat de hoeveelheid weggestroomde vloeistof een volume heeft dat gelijk is aan ……………………………………

Dan is algemeen (voor $45° \leq x \leq 90°$) : ………………….. = k . t , waarbij k een nog nader te bepalen constante is.



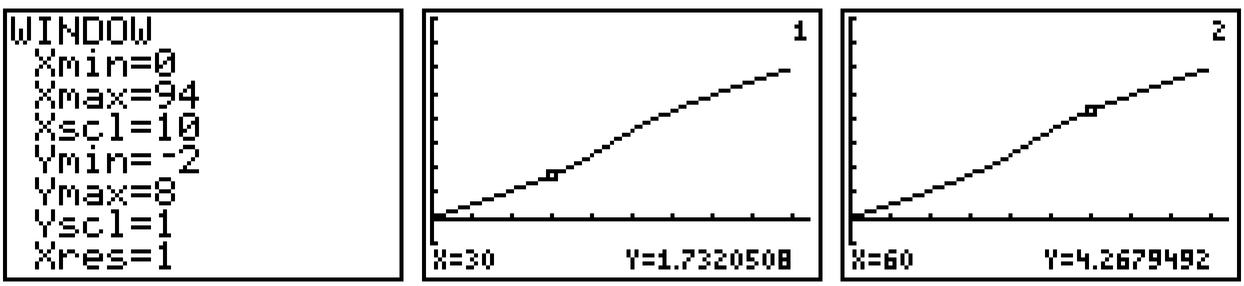
stand 3 stand 4

STAP 2. Bepaling van de constanten c en k.
Voor x = 45° moeten beide gevonden formules aan elkaar gelijk zijn. Uiteraard speelt ook de totale uitstroomtijd een rol. We nemen aan dat de kubus wordt leeggegoten in 6 seconden.

Hieruit volgt dat voor $0° \leq x \leq 45°$: t = ………………………………

en voor $45° \leq x \leq 90°$: t = ………………………………..

STAP 3. Schets de grafiek voor t in functie van x.
Kies passende vensterafmetingen zodat voor alle gehele x-waarden tussen 0 en 90 de bijhorende t-waarde kan afgelezen worden.

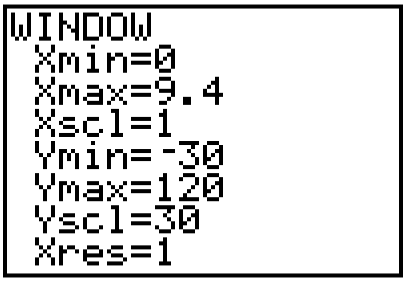


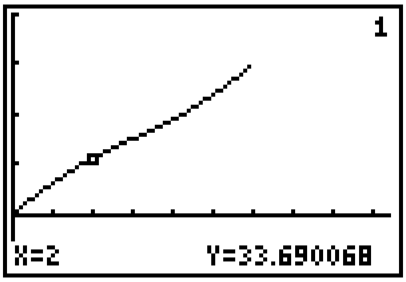
STAP 4. Schets de grafiek voor x in functie van t.

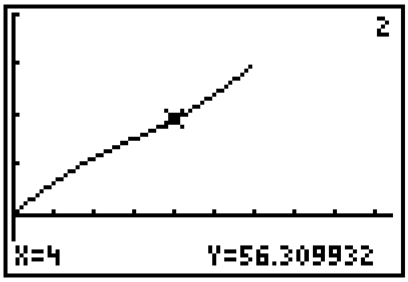
Nu is voor $0 \leq t \leq 3$: x = ………………………………

en voor $3 \leq t \leq 6$: x = ………………………………..

Kies opnieuw passende vensterafmetingen zodat per 0,1 seconde de bijhorende hoek x kan worden afgelezen.







Conclusies. Uit de laatste grafiek leiden we af dat de kubus steeds langzamer moet gekanteld worden, maar na het passeren van een hoek van 45° weer vlugger. De helling van de raaklijn aan de grafiek bepaalt immers de veranderende hoeksnelheid.
Er is puntsymmetrie rond het punt (…. , ….).

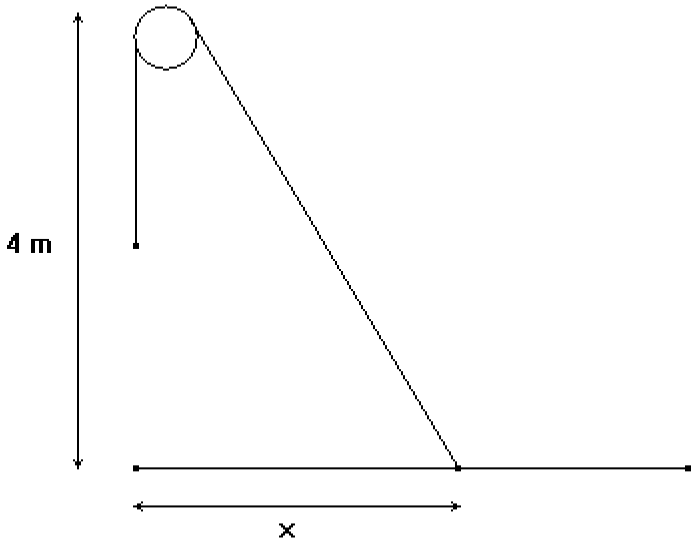
Deze techniek van het 'gelijkmatig gieten' werd o.a. gebruikt bij het gieten van klokken! Om een goed gietproduct te verkrijgen moest de klokkengieter proberen het vloeibaar brons gelijkmatig in de gietvorm aan te brengen.

En in de lucht …

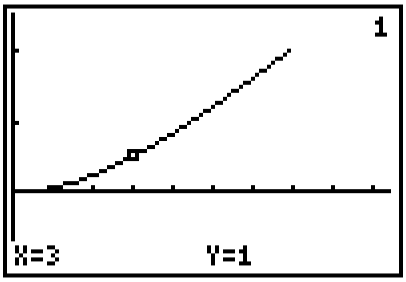
Met wat geluk kan je bij valavond in Oostende de strandvos (*Urocyon littoralis)* tegenkomen. Dit zeldzaam roofdier trekt er tijdens de zomermaanden 's avonds langs de kustlijn op uit op zoek naar etensresten die door de zonnekloppers zijn achtergelaten.

Patrouilleleiders van een scoutsgroep kennen de streken van de strandvos en hijsen daarom de meegedragen voedselpakketten omhoog met een touw dat om een tak van een boom wordt geslagen. Ook deze bomen behoren tot de eerder zeldzame verschijnselen op het Oostende strand …

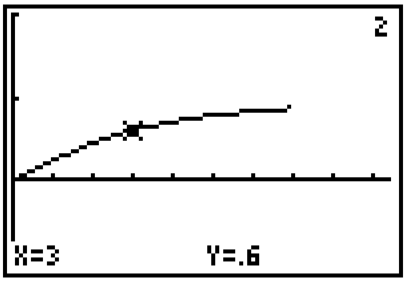
Veronderstel dat de tak zich op een hoogte van 4 m boven de handen van de patrouilleleider bevindt, dat het touw 8 m lang is en dat het pakket 12 kg weegt. We nemen ook aan dat de leider zich met een constante snelheid van 1 m/s van de boomstam verwijdert.



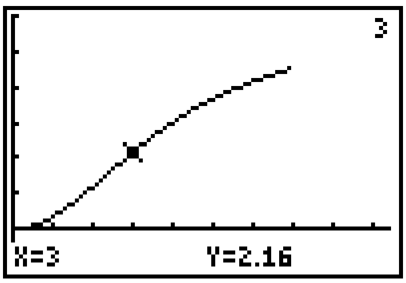
a. Druk de hoogte y waarop de proviand zich bevindt uit in functie van de afstand x die de leider aflegt. Schets de grafiek in een passend venster.
Tussen welke waarden varieert x?



b. Druk de snelheid waarmee de proviand omhoog beweegt, uit in functie van de tijd t die verlopen is sedert het ogenblik dat de leider begon vooruit te wandelen. Schets de grafiek in een passend venster.
Tussen welke waarden varieert t?



c. Druk de kinetische energie ($E_k = 0{,}5\ m\ v^2$) van het bewegend pakket uit in functie van de tijd t die verlopen is sedert het ogenblik dat de leider begon vooruit te wandelen. Schets de grafiek in een passend venster.

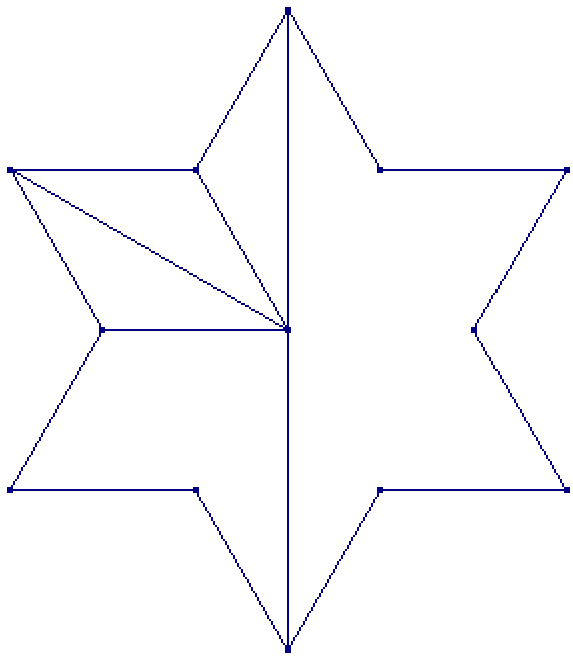


De STER-puzzel

Als wiskundige zal je ongetwijfeld voldoening vinden in het oplossen van de bovenstaande vraagstukjes uit de fysica. Het grafisch rekentoestel biedt je bovendien de mogelijkheid om 'experimenteel' de correctheid van de gevonden functievoorschriften te verifiëren.

Op een analoge manier kan je nu proberen een davidster in een minimaal aantal stukken te verknippen, die dan weer kunnen samengevoegd worden tot een gelijkzijdige driehoek.

Hieronder staat het gezochte knippatroon afgedrukt.
Veel puzzelplezier!



Bronnen

Pythagoras, wiskundetijdschrift voor jongeren :
www.science.uva.nl/misc/pythagoras/

Fysica vandaag 6.3, Uitgeverij Pelckmans.

Spelen met puzzels, Pieter van Delft & Jack Botermans, De Bezige Bij, 1978.