1 Inleiding

Frequent gebruik van een grafische rekenmachine kan bijdragen tot het beter integreren van bepaalde deelgebieden van wiskunde.
Technieken voor het oplossen van vergelijkingen en ongelijkheden kunnen in een ander daglicht komen te staan. Vaardigheden zoals schattend rekenen, lezen van grafieken, schetsen van grafieken, grafisch bepalen van nulwaarden, grafisch benaderen van snijpunten, van extreme waarden, … zullen aan belang winnen.

In de derde graad is het onderzoek van een reële functie nu vaak nodig om de grafiek zelf te kunnen tekenen. Met de beschikbare technologische hulpmiddelen zal men zich meer kunnen oriënteren op een probleem en een probleem verder analyseren zonder dat vooraf berekeningen moeten uitgevoerd worden om te komen tot de grafische voorstelling. De grafiek kan meer en meer het onderwerp zijn van een onderzoek.
In de tweede graad kunnen we de leerlingen met een GRM volgende vaardigheden aanleren bij de studie van reële functies:

- de techniek en het nut van 'inzoomen' op grafieken;
- het kiezen van een relevant assenstelsel;
- het grafisch bepalen van nulwaarden;
- het doorlopen van een grafiek;
- het aflezen van extreme waarden;
- het gebruiken en interpreteren van tabellen;
- een kritische ingesteldheid t.o.v. bekomen resultaten …

Het verwerven van deze vaardigheden kan geïntegreerd verlopen bij het oplossen van diverse oefeningen en toepassingen. Dit kan dan ook leiden tot meer inzicht in de begrippen.
Bij praktische problemen wordt er vaak met een beperkt domein en bereik gewerkt hoewel dit niet altijd geëxpliciteerd wordt. Het inzien van deze beperkingen is belangrijk voor het bepalen van de instellingen van het venster en het interpreteren van de grafiek.

Als leerlingen over een GRM beschikken kunnen ze er ook een gewoonte van maken de GRM zoveel mogelijk als controle-instrument te gebruiken.

Hoewel leerlingen weinig of geen drempelvrees hebben ten aanzien van moderne technologie, moet hen geleerd worden hoe zij met deze machine efficiënt kunnen werken in de wiskundeles. Het is immers de bedoeling dat dit toestel hun (hopelijk) vertrouwd wetenschappelijk toestel vervangt.

2 Rijen

1 Inleiding

"In de eerste graad hebben leerlingen kennis gemaakt met het opzoeken van patronen in figuren, in rijen getallen,…. Dit krijgt een vervolg in de begrippen rekenkundige en meetkundige rij. Die zijn op hun beurt voorbeelden van een discrete beschrijving van lineaire groei (zie de eerstegraadsfunctie in het eerste leerjaar van de tweede graad) en exponentiële groei (zie de exponentiële functie in de derde graad). De behandeling van dit onderdeel zal daarom aansluiten bij voldoende concrete voorbeelden.

2 Inleidende voorbeelden

2.1 Voorbeeld

In de tabel zijn witte en zwarte schijfjes getekend volgens een bepaald patroon.

Nummer	1	2	3
Figuur	o o o o	o o o o • o o o o	o o o o o • • o o • • o o o o o
Totaal aantal zwarte schijfjes	0	1	4
Totaal aantal witte Schijfjes	4	8	12

Totaal aantal schijfjes	4	9	16

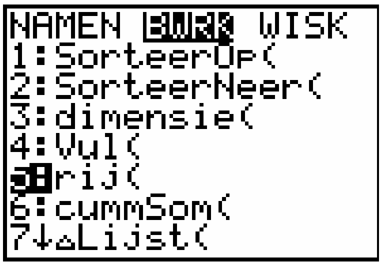
- Stel een formule op voor de rij van de zwarte schijfjes: $\left((n-1)^2\right)$
- Stel een formule op voor de rij van de witte schijfjes: $(4n)$
- Stel een formule op voor de rij van het totaal aantal schijfjes: $\left((n+1)^2\right)$

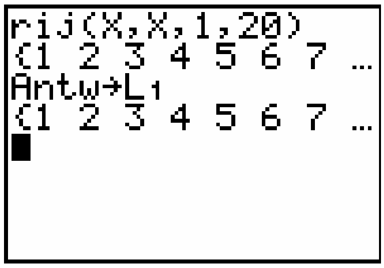
Controle: $(n-1)^2 + 4n = (n+1)^2$

2.2 Een lijst opbouwen vanuit een formule

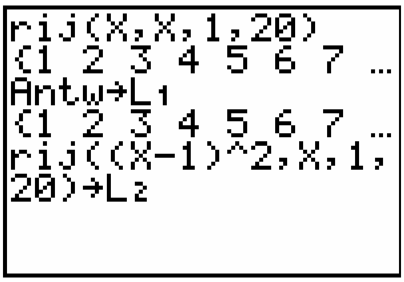
Via y … (LIST), BWRK, 5:rij(kan men voor vorige patronen een lijst maken met de aantallen zwarte of witte schijfjes voor de opeenvolgende stappen.

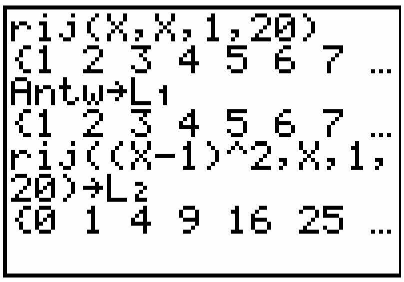
Wij maken eerst een lijst met de getallen van 1 tot en met 20. Wij willen de aantallen schijfjes voor de eerste twintig stappen.

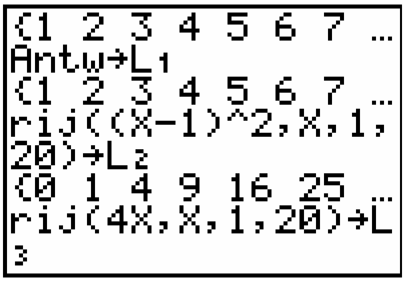


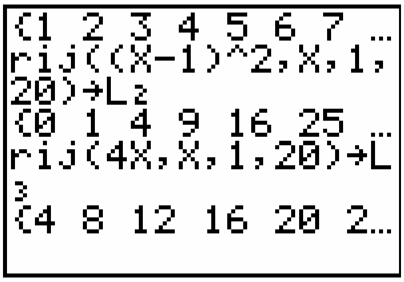


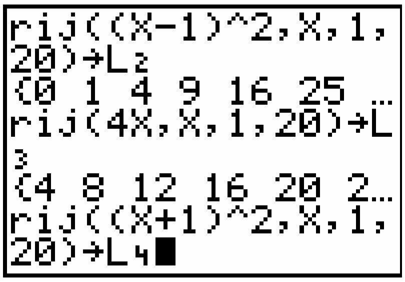
De getallen van 1 tot en met 20 worden in L_1 geplaatst. De aantallen zwarte en witte schijven en ook het totaal worden in de lijsten L_2, L_3 en L_4 geplaatst.

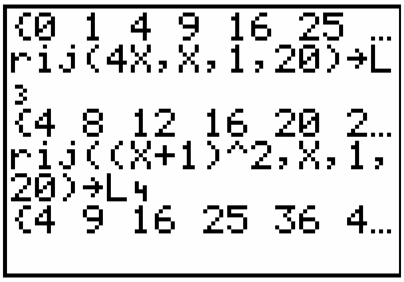




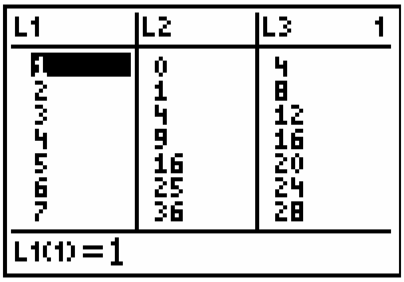








Via … , EDIT, 1:bewerken kan men de lijsten samen zien.



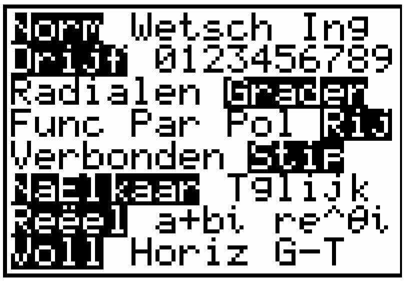
3 Expliciete en recursieve voorschriften

Het voorschrift van een rij kan gegeven worden in een directe of expliciete gedaante, maar ook in een recursieve gedaante.

3.1 Werken met een direct voorschrift voor een rij

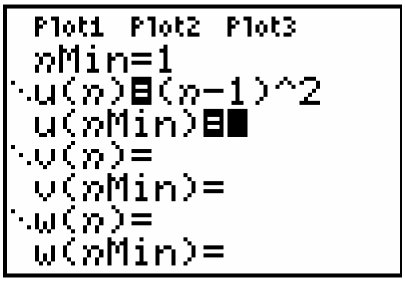
De rijen die behoren bij de vorige patronen hebben een eenvoudig expliciet voorschrift. Om deze voorschriften in te voeren moeten de instellingen voor de machine gewijzigd worden. Het toestel moet voorschriften voor rijen kunnen accepteren.

Dit gebeurt via z .

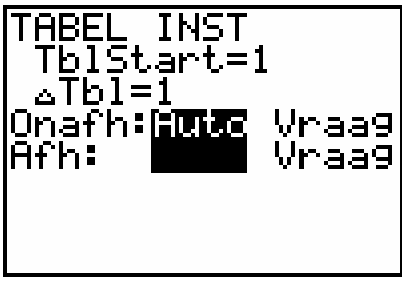


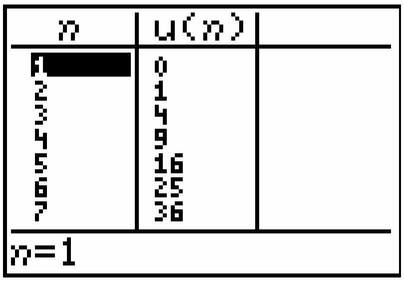
In de Y-editor kan men het voorschrift invoeren. Leerlingen die in het derde jaar reeds gewerkt hebben met een TI83+ zullen snel doorhebben dat hier een variant getoond wordt van het invoerscherm voor (eerstegraads)functies. Op die manier ontstaat op een intuïtieve manier het idee dat rijen ook functies zijn. Bovendien hebben functies een grafiek en een tabel. Rijen zullen dat waarschijnlijk ook hebben.

Voor de zwarte schijfjes geldt:



De tabel van deze rij is



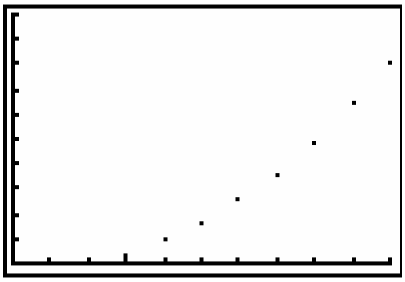


Merk op dat in de TI83+ drie rijen kunnen ingevoerd worden:u, v en w. De namen van deze rijen zijn ook op het “toetsenbord” terug te vinden.

Ook de grafiek van de rij kan getekend worden. Net zoals bij functies moet er aandacht besteed worden aan het invoeren van geschikte vensterinstellingen. Deze instellingen zien er nu ook enigszins anders uit.

```
VENSTER
 nMin=█
 nMax=10
 PlotStart=1
 PlotStap=1
 Xmin=0
 Xmax=10
↓Xschaal=1
```

```
VENSTER
↑PlotStap=1
 Xmin=0
 Xmax=10
 Xschaal=1
 Ymin=0
 Ymax=100
 Yschaal=10
```



Ook in het home-venster kan men waarden van de rij terugvinden. Bijvoorbeeld, hoeveel zwarte schijven zijn er na de tiende en na de dertigste stap. M.a.w. waaraan zijn de tiende en de dertigste term van de rij gelijk?

```
u(10)
                81
u(30)
               841
█
```

Voer nu zelf in v en w de rijen in die horen bij de witte schijven en bij het totaal.

3.2 Werken met een recursief voorschrift voor een rij

Een heel mooie rij is natuurlijk de rij van Fibonacci. Bovendien is deze rij voor leerlingen praktisch uitsluitend weer te geven met een recursief voorschrift. Fibonacci-getallen komen voor in de natuur. Afhankelijk van de kwaliteit en de interesse van de leerlingen kan men deze rij in het vierde jaar of later in de derde graad koppelen aan de gulden snede en aan de meetkundige rij.

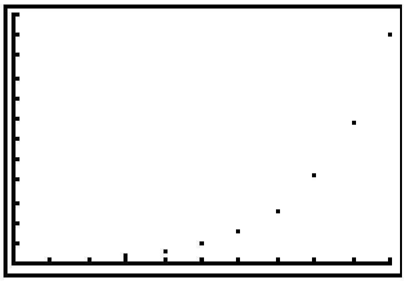
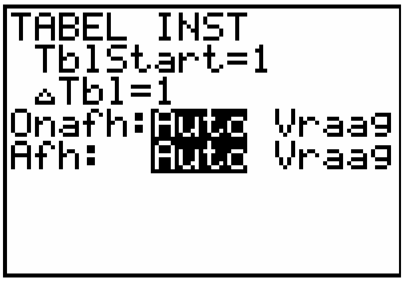
Fibonacci (bijnaam van Leonardo van Pisa) leefde omstreeks 1200 en beschreef deze rij in zijn ‘Liber Abaci’. Dit boek bevatte bijna alle wiskundige kennis waarover men in die tijd beschikte. In plaats van Romeinse cijfers gebruikte hij als eerste wiskundige het Indisch talstelsel met het cijfer 0.
Ook het (gekende) “konijnenprobleem”:

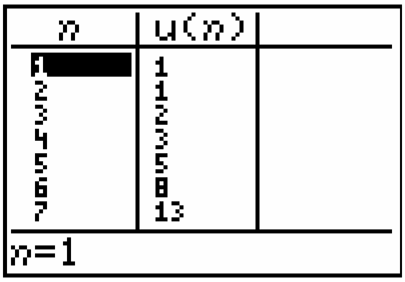
hoeveel konijnen zijn er na één jaar, uitgaande van één enkel paar dat zich vanaf de tweede maand begint voort te planten en daarbij elke maand een nieuw paar produceert dat zich ook weer vanaf de tweede maand begint voort te planten...), dat eveneens leidt tot de rij van Fibonacci, komt uit de Liber Abaci.

Voor de rij van Fibonacci geldt:

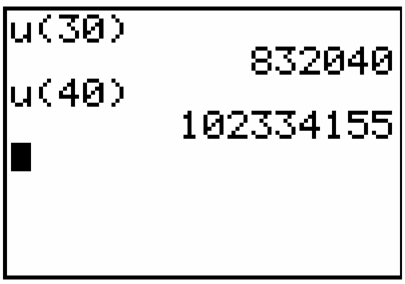
- er zijn twee begintermen: $u_1 = u_2 = 1$
- je krijgt de $n+2$-de term van de rij door de n-de en de $n+1$-de term op te tellen, dus $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ of geschikter voor de TI83+ $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$

De rij van Fibonacci met het rijen-invoerscherm



Bereken tenslotte de dertigste en de veertigste term van de rij van Fibonacci via het home-venster.



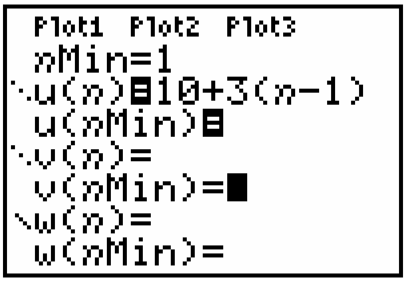
4 Rekenkundige en meetkundige rijen

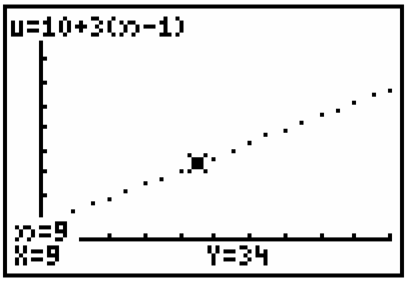
4.1 Rekenkundige rijen

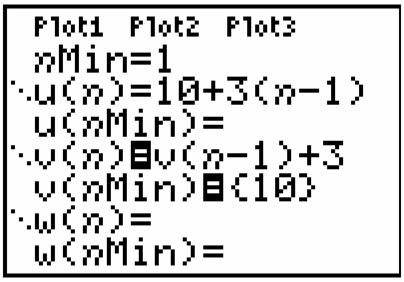
4.1.1 Voorbeeld 1

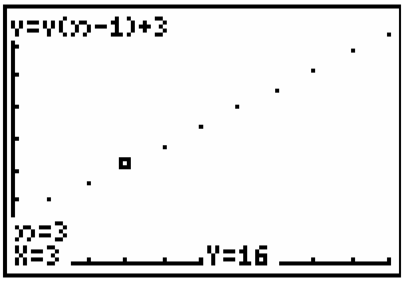
Bij een sponsorloop krijgt Tom van zijn vader een startpremie van € 10 voor het lopen van het eerste parcours en voor elk volgend parcours dat hij afwerkt krijgt hij er nog eens € 3 bij.

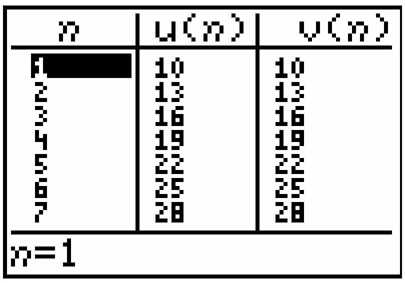
De bedragen 10, 13, 16, … vormen een rekenkundige rij.
Voor deze rij kan men zowel een expliciet als een recursief voorschrift geven. Ook de grafiek kan getekend worden. Laat leerlingen het verband opmerken met de eerstegraadsfuncties.











4.1.2 Voorbeeld 2

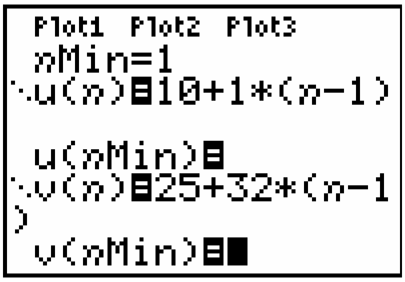
Bij een dieptetoename van 32 m in de aarde vermeerdert de temperatuur met 1°C. Veronderstel dat op een diepte van 25 m een temperatuur van 10°C heerst.

- Op welke diepte is de temperatuur 30°C,
- Welke temperatuur heerst er in een mijnschacht op een diepte van 985 m?

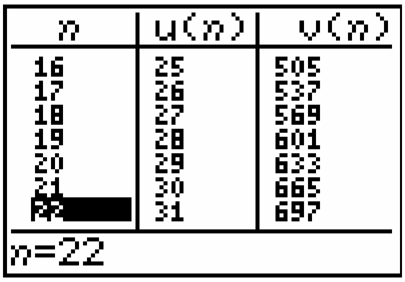
Met dit probleem kan men twee rekenkundige rijen associëren:

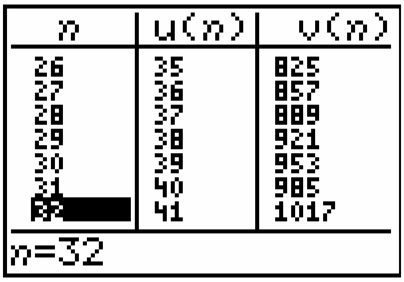
- de temperatuur vormt een rekenkundige rij met eerste term 10 en verschil 1,
- de diepte vormt een rekenkundige rij met eerste term 25 en verschil 32.

Het voorschrift kan weer zowel expliciet als recursief in gevoerd worden.



In de tabel kan men de temperatuur op een bepaalde diepte aflezen en ook de diepte waar een bepaalde temperatuur heerst.



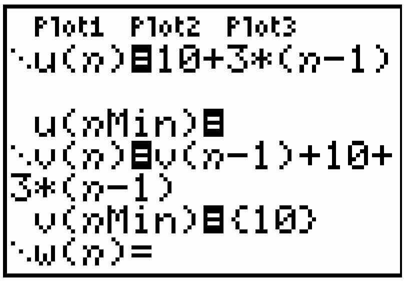


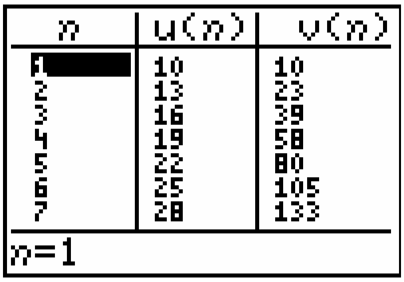
4.1.3 Voorbeeld 3

Men kan ook de som van een aantal termen van een rij berekenen. Men kan hiervoor de gekende formule voor rekenkundige rijen gebruiken, maar men kan ook gebruik maken van

$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

Voor de rij uit voorbeeld 1 wordt dit





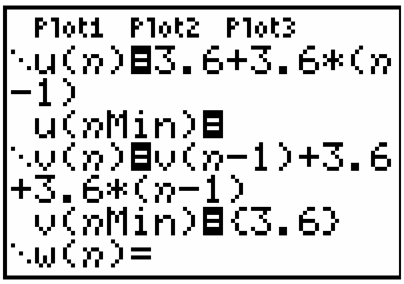
4.1.4 Voorbeeld 4

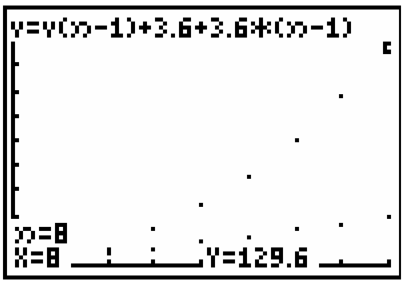
Voor een aardappelrace tijdens een zomerkamp van de scouts worden 8 aardappelen op een rechte lijn gelegd, telkens 1,8 m van elkaar verwijderd. De eerste aardappel ligt 1,8 m van de mand. Elke deelnemer start bij de mand en brengt de aardappelen één voor één naar de mand. Welke is de totale afstand die door iedere deelnemer afgelegd wordt?

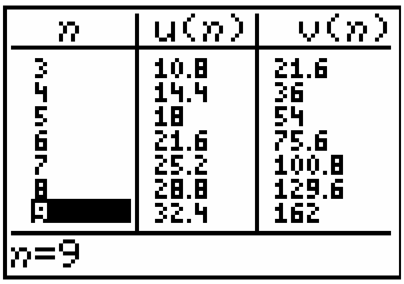
De afstanden door een deelnemer afgelegd worden om de opeenvolgende aardappelen naar de mand te brengen vormen een rekenkundige rij:

$$u_n = 3{,}6 + 3{,}6.(n-1)$$

De totale afstand is s_8.







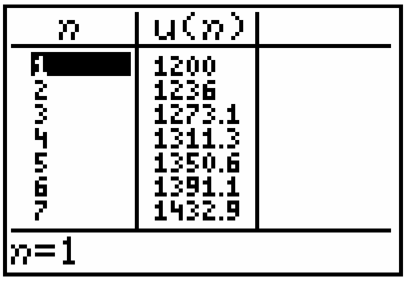
4.2 Meetkundige rijen

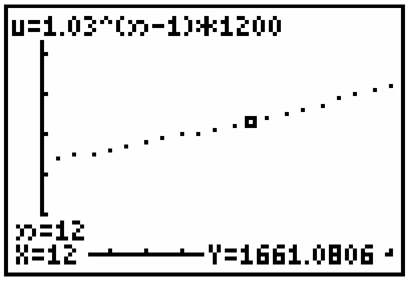
4.2.1 Voorbeeld 1

Katrien heeft een nieuwe job aan de volgende loonvoorwaarden: in het eerste werkjaar verdient ze € 1200 per maand en ieder jaar wordt haar maandsalaris verhoogd met 3%.

De maandsalarissen van Katrien gedurende de opeenvolgende jaren, nl. de bedragen 1200, 1236, 1273, … vormen een meetkundige rij.

Voor deze rij kan men zowel een expliciet als een recursief voorschrift geven. Ook de grafiek kan getekend worden.



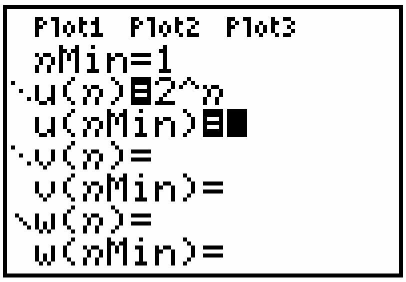


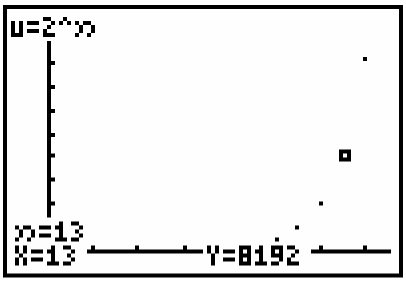
4.2.2 Voorbeeld 2

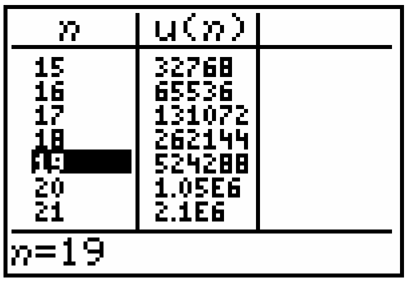
Kanker is nog altijd één van de belangrijkste doodsoorzaken. Een kwaadaardig gezwel ontstaat als een normale lichaamscel verandert in een tumorcel die zich dan verder op eigen houtje delen. Bij een eerste deling ontstaan 2 tumorcellen, bij de volgende vier, daarop acht, dan zestien, enz

Het aantal tumorcellen na n delingen vormt een rij 2, 4, 8, 16, … .

Geef een directe formule voor het aantal tumorcellen na n delingen. Voer ze in in het rijen-invoerscherm. Stel de rij ook grafisch voor. Na hoeveel delingen zijn er meer dan een miljoen tumorcellen?

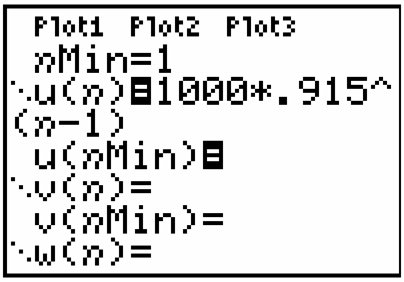


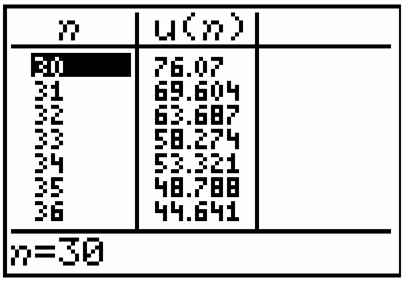


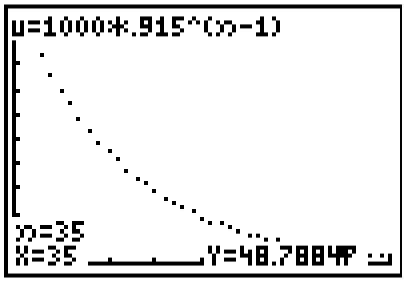


4.2.3 Voorbeeld 3

Een fout bij het aanmaken van brandstof voor de nucleaire opwerkingsfabriek in Tokai-Mura heeft op 30 september 1999 het ergste nucleaire ongeval ooit veroorzaakt in Japan. Bij deze kernramp is een hoeveelheid van het radioactief isotoop jodium 131 vrijgekomen. In een straal van 2 km rond de centrale werd tien keer de normale radioactieve waarde gemeten. Er werden 130 mensen uit de buurt geëvacueerd. Neem aan dat in een gebied 1000 mg radioactief jodium neergekomen is en dat door radioactief verval van de isotoop er elke dag 91,5% van de massa van de vorige dag overblijft. Na hoeveel dagen bevat het gebied minder dan 50 mg radioactief jodium?







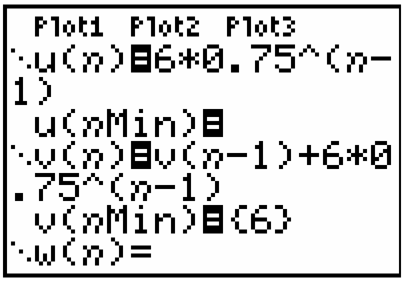
4.2.4 Voorbeeld 4

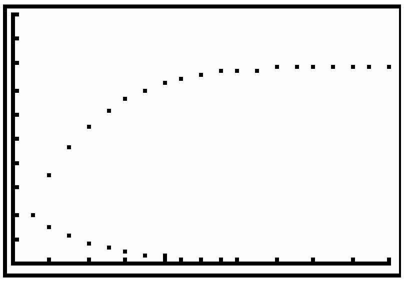
Men kan ook hier de som van een aantal termen van een rij berekenen. Men kan hiervoor de gekende formule voor meetkundige rijen gebruiken, maar men kan ook gebruik maken van

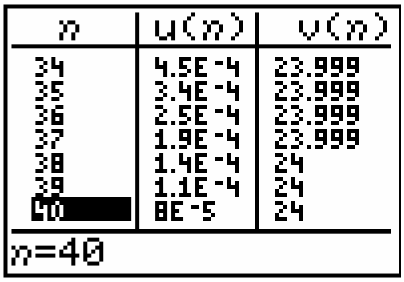
$$s_n = s_{n-1} + u_n$$

Een balletje wordt van op de grond 3 m omhoog gegooid. Het balletje verliest na elke bots 25% van de hoogte vanwaar het wordt losgelaten.

- Bereken de afstand die het balletje afgelegd heeft na 10 keer gebotst te hebben.
- Bereken de afstand die het balletje afgelegd heeft nadat het tot rust gekomen is.







5 Toepassingen

1. Gegeven:

   de rij u_n: 520, 528, 536, 544, 552, …

   de rij v_n: 8; 12; 18; 27; 40,5, …

   - Geef van elke rij een directe en een recursieve formule.
   - Voer de directe formules in en bepaal vanaf welke n er geldt dat $u_n < v_n$.

2. Gegeven is de rij $\frac{5}{11}, \frac{9}{16}, \frac{13}{21}, \frac{17}{26}, \frac{21}{31}, \frac{25}{36}, \frac{29}{41}, \ldots$

   - Noteer van de rij getallen in de tellers de directe en de recursieve formule.
   - Noteer van de rij getallen in de noemers de directe en de recursieve formule.
   - De getallen van de gegeven rij komen steeds dichter bij een bepaalde grenswaarde te liggen. Zoek deze grenswaarde door de rij in te voeren in de GRM. Welke waarde is dit? (eventueel: controleer grafisch).
   - Vanaf welke n is het verschil tussen u_n en de grenswaarde kleiner dan 0,01 ?

3. In een opslagtank zit op 1 januari 2001 4000 liter water. Elke dag wordt 25% van de aanwezige hoeveelheid water voor zuivering overgeheveld naar een andere tank. De opslagtank wordt verder elke dag aangevuld met 600 liter water. De eerste keer gebeurt dit op 2 januari.

- Noteer de recursieve formule die deze situatie beschrijft. Welk soort rij bekom je hier?
- De hoeveelheid water in de opslagtank komt niet beneden een zekere grenswaarde. Onderzoek met de GRM welke waarde dit is.

4. Gegeven is een vierkant ABCD met zijde gelijk aan 15 cm. In dit vierkant wordt een kleiner vierkant PQRS getekend zodat $|AP| = |BQ| = |CR| = |DS| = \frac{1}{3}\,|AB|$. In dit vierkant PQRS wordt op dezelfde manier een vierkant KLMN getekend zodat $|PK| = \frac{1}{3}\,|PQ|$ enz. Dit procédé wordt voortdurend herhaald.
   - De lengten van de zijden van de opeenvolgende vierkanten vormen een meetkundige rij. Bepaal de reden van deze meetkundige rij (exact!).
   - Geef een directe formule voor de zijde van het n-de vierkant (n = 1 is het gegeven vierkant ABCD).
   - Bepaal met behulp van GRM vanaf welke n je een vierkant bekomt waarvan de zijden korter zijn dan 1 cm.
   - Geef de directe formule voor de oppervlakte van het n-de vierkant.
   - Bepaal met behulp van GRM vanaf welke n je een vierkant bekomt waarvan de oppervlakte minder dan 0,1 cm^2 is.

5. Mathilde opent op 1 januari 2000 een spaarrekening en stort er € 1250 op. De bank geeft een jaarlijkse intrest van 5%.
   - Geef een recursieve formule voor het tegoed op de spaarrekening.
   - Hoeveel jaar duurt het vooraleer het tegoed op deze rekening verdubbeld is?
   - Mathilde vindt dat het te lang duurt vooraleer haar tegoed verdubbeld is. Ze laat daarom met ingang van 1 januari 2001 jaarlijks een bedrag van € 100 BEF op deze rekening bijschrijven. Geef nu bij deze situatie een recursieve formule. Hoelang duurt het nu vooraleer het tegoed op deze rekening verdubbeld is?

6. Sofie rijdt bij het schaatsen 25 rondjes van 400 meter. Voor de eerste ronde heeft ze 34 seconden nodig en vervolgens rijdt ze bij elke rond 0,15 seconde langzamer dan de voorafgaande ronde. Waaraan is haar eindtijd gelijk?

7. Gegeven is de eerstegraadsfunctie $f(x) = 10 - 2x$. Vanuit f kan je een rij maken als volgt: $u_1 = f(0)$ $, u_2 = f(1)$ $, u_3 = f(2)$, ...

   Noteer de eerste zes termen van deze rij. Noteer de recursieve formule voor deze rij. Welk soort rij bekom je? Wat weet je over de grafische voorstelling van deze rij?

8. Analoog met 7 maar met de functie $f(x) = 10.2^x$. Controleer grafisch.

9. Een bosbouwer exploiteert een perceel waar 3000 bomen staan. Elk jaar kapt hij 15 % van de bomen en plant hij er 800 bij. Het aantal bomen op het perceel vormt een rij B_n.

   - $B_1 = 3000$. Bepaal B_2 ,B_3 ,B_4 en B_5 met behulp van de ANS-routine
   - Leg uit dat men het aantal bomen bij het begin van het 4-de jaar kan berekenen met

   $$B_4 = 0,85^3.3000 + 800.\frac{(1 - 0,85^3)}{0,15}$$

   - Het aantal bomen op het perceel wordt na verloop van tijd min of meer stabiel. Onderzoek na hoeveel jaar dit het geval is. Hoeveel bomen staan er dan op het perceel?

3 Reële functies

6 Inleiding

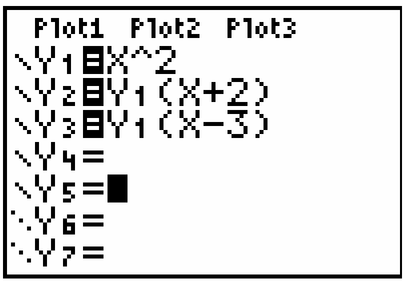
6.1 Leerplandoelstellingen vierde jaar

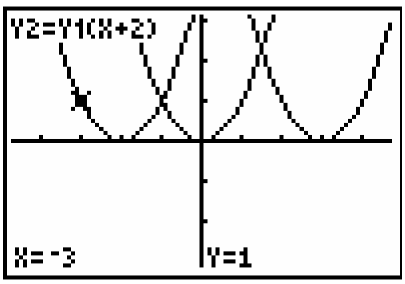
- de grafiek schetsen van de functies met voorschrift $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$
- uit een grafiek van een aantal hoger genoemde functies met als voorschrift $f(x)$ de grafiek van de functies met voorschrift $f(x) + k$, $f(x + k)$, $k.f(x)$ opbouwen
- uit de grafiek van een aantal hoger genoemde functies het domein, het bereik, de nulwaarden, de tekenverandering, het stijgen en dalen, het voorkomen van een extreme waarde, de symmetrie in de grafiek afleiden
- vraagstukken die kunnen gesteld worden met behulp van een van de hoger genoemde functies oplossen gebruik makend van haar grafiek

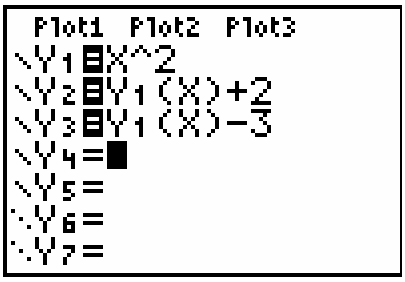
7 Voorbeeld 1

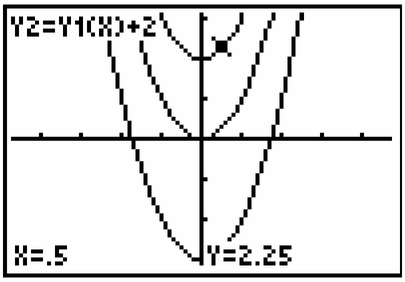
Teken de grafiek van $f(x) = x^2$.

Teken nadien de grafieken van $y = f(x + k)$ of $y = (x + k)^2$ voor verschillende waarden van k. Leid hieruit de vorm van de transformatie af.



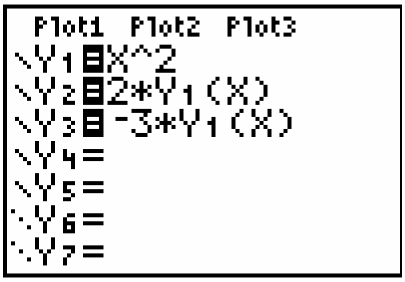


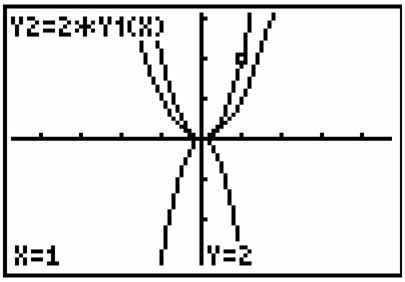




Vorige figuren zijn grafieken van de vorm $f(x)+k$ of x^2+k .

Tenslotte tekent men ook grafieken van de vorm $k.f(x)$ of $k.x^2$.





8 Voorbeeld 2

Teken de grafiek van $f(x)=\sqrt{x}$.

De grafiek wordt 2 naar rechts en 3 naar omhoog verschoven.

Noteer het functievoorschrift dat hoort bij de verschoven grafiek.

Controleer door de grafiek te laten tekenen met een GRM.

Doe hetzelfde voor $g(x)=\dfrac{1}{x}$

9 Voorbeeld 3

Laat de grafieken tekenen van $f(x)=(x-3)^2-2$ en $g(x)=\sqrt{x+4}+2$.

Hoeveel snijpunten hebben deze grafieken?

Benader door grafische aflezing de coördinaat van het (de) snijpunt(en).

Hoeveel snijpunten zijn er als je in het voorschrift van f "3" vervangt door "1"? Noteer eerst je antwoord en controleer dan met GRM
Hoeveel snijpunten zijn er als je in het voorschrift van g "+2" vervangt door "-2"? Noteer eerst je antwoord en controleer dan met de GRM.

10 Voorbeeld 4

Ga uit van de basisfunctie $f(x) = \sqrt{x}$.
Schets de grafiek van deze functie.
Schets dan volgende grafieken en controleer door de grafiek te tekenen met GRM:

a. $y = \sqrt{x-4} + 2$
b. $y = 2 - \sqrt{x}$
c. $y = \sqrt{2x} + 1$

Noteer telkens : extreme waarden, stijgen, dalen, …

Een analoge toepassing is natuurlijk mogelijk voor de andere basisfuncties

4 Tweedegraadsfuncties en vergelijkingen van de tweede graad

11 Instap

Een leuke en gezonde instap in de problematiek van de tweedegraadsfuncties is de BMI (body mass index). Voor deze BMI geldt:

$$BMI = \frac{\text{massa in } kg}{\text{kwadraat van de lichaamslengte in } m}$$

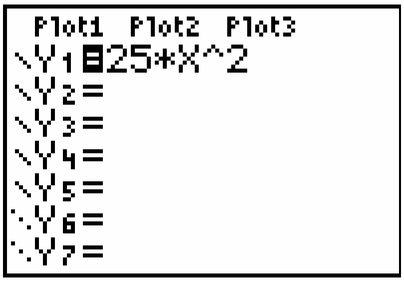
Bepaal het maximale gezond gewicht van een persoon in functie van zijn lengte, uitgedrukt in m, bij een ideale BMI van 25.
Hiervoor geldt

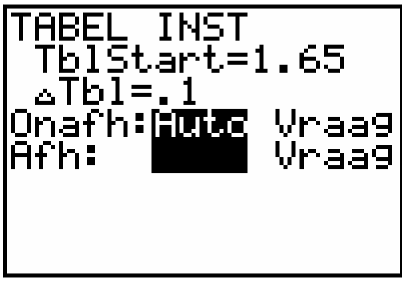
$$\text{massa in } kg = BMI.\text{kwadraat van de lichaamslengte in } m$$

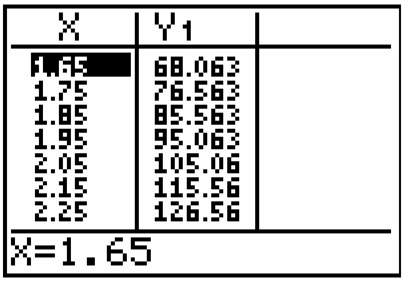
of in een meer wiskundige, en voor de TI83+ geschikte, vorm:

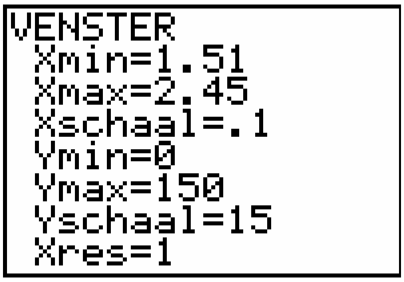
$$y = 25.x^2$$

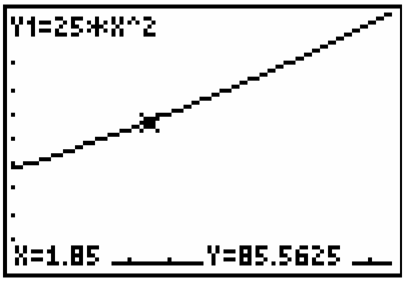
Voor deze functie heeft men weer het klassieke drietal: voorschrift, tabel en grafiek.
Merk op dat het eerste verband, met het gewicht in de rol van x gebruikt kan worden om eerstegraadsfuncties te herhalen.





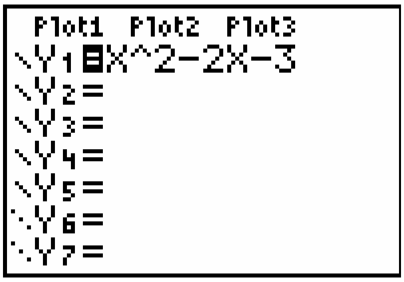


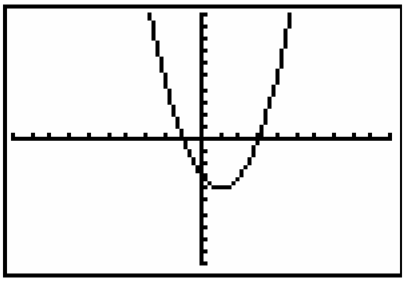


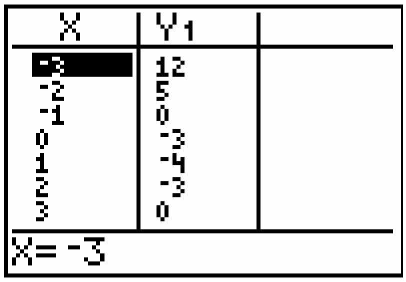


12 Eerste voorbeelden

$$y = x^2 - 2x - 3$$

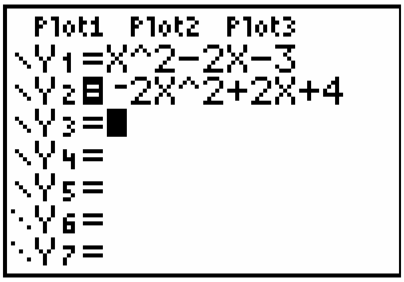


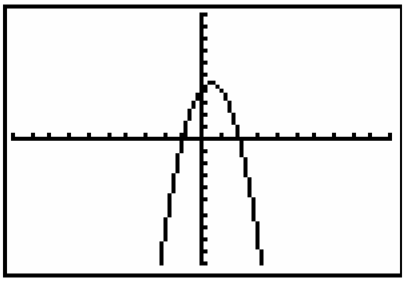
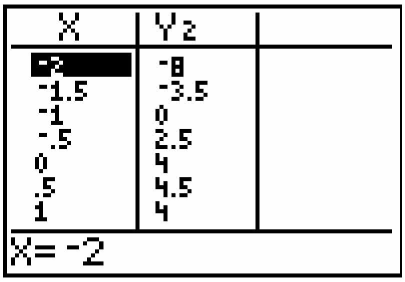




Zowel uit de grafiek als uit de tabel kan men gemakkelijk de symmetrieas en de top afleiden.

$$y = -2x^2 + 3x - 1$$



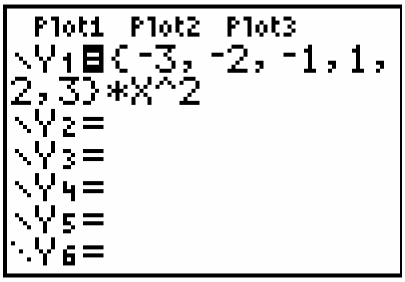



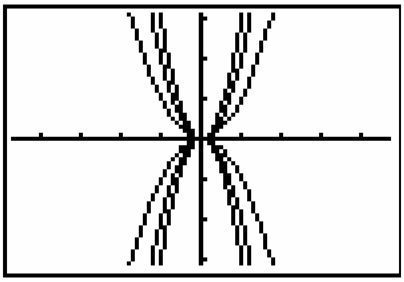
13 Invloed van de parameters a,b en c

Wij bekijken de invloed van de parameters in het algemene voorschrift van de tweedegraadsfunctie

$$y = a.x^2 + b.x + c$$

13.1 Invloed van de parameter a

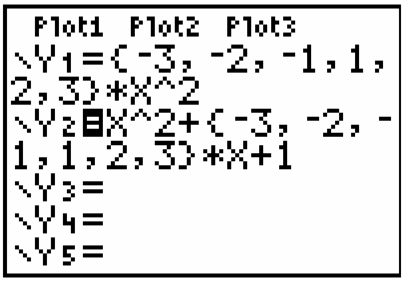


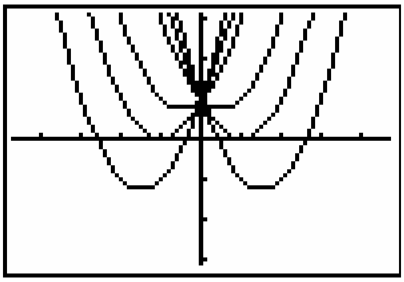


Het lijkt mij beter de leerlingen zelf te laten experimenteren met een zelfgekozen functie en zelfgekozen waarden voor a. Je kan achteraf een demonstratie geven met Cabri of met Derive die beiden een mooier beeld opleveren.
De rol van de parameter wordt duidelijk uit de verschillende figuren.

13.2 Invloed van de parameter b

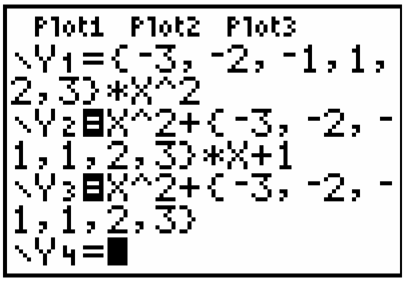
Er gelden dezelfde opmerkingen als voor a.

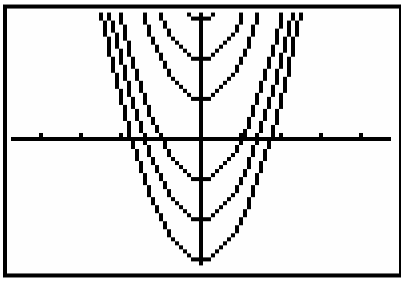




De invloed van deze parameter is veel minder duidelijk. Als de waarden tegengesteld zijn, dan zijn de grafieken gespiegeld t.o.v. de x-as. De waarde van b beinvloedt de positie van de grafiek t.o.v. de x-as, maar de positie t.o.v. y is gewijzigd. De machine geeft in dit geval geen definitief uitsluitsel. Hieruit blijkt nogmaals dat het toestel niet alle problemen oplost. (In feite kan het toestel geen enkel probleem oplossen, het kan immers niet denken).

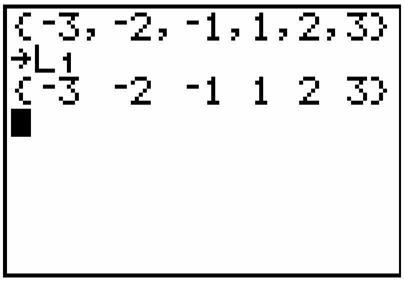
13.3 Invloed van de parameter *c*

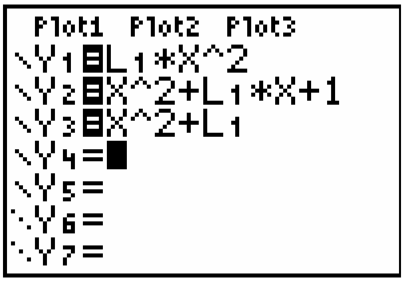


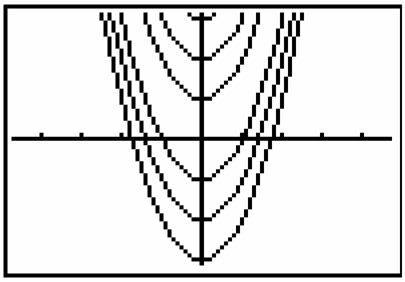


De rol van deze parameter is dan weer heel duidelijk.

Merk op dat wij telkens dezelfde waarden toegekend hebben aan elke parameter. Men kan deze waarden opslaan in een lijst en nadien de lijst oproepen in het functievoorschrift.



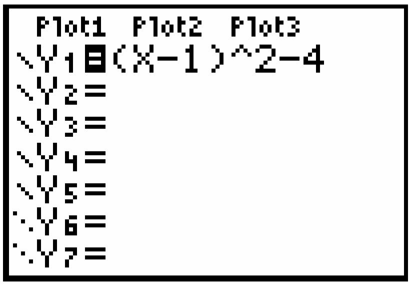


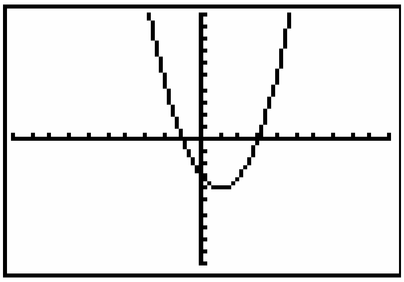


14 Het voorschrift $y = a.(x-\alpha)^2 + \beta$

14.1 Voorbeeld 1

- $y = (x-1)^2$ volgt uit $y = x^2$ door een verschuiving bepaald door het koppel $(1,0)$ of door een verschuiving over 1 naar rechts.
- $y = (x-1)^2 - 4$ volgt uit $y = (x-1)^2$ door een verschuiving bepaald door het koppel $(0,-4)$ of een verschuiving over 4 naar beneden.



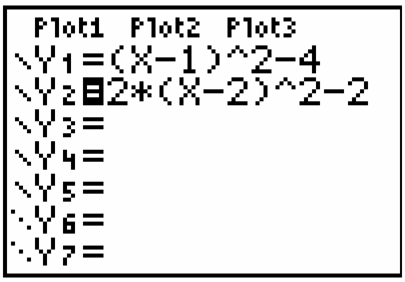


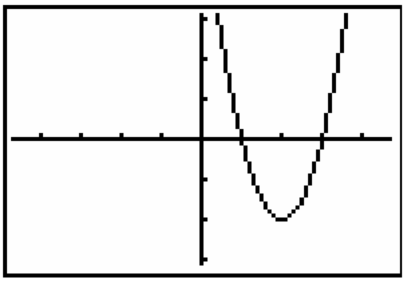
Verder:

- Uit de theorie van de transformaties kunnen wij afleiden dat $(1,-4)$ de coördinaat is van de top.
- Uitgewerkt geeft dit voorschrift $y = x^2 - 2x - 3$. Beide voorschriften stellen dezelfde functie voor, de grafieken vallen immers samen. (Ga dat na).

14.2 Voorbeeld 2

- $y = (x-2)^2$ volgt uit $y = x^2$ door een verschuiving bepaald door het koppel $(2,0)$ of door een verschuiving over 2 naar rechts.
- $y = 2.(x-2)^2$ volgt uit $y = (x-2)^2$ door een verschaling evenwijdig met de y-as met factor 2. De grafiek wordt tweemaal uitgetrokken langsheen de y-as.
- $y = 2.(x-2)^2 - 2$ volgt uit $y = 2.(x-2)^2$ door een verschuiving bepaald door het koppel $(0,-2)$ of een verschuiving over 2 naar beneden.





Verder:

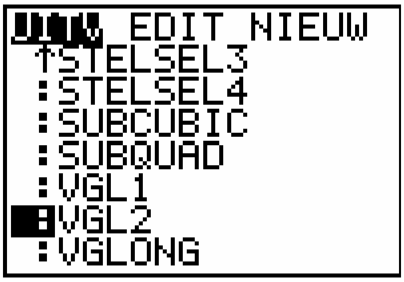
- Uit de theorie van de transformaties kunnen wij afleiden dat $(2,-2)$ de coördinaat is van de top.
- Uitgewerkt geeft dit voorschrift $y = 2.x^2 - 8x + 6$. Beide voorschriften stellen dezelfde functie voor, de grafieken vallen immers samen. (Ga dat na).

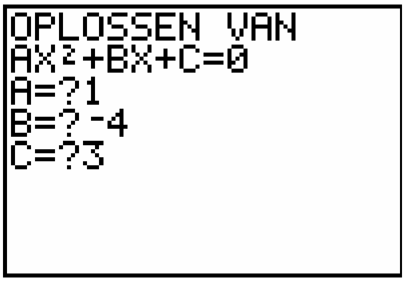
Deze voorbeelden zijn niet voldoende om algemeen uit de waarden van a, b en c de waarden van α en β af te leiden. Waarschijnlijk komt er van de leerlingen zelfs geen voorstel voor de waarden van α en β. Een theoretische afleiding dringt zich dus op.

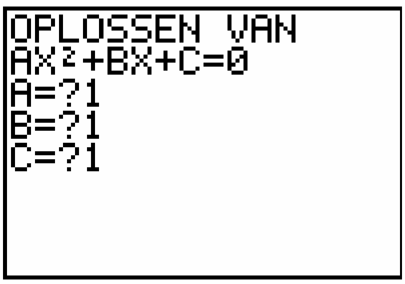
15 Nulwaarden van een tweedegraadsfunctie

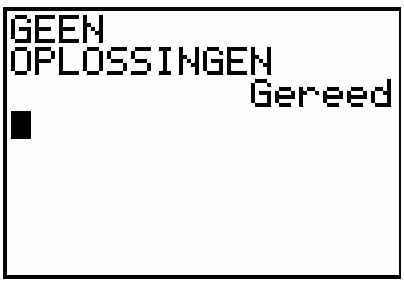
De nulwaarden van de tweedegraadsfunctie $y = a.x^2 + b.x + c$ zijn de oplossingen van de tweedegraadsvergelijking $a.x^2 + b.x + c = 0$.

De TI83+ beschikt standaard over een krachtige, maar numerieke methode om vergelijkingen op te lossen. Deze "oplosser" vindt dus maar één oplossing van een vergelijking. Gelukkig is er voor de TI83+ al heel wat bij geprogrammeerd. Het programma "VGL2" lost tweedegraadsvergelijkingen probleemlooos op.

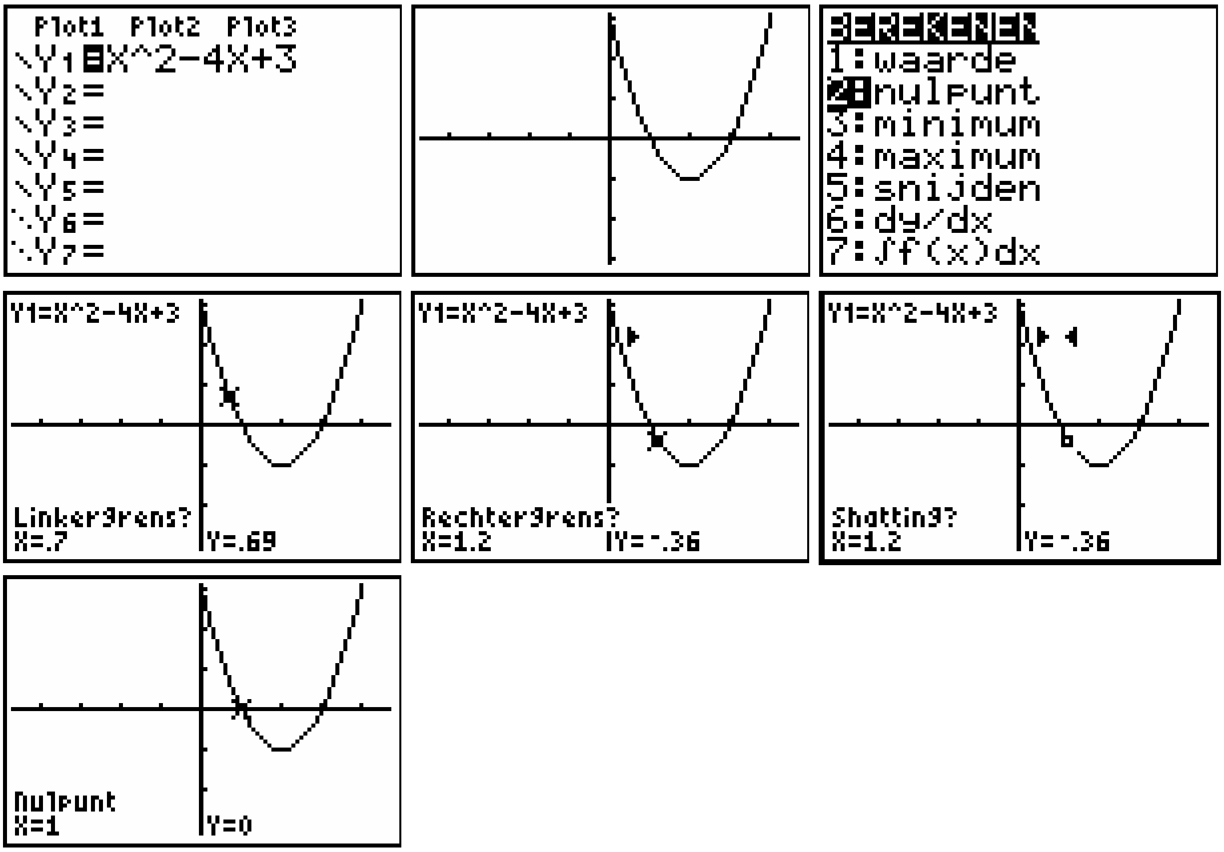








De nulwaarden kunnen natuurlijk ook grafisch gevonden worden.



Op analoge manier vindt men ook het andere nulpunt en dus ook de andere nulwaarde.

Ook met behulp van de tabel kunnen de nulwaarden teruggevonden worden. Om een goede benadering van de waarden te vinden zal men hierbij wel een aantal opeenvolgende verfijningen moeten uitvoeren. Toch kan men dit vrij eenvoudige geval hiervoor aangrijpen. Later zullen er immers vergelijkingen voorkomen waarvoor er geen algoritmische oplossingsmethodes bestaan en waar men dus grafisch en numeriek moet werken.

Merk ook op:

- Uit het voorschrift volgt eventueel een algoritmische oplossing,
- uit de grafiek volgt een grafische oplossing,
- uit de tabel volgt een numerieke oplossing.

16 Tekenverloop, stijgen en dalen

Het tekenverloop en ook het stijgen en dalen kan op eenvoudige wijze bestudeerd worden met goedgekozen voorbeelden en de grafieken op de TI.

17 Toepassingen

17.1 Voorbeeld 1

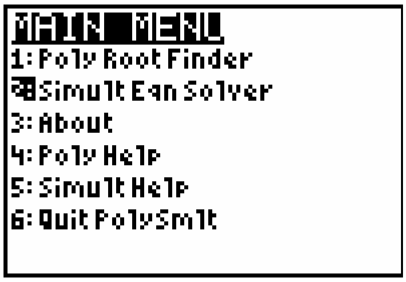
Stel de vergelijking op van de parabool, met as evenwijdig met de y-as, die door de punten $A(-4,-14)$, $B(1,-24)$ en $C(4,18)$ gaat.

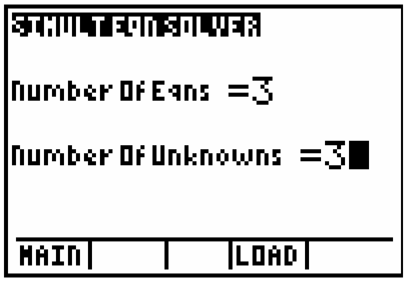
Oplossing:

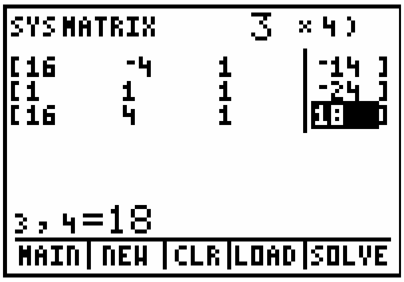
Dit probleem geeft aanleiding tot het stelsel

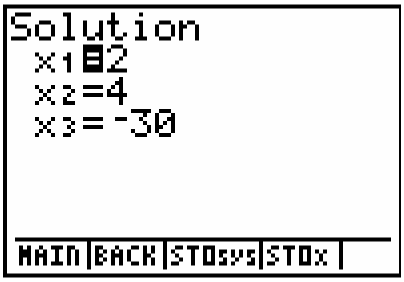
$$\begin{cases} 16a - 4b + c = -14 \\ a + b + c = -24 \\ 16a + 4b + c = 18 \end{cases}$$

Dit stelsel kan opgelost worden met de flash-applicatie “PolySmlt”.





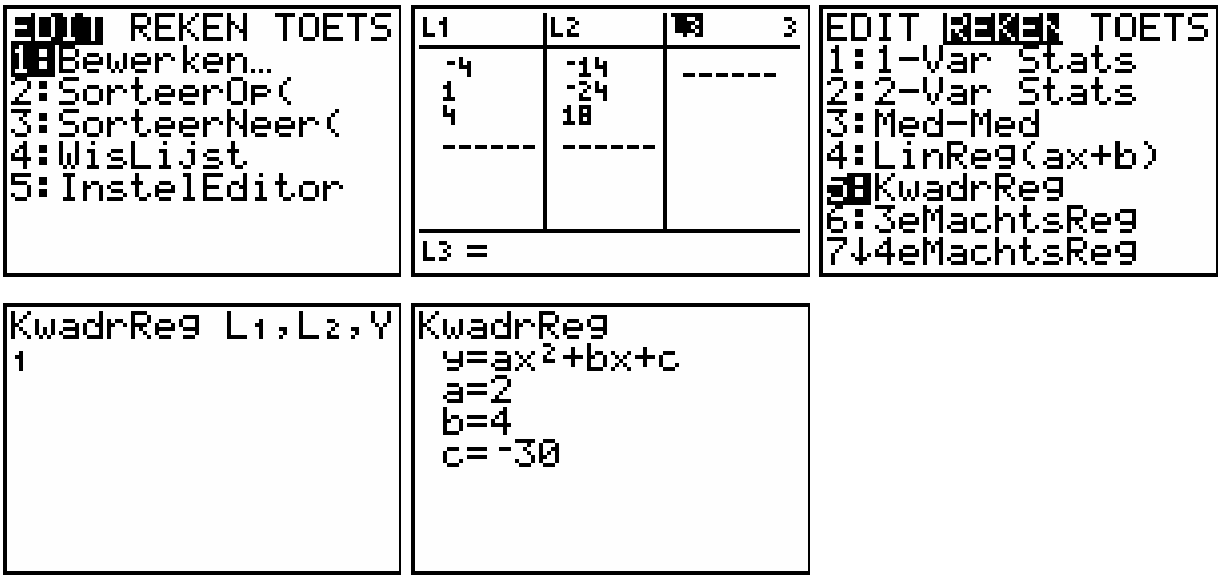




De gevraagde parabool heeft als voorschrift

$$y = 2x^2 + 4x - 30 = 0$$

Dit probleem kan ook opgelost worden via kwadratische regressie, voor de leerlingen een black-box methode.



De eerste coördinaatgetallen van de gegeven punten plaatst men via … in L_1, de tweede coördinaatgetallen in L_2. Met diezelfde toets vindt men de coëfficiënten van de tweedegraadsfunctie. Nadeel van deze methode is natuurlijk dat men ze voor de leerlingen weinig of niet kan verklaren.

17.2 Voorbeeld 2

Een leraar wiskunde was in zijn jonge jaren een goede verspringer. Een van zijn sprongen werd gegeven door de formule

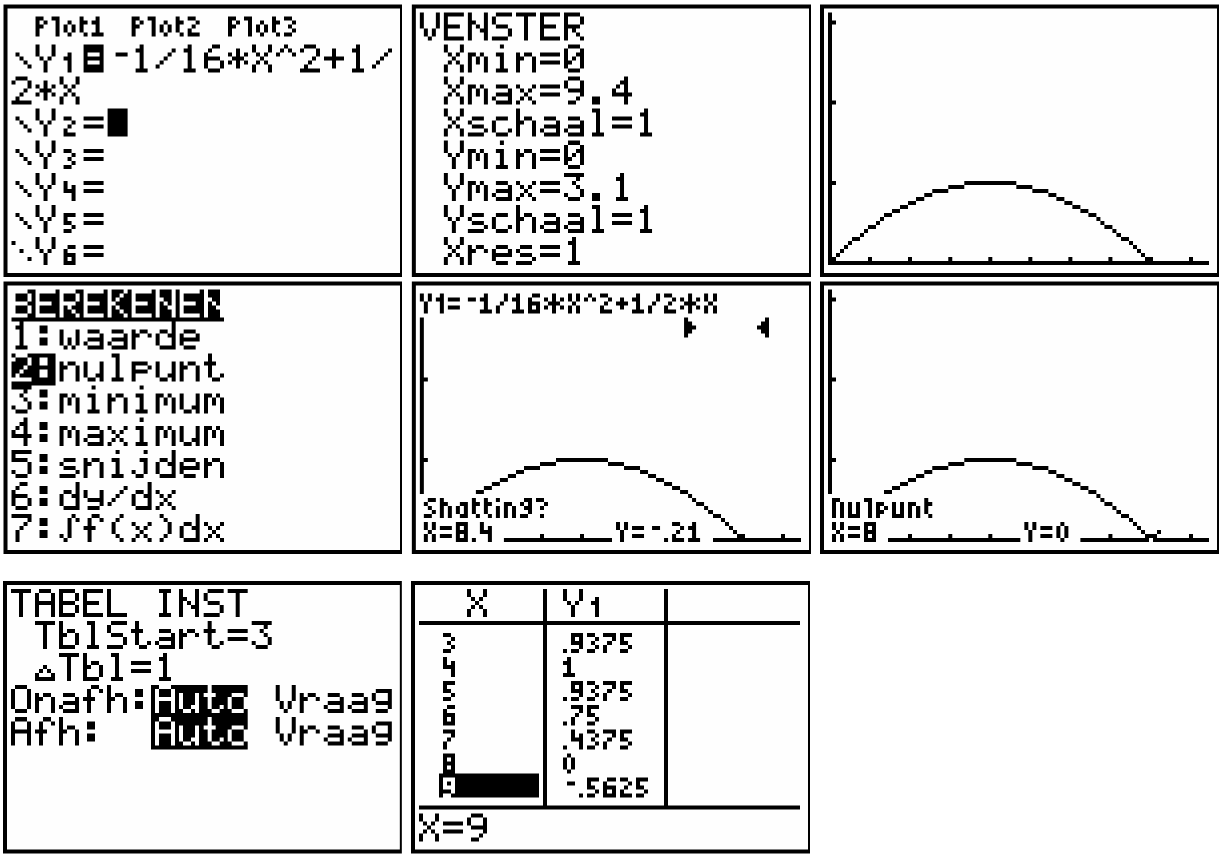
$$h = -\frac{1}{16}a^2 + \frac{1}{2}a$$

Hierbij is a de horizontale afstand vanaf de afzet (in meter) en h de hoogte (in meter). Kies een passende vensterinstelling en voer de formule in.

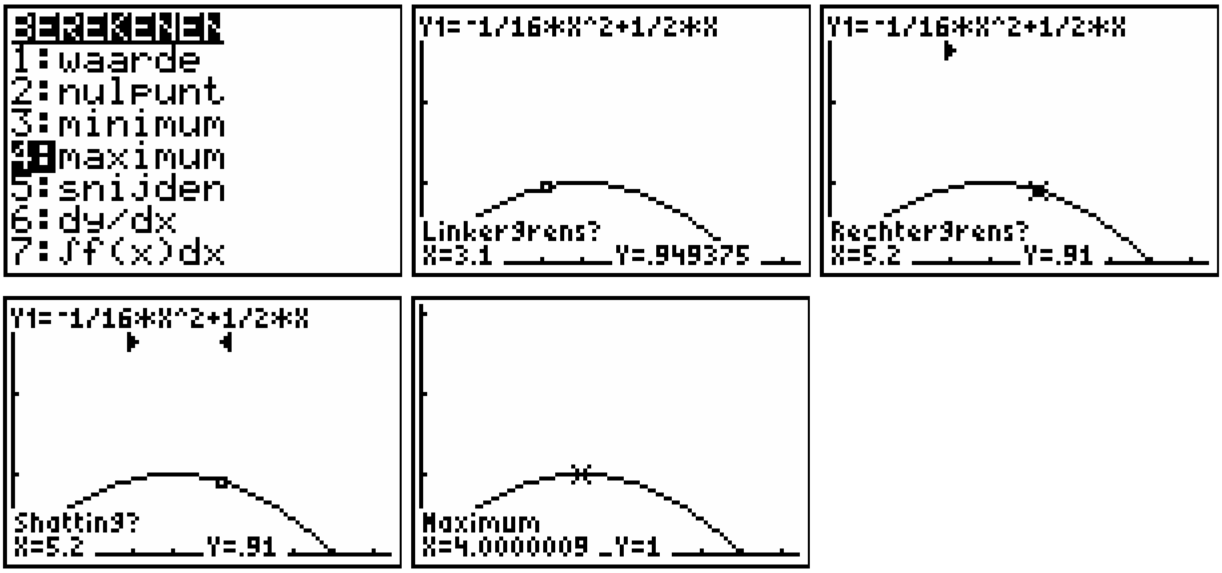
Bereken:

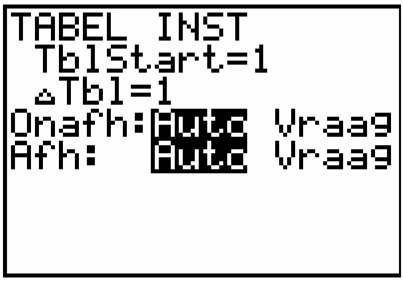
- Na hoeveel meter landde de leraar weer op de grond?
- Welke was de maximale hoogte tijdens de sprong?

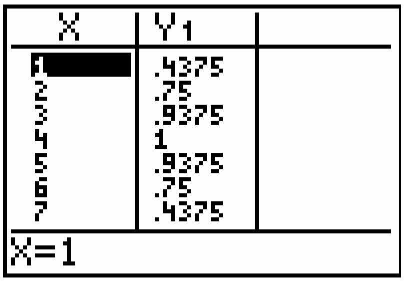
Oplossing:



De leraar sprong dus 8 meter ver.







De maximale hoogte die de leraar bereikte was 1 meter.

17.3 Voorbeeld 3

In een bakkerij wordt op een winterdag de temperatuur gegeven door de formule $T = -t^2 + 8.t + 10$. Hierin is T de temperatuur in °C en t is de tijd in uren met $t = 0$ om 5 uur ('s morgens).

Bereken de temperatuur om 6 uur en om 11 uur (in de voormiddag).

Noteer de formule zodat je ze kan gebruiken voor het tekenen van de grafiek. Kies passende vensterinstellingen.

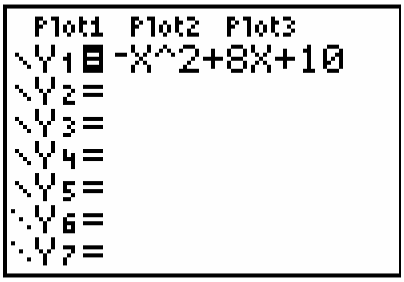
Teken de grafiek en controleer je antwoorden.

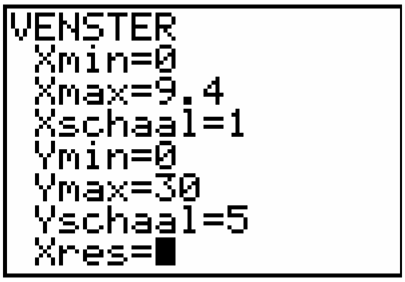
Bepaal grafisch hoe laat het is als de temperatuur zijn hoogste stand bereikt en controleer dan door berekening.

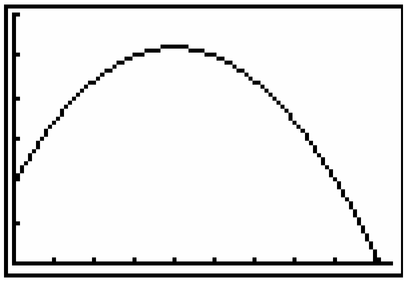
Als het 24° is of warmer is het niet meer zo aangenaam om te werken. Bepaal met GRM tussen welke tijdstippen dit het geval is.

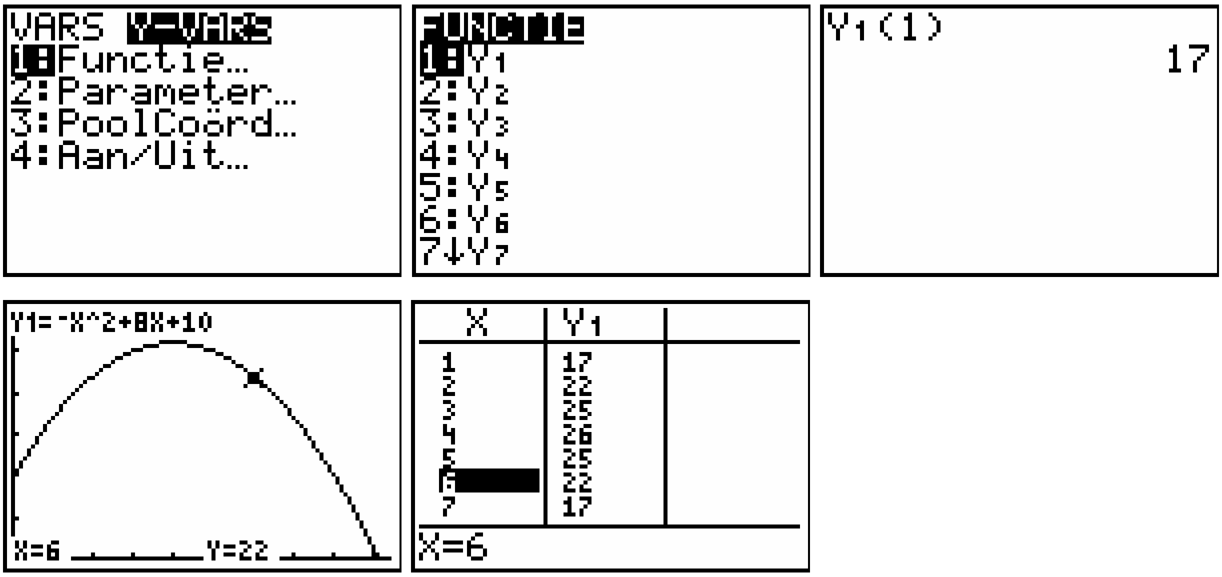
Op een zomerdag is de temperatuur in de bakkerij telkens 5°C hoger dan op een winterdag. Geef dan de formule voor T.

Vind je de gegeven formule die de temperatuur weergeeft op een winterdag realistisch ?

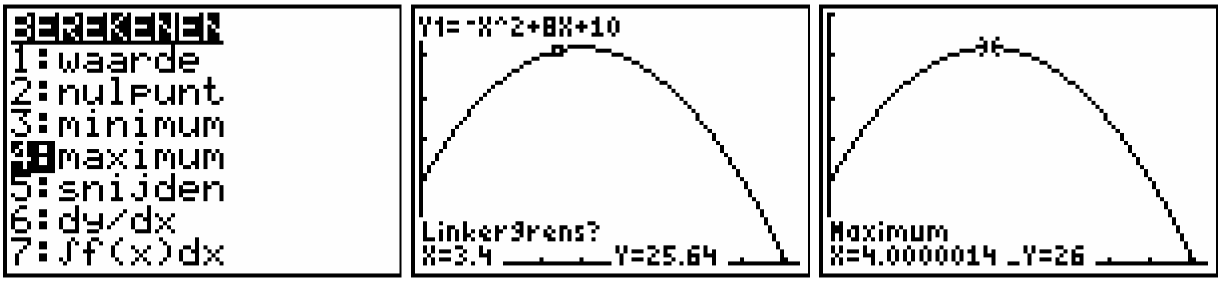




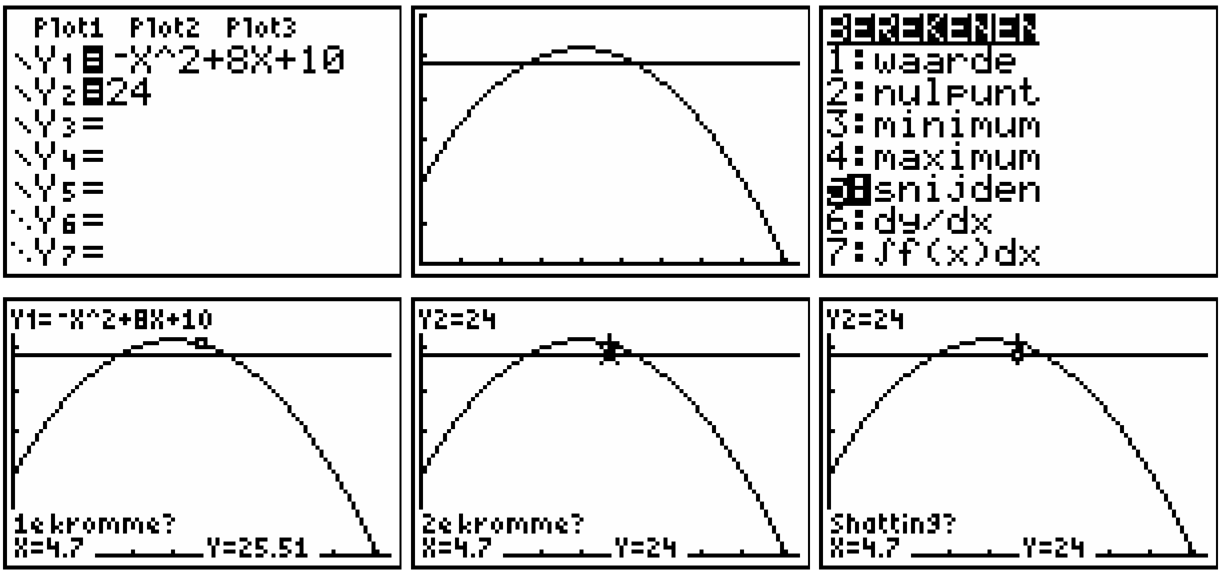


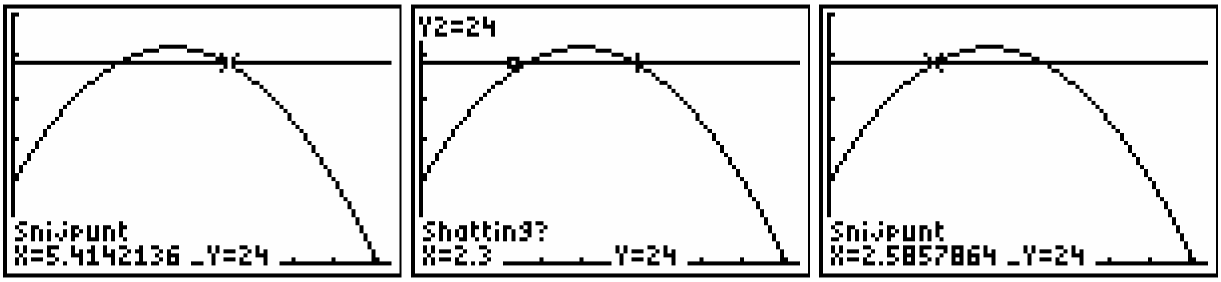


Bepaal grafisch hoe laat het is als de temperatuur zijn hoogste stand bereikt en controleer dan door berekening.



Bepaal met GRM tussen welke tijdstippen het warmer dan 24°C is.





Men kan nu berekenen dat het tussen 7.35 u en 10.25 u minder aangenaam is om te werken.

Op een zomerdag is de temperatuur in de bakkerij telkens 5°C hoger dan op een winterdag. Geef dan de formule voor T.

$$T = -t^2 + 8.t + 15$$

17.4 Voorbeeld 4

Een bedrijf wil affiches maken met een oppervlakte van 2 m². Deze affiches worden bedrukt zodat er aan de beide zijkanten en aan de bovenkant een witte strook van 15 cm overblijft. Aan de onderkant is deze strook 25 cm breed.
Het bedrukte deel is een vierkant.
Noteer een formule voor de oppervlakte als functie van de zijde.
Maak de bijhorende tabel en bepaal met behulp van deze tabel een waarde voor de zijde waarbij de oppervlakte gelijk is aan 2 m².
Teken dan de grafiek en lees af bij welke waarde(n) van z de oppervlakte gelijk is aan 2 m² (benaderen tot op een decimaal door inzoomen).
Bereken ook de waarde(n) van z waarbij de oppervlakte gelijk is aan 2 m².

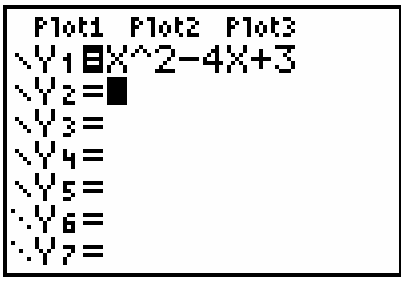
5 Ongelijkheden van de tweede graad

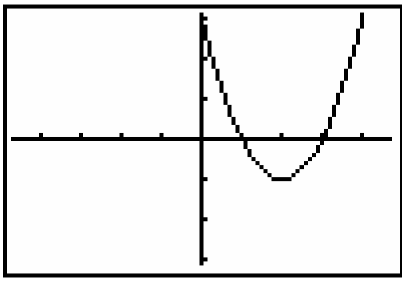
18 Voorbeeld 1

Los op in $\mathbb{R}$:

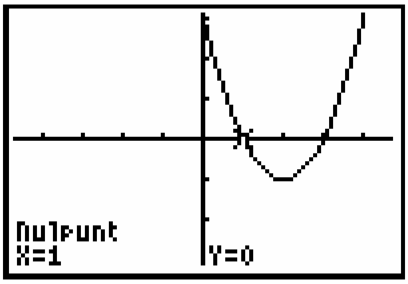
$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

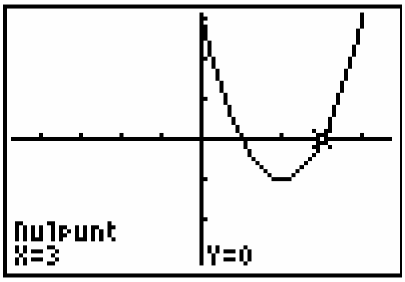
- Wij tekenen eerst de grafiek van $y = x^2 - 4x + 3$.





- Wij zoeken de nulwaarden van deze functie



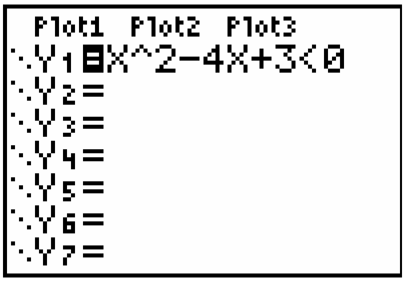


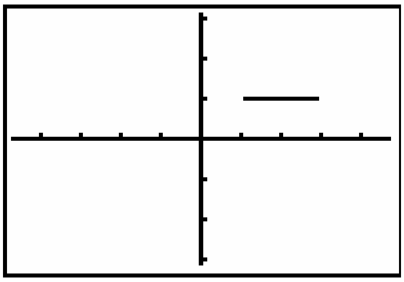
- Wij lezen af waar de grafiek onder de x-as gelegen is.

  Dus wordt de oplossingenverzameling van de ongelijkheid:

$$]1,3[$$

Een alternatief is





18.1 Voorbeeld 2

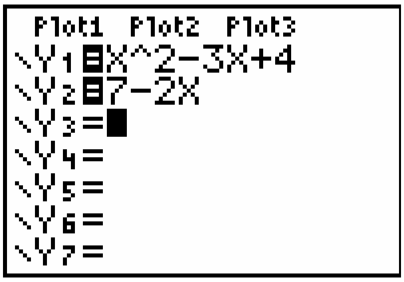
Los op in $\mathbb{R}$:

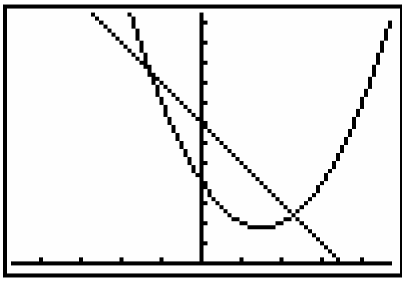
$$x^2 - 3x + 4 < 7 - 2x$$

Dit probleem kan herleid worden tot het vorige door te herleiden op 0, maar kan ook rechtstreeks opgelost worden.

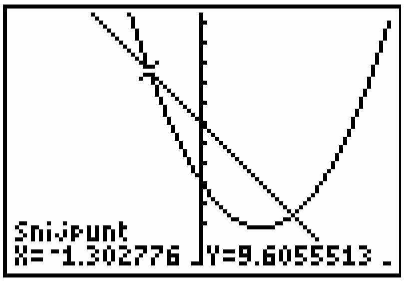
- Wij tekenen de grafieken van

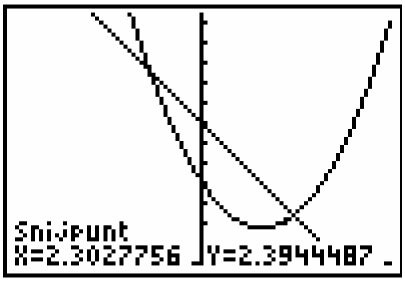
$$y = x^2 - 3x + 4 \text{ en } y = 7 - 2x$$





- Wij zoeken de snijpunten van beide grafieken





- Wij lezen af waar de parabool onder de rechte gelegen is.

De oplossingenverzameling wordt:

$$]-1,30;2,30[$$

Als alternatief geldt hier