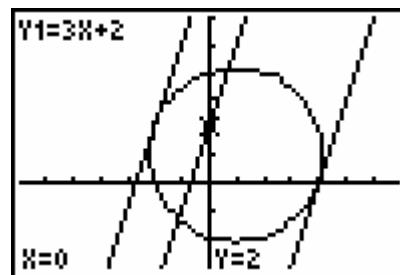


1 ICT versus manueel rekenwerk

Bepaal de vergelijking van de raaklijnen aan de cirkel $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 8 = 0$ evenwijdig met de rechte $y = 3x + 2$.



Bereken de som $S = 1/4 + 1/16 + 1/64 + 1/256 + \dots$

```
sum(seq(1/4^X, X,  
0, 100))>Frac
```

Een rij getallen begint met de van-nul-verschillende termen u_1 en u_2 . Hiermee bouwt men dan een rij op met behulp van het volgende recursief voorschrift

$$u_n = \frac{u_{n-1} + 1}{u_{n-2}} .$$

Toon aan dat de som van elke vijf opeenvolgende termen uit deze rij constant is.

Hoe begin je hieraan?

Welke hulp kan ICT hier bieden?

Hoe los je het probleem correct op?

Welke van de volgende functies zijn constant?

(a) $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3\sin^2 x \cos^2 x$

(b) $g(x) = \arctan x + \arctan \frac{1}{x}$

(c) $h(x) = x - \sqrt{x^2 + 10x + 5}$.

Welke hulp kan ICT hier bieden?

Hoe los je het probleem correct op?

2 *Enkele vaststellingen van de inspectie wiskunde*

Onderwijsspiegel - inspectieverslag 2002-2003

Vooraf de verplichte integratie van ICT-hulpmiddelen (gebruik van rekenmachine en computer) als technisch hulpmiddel en als didactische ondersteuning verhoogde de nood aan nascholing bij tal van leraars. De vele mogelijkheden aan nascholing hebben zeer vaak geleid tot een persoonlijke vervolmaking en vaardigheidsverwerving bij de leerkrachten. Niet steeds is het multiplicatoreffect en het implementatieniveau een vertaling van die verhoogde nascholingsijver...

Alhoewel de eindtermen zinvol ICT-gebruik opleggen, wordt het gebruik van ICT (rekenoestel, computer) te zelden in de evaluatie betrokken. Sporadisch wordt een proefwerk opgesplitst in een deel met de rekenmachine en een deel zonder. De lay-out van de proefwerken is, dank zij een goede beheersing van tekstverwerking, behoorlijk.

<http://ond.vlaanderen.be/schooldirect/insp04/SO/adviesSO.htm>

3 Evaluatie en ICT in de nieuwe leerplannen : enkele bedenkingen

Vanuit opgedane ervaringen bij schoolbezoeken maken we enkele bedenkingen in verband met het gebruik van het (grafisch) rekenoestel en de computer.

- 1 Evaluatie is verbonden met een schooleigen cultuur, met de mogelijkheden binnen de school (infrastructuur) en de eigen aanpak van de leerkracht. Het invoeren van ICT-hulpmiddelen in de tweede graad kan echter niet los staan van het gebruik ervan in de eerste en de derde graad.
- 2 Het is zinvol gerichte herhalings- en remediëringspakketten te voorzien met ICT, die door de leerlingen zelfstandig worden verwerkt.
- 3 Sturen van het leerproces kan betekenen dat de leerkracht met behulp van ICT inspeelt op de mogelijkheden van de leerlingen (differentiatie).
- 4 Een onderzoekopdracht biedt kansen tot zelfstandig werken en leren. Met ICT kunnen leerlingen zichzelf en elkaar behelpen.
- 5 Van een aantal begrippen, eigenschappen en formules kan gesteld worden dat ze tot de parate kennis van de leerlingen moeten behoren. Men houdt hierbij rekening met de studierichting.
- 6 Bij de aanpak van open en realiteitsgebonden problemen kan ICT helpen bij een tussenstap die manueel eerder lastig is (wegens ingewikkeld of tijdrovend rekenwerk).
- 7 Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- 8 Bij observatie in de klas zal men de leerlingen wijzen op inefficiënt ICT-gebruik.
- 9 Het toelaten van ICT bij de evaluatie veronderstelt dat men de vraagstelling en de manier van antwoorden aanpast.

10 In de vakgroep maakt men best vooraf duidelijke afspraken omtrent ICT in de evaluatie. De leerlingen moeten een duidelijk beeld hebben van wat er bij de evaluatie te verwachten valt. Het is zinvol een examengedeelte zonder ICT en een gedeelte met ICT af te nemen. Op het moment dat een bepaald leerstofonderdeel wordt ontwikkeld, kan men controleren of de manuele vaardigheden voldoende ontwikkeld zijn en of de nodige parate kennis van formules en eigenschappen voorhanden is. In een latere fase kan men toelaten dat ICT-gebruik bepaalde manuele routinevaardigheden vervangt. ICT kan men zeker aanbevelen ter controle van een gevonden resultaat. Collega's die wetenschapsvakken of economie doceren, ontdekken de mogelijkheden van de computer en de grafische rekenmachine. Men kan denken aan vakoverschrijdende afspraken. Men zal steeds het gebruik van legale software nastreven.

Uit het leerplan voor de tweede graad :

In de doelstellingen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als het effectief gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hiermee rekening houden. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan of dat de evaluatie tijdens het leerproces zelf 'permanent' wordt uitgevoerd.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd, zal dit uiteraard deel uitmaken van de evaluatie. Een onderscheid moet gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. bij het intikken) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze. En binnen het 'vak wiskunde' mag de eerste geen hypotheek leggen op de tweede. Gespreid over het jaar geleidelijk de vorderingen van de leerlingen opmeten moet een beeld geven van de effectieve vooruitgang die de leerlingen maken. Dit impliceert evenwel ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Dit vraagt allicht van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde 'nieuwe' evaluatiesituaties. Zo zal de invoering van ICT-hulpmiddelen in de tweede graad niet los staan van het gebruik ervan in de eerste en de derde graad. Afspraken kunnen gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, ... en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

Uit het leerplan voor de derde graad :

In de leerplannen is het gebruik van ICT-hulpmiddelen opgenomen, zowel voor illustratie en demonstratie van begrippen en eigenschappen, als voor het effectieve gebruik ervan door de leerlingen bij het uitvoeren van berekeningen, het onderzoeken van eigenschappen en het verwerken van informatie.

De evaluatie van onderdelen waarbij in de ontwikkelingsfase en de verwerkingsfase een rekenmachine, een grafische rekenmachine of een computer gebruikt werd, zal hieraan aangepast zijn. Dat betekent dat bij de toetsing hetzelfde materiaal ter beschikking van de leerlingen moet staan.

Het spontane en accurate gebruik van ICT wordt geëvalueerd als onderdeel van de nagestreefde vaardigheid.

Voorbeelden

- Het heeft geen zin leerlingen in de verwerkingsfase ICT te laten gebruiken en op de evaluatiemomenten manuele automatismen te verwachten.
- Bij observatie in de klas zal men leerlingen wijzen op inefficiënt gebruik.
- Op dezelfde wijze moet gewezen worden op inadequaat gebruik als leerlingen bijvoorbeeld tussenresultaten noteren, eventueel zelf terug invoeren, al of niet na afronding, wat merkwaardige rekenverschillen kan veroorzaken.
- Als de doelstelling het interpreteren van statistische gegevens is, zal men geen (evaluatie)tijd besteden aan het turven ervan, maar wel statistische software gebruiken.
- Met meetkundige software kan men een vermoeden laten onderzoeken door de techniek van het vervelvoudigen (cf. het slepen van bepaalde punten). In dit geval is de computer echter een veredeld tekenblad, waarop de redenering wordt uitgevoerd. Ook voorheen moesten de leerlingen een tekening maken en maakte die deel uit van de evaluatie. Met het gebruik van een figuur op een machine kan dat dus evenzeer.

Bij dit soort evaluatie past wellicht een permanente evaluatie tijdens het leerproces zelf, dan wel de vaardigheid te testen met een reeks gekunstelde oefeningen.

In de observatie moet een onderscheid gemaakt worden tussen enerzijds de vaardigheid in het gebruik van het toestel (bijv. de vlotheid bij het intikken bij computergebruik) en anderzijds het inzicht in het gebruik van de toestelgebonden wiskundige werkwijze.

Bedieningsvaardigheid op zich kan niet het enige doel zijn van wiskundelessen. Binnen het 'vak wiskunde' mag bijvoorbeeld klaviervaardigheid geen hypotheek leggen op het gebruik van de computer bij berekeningen of dataverwerking. Voor wiskunde kan een relatief vlotte omgang met de machine volstaan. En die staat in functie van het wiskundige leerproces. Uiteraard zal een veelvuldig gebruik in de wiskundelessen bijdragen tot de algemene vlotheid. Er is geen principieel bezwaar tegen de beschikbaarheid van de handleiding van het toestel.

De evaluatie van deze vaardigheid moet vooral gezien worden als aanmoedigend met het oog op een vlotter verlopen van het wiskundige proces. Zo moet een evaluatie gespreid over het jaar een beeld geven van de vorderingen van de leerlingen en van hun effectieve vooruitgang. Dit impliceert ook dat de leerlingen voldoende oefenkansen krijgen. Het vlotte gebruik van een machine of software vraagt dus meer dan een incidenteel gebruik in de les. Dit vraagt van de school en de leerkracht een inspanning voor de leerlingen die niet zelf over het aangewezen materiaal kunnen beschikken.

Als men het gebruik van bepaalde werkwijzen met computer of rekenmachine als specifieke doelstelling heeft nagestreefd (bijv. gebruik bepaalde software, bepaalde functietoetsen), zal dit uiteraard deel uit maken van de evaluatie.

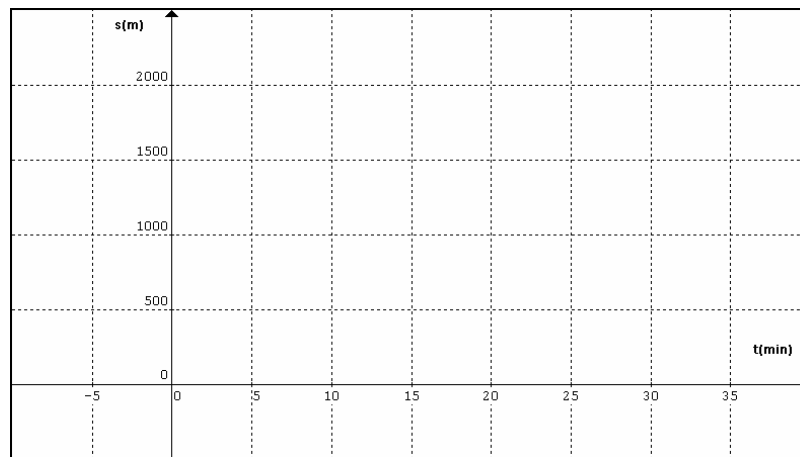
Overleg in de vakgroep is nodig om vertrouwd te worden met deze voor wiskunde 'nieuwe' evaluatiesituaties. Afspraken moeten gemaakt worden over de aangewezen evaluatievorm, de wijze van werken, de gestelde eisen, ... en de afstemming tussen de leerkrachten onderling. Zo kan men afspreken het technisch gebruik van ICT niet op het examen zelf te toetsen, maar bijvoorbeeld via de jaartoetsing, omdat 'permanente' of 'gespreide' evaluatie dan meer mogelijk wordt. Leerlingen moeten alleszins een duidelijk beeld krijgen van wat te verwachten is bij de evaluatie.

4 Inspirerende voorbeelden

Van een wandelaar heeft men op een aantal tijdstippen de afgelegde weg s opgemeten. De gegevens staan in de onderstaande tabel. We nemen aan dat de functie die het verband uitdrukt tussen s en de tijd t een veeltermfunctie van de derde graad is.

t (min)	s(m)
0	0
5	387,5
10	916,5
20	1700
30	952,5

- 1 Plaats deze vijf puntenkoppels (t,s) op het onderstaande rooster 1 en schets hiermee het s - t -diagram in het interval $[0,30]$.

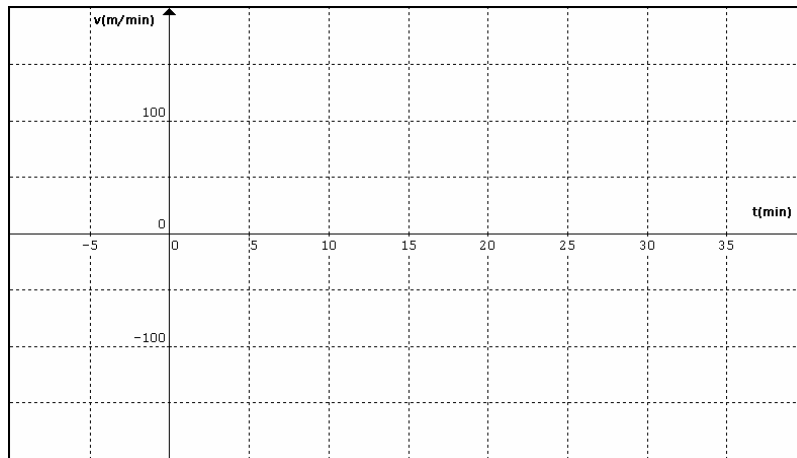


rooster 1

- 2 Schat via de bovenstaande grafiek de waarde voor de differentiequotiënten $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ op de voorgestelde tijdstippen. Kies telkens $\Delta t = 1$.

t (min)	Geschatte waarden voor $v(m/min)$
0	
5	
10	
20	
30	

Stel de gevonden puntenkoppels (t,v) voor op het onderstaande rooster 2 en schets het v-t-diagram.



rooster 2

2 Pas regressie toe met jouw GRM om de passende derdegraadsfunctie op te stellen.

Gevonden functievoorschrift : $s(t) = \dots\dots\dots$

3 Geef de functie die de snelheid uitdrukt in functie van de tijd .

Antwoord : $v(t) = \dots\dots\dots$

4 Vul hiermee via jouw GRM de onderstaande tabel aan met de correcte snelheid van de wandelaar in m/min en in km/h op de gegeven tijdstippen.

Vermeld hieronder de functievoorschriften die je daarvoor op jouw GRM hebt ingevoerd.

$Y_1 = \dots\dots\dots$ (afgelegde weg i.f.v. de tijd).

$Y_2 = \text{NDeriv}(Y_1, X, X)$ (snelheid in functie van de tijd en uitgedrukt in m/min).

$Y_3 = Y_2^* \dots\dots\dots$ (snelheid in functie van de tijd en uitgedrukt in km/h).

t (min)	s(m)	v (m/min)	v (km/h)
0	0		
5	387,5		
10	916,5		
20	1700		
30	952,5		

- 5 De negatieve snelheid bij $t = 30$ betekent dat de wandelaar op zijn stappen terugkeert. Geef het exacte tijdstip (afgerond tot de seconde) waarop de wandelaar begint terug te keren.

Antwoord : $t = \dots \dots \dots$ min $\dots \dots \dots$ sec

Oplissing.

Zet de gegevens van de tabel in de lijsten L₁ en L₂ op de GRM en pas derdegraadsregressie toe (cubic regression) met de instructie CubicReg L₁,L₂,Y₁ .

L1	L2	L3	Z
0	0	-----	
5	387.5		
10	916.5		
20	1700		
30	952.5		

L2(6) =			

```
CubicReg
y=ax3+bx2+cx+d
a=-.233
b=6.325
c=51.7
d=0
```

Hieruit blijkt dat $s(t) = -0,233t^3 + 6,325t^2 + 51,7t$

Bijgevolg is $v(t) = -0,699t^2 + 12,65t + 51,7$.

$Y_3=Y_2*0,06$ geeft de snelheid in km/h. Je kan de gezochte waarden dan opvragen in een tabel (Indpnt: Ask) en de gevraagde diagrammen schetsen in een passend venster.

X	Y ₁	Y ₂
0	0	51.7
5	387.5	97.475
10	916.5	108.3
20	1700	25.1
30	952.5	-197.9
X=0		

X	Y ₂	Y ₃
0	51.7	3.102
5	97.475	5.8485
10	108.3	6.498
20	25.1	1.506
30	-197.9	-11.87
Y ₃ =3.10199998602		

Het positieve nulpunt van de functie v geeft het tijdstip waarop de wandelaar begint terug te keren : na 21 min 32 sec .

Om even over na te denken (meerwaarde van een dergelijke opgave):

- vakoverschrijdende toepassing (fysica : afgelegde weg, snelheid, negatieve snelheid, versnelling);
- interpretatie van grafieken;
- verband met statistiek (regressie);
- berekenen van differentiequotienten;
- betekenis van de afgeleide (richtingscoëfficiënt van de raaklijn);
- toepassing van schattend rekenen;
- verband met oplossen van stelsels;
- efficiënt gebruik van de GRM;
- lay-out van het opgavenblad;
- los deze opgave op met Graphmatica en vergelijk met het resultaat dat je via de GRM hebt bekomen.

Op de website van de IAAF vinden we dat het wereldrecord speerwerpen bij de mannen op naam staat van de Tsjech Jan Zelezny met een worp van 98,48 meter. Uit videobeelden blijkt dat hij bij die recordworp de speer losliet op een hoogte van 1,92 meter en onder een hoek van 52° met de horizontale richting. We nemen aan dat de speer een parabolisch baan volgt. Hoe hoog ging de speer dan?

The screenshot shows the IAAF website with the following content:

- Address bar: <http://www.iaaf.org/statistics/records/gender=M/allrecords/discipline=JT/index.html>
- IAAF International Association of Athletics Federations logo and navigation links.
- Breadcrumb: IAAF.org > Statistics > Records
- Section: All Records - Javelin - Men
- World Record table:

Performance	Athlete	DOB	Nat	Place
98.48	Jan Zelezny	16 06 1966	CZE	Jena

Oplossing.

We drukken de hoogte h van de speer uit in functie van de horizontale afstand x :

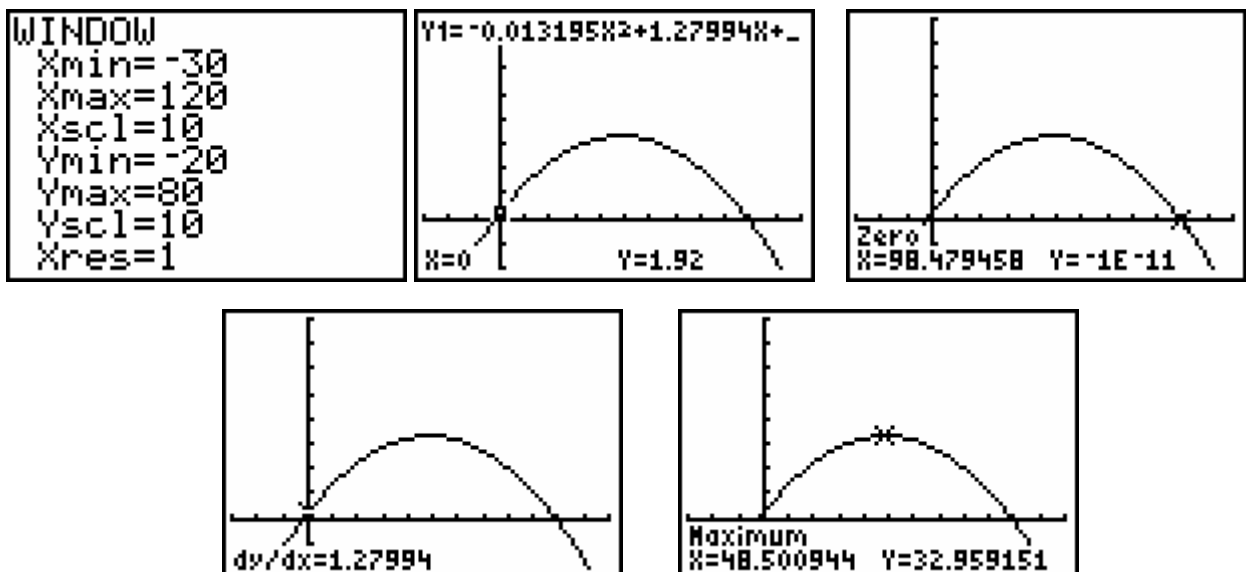
$$h(x) = ax^2 + bx + c.$$

Deze parabool gaat door de punten $P(0;1,92)$ en $Q(98,48;0)$. Bovendien is $h'(0) = \tan 52^\circ$. Na enig rekenwerk vinden we het gezochte functievoorschrift :

$$h(x) = -0,013195x^2 + 1,27994x + 1,92.$$

Merk hierbij op dat de coëfficiënt van x gelijk is aan $\tan 52^\circ$.

Op de onderstaande schermafdrucken controleert men gemakkelijk de gegevens en kan men de oplossing aflezen : de speer blijkt een maximale hoogte van 32,96 meter te bereiken.

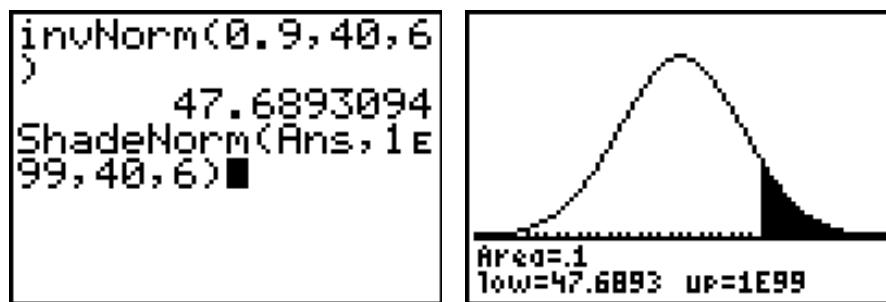
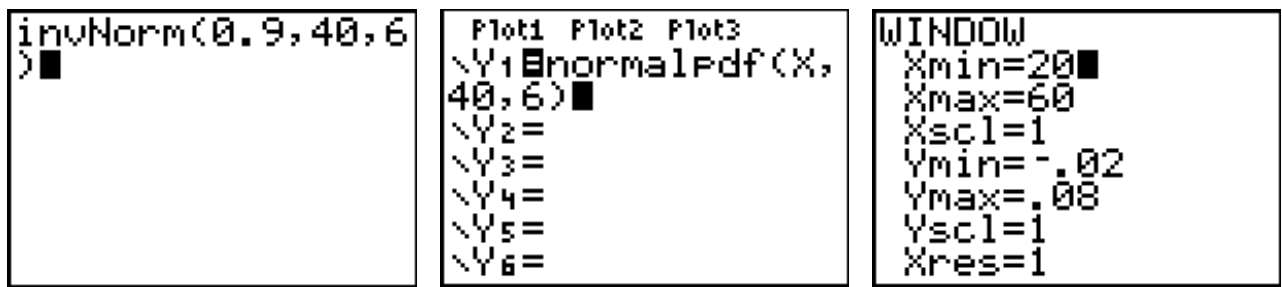


Uit een steekproef leidt men af dat de lengte van komkommers normaal verdeeld is met een gemiddelde lengte van 40 cm en een standaardafwijking van 6 cm. De 10% langste krijgen het etiket “jumbo”.

Vanaf welke lengte is dit ?

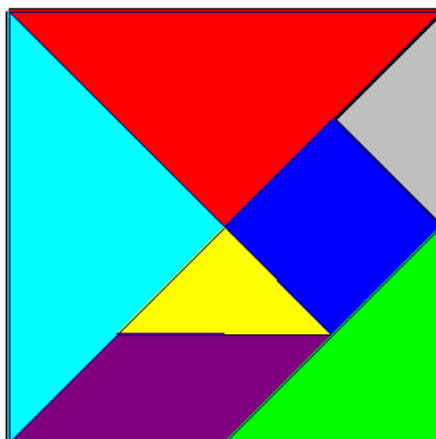
Referentie : Onder de loep, *De normale verdeling*, Uitwiskeling, jaargang 18 nummer 1, december 2001, blz. 15-47.

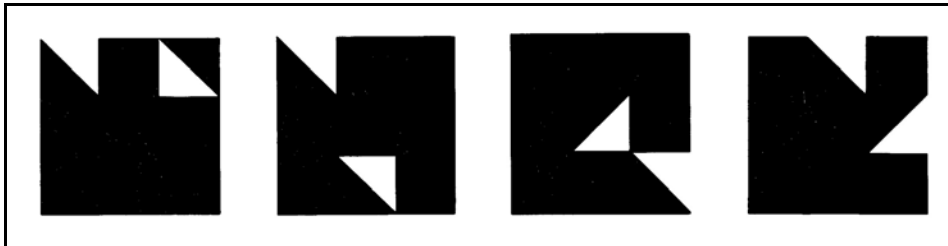
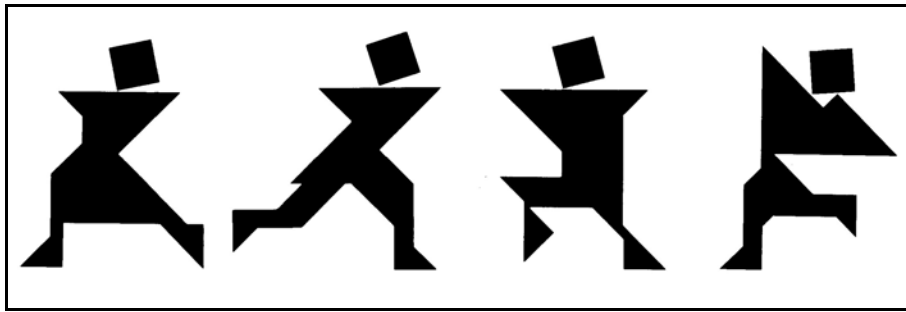
Oplossing met de grafische rekenmachine.



**ICT in de wiskundelessen vanaf het eerste jaar?
ICT in de wiskundelessen vanaf het eerste jaar!**

Een zinvolle en speelse opgave bestaat er in de leerlingen een TANGRAM te leren tekenen met behulp van de computer. Daarna kunnen ze proberen hiermee enkele tangramfiguren te vormen.





www.aps.nl/wiskunde/Content/Praktische_opdrachten/Tangram.htm

Literatuur

R. Van Eecke, *Goniometrische functies : een meerwaarde door ICT?*, Uitwiskeling, jaargang 17 nummer 3, mei 2001.

R. Van Eecke, *Het begrip afgeleide: een meerwaarde door ICT?*, Uitwiskeling, jaargang 18 nummer 1, december 2001.

G. Verbeeck, *Afgeleide en ICT*, Uitwiskeling, jaargang 20 nummer 1, december 2003.

J. Peeters en G. Verbeeck, *Stelsels oplossen en bespreken met ICT*, Uitwiskeling, jaargang 20 nummer 2, maart 2004.

Op de Vlaamse T3-website <http://www.wis.kuleuven.ac.be/alo/t3.htm> komt een uitgebreidere versie van deze tekst met daarin heel wat praktijkvoorbeelden. Hierbij een bijzonder woord van dank aan de volgende collega's voor de ingestuurde voorbeelden uit hun evaluatiepraktijk:

Dominique Dejonghe (O.-L.-V. Ter Duinen, Campus Heist)
Geert Delaleeuw, vakbegeleider (Technisch Instituut H.-Familie, Ieper)
Rik Devriendt (Technisch Instituut Sint-Joris, Menen)
Martine Feys (De Pleinschool, Kortrijk)
Ann Lesage (Burgerschool, Roeselare)
Swa Van Deun (De Bron, Tielt)
