De impact van een grafische rekenmachine in de klas,
of hoe een hulpmiddel grenzen verlegt.

Inleiding

Over de vraag of de GRM een meerwaarde betekent tijdens het lesgebeuren zijn de ‘believers’ van de GRM het volmondig eens. De ‘Non-believers’ blijven eerder sceptisch en schudden meewarig het hoofd. Dit komt omdat ‘believers’ er zelden in slagen deze meerwaarde concreet te omschrijven.

*De GRM biedt niet zozeer een ‘**meer**waarde’ aan de wiskunde, het is niet een pluspunt of iets extra’s dat er bijkomt. De invloed van de GRM is veel meer omvattend dan dat. Wie de inhoud van de huidige leerplannen leest, merkt weinig nieuws. Nochtans spreekt men overal over de grootste vernieuwing ooit. Wie de moeite doet om de didactische wenken bij het leerplan te lezen of wie de huidige handboeken vergelijkt met deze van een vijftal jaar terug merkt wel degelijk verandering en vernieuwing. ICT en de GRM hebben onze kijk op de wiskunde totaal veranderd. Zij zorgen ervoor dat we ‘wiskunde die tien jaar geleden bijna onmogelijk leek’ nu wel vlot kunnen oplossen. ICT heeft de grenzen van de wiskunde verlegd en de impact van de GRM in de klas is nog maar begonnen …*

In de voorbeelden die volgen bekijken we een aantal problemen die vroeger ondenkbaar waren en lossen we problemen op een alternatieve manier op. Hier en daar verschijnen ook nieuwe vragen, nieuwe aandachtspunten en nieuwe problemen waar we als wakkere leerkracht zeker even moeten bij stilstaan om er de nodige aandacht aan te spenderen.

1. Opstellen van de vergelijking van een parabool door drie gegeven punten

Vroeger zorgde men er kunstmatig altijd voor dat één van de punten als eerste coördinaatgetal 0 had, zodat het stelsels met 3 vergelijkingen en 3 onbekenden onmiddellijk de oplossing van één onbekende (namelijk c) gaf.

Nu kan een leerkracht de leerlingen zelf de coördinaat van drie (niet-collineaire) punten laten kiezen en aantonen dat het steeds mogelijk is om een parabool (met as evenwijdig aan de y-as) door deze drie punten te tekenen.

Opgave

Bepaal de vergelijking van de parabool p (met as evenwijdig aan de y-as) die gaat door de punten P(-4,-14), Q(1,-24) en R(4,18).

Oplossing

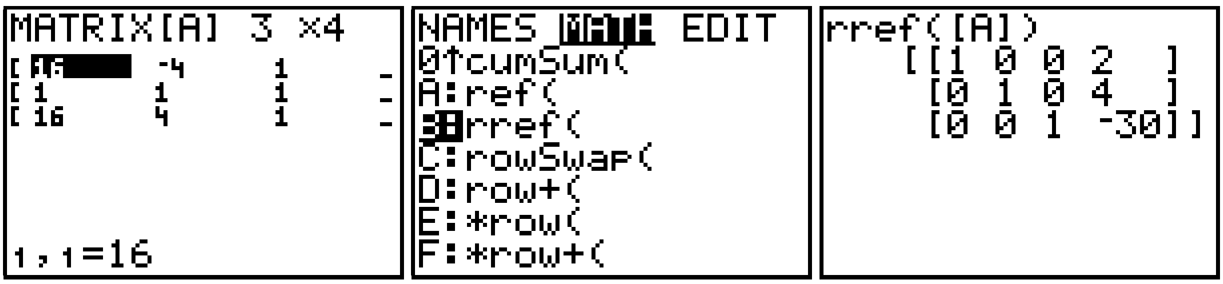
De algemene vergelijking van een parabool met as evenwijdig aan de y-as wordt gegeven door de vergelijking $y = ax^2 + bx + c$.

M.a.w. het probleem is opgelost zodra we de waarden van de coëfficiënten a, b en c gevonden hebben.

De matrix-methode

Omdat de punten P, Q en R op de parabool liggen, voldoen hun coördinaten aan de gestelde vergelijking. Het volgend 3 x 3 stelsel ontstaat:

$$\begin{cases} 16a - 4b + c = -14 \\ a + b + c = -24 \\ 16a + 4b + c = 18 \end{cases} \overset{GRM}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -30 \end{cases}$$

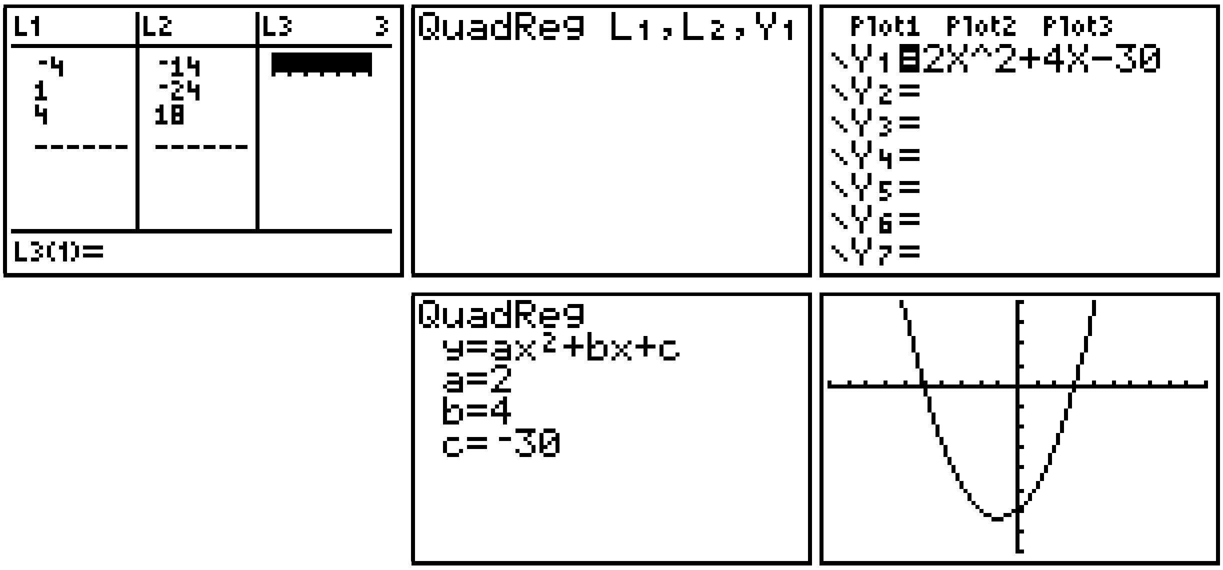


Waaruit:

$$p \leftrightarrow y = 2x^2 + 4x - 30$$

De regressie-methode

De coördinaten van de drie punten P, Q en R worden opgeslagen in twee lijsten L_1 en L_2 waarop kwadratische regressie wordt toegepast.

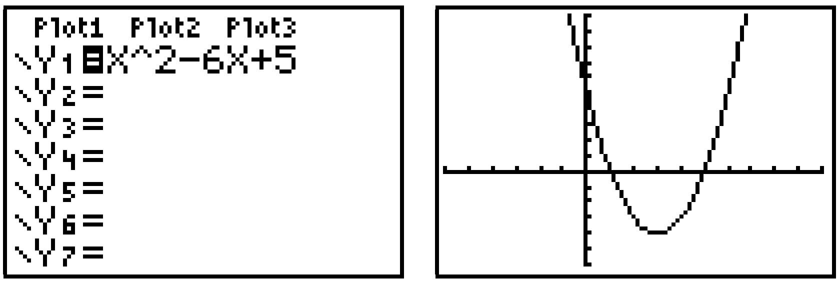


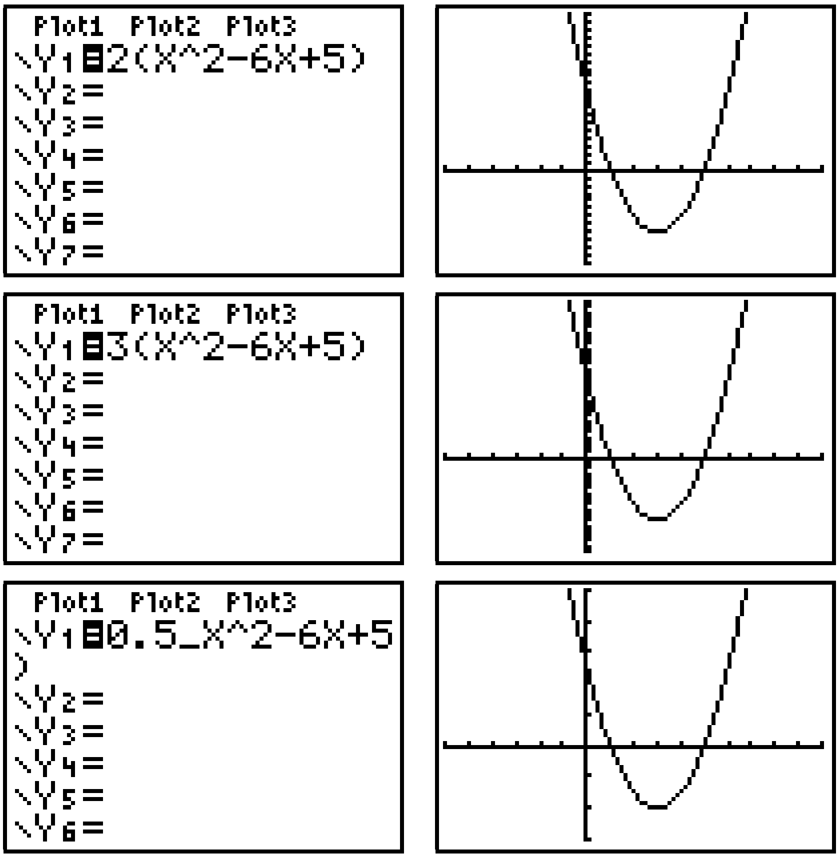
2. Nieuwe technieken, nieuwe problemen

Nieuwe technieken brengen verbeteringen, maar hebben soms hun eigen kleine nadelen waarvoor we als leraar zeker oog moeten hebben.

Wanneer je de grafiek van een functie nodig hebt ter illustratie van een opgave uit het handboek, is de GRM een nuttig instrument. Maar vergeet niet dat als leerlingen thuis die opgave hermaken ze dit scherm niet langer hebben en ze dus het illustratieve beeld van de grafiek van de functie kwijt zijn.
Bij jonge en bij zwakkere leerlingen is het nuttig bij die opgaven waar de grafiek van een functie een wezenlijk onderdeel uitmaakt om tot een goede oplossing van een vraagstuk te komen, duidelijk te vermelden dat de grafiek moet worden hermaakt. Vermeld eventueel ook de Window-instellingen bij de oplossing.

En wat dacht je van volgende grafieken van functies?





Een begrip dat in de toekomst zeker aan kracht zal inboeten, is het begrip georthonormeerd. De leerlingen zijn minder vertrouwd met gelijke ijken op x en y-as. Ook hier moet duidelijk telkens als de kans zich voordoet op gewezen worden.

3. Overgangs- en Lesliematrices

Een van de opgaven die vroeger onmogelijk waren, is het onbeperkt vermenigvuldigen van matrices. Dankzij de GRM is het mogelijk om overgangssituaties te simuleren en te bestuderen.

Opgave

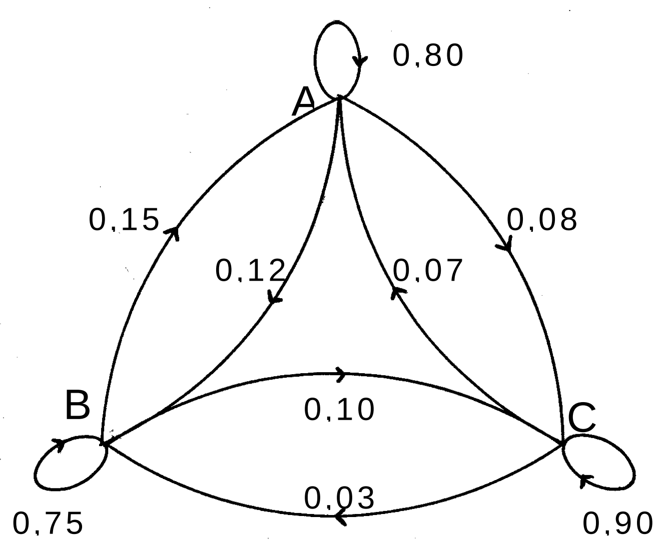
De meeneempizza op de hoek verkoopt pizza's met verschillende bodem.
Je hebt de klassieke bodem licht en krokant (A), de pizza's met een korstje gevuld met kaas (B) en de pan-pizza waarbij de deeg goudbruin gebakken is in de pan (C). Over een periode van een kwartaal blijven de meeste klanten hun pizzabodem trouw, maar sommigen gaan nadien over naar een andere bodem.

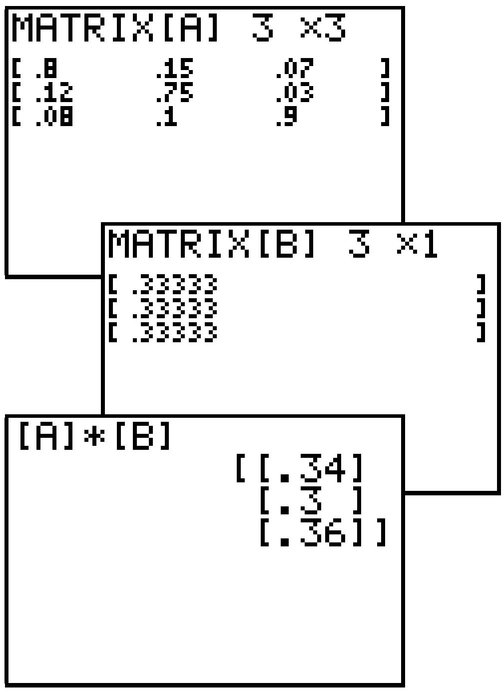
Zie hiervoor de overgangsmatrix P.

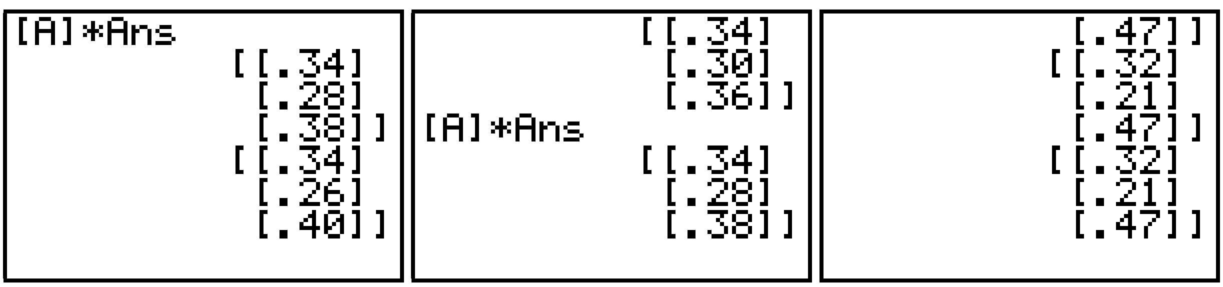
$$\begin{array}{cccc} & & \textit{van} & & \\ & A & B & C & \\ P = & \left[\begin{array}{ccc} 0{,}80 & 0{,}15 & 0{,}07 \\ 0{,}12 & 0{,}75 & 0{,}03 \\ 0{,}08 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{array}\right] & & & \begin{array}{c} A \\ B \quad \textit{naar} \\ C \end{array} \end{array}$$

Hoe verloopt de verkoop van pizza's op lange termijn?

Oplossing







4. Complexe getallen

Rekenen met complexe getallen is dankzij de GRM sterk vereenvoudigd. De GRM kan:

- complexe getallen optellen, aftrekken en vermenigvuldigen;
- complexe getallen delen en de noemer reëel maken;
- het complex toegevoegde, de modulus en het argument van een complex getal berekenen;
- een vierkantswortel trekken uit een complex getal;
- …

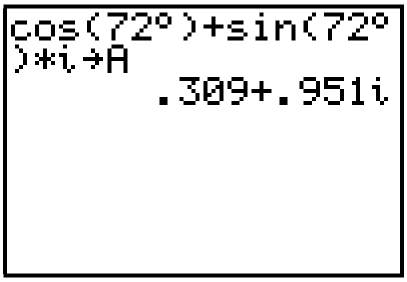
Maar de frappantste toepassing heb ik te danken aan een van mijn leerlingen.

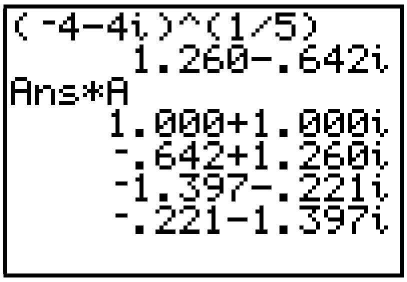
Opgave

Bereken de 5-de machtswortels van $-4-4i$ en stel ze voor in het vlak van Gauss.

Oplossing

Omdat de beeldpunten van de vijf 5-de machtswortels een regelmatige vijfhoek vormen met middelpunt O, en omdat de vermenigvuldiging van een complex getal met modulus 1 en argument α meetkundig een rotatie voorstelt over een hoek α, bereken je de vijf 5-de machtswortels met de TI-83/84 als volgt.





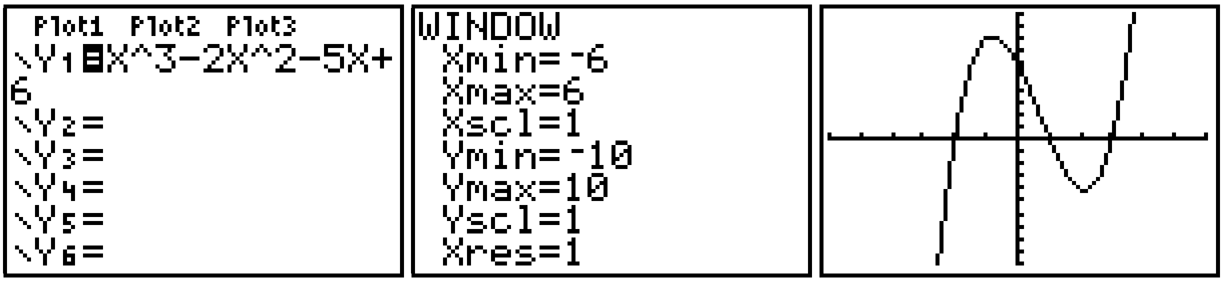
5. Bepaalde integraal : Georiënteerde oppervlakte versus totale werkelijke oppervlakte

Opgave

Bereken de oppervlakte van het gebied, begrensd door de kromme $y = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ en de x-as.

Oplossing:

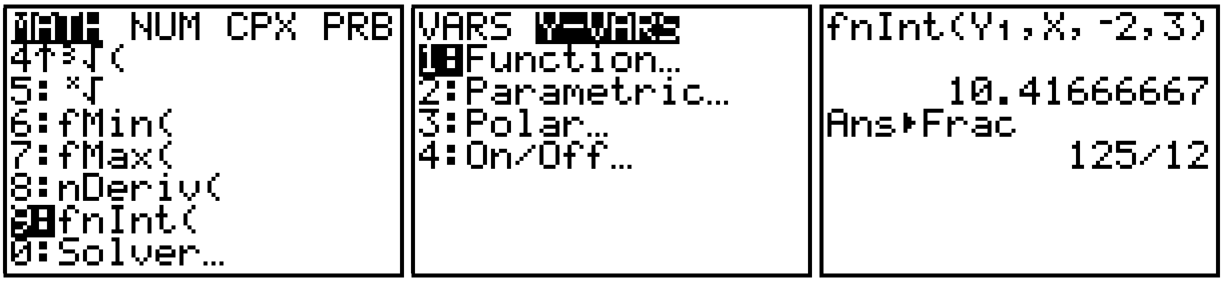
Tekenen we eerst even dit gebied.



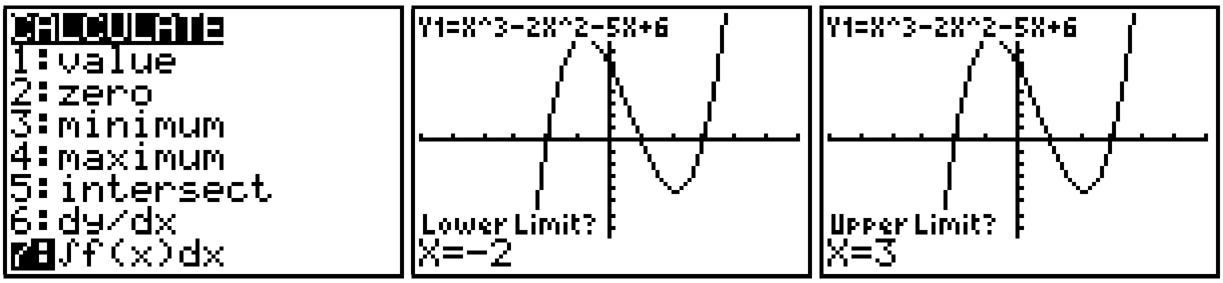
De georiënteerde oppervlakte:

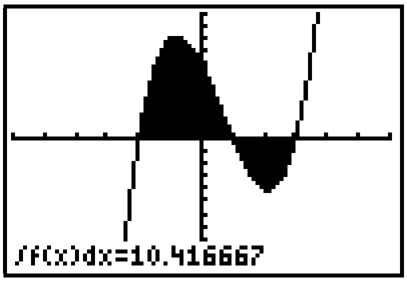
Om de integraal $\int_{-2}^{3} (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)\,\mathrm{d}x$ met de TI-83 te berekenen zijn er twee mogelijkheden.

- Mogelijkheid 1 : rechtstreeks via het basisvenster



- Mogelijkheid 2 : met behulp van de grafiek in het grafiekvenster





Door op STO-> gevolgd door een variabele (bijvoorbeeld ALPHA [A]) te drukken, kan je het gevonden resultaat opslaan.

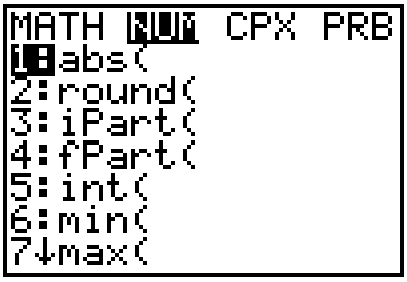
De totale werkelijke oppervlakte:

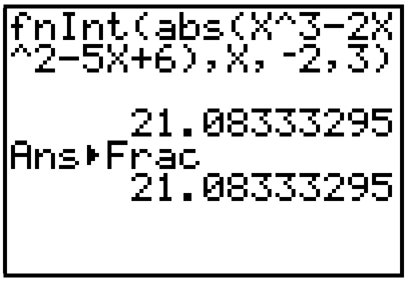
Om de totale werkelijke oppervlakte te vinden zou je de bepaalde integraal kunnen opsplitsen in twee aparte integralen:

werkelijke oppervlakte = $\int_{-2}^{1}(x^3-2x^2-5x+6)\,\mathrm{d}x-\int_{1}^{3}(x^3-2x^2-5x+6)\,\mathrm{d}x$

Het kan echter veel efficiënter door de absolute waarde van de functie te integreren (sommeren).

werkelijke oppervlakte = $\int_{-2}^{3}\left|x^3-2x^2-5x+6\right|\mathrm{d}x$

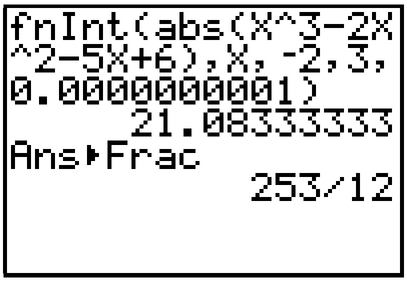




De totale werkelijke oppervlakte is $\frac{253}{12}$.

Nochtans wordt het resultaat niet omgezet in een breuk. Dit komt omdat de RM numeriek, en dus benaderend, rekent. Standaard rekent hij met een nauwkeurigheid van 10^{-5}.

Wil je de nauwkeurigheid vergroten (met gevolg dat de rekentijd vergroot), moet je dit ook ingeven na de bovengrens.



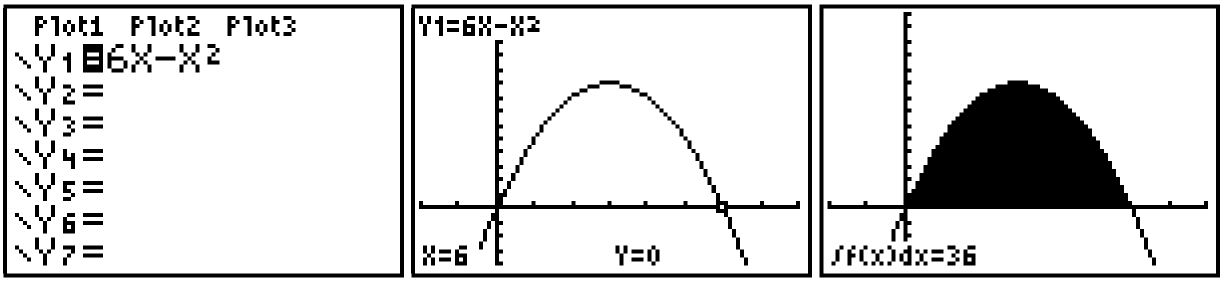
6. Bepaalde integraal : toepassing

Opgave

Verdeel het gebied begrepen tussen de kromme $y = 6x - x^2$ en de x-as in drie gelijke stukken.

Oplossing

Plot de grafiek van de functie. Bepaal de snijpunten met de x-as en bereken de oppervlakte van het gevraagde gebied.

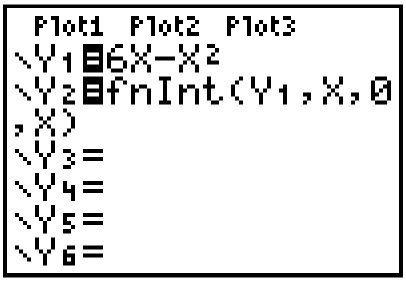


Om het gebied nu in drie delen te verdelen moeten we de oplossingen vinden van volgende twee vergelijkingen:

$y_2 = \int_0^x y_1 \, dx = 12$ en $y_2 = \int_0^x y_1 \, dx = 24$

Definieer volgende functie:

$y_2 = \int_0^x y_1 \, dx$ = fnInt(Y1, X, 0, X)

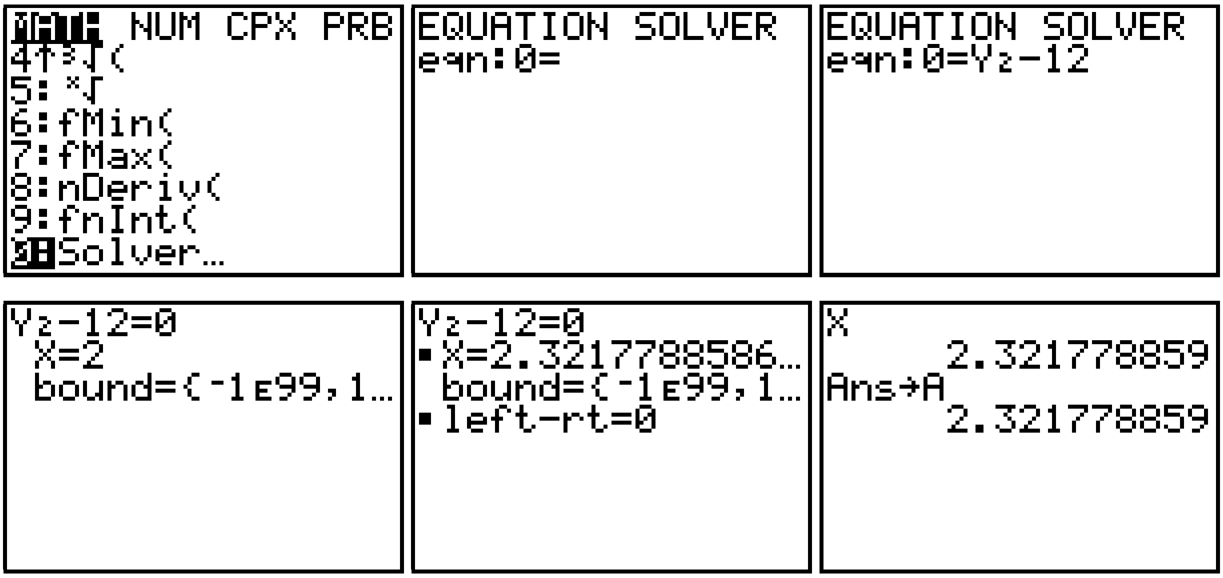


We lossen de gevraagde integraalvergelijkingen op via de solver:

MATH MATH 0:Solver

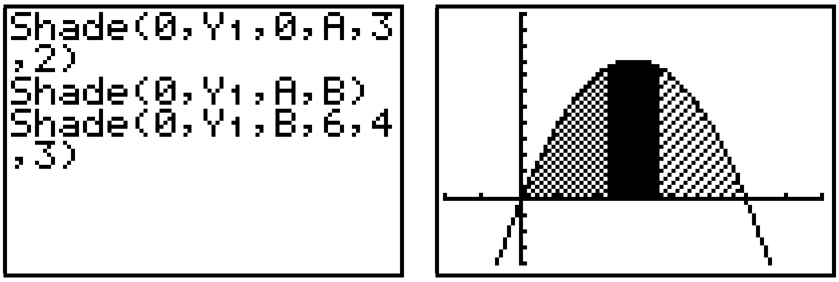
VARS Y-VARS 1:Function 2:Y2 – 12 (= het eerste derde) ENTER

ALPHA [SOLVE] (= ENTER –toets)
2nd [Quit] ALPHA [X] STO-> ALPHA [A]



Analoog wordt de tweede vergelijking opgelost.

Stel nu de drie gelijke delen visueel voor:



7. Oneigenlijke integralen

Opgave

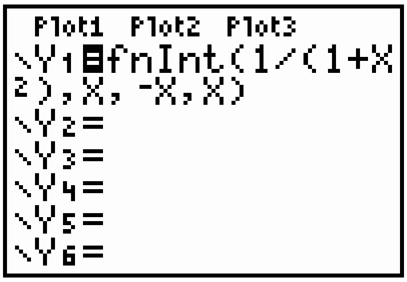
Bereken $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Oplossing

Omdat we met de TI-83/84 niet tot oneindig kunnen integreren, lossen we dit probleem als volgt op:

We definiëren eerst de functie $y_1 = \int_{-x}^{x} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ = fnInt(1/(1+X²), X, -X, X) ,

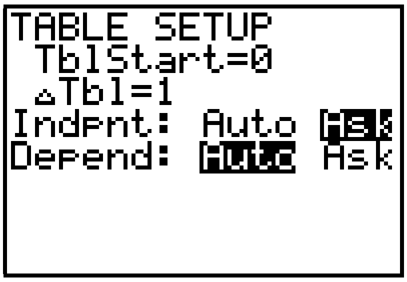
en bepalen nadien $\lim_{x\to+\infty} y_1$.

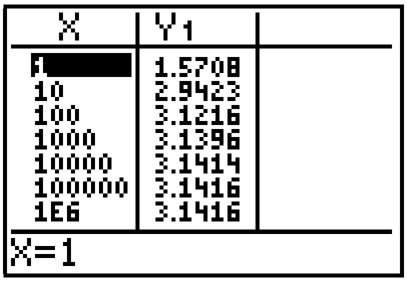


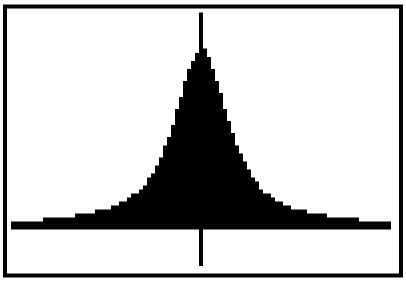
Bepalen van de limiet:

Zet “Table Set” op “Ask”

De limiet bereken je nu door aan x steeds grotere waarden toe te kennen.







8. Statistiek : de normale verdeling

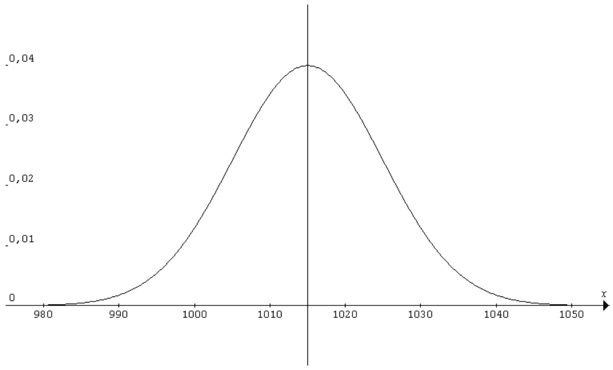
Opgave

Een machine vult pakken met suiker. Het gewicht aan suiker dat door de machine afgeleverd wordt, is normaal verdeeld met μ = 1015 gram en σ = 10 gram.

- Hoeveel % van de afgeleverde pakken bevat minder dan 1 kg?
- Boven welke gewichtsgrens ligt 10 % van de pakken koffie?
- Stel dat het mogelijk is om de afstelling van het vulapparaat (d.w.z. de gemiddelde hoeveelheid μ) te veranderen zonder dat de standaarddeviatie verandert. Hoe moet het gemiddelde gekozen worden opdat slecht 1% van de pakken suiker een gewicht heeft beneden de 1 kg.

Oplossing:

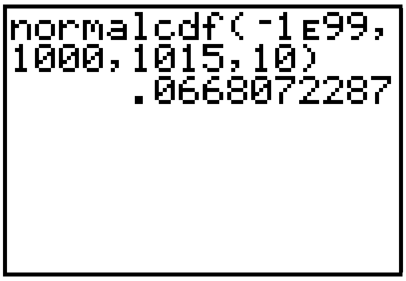
Het vulgewicht van de pakjes koffie kunnen we grafisch voorstellen door de normale verdeling N(μ = 1015 ; σ = 10).



- Hoeveel % van de afgeleverde pakken bevat minder dan 1 kg?

P(X < 1000) = ?

$$P(X < 1000) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{1000-1015}{10}\right)$$
$$= P(Z < -1,5)$$
$$= 1 - P(Z \le 1,5)$$
$$= 0,06681$$

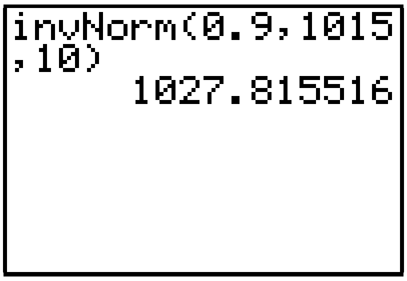


antwoord : 6,68 %

- Boven welke gewichtsgrens ligt 10 % van de pakken koffie?

  P(X > ?) = 10 % = 0,1

$$
\begin{aligned}
& P(X > x) = 0{,}1 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z > \frac{x-1015}{10}\right) = 0{,}1 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z \le \frac{x-1015}{10}\right) = 0{,}9 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z \le \frac{x-1015}{10}\right) = \Phi(1{,}28) \\
\Leftrightarrow\ & \frac{x-1015}{10} = 1{,}28 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1027{,}8
\end{aligned}
$$

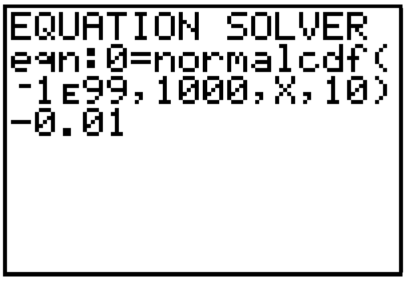


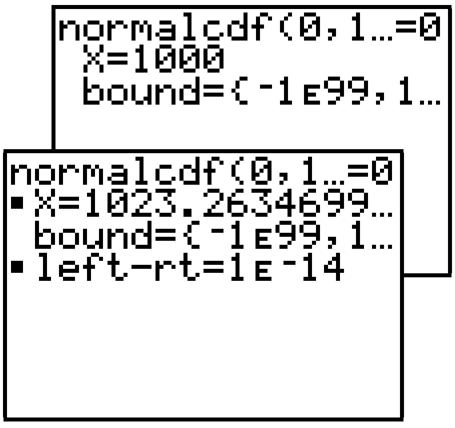
  antwoord : 1027,8 gram

- Stel dat het mogelijk is om de afstelling van het vulapparaat (d.w.z. de gemiddelde hoeveelheid μ) te veranderen zonder dat de standaarddeviatie verandert. Hoe moet het gemiddelde gekozen worden opdat slecht 1% van de pakken suiker een gewicht heeft beneden de 1 kg.

  Bepaal μ' zodat $P\left(Z \le \frac{1000-\mu'}{10}\right) = 1\% = 0{,}01$

$$
\begin{aligned}
& P\left(Z \le \frac{1000-\mu'}{10}\right) = 0{,}01 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z > -\frac{1000-\mu'}{10}\right) = 0{,}01 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z < -\frac{1000-\mu'}{10}\right) = 0{,}99 \\
\Leftrightarrow\ & P\left(Z < -\frac{1000-\mu'}{10}\right) = \Phi(2{,}33) \\
\Leftrightarrow\ & -\frac{1000-\mu'}{10} = 2{,}33 \\
\Leftrightarrow\ & \mu' = 1023{,}3
\end{aligned}
$$





  antwoord : 1023,3 gram

9. Statistiek : de binomiale verdeling

Opgave

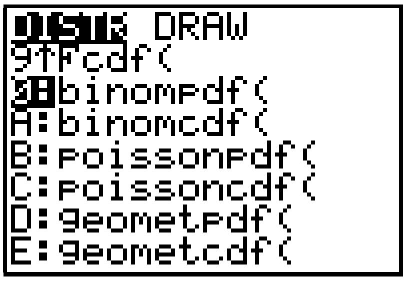
Een bakker verkoopt taartjes waarbij bij 1 op de 5 gebakjes een koffieboon in het gebakje zit.

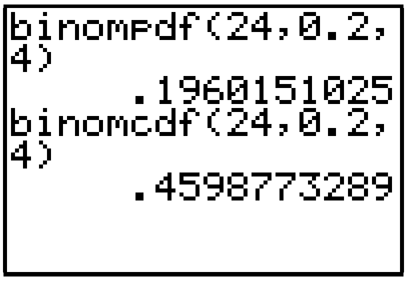
- Als Maarten 24 taartjes bij deze bakker koopt, wat is de kans dat er bij 4 taartjes of meer een koffieboon inzit?
- Hoeveel taartjes moet Maarten kopen om meer dan 90% kans te hebben dat er bij minstens 4 taartjes een koffieboon zit?

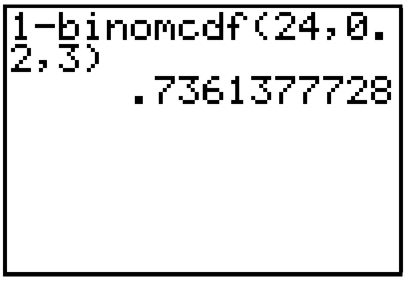
Oplossing

We hebben hier duidelijk te maken met een binomiale verdeling met parameters n = 24 en p = $\frac{1}{5}$; de kans op i successen is gelijk aan:

$$P(X = i) = \binom{24}{i} . \left(\frac{1}{5}\right)^{i} . \left(\frac{4}{5}\right)^{24-i}$$







Antwoord : de kans dat er bij 4 taartjes of meer een koffieboon inzit is 73,6 %.

Als Maarten n taartjes koopt, is de kans dat er bij 4 taartjes of meer een koffieboon inzit gelijk aan :

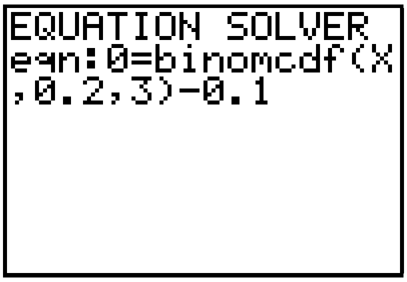
P(X > 4) = 1 – P(X $\leq$ 3) = 1 – binomcdf(n , 0.2 , 3)

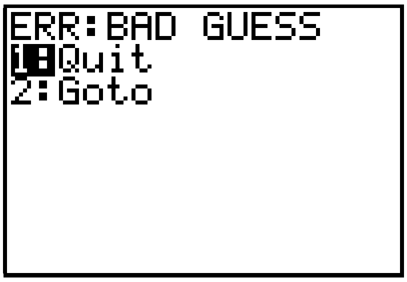
Wil deze kans groter dan of gelijk zijn aan 90%, dan moeten we n halen uit de ongelijkheid :

1 – binomcdf(n , 0.2 , 3) $\geq$ 0,9

of nog :

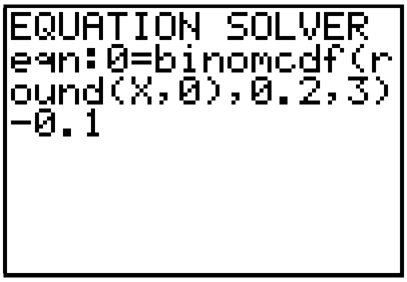
binomcdf(n , 0.2 , 3) $\leq$ 0,1

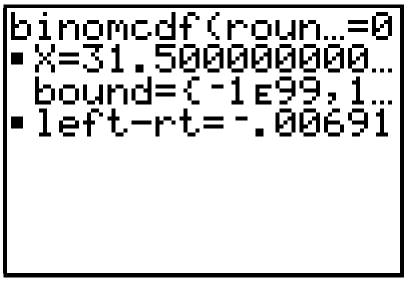




Wanneer je dit probleem oplost met de TI83/84 via de solver krijg je een foutmelding. De GRM kan dit niet berekenen omdat de waarde van de eerste parameter een positief geheel moet zijn en dit mislukt omdat de solver werkt met benaderingen via reële getallen.

Je lost dit probleem op door de functie round(te gebruiken.





Antwoord: Maarten moet minstens 32 taartjes kopen om meer dan 90% kans te hebben dat er bij minstens 4 taartjes een boon zit.

10. Een waarschijnlijkheidsinterval voor $\hat{p}$

Veronderstel gegeven een productieproces van toasters waarbij 8% een defect vertoont.

<u>Simulatie van één controle van één toaster:</u>

M.a.w. de fabrikant neemt één toaster van de lopende band en controleert deze op een defect.

Dit simuleer je met de TI-83/84 als volgt:

rand ≤ p

MATH PRB 1:rand 2nd [Test]
6:≤ 0,08

0 betekent dat de toaster oké is, 1 betekent dat de toaster defect is.

Simulatie van één controle van 60 toasters:

Het vorige kun je nu 60 keer herhalen en het aantal enen (= defecte) toasters tellen. Je kan dit in één keer via het commando:

sum(rand(n) $\le$ p)

2nd [List] MATH 5:sum MATH PRB 1:rand (60) 2nd [Test] 6: $\le$ 0,08)

Bij onze simulatie waren er blijkbaar 5 van de 60 toasters defect.

De steekproefproportie is in dit geval $\hat{p} = \frac{5}{60} = 0,0833 \approx 8,3\%$.

Wanneer je deze simulatie opnieuw herhaald, vind je heel waarschijnlijk een ander resultaat. Verschillende steekproeven uit eenzelfde populatie leveren altijd verschillende resultaten op. Dit verschijnsel heet *steekproefvariabiliteit*.

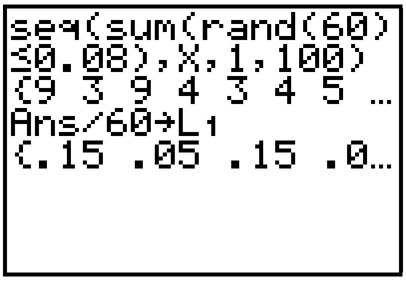
Veronderstel dat de fabrikant zelf besluit om op regelmatige basis (bijvoorbeeld dagelijks of wekelijks) een controle van 60 toasters te doen. Simuleer zo'n 100 controles en visualiseer de waarden van $\hat{p}$ via een histogram.

Simulatie van 100 controles van 60 toasters:

In plaats van 100 keer een simulatie van 60 toasters te doen, kun je dit met de TI83/84 in één keer via het commando:

seq(sum(rand(60) $\le$ 0.08, x, 1, 100)

2nd [List] OPS 5:seq 2nd [List] MATH 5:sum MATH PRB 1:rand (60) 2nd [Test] 6: $\le$ 0.08) , X , 1, 100)

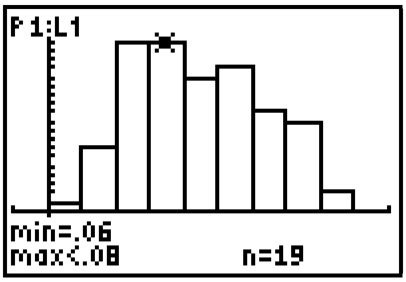


… dit duurt wel een tijdje !!!

Deel het resultaat door 60 voor de berekening van de steekproefproporties $\hat{p}_i$ en stockeer deze in lijst 1:

Ans / 60 STO 2nd [L1]

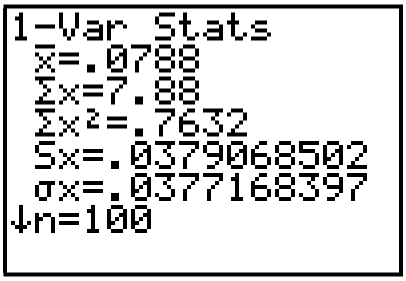
Grafisch voorgesteld geeft dit:

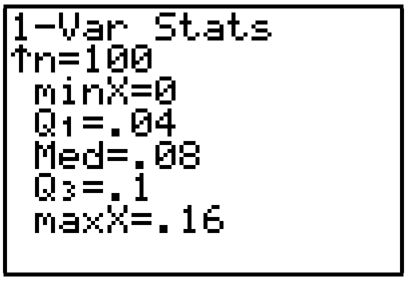


2nd [StatPlot] Window Graph

Met karakteristieken:

STAT CALC 1:1-Var Stats 2nd [L1]



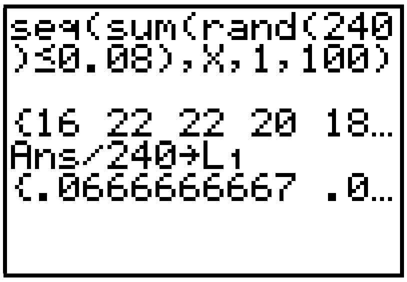


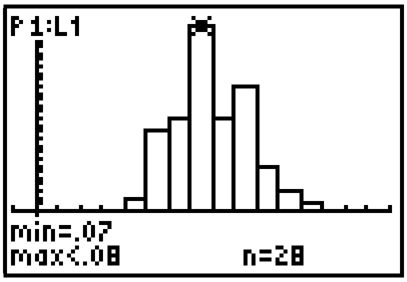
De gemiddelde waarde van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0788, de werkelijk waarde van p bedraagt 0,08.

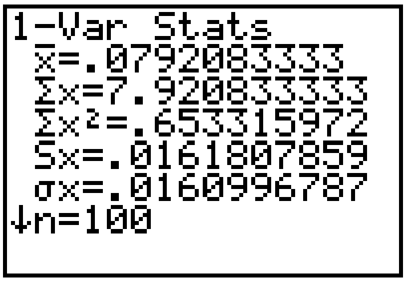
De experimentele standaardafwijking $s_{\hat{p}}$ van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0379;

de theoretische waarde $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,08(1-0,08)}{60}} = 0,0350$

Simulatie van 100 controles van 240 toasters





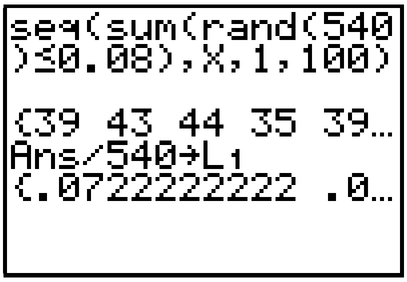


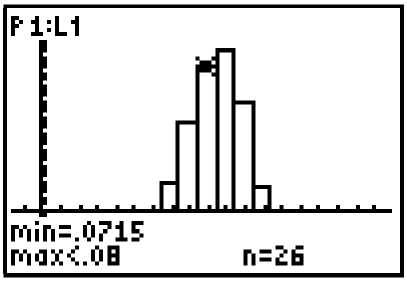
De gemiddelde waarde van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0792, de werkelijk waarde van p bedraagt 0,08.

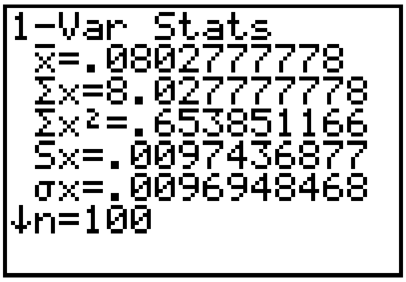
De experimentele standaardafwijking $s_{\hat{p}}$ van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0162;

de theoretische waarde $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,08(1-0,08)}{240}} = 0,0175$

Simulatie van 100 controles van 540 toasters





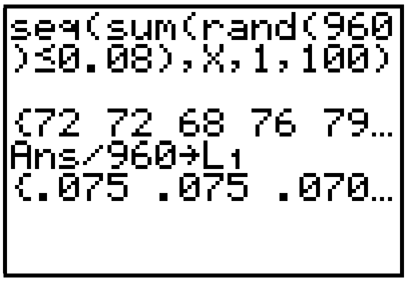


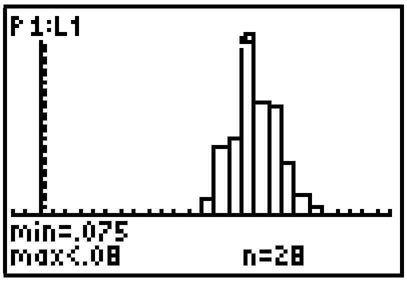
De gemiddelde waarde van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0803,
de werkelijk waarde van p bedraagt 0,08.

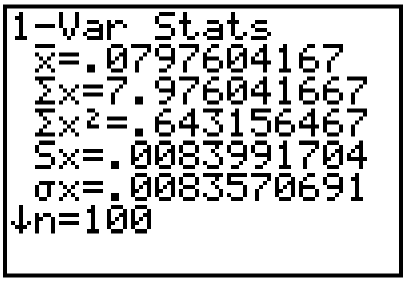
De experimentele standaardafwijking $s_{\hat{p}}$ van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0097;

de theoretische waarde $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,08(1-0,08)}{540}} = 0,01167$

Simulatie van 100 controles van 960 toasters







De gemiddelde waarde van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0798,
de werkelijk waarde van p bedraagt 0,08.

De experimentele standaardafwijking $s_{\hat{p}}$ van de steekproefproporties $\widehat{p_i}$ bedraagt 0,0084;

de theoretische waarde $\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\dfrac{0,08(1-0,08)}{960}} = 0,00876$

Conclusies

n (aantal toasters)	$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}$	$\hat{p} = \bar{x}$	$s_{\hat{p}}$	$\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$
60	0,0350	0,0788	0,0379	,0348
240	0,0175	0,079208	0,0162	0,0174

540	0,01167	0,080278	0,0097	0,01169
960	0,00876	0,079790	0,0084	0,00874

De gemiddelde waarde van de steekproefproporties benadert zeer goed de werkelijke waarde van p.

Wanneer we een vier keer zo grote steekproef nemen (240 toasters i.p.v. 60) wordt de standaardafwijking (ongeveer) gehalveerd;
wanneer we een steekproef nemen die zestien keer zo groot is (960 toasters i.p.v. 60) bedraagt de standaardafwijking nog slechts een vierde.

Merk tevens op dat $\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ een goede benadering (een goede schatter) is voor $\sigma_{\hat{p}}$.

11. Toetsen van hypothesen

Opgave

Men twijfelt eraan of een bepaalde dobbelsteen al dan niet verzwaard is zodat de kans op een zes hoger is dan $\frac{1}{6}$. Men gooit 900 keer met deze dobbelsteen en noteert 180 keer een zes. Wat is je besluit bij $\alpha = 0{,}05$?

Oplossing

- formuleren van de hypothesen

  H_0 : de dobbelsteen is niet verzwaard: $p = \frac{1}{6}$

  H_1 : de dobbelsteen is verzwaard: $p > \frac{1}{6}$

  Dit is een rechts éénzijdige toets van fracties.

- de toetsingsgrootheid

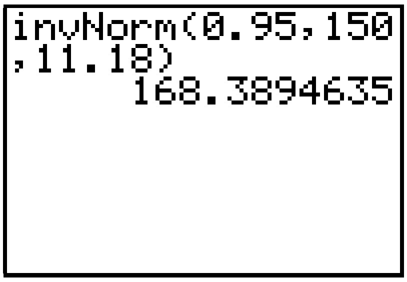
  X = het aantal keren zes in de steekproef

  X is binomiaal verdeeld $B\left(n = 900, p = \frac{1}{6}\right)$.

- methode 1 : via grenswaarden

We bepalen de rechtergrenswaarde van het aanvaardingsgebied bij α = 5%

$$P(X \geq k) = 0,05$$
$$\Downarrow$$
$$P(X < k) = 0,95$$
$$\Downarrow$$
$$k = 168,39$$

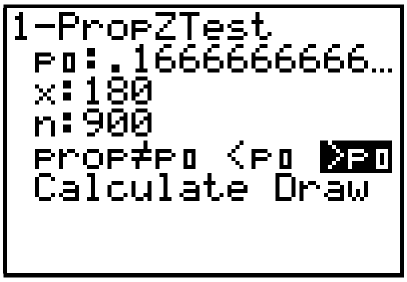


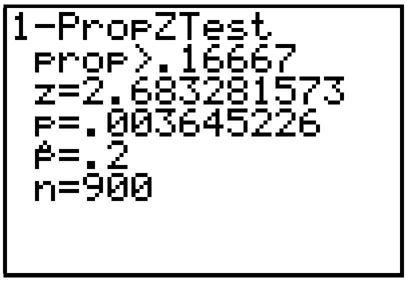
Dit betekent dat, wanneer het aantal zessen in onze steekproef kleiner dan of gelijk zou zijn aan 168, de nulhypothese wordt aanvaard. Bedraagt het aantal zessen 169 of meer, dan wordt ze verworpen.

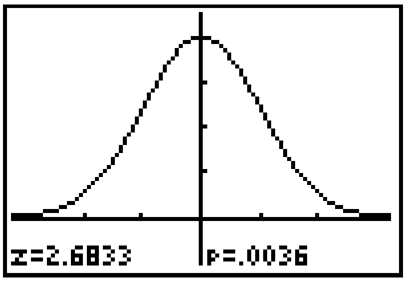
In ons geval is 180 > k = 168,39 en wordt de nulhypothese dus verworpen. Wij vermoeden (zeker is men immers nooit) dat de dobbelsteen inderdaad verzwaard is.

- methode 2 : via de P-waarde

Dit kan rechtstreeks via de GRM.







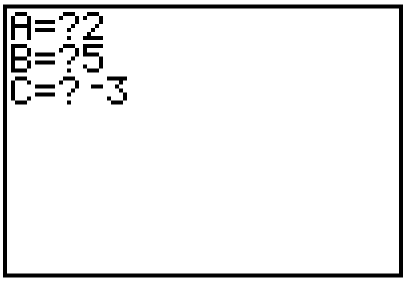
Omdat de kans om 180 keer van de 900 keer zes te werpen met een 'normale' dobbelsteen zeer klein is, namelijk 0,36%, verwerpen we H_0 en verwerpen we H_1 niet. Wij denken dat de dobbelsteen is verzwaard.

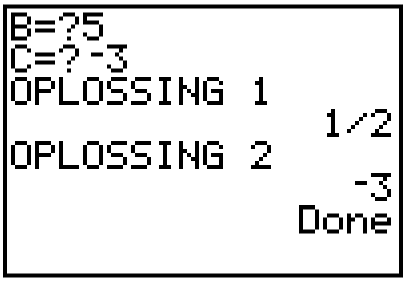
Programma's schrijven

11.1. VKV's oplossen

Het programma vraagt naar de drie coëfficiënten van de VKV, en geeft als uitvoer de mogelijke reële oplossingen.

```
PROGRAM:VKV
:Prompt A,B,C
:B²-4AC → D
:If D<0
:Then
   :Disp "GEEN OPLOSSINGEN"
:End
:If D=0
:Then
   :-B/(2A) → X
   :Disp "EEN OPLOSSING",X ▶ Frac
:End
:If D>0
:Then
   :(-B+√(D))/(2A) → X
   :(-B-√(D))/(2A) → Y
   :Disp "OPLOSSING 1",X ▶ Frac
   :Disp "OPLOSSING 2",Y ▶ Frac
:End
:Stop
```





11.2. Herleiden van de determinantvergelijking van een vlak naar de algemene vergelijking ux + vy +wz + t = 0 (ruimtemeetkunde)

De determinantvergelijkingen van een vlak, bepaald door

- één punt en twee stellen richtingsgetallen,
- twee punten en één stel richtingsgetallen,
- drie niet collineaire punten

zijn respectievelijk:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

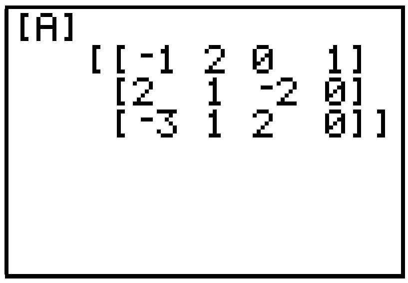
Noemen we $[A]$ de matrix gevormd door de drie onderste rijen (van de determinanten uit het eerste lid van deze vergelijkingen). We bekomen:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ & [A] & & \\ & & & \end{vmatrix} = 0$$

Hierbij is $[A]$ een 3 x 4 matrix, waarvan de rijen viertallen van de vorm (x, y, z, 1) of (a, b, c, 0) zijn.

Door de matrix $[A]$ te ontrafelen in 4 aparte kolommatrices, kan men de cofactoren van de eerste rij van de determinant van de vergelijking berekenen. Door deze determinant te ontwikkelen naar de eerste rij (methode van Laplace) kan men hem gemakkelijk omzetten naar de vorm $ux + vy + wz + t = 0$.

PROGRAM:VLAK
:Matr→list([A] , L_1 , L_2 , L_3 , L_4)
:List→matrix(L_2 , L_3 , L_4 , [B])
:List→matrix(L_1 , L_3 , L_4 , [C])
:List→matrix(L_1 , L_2 , L_4 , [D])
:List→matrix(L_1 , L_2 , L_3 , [E])
:det([B]) → B
:det([C]) → C
:det([D]) → D
:det([E]) → E
:Disp “ux + vy + wz + t = 0”
:Pause
:Disp “u”, B → Frac
:Disp “v”, (-C) → Frac
:Disp “w”, D → Frac
:Pause
:Disp “t”, (-E) → Frac
:Stop

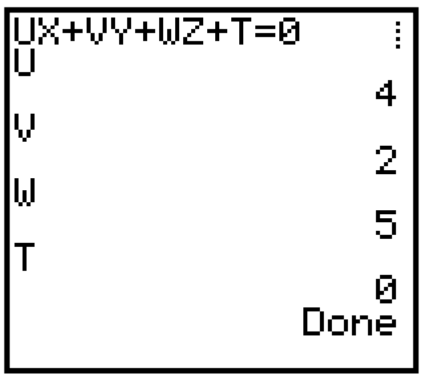


<u>Voorbeeld:</u>

Bepaal een cartesische vergelijking van het vlak door P(-1,2,0) en met richtingsvectoren $\vec{R}(2,1,-2)$ en $\vec{S}(-3,1,2)$.

$$\alpha \leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

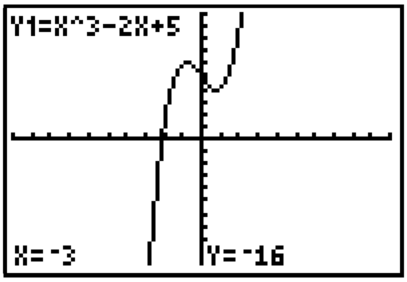
$$\alpha \leftrightarrow 4x + 2y + 5z = 0$$

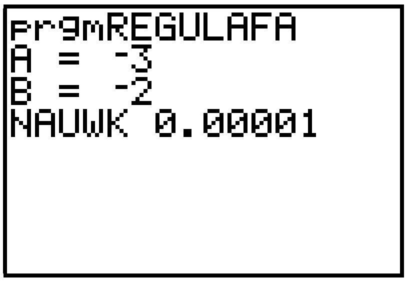


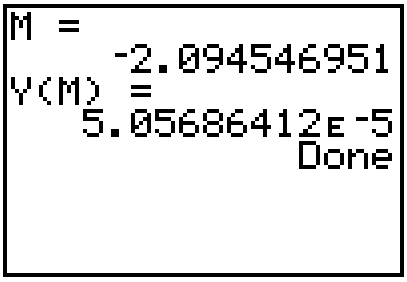
11.3. Regula Falsi voor het bepalen van een nulpunt van een continue functie

De functie geef je vooraf in, in het formule-invoerscherm.
Het programma vraagt om het te zoeken nulpunt links (A) en rechts (B) te schatten. Tevens wordt er ook naar de nauwkeurigheid van het te zoeken nulpunt gevraagd (N).
Als uitvoer krijg je de nieuwe waarden voor A en B, een schatting (M) voor het gevraagde nulpunt en zijn functiewaarde. A en B worden telkens opnieuw berekend totdat de gevraagde nauwkeurigheid bereikt is.

```
PROGRAM:REGULAFA
:Input "A = ",A
:Input "B = ",B
:Input "NAUWK ",N
:B-A → K
:While N<K
   :(A*Y1(B)-B*Y1(A))/(Y1(B)-Y1(A)) → M
   :If Y1(M)=0
   :Disp "NULPUNT",M
   :If Y1(M)*Y1(A)>0
   :Then
        :M-A → K
        :M → A
   :Else
        :B-M → K
        :M → B
   :End
   :ClrHome
   :Disp "M = ",M
   :Disp "Y(M) = ",Y1(M)
   :Pause
:End
:Stop
```







11.4. Trapeziumregel

Stellen $x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b$ de grenzen van de deelintervallen voor, dan wordt

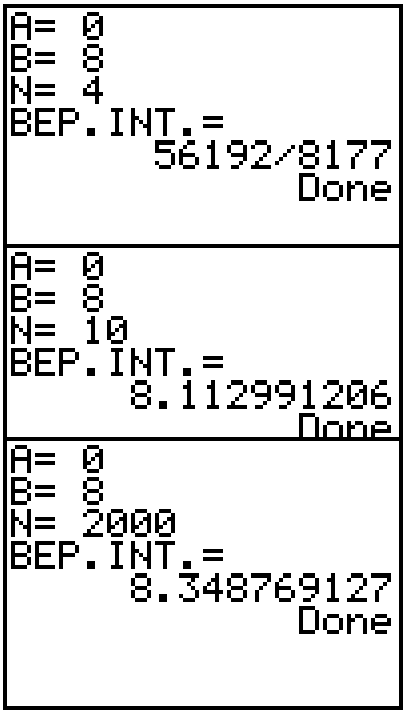
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n) \right)$$

```
PROGRAM:METHTRAP
:ClrHome
:Input “A= “,A
:Input “B= “,B
:Input “N= “,N
:(B-A)/N → H
:0 → I
:For(K,A,B,H)
   :I+Y1(K) → I
:End
:2*I – Y1(A) – Y1(B) → I
:Disp “BEP.INT. = “
:DISP I*H/2 → Frac
:Stop
```

Voorbeeld: bereken:

$$I = \int_0^8 \frac{4x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^8 \frac{\mathrm{d}(1+x^2)}{1+x^2} = 2\left[\ln\left|1+x^2\right|\right]_0^8 = 8{,}34877454$$

Vooraleer je het programma uitvoert, moet je het integrandum definiëren in het functiescherm bij Y1.



Door na de uitvoering van het programma op ENTER te drukken, wordt het programma automatisch herstart.

Vul volgende tabel aan:

Aantal deelintervallen (n)	Benadering voor I
4	
10	
20	
100	
200	
1000	
2000	