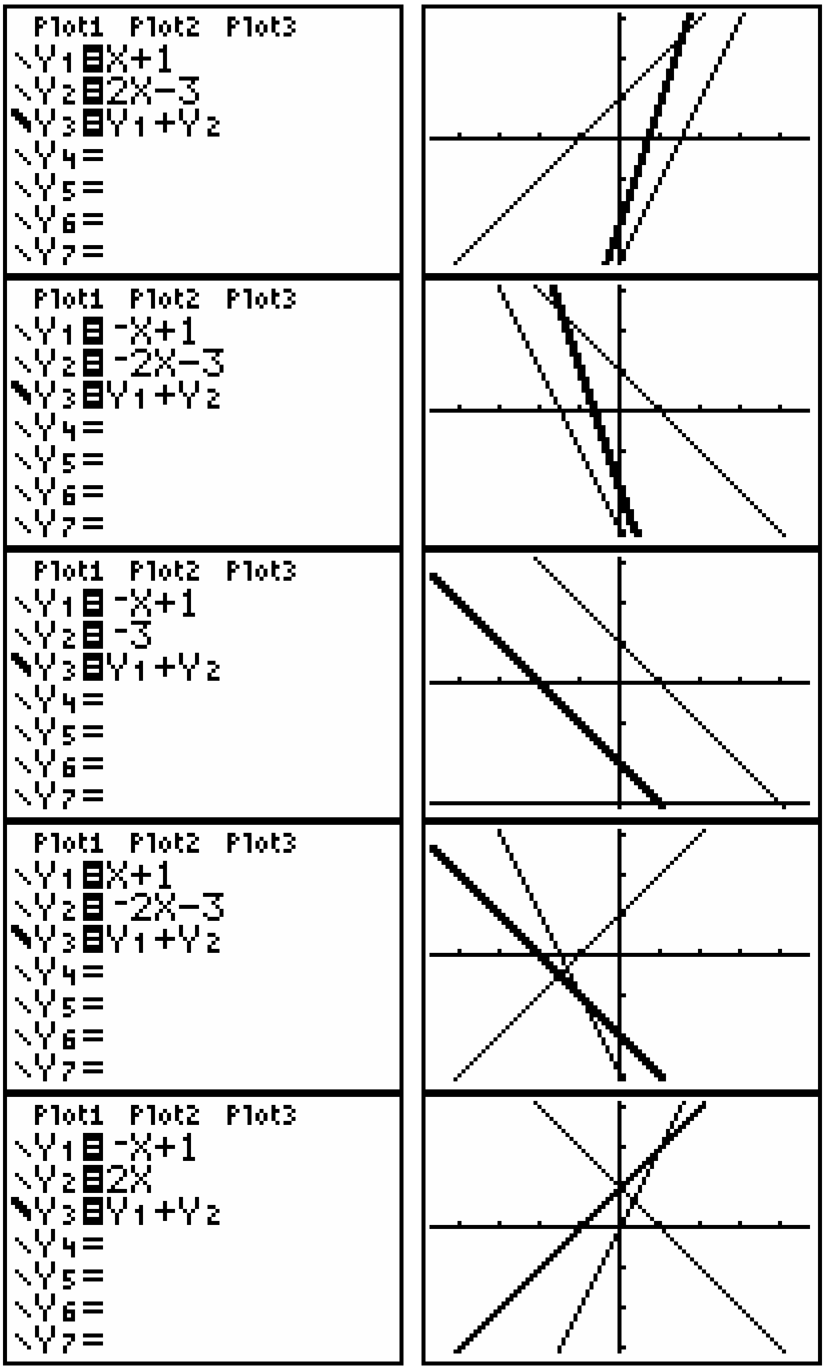
SOM- en PRODUCTGRAFIEK van twee RECHTEN

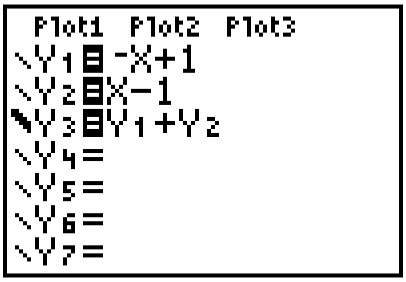
Walter De Volder

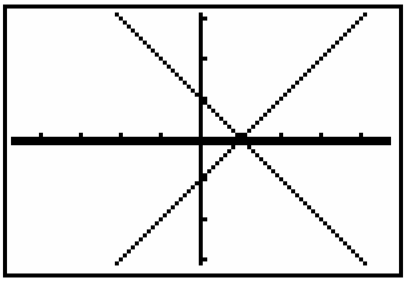
1. SOMGRAFIEK

Breng onder Y_1 en Y_2 de vergelijking van een rechte in. Stel $Y_3 = Y_1 + Y_2$.
Construeer de drie grafieken.
Onderzoek verschillende gevallen: stijgende, dalende en horizontale rechten.
Formuleer besluiten en verklaar die algebraïsch.

(Onderstaande figuren zijn getekend in het venster ZDecimal)





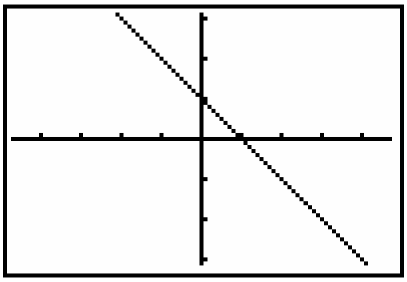
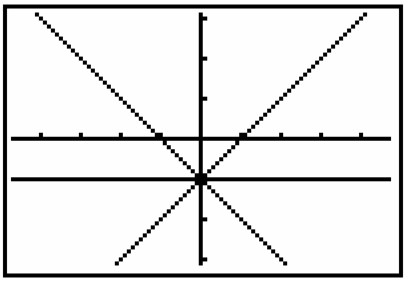
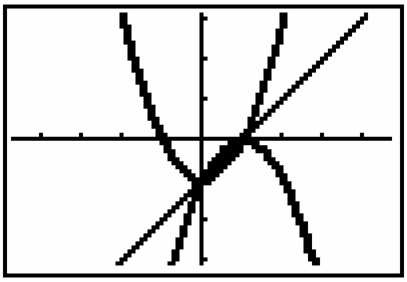


Besluiten:
De somgrafiek van twee rechten is altijd een rechte.
De somgrafiek van twee stijgende (dalende) rechten is een stijgende (dalende) rechte.
De somgrafiek van een rechte en een horizontale rechte is een rechte, evenwijdig met de eerste rechte.
De somgrafiek van een stijgende en een dalende rechte is een stijgende, dalende of horizontale rechte, naargelang de absolute waarde van de rico van de stijgende rechte groter is dan, kleiner dan of gelijk aan de absolute waarde van de rico van de dalende rechte.

De besluiten zijn algebraïsch gemakkelijk te verklaren als men bedenkt dat de rico van de somgrafiek van twee rechten gelijk is aan de som van de rico's van beide rechten. Het volstaat de regels voor het optellen van twee gehele getallen toe te passen.

2. PRODUCTGRAFIEK

Stel $Y_1 = -X + 1$, $Y_2 = \{-1,0,2\}X - 1$ en $Y_3 = Y_1 \times Y_2$
Construeer de grafieken in drie afzonderlijke schermpjes.
Welke figuren vind je als productgrafieken? Verklaar.

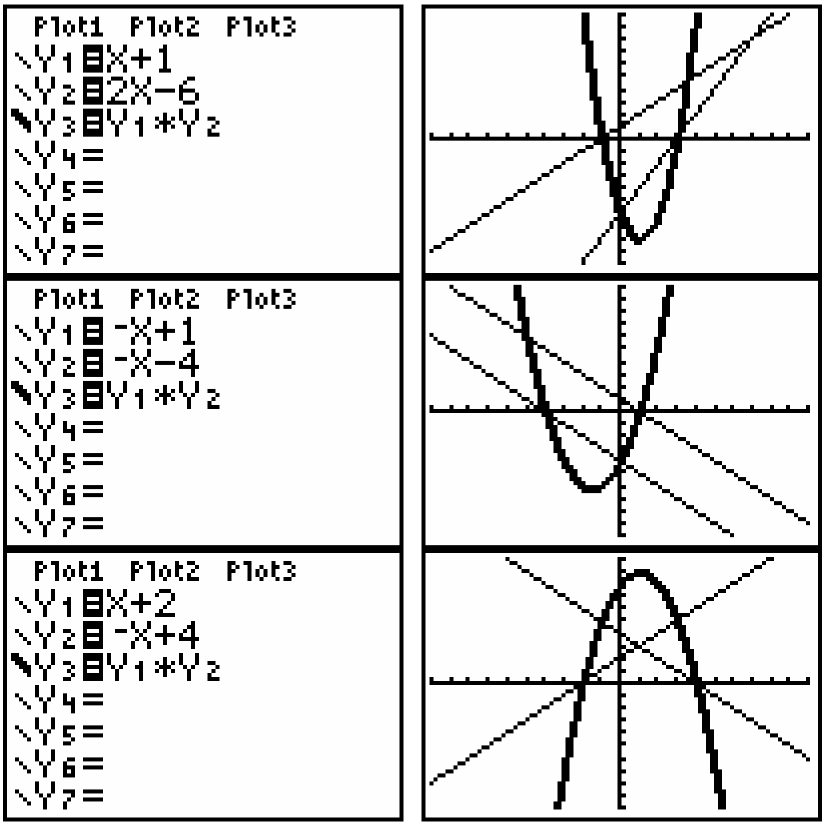
De productgrafiek van twee rechten is een parabool of een rechte. Het is een rechte als minstens een van beide rechten een horizontale is.

Door de graad van de productfunctie te bepalen is dit besluit eenvoudig algebraïsch te verklaren.

In het vervolg werken we uitsluitend met twee niet-horizontale rechten. De productgrafiek is dan altijd een parabool.

Ga uit van twee stijgende rechten. Wat voor soort parabool is de productgrafiek? Verklaar.
Analoog voor twee dalende rechten.
Analoog voor een stijgende en een dalende rechte.
Wat is de productgrafiek van twee evenwijdige rechten?

(Onderstaande figuren zijn getekend in het venster ZStandard)



Besluiten:
De productgrafiek van twee stijgende (dalende) rechten is een dalparabool.
De productgrafiek van een stijgend en een dalende rechte is een bergparabool.

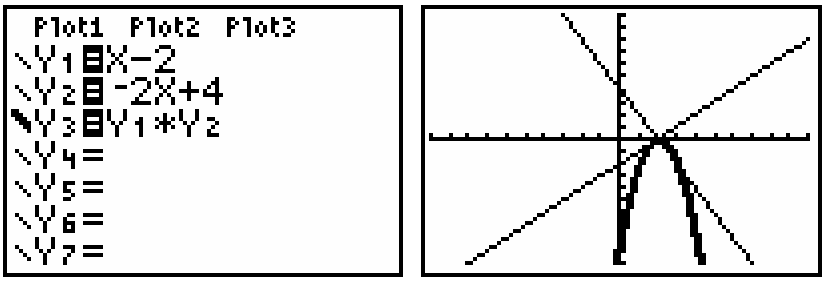
De algebraïsche verklaring van deze besluiten ligt in het feit dat de coëfficiënt van x^2 in de productfunctie gelijk is aan het product van de rico's van beide rechten.

Stel vast dat de productparabool de x-as snijdt in de punten waar de rechten de x-as snijden.
Hieruit leiden we de vergelijking af van parabolen die de x-as snijden in x_1 en x_2.

Elke rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_1(x - x_1)$ met $k_1 \neq 0$
Elke rechte die de x-as snijdt in x_2 heeft als vgl. $y = k_2(x - x_2)$ met $k_2 \neq 0$
De productparabool heeft dus als vergelijking $y = k_1.k_2(x - x_1)(x - x_2)$

Parabolen die de x-as snijden in x_1 en x_2 hebben als vgl. $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ met $a \neq 0$.

Wat is er speciaal aan de productparabool van twee rechten die de x-as in eenzelfde punt snijden?



Hieruit leiden we de vergelijking af van parabolen die de x-as raken in x_1.

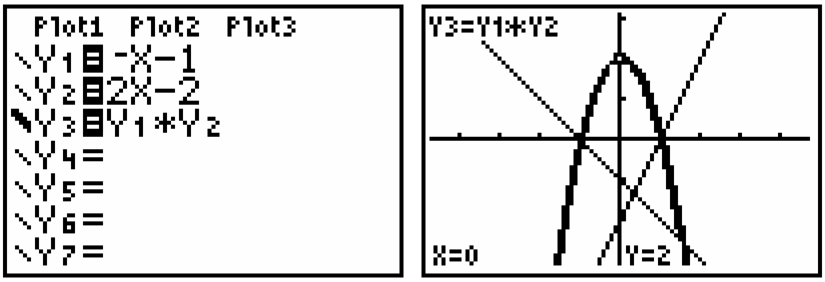
De eerste rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_1(x - x_1)$ met $k_1 \neq 0$.
De tweede rechte die de x-as snijdt in x_1 heeft als vgl. $y = k_2(x - x_1)$ met $k_2 \neq 0$.
De productparabool heeft dus als vergelijking $y = k_1.k_2(x - x_1)^2$

Parabolen die de X-as raken in x_1 hebben als vergelijking: $y = a(x - x_1)^2$ met $a \neq 0$.

Parabolen met vergelijking $y = a(x - x_1)^2$ hebben het punt $T(x_1,0)$ als top. Verschuift men die parabolen vertikaal over y_1 dan wordt de top $T(x_1,y_1)$ en de vergelijking $y = a(x-x_1)^2 + y_1$.

Parabolen met $T(x_1,y_1)$ als top hebben als vergelijking: $y = a(x-x_1)^2 + y_1$ met $a \neq 0$.

In welk punt snijdt de productparabool de y-as?



De productparabool snijdt de y-as in het "product van de snijpunten van de rechten met de y-as". Inderdaad: $(ax + \mathbf{b}).(cx + \mathbf{d}) = acx^2 + (ad + bc)x + \mathbf{bd}$.

3. OEFENINGEN

1. Is de somgrafiek s van twee niet horizontale evenwijdige rechten l en m evenwijdig met die rechten? Wat vermoed je over de snijpunten met de x-as van de rechten l, m en s? Bewijs dit vermoeden algebraïsch.

2. Geef de vergelijkingen van drie parabolen die de x-as snijden in -2 en 4. Teken de grafieken in één scherm.
   Stel de vergelijking van de drie parabolen op in de vorm $y = ax^2 + bx + c$.
   Wat kan je besluiten over de coëfficiënten a, b en c van de vergelijkingen van twee parabolen, die de x-as in dezelfde twee punten snijden?

3. Geef de vergelijkingen van drie parabolen die de x-as raken in het punt (-2,0). Teken de grafieken in één scherm.

4. Kan de productparabool van twee rechten een parabool zijn die de x-as niet snijdt?

5. De vergelijking van een parabool die punten gemeen heeft met de x-as kan onder twee vormen gegeven worden: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$ en $y = ax^2 + bx + c$.
   De soort parabool (berg of dal) kan je uit beide vormen even vlot aflezen. Verklaar.
   In welke vorm zie je het best het snijpunt met de y-as?
   In welke vorm zie je het best de snijpunten met de x-as?

6. Is volgende uitspraak waar of vals? "De top van een parabool die de x-as snijdt, ligt op de middelloodlijn van het lijnstuk dat de twee snijpunten verbindt".

7. Een voetballer schopt een bal weg. De bal bereikt een maximale hoogte van 4 m. en valt 20 m. verder op de grond. Vind de paraboolbaan van de bal.
   (Kies als xy-vlak het vlak van de paraboolbaan, de x-as ligt op de aarde en de oorsprong op de plaats waar de bal wordt weggetrapt).

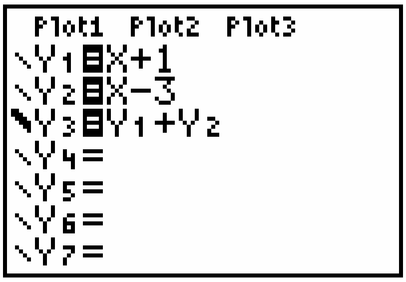
8. *p*: $y = ax^2 + bx + c$.
   De coördinaat van de top is (-1,5) en *p* bevat het punt met coördinaat (1,2)
   Bepaal a, b en c.

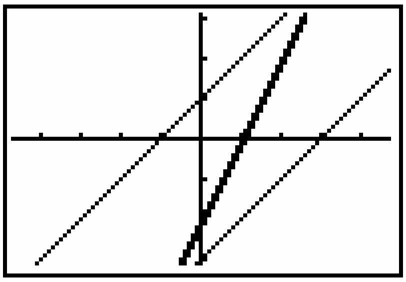
9. Bepaal twee rechten met als productparabool:
   $y = -3(x-2)^2$
   $y = 2x^2 + 5x + 2$
   Geef meerdere oplossingen.

10. Bepaal twee rechten waarvan de productparabool de x-as snijdt in -1 en 3 en de y-as in 6.
    Geef meerdere oplossingen.

4. OPLOSSINGEN

Oefening 1

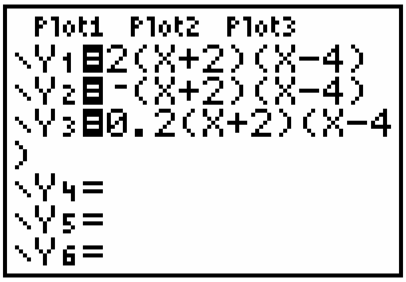


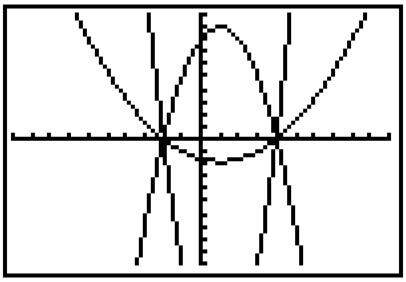


Als l: $y = ax + b$ en m: $y = ax + c$ dan is s: $y = 2ax + (b+c)$.
De rico van de somrechte s is het dubbel van die van l en m. De rechte s loopt dus niet evenwijdig met l en m.
Het snijpunt van s met de x-as is het midden van de snijpunten van l en m met de x-as.
Inderdaad, het snijpunt van s met de x-as heeft als abscis $-(b+c)/(2a)$ = 🗁 ($-b/a + -c/a$).
Dit is het midden van de punten met abscissen $-b/a$ en $-c/a$.

Oefening 2

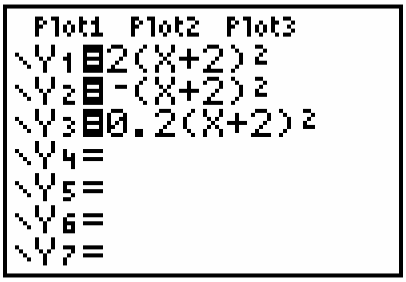
$y = 2(x + 2)(x - 4) = 2x^2 - 4x - 16$
$y = -(x + 2)(x - 4) = - x^2 + 2x + 8$
$y = 0.2(x + 2)(x - 4) = 0.2x^2 - 0.4x - 1.6$

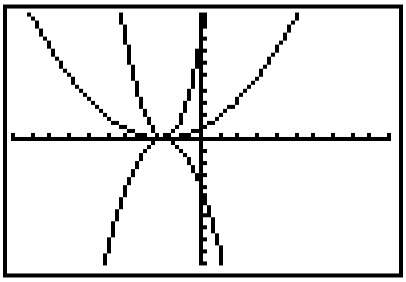




De coëfficiënten van de vergelijkingen van twee parabolen (in de vorm $y = ax^2 + bx + c$), die de x-as in dezelfde twee punten snijden, zijn evenredig.

Oefening3





Oefening 4

Nee, want twee rechten die een productparabool voortbrengen snijden de x-as en de productparabool gaat door die snijpunten.

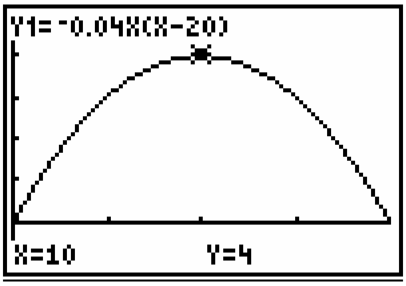
Oefening 5

De soort parabool (berg of dal) wordt bepaald door a
In de tweede vorm. Het snijpunt met de y-as is (0,c).
In de eerste vorm. De snijpunten met de x-as zijn (x_1,0) en (x_2,0)

Oefening 6

De uitspraak is waar.

Oefening 7



Omdat de parabool de x-as snijdt in 0 en 20 is de vergelijking van de vorm $y = a\,x(x - 20)$.
Omdat (10,4) een punt is van de parabool moet: $4 = a \cdot 10 \cdot (-10)$, waaruit $a = -0.04$.
De baan die de bal volgt heeft dus als vergelijking: $y = -0.04\,x\,(x - 20) = -0.04\,x^2 + 0.8\,x$.

Men kan de vergelijking van de parabool ook vinden met de TI-83 door een kwadratische regressie toe te passen op de punten (0,0), (20,0) en (10,4).

Oefening 8

Omwille van de top (-1,5) heeft de parabool een vergelijking van de vorm $y = a(x+1)^2 + 5$.
De parabool gaat door het punt (1,2) en dus moet $2 = a(1+1)^2 + 5$, waaruit $a = -0.75$.
De vergelijking is dus $y = -0.75(x+1)^2 + 5$ of $y = \mathbf{-0.75}x^2 \mathbf{-1.5}x + \mathbf{4.25}$

Oefening 9

$y = -3(x - 2)^2$ is de productparabool van

$y = x - 2$ en $y = -3(x - 2)$
$y = 2(x - 2)$ en $y = -1.5(x - 2)$
y = ☆3(x - 2) en y = -☆3(x - 2)

$y = 2x^2 + 5x + 2$ is de productparabool van

$y = 2x + 1$ en $y = x + 2$
$y = 4x + 2$ en $y = 0.5x + 1$
$y = x + 0.5$ en $y = 2x + 4$

Oefening 10

Oplossingen zijn o.a. de rechten:

$y = -2(x + 1)$ en $y = x - 3$
$y = x + 1$ en $y = -2x + 6$
$y = 2(x + 1)$ en $y = -x + 3$