

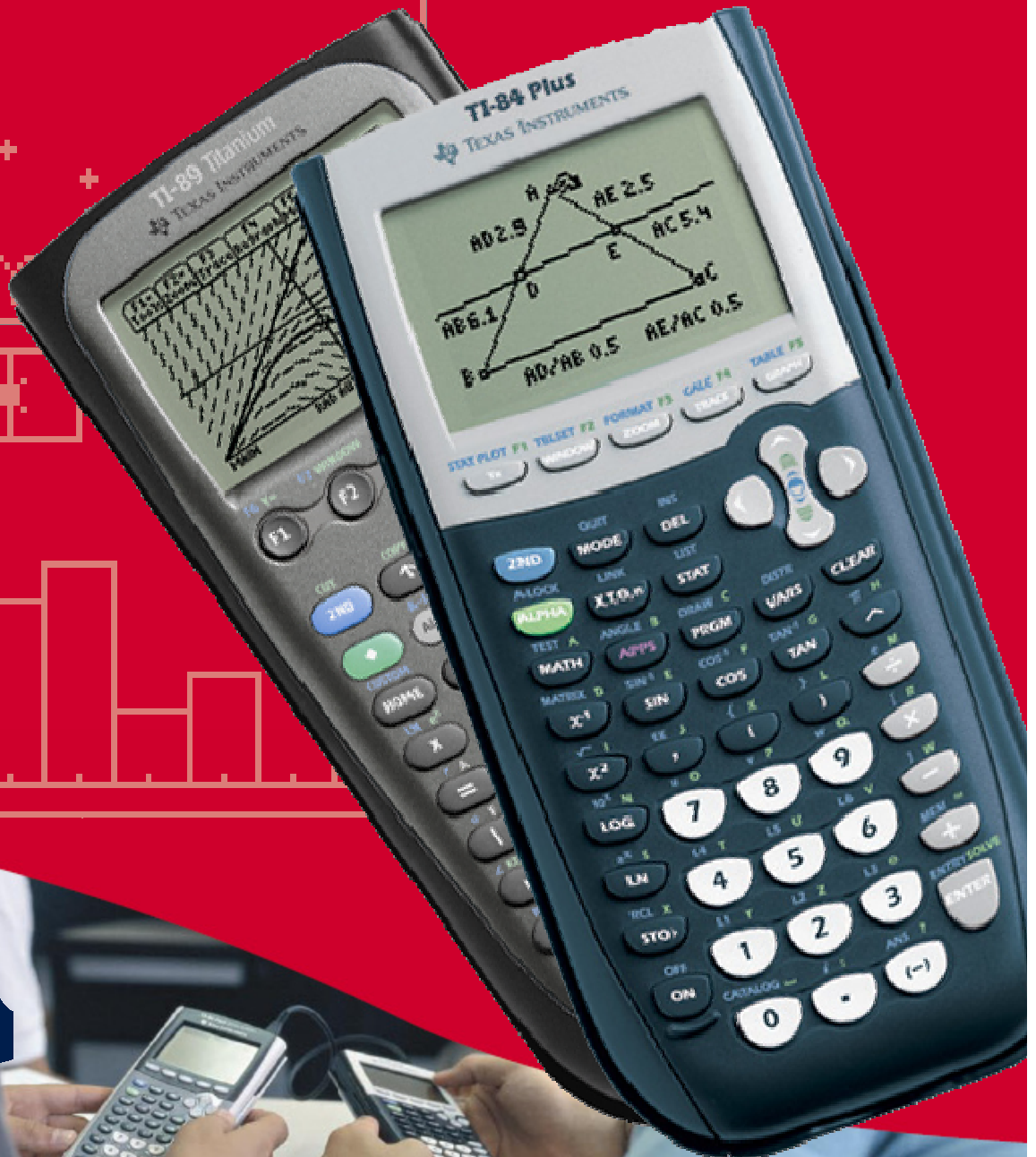
T³ EUROPE

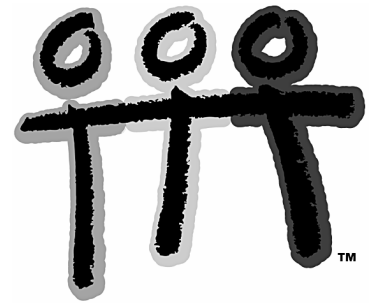


9^{de} Symposium Oostende

17 en 18 augustus 2006

N=20 Y=52.9
PRESS(KP/A)





T³ EUROPE

9^{de} Symposium Oostende

www.t3vlaanderen.be

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U. Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Inhoud

PLENAIRE LEZINGEN

Dynamic Inspirations

René Hugelshofer

Numeriek, grafisch en symbolisch wiskunde leren

Dirk Janssens

ZIE BIJLAGE

(GRM)²... de grafische rekenmachine in de tweede graad

Antoon Verleye

ZIE BIJLAGE

WORKSHOPS

Mathematiseren en oplossen van problemen voor tso/kso (2u - 3e graad)

Geert Delaleeuw

ZIE BIJLAGE

Lesliematrices en discrete dynamische systemen

Johan Deprez

Lineair programmeren, problemen met twee onbekenden

Etienne Goemaere

ZIE BIJLAGE

Exploring Mathematics with TI-Nspire™

René Hugelshofer

ZIE BIJLAGE

CAS in de klas: iedereen leert bij

Hilde Eggermont & Pedro Tytgat

Amusant, les Maths avec la TI-84 Plus!!

Michelle Solhosse

Begeleid zelfstandig leren en evalueren

Mark Verbelen

Vossen en konijnen of over eigenwaarden en eigenvectoren

Paul Verbelen

Financiële algebra in de praktijk: nieuwe begrippen en opdrachten

Bart Vinck

Sensoren aan het werk in het lab Fysica

Luc Vanden Abeele

Analyse in de derde graad met de TI-84 Plus

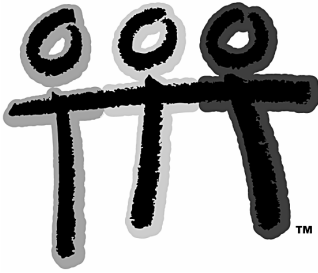
Didier Deses

De eerste stappen in programmeerland met de TI-83/84 Plus

Dominiek Ramboer

ZIE OOK BIJLAGE

T³ EUROPE



9^{de} Symposium
Oostende
17-18 augustus 2006

Dynamic Inspirations

René Hugelshofer



TI-*n*spire CAS

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U.Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Dynamic Inspirations for Teaching with Nspire

Dr. René Hugelshofer, Heerbrugg, Switzerland.

Part One: Presentation of TI-nspire

Preface: TI-nspire is the new software from TI. This text is only an early draft, based on a test version of TI-nspire, therefore the text and the pictures in the final presentation will be different. TI-nspire should be available in August 2006.

The software is based upon the approved handhelds V200 and TI-89, but combines the most important applications for mathematics and scientific instruction in one document. The applications can be used alone or linked dynamically and be displayed at a glance on one page. I'm going to present the applications together with some of the new innovative features:

Calculator:

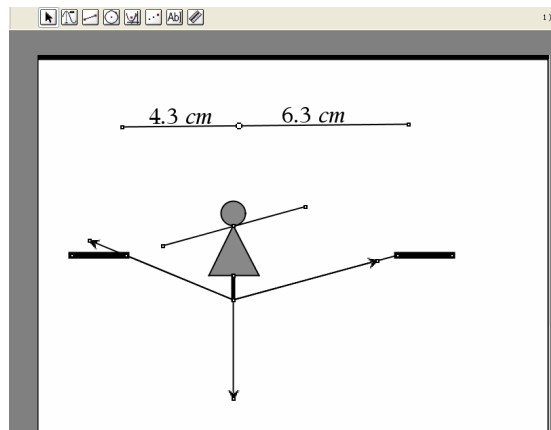
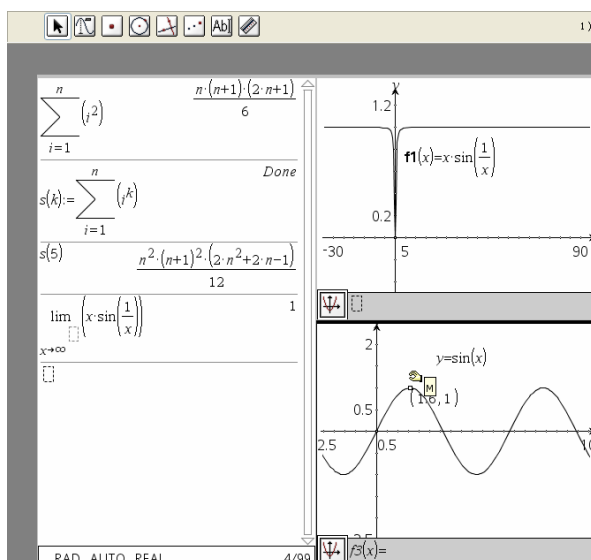
The set of commands for the CAS is consistent with that of the V200. Therefore, users of CAS systems of TI will get along quickly with this new environment. Additionally TI-nspire offers a Wysiwyg input alternatively to the keyboard entry. I will show this by the example of a sum of powers $\sum_{i=1}^n i^k$, the definition of terms and functions, as well as $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x}$.

Graph & Geometry:

Drawing functions has been simplified fundamentally.

The axes are changed dynamically with the mouse. Trace, as well as maximum, minimum and zeros take place dynamically via moving a point on the graph. Graphs of the most important functions can be transformed with the mouse. The equation of the function is thereby adapted dynamically.

In addition to function drawing a geometry environment is now included. This feature offers new possibilities, similar to Cabri and Geogebra. Unlike these programs, CAS can be linked to this geometry environment. The illustration at right shows a tightrope walker with the corresponding force vectors. I'm going to show, that walking on a tightrope of a given length is impossible. Sliders will not be implemented in the first version of TI-nspire, but as this example demonstrates, they can easily be set up (see workshop).



The ellipse described by the tightrope walker can be drawn with the locus option, or individual points can be grabbed and placed on a spreadsheet. It is even more important that the equation of the ellipse can also be derived analytically in the Calculator. The derivation of the ellipse can be found in „The Case for CAS“, page 53 (free download at www.t3ww.org).

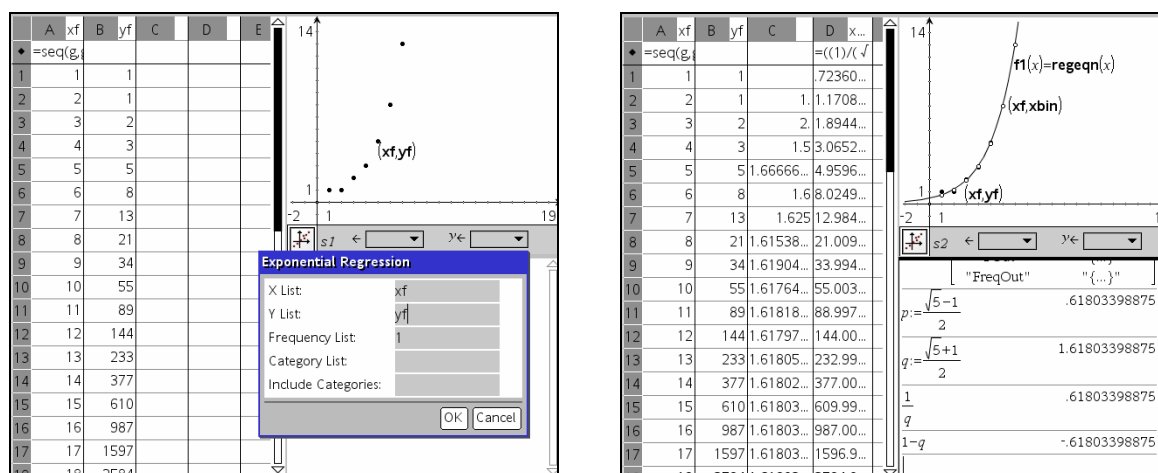
List & Spreadsheet:

In this application spreadsheet, Data-Matrix editor and statistics are combined. As an example I will take the Fibonacci sequence, which will initially be approximated with exponential regression. This approximation only disagrees with the Fibonacci sequence at the beginning. Zooming out shows the good agreement for large values of the sequence.

Now we determine the growth factor q as the quotient of two subsequent elements of the sequence in a new column. This sequence converges to a well-known value, that is, the ratio of the golden mean. This value is $q = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$ (see Calculator window).

The connection to the other ratio $p = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ is also shown: $p = 1/q = q - 1$.

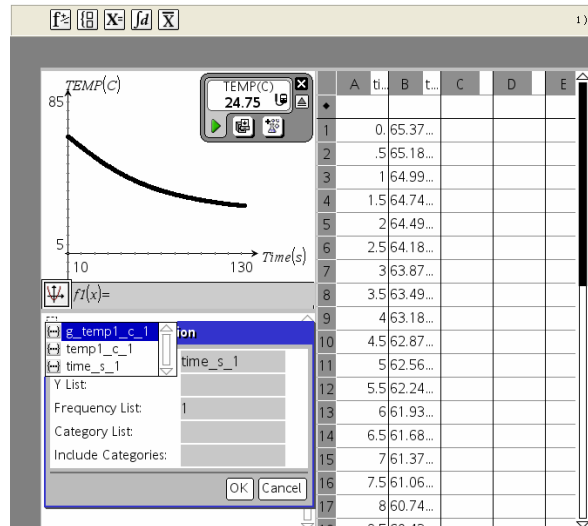
Binet's formula (1843) $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(q^n - p^n)$ shows a close approximation also for small values of n (Euler, D. Bernoulli and Moivre were also acquainted with this formula).



The Fibonacci sequence can also be illustrated using a sequence m^n of matrices with $m = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ or with a sequence of vectors $m^n \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Unfortunately sequences of matrices cannot yet be produced, thus requiring a detour via the components (which is not illustrated here).

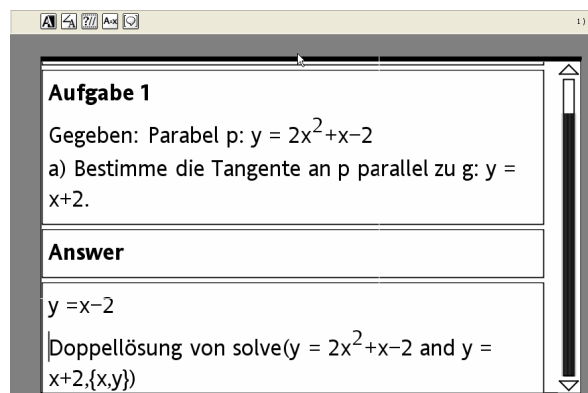
Data collection:

Data collected with Easy- or Go- Probes are automatically transferred into the spreadsheet and simultaneously plotted in Graphs & Geometry.



Notes:

The text editor is completely new and provides an entirely new way of problem setting. Formulas can also be presented in Wysiwig form (without evaluation). Furthermore the students can enter their results and the correct solution (if desired, as in the picture) can be shown using a toggle mode.



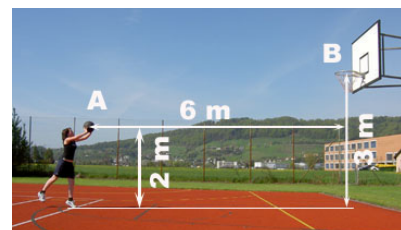
Data exchange:

A significant new feature is the fact that the software on the handheld and the PC (by 2007 also available for Mac) is identical and the documents are interchangeable. This allows tasks to be set up on a PC and transferred to students' handhelds. In the near future this will also be possible with the TI-Navigator (the HUB-solution, known from the TI-84).

Organising tasks:

TI-nspire opens new possibilities for setting up series of tasks. These can be single problems or can be topically grouped together in a single document.

With each new task the variables can be reset (new problem) or they can be retained (new page). I will show this with a teaching activity (shooting baskets), which will be available with TI-nspire.



Part Two: Dynamic Algebra

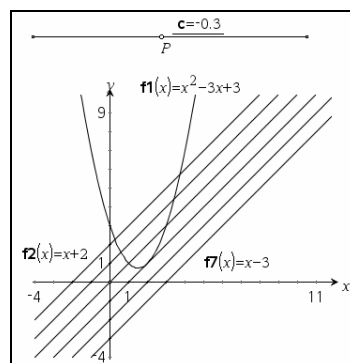
Originally my intention was to use TI-Interactive for my presentation in order to show how algebra can be taught dynamically (similar to dynamic geometry). However since the future of TI-Interactive is somewhat uncertain, I will briefly present the basic ideas with TI-nspire. Usually, I start with a classic problem, which is trivialised by CAS. By introducing parameters these problems often become surprisingly dynamic.

1st Task

Intersect the curve $y = x^2 - 3x + 3$ with

- $y = 2x + 1$ (a classic problem, trivialised by CAS)
- $y = 2x + c$. Which c leads to a tangent? (Dynamisation)
- $y = c$. Find the vertex of the parabola.
- the parabola $y = c - x^2$. Find the value of c for the osculating point?

In a first step we explore the situation graphically and examine the different kinds of solutions (one, two, none), as well as the impact of the parameter c with the help of a slider. TI-nspire can provide visualisation and calculation side by side and give an overview of the changes all in one document.



Solution:

- This task is reduced to a typing exercise for the solver.
- The question of the tangent (resp. the osculating parabola in d) is the question of the dual solution of the equation system.
- Determining the vertex is a special case of the tangent problem.

```

solve(y=2*x+1 and y=x^2-3*x+3,{x,y})
x=-((sqrt(17)-5)/2) and y=-((sqrt(17)-6)/2) or x=(sqrt(17)+5)/2 and y=(sqrt(17)+6)/2

solve(y=2*x+c and y=x^2-3*x+3,{x,y})
x=(sqrt(4*c+13)+5)/2 and y=(sqrt(4*c+13)+c+5)/2 or x=(-(sqrt(4*c+13)-5)/2) and y=(-(sqrt(4*c+13)-c)-5)/2

solve(y=c and y=x^2-3*x+3,{x,y})
x=(sqrt(4*c-3)+3)/2 and y=c or x=(-(sqrt(4*c-3)-3)/2) and y=c

solve(y=c-x^2 and y=x^2-3*x+3,{x,y})
x=(sqrt(8*c-15)+3)/4 and y=(3*sqrt(8*c-15)-4*c-3)/8 or x=(-(sqrt(8*c-15)-3)/4) and y=(3*sqrt(8*c)-4*c-3)/8
    
```

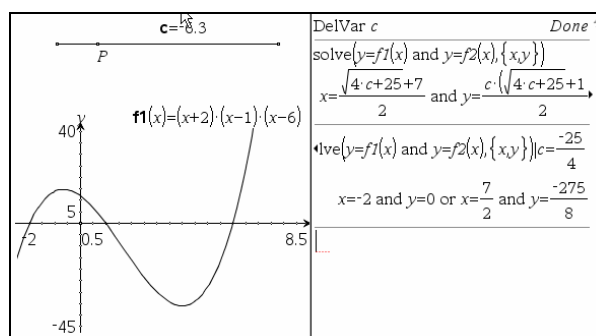
CAS offers a new understanding for such tasks: when done by-hand such intersection problems seem to be of another type; this is due to varying amounts of calculation time and methods of solution. With CAS one only exchanges objects. The calculation time remains the same. This will also be made clear with the following examples.

2nd Task

A parabola of order 3 has zeros at $-2, 1, 6$. The tangent is drawn through the zero point at $x = -2$.

Prove that the x -coordinate of the osculating point is the mean of the x -coordinates of the other zeros. (Solution see picture to the right.)

Is this also valid for arbitrary zeros?



Many problems from analysis can be solved with this method of dual solution by just using elementary methods.

3rd Task

- Intersect the circle $x^2 + y^2 = 25$ with the straight line $y = x + 4$.
- Determine the tangent on the circle parallel to the straight line at a) (dynamisation).
- Determine the centre point and radius of the circle, which touches the x- and y-axis and the straight line $y = x + 4$ (classic task of medium difficulty).

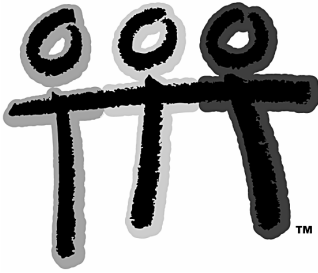
$\text{solve}(x^2+y^2=25 \text{ and } y=x+4, \{x,y\})$ $x = \frac{-\sqrt{34+4}}{2} \text{ and } y = \frac{-\sqrt{34-4}}{2} \text{ or } x = \frac{\sqrt{34-4}}{2} \text{ and } y = \frac{\sqrt{34+4}}{2}$
$\text{solve}(x^2+y^2=25 \text{ and } y=x+c, \{x,y\})$ $x = \frac{\sqrt{50-c^2-c}}{2} \text{ and } y = \frac{\sqrt{50-c^2+c}}{2} \text{ or } x = \frac{-\sqrt{50-c^2+c}}{2} \text{ and } y = \frac{-\sqrt{50-c^2-c}}{2}$
$\text{solve}((x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \text{ and } y=x+4, \{x,y\})$ $x = \frac{\sqrt{2 \cdot (r^2-8)} + 2 \cdot (r-2)}{2} \text{ and } y = \frac{\sqrt{2 \cdot (r^2-8)} + 2 \cdot (r+2)}{2} \text{ or } x = \frac{-\sqrt{2 \cdot (r^2-8)} - 2 \cdot (r-2)}{2}$
$\text{solve}((x-r)^2+(y-r)^2=r^2 \text{ and } y=x+4, \{x,y\}) r=2 \cdot \sqrt{2} \quad x=2 \cdot (\sqrt{2}-1) \text{ and } y=2 \cdot (\sqrt{2}+1)$

We replace the equation of the parabola with an equation of a circle. The way to the solution is identical to the one above, with the difference of two dual solutions.

In task c) the starting point is to define $M = (r/r)$ (here M is situated in the first quadrant) and thus you get the circle equation $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2$. The intersection with the straight line leads once again to the discussion of solutions to quadratic equations.

Final Comment

I have a big number of teaching activities dealing with the method of making classic tasks dynamic. Tasks of this nature lead to more interesting math lessons and more motivated students, who will be dealing more with mathematics than with drill. It is a surprising fact, that these students perform even better by-hand than comparable students in classes without CAS (e.g. successes in Mathematic Olympics and Kangaroo Competition).



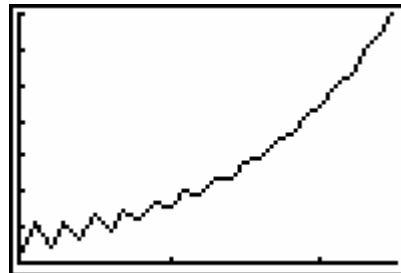
Lesliematrices en discrete dynamische systemen

Johan Deprez

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
\ u(n)=[A](1,1)u(
n-1)+[A](1,2)v(n
-1)
u(nMin)=[130]
\ v(n)=[A](2,1)u(
n-1)+[A](2,2)*v(

```



Lesliematrices en discrete dynamische systemen

Johan Deprez
johan.deprez@wis.kuleuven.be

T3-symposium, Oostende aug. 2006
 slides op www.ua.ac.be/johan.deprez

Kennismaking

economisch hoger onderwijs van 2 cycli, wiskunde en statistiek in de kandidaturen/Bachelor

EHSAL
 EHSAL

academische lerarenopleiding wiskunde



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN



T³ EUROPE

stuurgroep T³

redactie tijdschrift
 Uitwiskeling



Overzicht

- Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel
- De langetermijnleeftijdverdeling ‘wiskundig’ bepalen
- De langetermijngroefactor ‘wiskundig’ bepalen

Voorbeeld 1: Konijnen

- twee leeftijdsklassen: 0 jaar oud (I), 1 jaar oud (II)
 begin: 130 dieren in I, 470 dieren in II
 in de loop van elk jaar:
- sterven 10% van de konijnen die in het begin van het jaar 0 jaar oud zijn
 - zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 0 jaar oud was gemiddeld voor 0.2 nakomelingen
 - zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 1 jaar oud was gemiddeld voor 1.1 nakomelingen

$$X_0 = \begin{bmatrix} 130 \\ 470 \end{bmatrix}$$

van

$$L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix} \text{ naar } \begin{matrix} \text{I} \\ \text{II} \end{matrix}$$

Lesliematrix

Evolutie van het aantal konijnen via matrices

[2nd] [MATRIX] EDIT

MATRIX[A] 2 x 2
 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

op basisscherm
 [2nd] [MATRIX] NAMES

MATRIX[B] 2 x 1
 $\begin{bmatrix} 130 \\ 470 \end{bmatrix}$
 2, 1 = 470

[B]
 $\begin{bmatrix} 130 \\ 470 \end{bmatrix}$
 [A]*Ans
 $\begin{bmatrix} 543 \\ 117 \end{bmatrix}$

[A]*Ans
 $\begin{bmatrix} 1331.352614 \\ 1804.753786 \\ 11531.196602 \\ 2045.267019 \\ 1624.278408 \\ 2195.759652 \\ 1840.740317 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 543 \\ 117 \end{bmatrix}$
 $\begin{bmatrix} 1237.71 \\ 1488.71 \\ 1585.03 \\ 213.57 \end{bmatrix}$

langetermijngedrag:
 geen stabilisatie
 (i.t.t. migratiematrix)



Evolutie van het aantal konijnen via matrices en rijen

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = X_{n-1} \cdot \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{bmatrix}$$

gekoppelde
 recursievergelijkingen

$$\begin{cases} u_n = l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ v_n = l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{cases}$$

gebruik matrices
 om de rijen
 recursief te
 definiëren

[MODE]
 NORMAL SCI ENG
 FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
 RAD CHD DEGREE
 FUNC PAR POL BEG
 F0 F1 F2 F3 F4 F5 F6 F7 F8 F9
 CONNECTED DDT
 SEQUENTIAL SIMUL
 REAL a+bc P<=>R
 FULL HORIZ G-T
 SETCLOCK [00:00] 01:13

Plot1 Plot2 Plot
 XMin=0
 XMax=10
 YMin=-1
 YMax=10
 PlotStart=1
 PlotStep=1
 Xscl=1
 Yscl=1
 XLabel= X
 YLabel= Y
 EXPLOFF

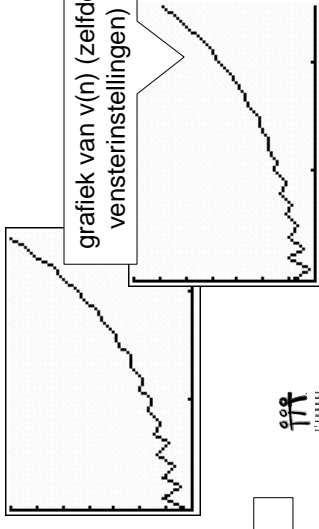


Evolutie van het aantal konijnen: TIME-grafieken

[2nd] [FORMAT] TIME
 TimeLabel uv vw uw
 RectOff PolarGC
 CoordOn CoordOff
 GridOn GridOff
 AxesOn AxesOff
 LabelOn LabelOff
 ExpOn ExpOff

Plot1 Plot2 Plot3
 XMin=0
 XMax=10
 YMin=-1
 YMax=10
 PlotStart=1
 PlotStep=1
 Xscl=1
 Yscl=1
 XLabel= X
 YLabel= Y
 EXPLOFF

alleen de grafiek van u(n)



grafiek van v(n) (zelfde
 vensterinstellingen)

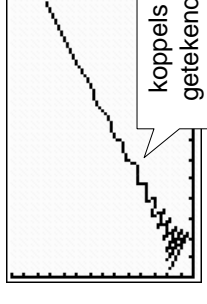


Evolutie van het aantal konijnen: uv-grafiek

[2nd] [FORMAT] uv
 TimeLabel uv vw uw
 RectOff PolarGC
 CoordOn CoordOff
 GridOn GridOff
 AxesOn AxesOff
 LabelOn LabelOff
 ExpOn ExpOff

Plot1 Plot2 Plot3
 XMin=0
 XMax=10
 YMin=-1
 YMax=10
 PlotStart=1
 PlotStep=1
 Xscl=1
 Yscl=1
 XLabel= X
 YLabel= Y
 EXPLOFF

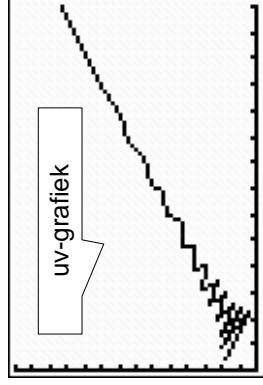
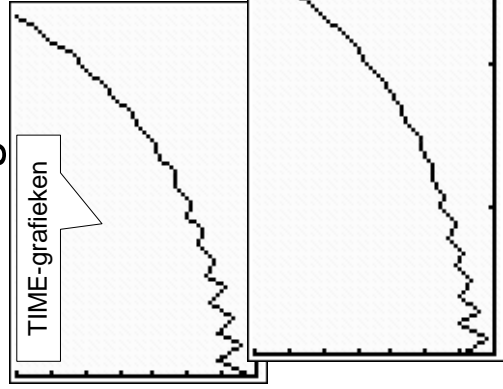
WINDOW
 XMin=0
 XMax=10
 YMin=-1
 YMax=10
 PlotStep=1



koppels (u(n), v(n)) worden
 getekend en opeenvolgende
 punten worden verbonden

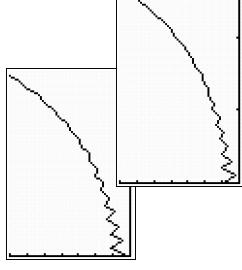


Evolutie van het aantal konijnen grafisch voorgesteld



wat leren deze grafieken ons over de evolutie op lange termijn?

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?



op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) in beide leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

$u(50)/u(49) = 1.0999934961$
 $v(50)/v(49) = 1.1000079498$

langetermijngroefactor is 1.1 voor beide leeftijdsklassen en voor de totale populatie

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) in beide leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad t_n = u_n + v_n$$

totale populatie
niet eenvoudig met de rekenmachine te vinden
(NIET $w(n)=u(n)+v(n)$)

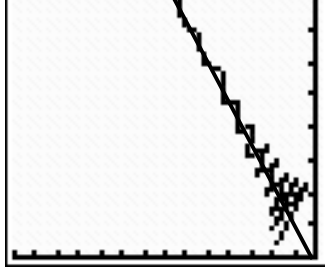
langetermijngroefactor is 1.1 voor beide leeftijdsklassen en voor de totale populatie

als n groot is, geldt:

$$u_n \approx 1.1 \cdot u_{n-1} \quad v_n \approx 1.1 \cdot v_{n-1}$$

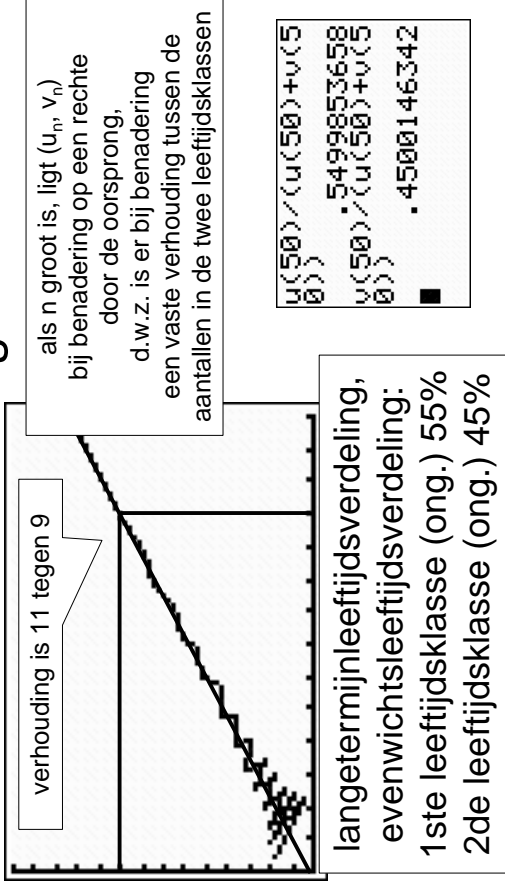
$$t_n \approx 1.1 \cdot t_{n-1} \quad X_n \approx 1.1 \cdot X_{n-1}$$

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?

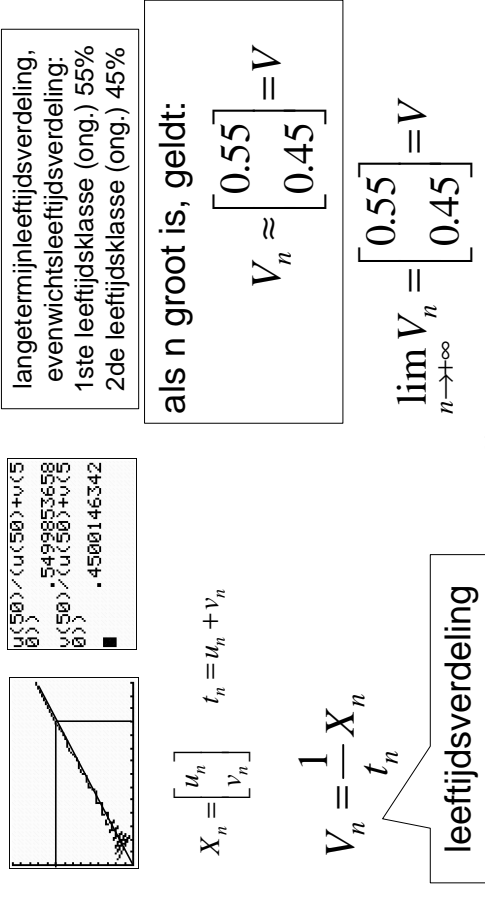


als n groot is, ligt (u_n, v_n) bij benadering op een rechte door de oorsprong, d.w.z. is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de twee leeftijdsklassen

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) met een gemeenschappelijke langetermijngroefactor voor alle leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

op lange termijn is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de leeftijdsklassen, weergegeven door de langetermijnleeftijdsverdeling

als n groot is, is $X_n \approx \lambda \cdot X_{n-1}$
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} X_n = V$$

Oefening 1

Herhaal het voorbeeld en/of maak de onderstaande oefening.

$$L = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroefactor
- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm

Oplossing van oefening 1

alleen de matrix A en de beginwaarden aanpassen

```
MATRIX[A] 2 x 2
[ 5 0 ]
[ 0 1 ]
z, z=0
```

```
Plot1 Plot2 Plots
w(Min)B(50)
v(n)=[A](2,1)*w
(n-1)+[A](2,2)*v
v(Min)=0
w(n)=
w(Min)=
```



Oplossing van oefening 1

- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroefactor

Oplossing van oefening 1

- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm



De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

als n groot is, geldt: $X_n \approx 1.1 \cdot X_{n-1}$ of ook: $X_{n+1} \approx 1.1 \cdot X_n$

$$L \cdot X_n \approx 1.1 \cdot X_n$$

$$L \cdot (t_n \cdot V_n) \approx 1.1 \cdot (t_n \cdot V_n) \quad t_n \cdot L \cdot V_n \approx t_n \cdot 1.1 \cdot V_n$$

$$L \cdot V_n \approx 1.1 \cdot V_n$$

als n steeds groter wordt, wordt de benaderende gelijkheid steeds beter

bovendien: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$

$$L \cdot V = 1.1 \cdot V$$

hiermee kunnen we de langetermijnleeftijdsverdeling vinden als we de langetermijngroefactor kennen



De langetermijnleeftijdverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1 \cdot V$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases} \quad \text{homogeen stelsel ...}$$

$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases}$... waarvan $u = 0, v = 0$ een oplossing is (waar we niets mee zijn)

... dat oneindig veel oplossingen heeft ... (namelijk $u = 11k, v = 9k$)

... waarvan er één diegene is die wij zoeken, nl. die met $u + v = 1$ (d.w.z. $k = 1/20$)



De langetermijnleeftijdverdeling 'wiskundig' bepalen als de langetermijngroefactor gekend is

los het homogene stelsel $LX = \lambda X$ op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

OF

breid het stelsel $LX = \lambda X$ uit met de vergelijking die uitdrukt dat de som van de componenten van X gelijk moet zijn aan 1 en los dit stelsel op



De langetermijnleeftijdverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1 \cdot V$ en $u + v = 1$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases}$$

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases}$$

$$u + v = 1$$

$$\text{rref}([C]) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & .55 \\ 0 & 1 & .45 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

we krijgen onmiddellijk de éne goede oplossing als we de vergelijking $u + v = 1$ aan het stelsel toevoegen

```
[A]-1.1*identity
(2)+[C]
[[.9 1.1]
[.9 -1.1]]
```

```
identity via [2nd]
[MATRIX] MATH
via [2nd] [MATRIX] EDIT
3, 3=1
```

[C] is de uitgebreide matrix van het stelsel, rref (= row reduced echelon form) via [2nd] MATRIX MATH



Oefening 2

China is het land met de grootste bevolking ter wereld. Tussen 1950 en 1970 groeide de Chinese bevolking bovendien razendsnel aan: van 556 miljoen in 1950 tot 830 miljoen in 1970. Vanaf 1970 voerde China daarom een politiek van geboortebepaling. Als de bevolking ingedeeld wordt in 4 leeftijdsklassen van 25 jaar wordt de Lesliematrix (op basis van gegevens die in 1980 beschikbaar waren) gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze geboortebepaling remde de aangroei van de bevolking maar was toch niet voldoende streng. De langetermijngroefactor bedraagt namelijk 1.2, d.w.z. dat de Chinese bevolking op lange termijn elke 25 jaar met 20% zou aangroeien als deze politiek verder gezet werd.

Bepaal de langetermijnleeftijdverdeling.



Oplossing van oefening 2

$$\text{we zoeken } V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

jonge bevolking!
elke generatie is
groter dan de vorige

leeftijds- klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%

```
MATRIX[ID] 4 x4
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]

rref([E])
[[1 0 0 0 | .4063]
 [0 1 0 0 | .3250]
 [0 0 1 0 | .2302]
 [0 0 0 1 | .0385]
 [0 0 0 0 | 0]]
```



Oplossing van oefening 2

$$\text{we zoeken } V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

[MATH] MATH

```
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
[0 0 0 0]
Ans+Frac
...1 0 0 -180/17]
...0 1 0 -144/17]
...0 0 1 0]
...0 0 0 1]]
```

$$\begin{cases} a = \frac{180}{17}k \\ b = \frac{144}{17}k \\ c = 6k \\ d = k \end{cases}$$

homogeen stelsel:
coëfficiëntenmatrix
gebruikt i.p.v.
uitgebreide matrix



eerst $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ oplossen

```
MATRIX[ID] 4 x4
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]
[.96  0  0  0]

rref([E])
[[1 0 0 0 | -10.588]
 [0 1 0 0 | -8.4705]
 [0 0 1 0 | 0]
 [0 0 0 1 | 0]]
```

Oplossing van oefening 2

$$\text{we zoeken } V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

eerst $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ oplossen

daarna uitdrukken dat $a + b + c + d = 1$

$$\begin{cases} a = \frac{180}{17}k \\ b = \frac{144}{17}k \\ c = 6k \\ d = k \end{cases} \quad k = \frac{17}{443}$$

leeftijds- klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1.1 \cdot V$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1.1 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases}$$

als we 1.1 (in het RL) vervangen

door een ander getal is $u = 0, v = 0$

de enige oplossing van het stelsel!

homogeen stelsel ...

... waarvan $u = 0, v = 0$ een oplossing is
(waar we niets mee zijn)

... dat oneindig veel oplossingen heeft ...
(namelijk $u = 11k, v = 9k$)

... waarvan er één diegene is die wij zoeken,
nl. die met $u + v = 1$ (d.w.z. $k = 1/20$)



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

determinant van de coëfficiëntenmatrix moet 0 zijn

coëfficiëntenmatrix is $L - \lambda E_2$

$$\det(L - \lambda E_2) = \det \begin{bmatrix} 0.2 - \lambda & 1.1 \\ 0.9 & -\lambda \end{bmatrix} \stackrel{\text{eis}}{=} \lambda^2 - 0.2\lambda - 0.99 = 0$$

geeft $\lambda = 1.1$ en $\lambda = -0.9$

langetermijngroefactor

alleen de positieve eigenwaarde heeft een concrete betekenis in de context



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

Lesiematrix van de Belgische bevolking (2003, leeftijdsklassen van 20 jaar)

$$L = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal de langetermijngroefactor.



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?

[2nd] [MATRIX] MATH
Flot3 /tot2 Plot3
V1 det([F]-X*id
entity(5))
V2=
V3=
V4=
V5=
V6=

WINDOW
Xmin=-.94
Xmax=.94
Xsc1=1
Ymin=-.062
Ymax=.062
Ysc1=1
Xres=1

[MODE] FUNC

Y1=det([F]-X*identity(5))

TRACE

X=.84

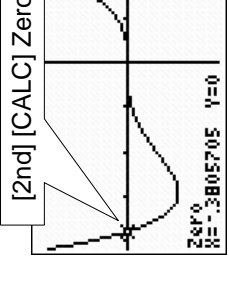
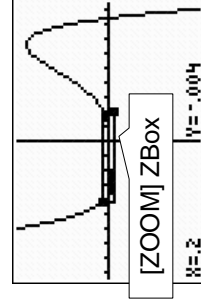
lukt niet handmatig

langetermijngroefactor is 0.84



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?



via numeriek algoritme!

De andere eigenwaarden zijn negatief of 0.



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen

Een getal λ is een eigenwaarde van een $n \times n$ -matrix A als en slechts als $\det(A - \lambda E_n) = 0$ (d.w.z. dat het stelsel $AX = \lambda X$ oneindig veel oplossingen heeft).

De langetermijngroefactor van een Lesliematrix is een eigenwaarde van de Lesliematrix.

Een Lesliematrix heeft juist één strikt positieve, reële eigenwaarde (onder milde voorwaarden).

Het bepalen van de langetermijngroefactor van een Lesliematrix komt dus neer op het bepalen van de strikt positieve, reële eigenwaarde van de Lesliematrix.

TTU
Tilburg

De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen

Het is niet altijd mogelijk om de vergelijking $\det(A - \lambda E_n) = 0$ analytisch op te lossen.

De numerieke methode om de grootste positieve eigenwaarde van een matrix te vinden maakt in essentie gebruik van de methode die wij bij de 'vaststellingen' gebruikt hebben.

TTU
Tilburg

De langetermijnleeftijdverdeling 'wiskundig' bepalen (bis)

langetermijnleeftijdverdeling 'wiskundig' bepalen:
los het homogene stelsel $AX = \lambda X$ op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

Een kolommatrix $X (\neq 0)$ is een eigenvector van een matrix A met eigenwaarde λ als en slechts als $AX = \lambda X$.

De langetermijnleeftijdverdeling van een Lesliematrix L is een eigenvector van L met de langetermijngroefactor als eigenwaarde.

TTU
Tilburg

Oefenen

Herhaal de voorbeelden en/of ...

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maak oefening 3 (volgende slide).

TTU
Tilburg

Oefening 3

In 1980 verstrengde de Chinese regering de geboortebeperking. Gezinnen met één kind werden de norm. Veronderstel dat de Lesliematrix hierdoor verandert in de linkse matrix hieronder. De beginpopulatie wordt gegeven door de rechtse matrix hieronder.

$$L = \begin{bmatrix} 0.416 & 0.084 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 540 \\ 307 \\ 132 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- Bepaal de langetermijngroefactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?
- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?
- Bereken de langetermijnleeftijdverdeling.

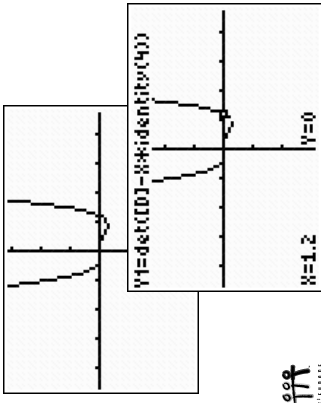


Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=det([D]-X*id
entity(4))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
ZOOM MEMORY
1:ZBox In
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
    
```

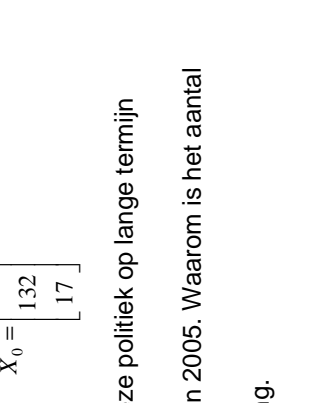


Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=det([D]-X*id
entity(4))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
ZOOM MEMORY
1:ZBox In
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
    
```



Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...



Oplossing van oefening 3

- Bepaal de langtermijngroefactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?

MATRIX[G] 4 x4

```

[.416  0  0  0]
[.96  0  0  0]
[0  .85  0  0]
[0  0  0  0]
    
```

Plot1 Plot2 Plot3
 $\setminus Y1$ $\setminus \text{Bdet}([G]-X*id$
 $\setminus \text{entities}(4)$

WINDOW
 $X_{min} = .94$
 $X_{max} = .94$
 $X_{scl} = .1$
 $Y_{min} = .031$
 $Y_{max} = .031$
 $Y_{scl} = 1$
 $X_{res} = 1$

$\lambda = .56$

$\lambda = \text{det}([G] - \lambda * \text{identity}(4))$

langtermijngroefactor is 0.56
 veel te streng op de lange termijn



Oplossing van oefening 3

- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?

MATRIX[H] 4 x1

```

[540]
[307]
[122]
[179]
    
```

veel jonge Chinezen, dus
 toch nog veel geboorten

cumSum([H])

```

[1540]
[1847]
[1979]
[1996]
    
```

1980: 996 miljoen Chinezen

2005: 1056 miljoen Chinezen

names [MATH] EDIT
 4:fill(
 5:identity(
 6:randM(
 7:augment(
 8:Matr*list(
 9:List*matr(
 0:cumSum(
 1:)

[2nd] [MATRIX] MATH

cumSum([G]*[H])

```

[1979]
[1996]
[1250.428]
[1768.828]
[11029.778]
[11056.178]
    
```



Oplossing van oefening 3

- Bereken de langtermijnleeftijdverdeling.

$[G] - 0.56 * \text{identit}$
 $y(4) + [1]$

```

[[-.144  -.084  0  ...]
[.96  -.56  0  ...]
[0  .85  .2...
[0  0  0  0]
    
```

MATRIX[I] 5 x5

```

[0  0  0  0  0]
[1  0  0  0  0]
[0  1  0  0  0]
[0  0  1  0  0]
[0  0  0  1  0]
    
```

veel minder jonge
 Chinezen dan in 1980

pref([I])

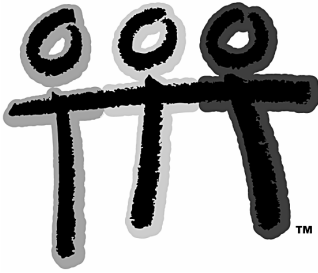
```

[.1601...
[.2744...
[.4166...
[.1487...
[0]
    
```

$S, S=1$



Bedankt voor uw aandacht!



CAS in de klas: iedereen leert bij

Hilde Eggermont & Pedro Tytgat

The screenshot shows a CAS calculator interface with the following content:

- Menu bar: F1 (Algebra), F2 (Calc), F3 (Other), F4 (PrgmIO), F5 (Clean Up)
- Command: $\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(t(x)) = 0, x\right)$
- Result: $x = \frac{a \cdot \sqrt{v^2 - w^2} - b \cdot w}{\sqrt{v^2 - w^2}}$ or $x = \frac{a \cdot \sqrt{v^2 - w^2} + b}{\sqrt{v^2 - w^2}}$
- Command: $\text{expand}\left(\frac{a \cdot \sqrt{v^2 - w^2} - b \cdot w}{\sqrt{v^2 - w^2}}\right)$
- Result: $a - \frac{b \cdot w}{\sqrt{v^2 - w^2}}$
- Bottom status bar: MAIN, RAD AUTO, FUNC 3/30

CAS in de klas: iedereen leert bij

Hilde Eggermont, Pedro Tytgat

Sint-Pieterscollege - Leuven

Dit jaar konden we beschikken over voldoende TI-89's om twee klassen van het zesde jaar (ASO, 6u en 8u wiskunde) de toestellen een heel jaar te laten gebruiken, ook thuis. Deze machines werden ons ter beschikking gesteld door Texas Instruments. Van ons werd verwacht onze ervaringen, lesblaadjes en oefenmateriaal te delen met collega's.

In deze sessie willen we enkele ervaringen bespreken aan de hand van een tweetal concrete toepassingen. We beginnen echter met enkele algemene opmerkingen.

Nieuwe leermiddelen vergen tijd

Toen enkele jaren geleden het grafisch rekentoestel zijn intrede deed, hebben we ons met z'n allen moeten aanpassen: theorie kon anders worden aangebracht, nieuwe oefeningen drongen zich op, een les viel al eens in het water t.g.v. onverwachte fenomenen op de rekentoestellen van bepaalde leerlingen, ... Vermoedelijk willen velen onder ons ondertussen niet meer zonder een TI-83 of vergelijkbaar toestel werken.

Het invoeren van de TI-89 plaatste ons voor gelijkaardige uitdagingen. Eén schooljaar was trouwens niet voldoende om te kunnen besluiten 'nu weten we hoe we het moeten aanpakken'. Maar we leerden al heel wat bij, zodat schooljaar 2006-2007 een betere en meer doordachte inschakeling van de toestellen zal kennen. En vermoedelijk wordt 2007-2008 alweer iets beter.

We hopen de komende maanden en jaren ook meer oefenmateriaal te kunnen verzamelen dat zich specifiek leent tot oplossing met een CAS (Computer Algebra Systeem). De meeste opgaven die nu in handboeken te vinden zijn, kunnen immers ook vrij vlot manueel opgelost worden, aangezien ze bedoeld zijn voor leerlingen zonder dergelijke hulpmiddelen. In de 6u-klas konden we dankzij het rekentoestel wel oefeningen aansnijden die we normaalgezien zouden overslaan, uit vrees dat een overdaad aan algebraïsch rekenwerk de basisredeneringen zou overschaduwen en de kans om de eindmeet te halen te ernstig zou beperken. Uit de enquête die we op het einde van het jaar hielden, bleek dat een aantal leerlingen trots waren op het feit dat ze met het toestel moeilijker oefeningen aan konden dan zonder: ook de redeneringen waren immers zwaarder, los van het rekenwerk.

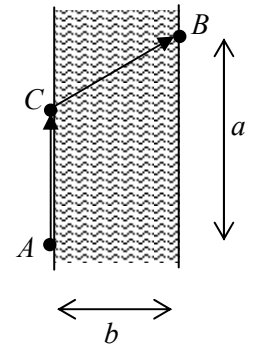
De voorbeelden hieronder zijn niet onze succesverhalen, maar zijn evenmin een verslag van negatieve ervaringen. Het zijn voorbeelden van situaties waar we ons spontaan gebruik van de TI-89 moesten of wilden bijsturen, situaties die u misschien ook zal ontmoeten de dag dat uw leerlingen met een CAS aan de slag gaan.

Globaal genomen was onze ervaring zo positief dat we, net zoals al eens gebeurde met de TI-83, bepaalde leerstofonderdelen niet graag meer *zonder* TI-89 zouden behandelen.

Haast en spoed...

Iemand verplaatst zich van punt A naar punt B door eerst een stuk te lopen (met snelheid v) langs de oever van een kanaal tot een punt C en van daar af te zwemmen (met snelheid w).

Hoe moet het punt C gekozen worden opdat dit traject in de kortst mogelijke tijd zou kunnen afgelegd worden, wetende dat $v > w$?

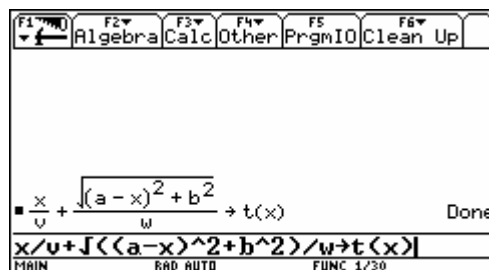


Als we $|AC| = x$ stellen, is $|BC| = \sqrt{(a-x)^2 + b^2}$. De totale benodigde tijd om zich van A tot B te

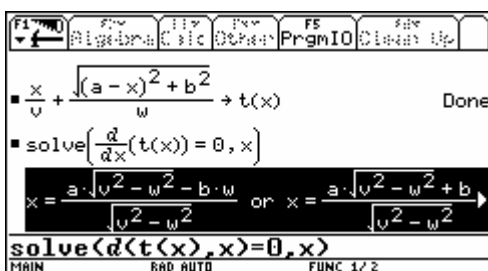
verplaatsen is dan $t = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{w}$.

Om de minimale tijd te vinden, zoeken we de nulpunten van $\frac{dt}{dx}$.

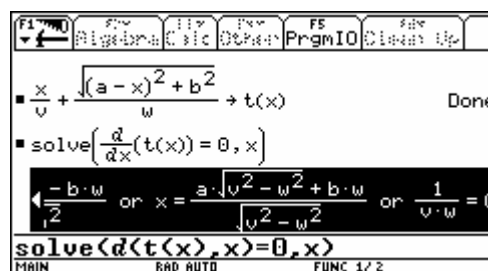
Iste aanpak: enthousiast inschakelen van ICT



invoeren van de functie $t(x)$



eerste oplossing voor x (links)



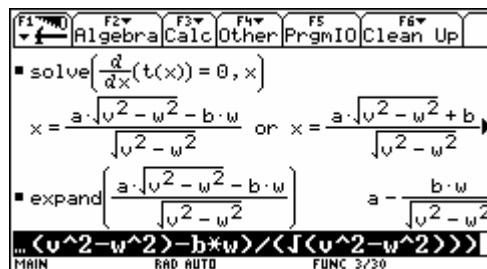
tweede oplossing voor x (midden) en onverwachte derde optie (rechts)

Het toestel vindt twee oplossingen: $x = \frac{a\sqrt{v^2 - w^2} - bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$ of $x = \frac{a\sqrt{v^2 - w^2} + bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$.

Blijkbaar is de afgeleide $\frac{dt}{dx}$ ook nul wanneer $\frac{1}{vw} = 0$, wat een ‘absurde’ optie is. Dit is voor sommige leerlingen wel een bron van onzekerheid: wat is de status van de oplossing van zo’n toestel? En bijgevolg: wat is de status van *een* oplossing?

Dat er twee oplossingen zijn, gebeurt wel vaker, bijvoorbeeld omwille van de een of andere symmetrie in de opgave. Bij het vereenvoudigen van de uitdrukkingen (wat eventueel ook via het toestel kan), vinden we voor de twee mogelijke x -waarden:

$$x = a \pm \frac{bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$$

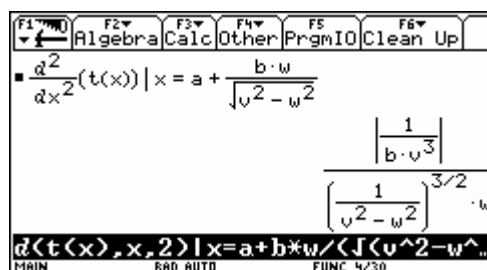


‘expand’ komt overeen met ‘werk uit en vereenvoudig’

Na het herschrijven van beide oplossingen blijkt duidelijk dat we met een probleem zitten: er zou een optimale strategie zijn waarbij je eerst *meer* dan de afstand a loopt, nl. tot $x = a + \frac{bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$, om vervolgens *terug* te zwemmen naar B .

Een eerste reflex bij mijn leerlingen was: misschien komt dit overeen met een relatief *maximum* of een buigpunt. We hebben immers enkel naar de nulpunten van de eerste afgeleide gezocht.

Een relatief maximum is echter meteen uitgesloten: gewoon verder lopen levert een *nóg* grotere tijd op. De tweede afgeleide van $t(x)$ is ook niet nul voor die x -waarde, zodat ook een buigpunt niet als verklaring kan dienen:



berekenen van de 2de afgeleide,

waarna x wordt vervangen door $a + \frac{bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$

In de klas vond ik niet meteen een verklaring voor deze ‘foute’ oplossing. Daar ging mijn enthousiaste en roekeloze inschakeling van het wondertoestel...

Ondertussen heb ik bijgeleerd. Dat gebeurde toen ik de oplossing eens gewoon ‘op grootmoeders wijze’ zocht, d.w.z. met pen en papier.

2de aanpak: zonder ICT

Met de hand gaat het als volgt:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{v} + \frac{1}{w} \cdot \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} \\ &= \frac{w\sqrt{(a-x)^2 + b^2} - v(a-x)}{vw\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}\end{aligned}$$

Het vinden van de nulpunten leidt tot het oplossen van een irrationale vergelijking:

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} = 0 &\Leftrightarrow w\sqrt{(a-x)^2 + b^2} = v(a-x) \\ &\Leftrightarrow^{a>x} w^2((a-x)^2 + b^2) = v^2(a-x)^2 \\ &\Leftrightarrow w^2b^2 = (v^2 - w^2)(a-x)^2 \\ &\Leftrightarrow^{a>x} \frac{wb}{\sqrt{v^2 - w^2}} = a-x \\ &\Leftrightarrow x = a - \frac{wb}{\sqrt{v^2 - w^2}}\end{aligned}$$

Nu doet er zich maar één oplossing voor! De oorzaak is snel duidelijk: het stellen van de nodige *kwadrateringsvoorwaarden* blijkt essentieel. Bij het 4de equivalentie-teken voeg ik extra informatie aan het model toe: mijn inzicht vertelt me dat $x < a$. Die informatie had mijn TI-89 niet toen ik naar alle nulpunten van de eerste afgeleide vroeg.

Moraal van het verhaal: laat het toestel niet zomaar in één keer een vergelijking oplossen! Haast en spoed is zelden goed. Betreft het een irrationale vergelijking, bijvoorbeeld, dan moet achteraf gecontroleerd worden of er ‘spookoplossingen’ zijn gevonden (ingevoerde oplossingen). Ook bij het manueel werken is het immers nodig expliciet stil te staan bij het teken van bepaalde uitdrukkingen.

3de aanpak: gepland voor het 1ste trimester 2006...

Wat de onverwachte situatie hierboven illustreert, stelden we vaker vast dit jaar: het is nog steeds voordelig om stap voor stap te werken, ook met een CAS.

Didactisch is het interessant om zich te blijven vervolmaken in het opsplitsen van grote opgaven in kleinere deelredeneringen, zoals dat ook zonder CAS gebeurt. Technisch of algebraïsch zorgen tussenstappen ervoor dat je voeling houdt met wat je aan het berekenen bent en de sterktes en zwaktes van het toestel voor dat bepaald soort algebraïsch probleem telkens kan inschatten. *Irrationale vergelijkingen oplossen* vereist menselijke interventie of interpretatie, bijvoorbeeld, evenals het werken met goniometrische vergelijkingen en uitdrukkingen.

Een mogelijke aanpak is de volgende.

The screenshot shows a CAS interface with a menu bar (F1-F6) and a main display area. The function $t(x) = \frac{x}{v} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{w}$ is entered. Below it, the derivative $\frac{d}{dx}(t(x)) = \frac{x-a}{\sqrt{x^2 - 2 \cdot a \cdot x + a^2 + b^2} \cdot w} + \frac{1}{v}$ is calculated. The status bar at the bottom indicates 'MAIN', 'RAD AUTO', and 'FUNC 2/30'.

*het berekenen van een afgeleide gebeurt
nog altijd sneller met een CAS*

De functie $t(x)$ en haar afgeleiden zijn irrationale functies. Bij het zoeken naar nulpunten van $\frac{dt(x)}{dx}$ mogen we dus ingevoerde oplossingen verwachten. Enkel x -waarden van 0 tot a zijn mogelijk; dit controleren we achteraf.

The screenshot shows the same CAS interface. The derivative equation $\frac{d}{dx}(t(x)) = 0$ is entered, and the CAS returns the solutions: $x = \frac{a \cdot \sqrt{v^2 - w^2} - b \cdot w}{\sqrt{v^2 - w^2}}$ or $x = \frac{a \cdot \sqrt{v^2 - w^2} + b}{\sqrt{v^2 - w^2}}$. The status bar at the bottom indicates 'MAIN', 'RAD AUTO', and 'FUNC 3/30'.

*we weten nu dat de kans reëel is dat er
ingevoerde oplossingen zijn gevonden*

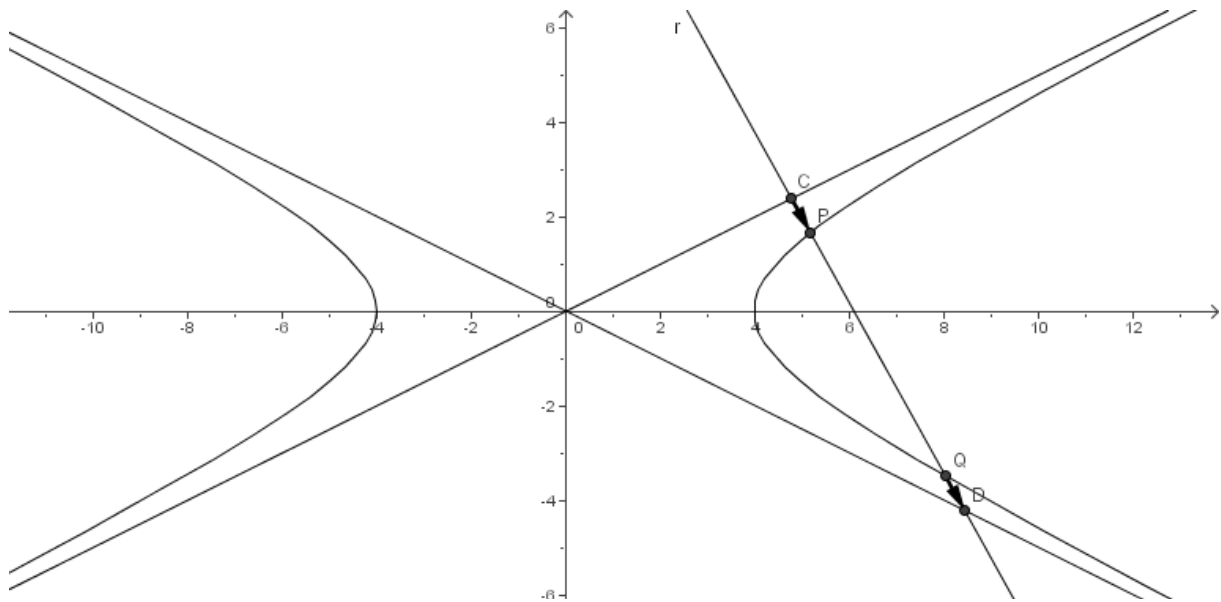
We vinden twee oplossingen, waarvan er één in het zinvolle interval $[0, a]$ ligt: $x = a - \frac{bw}{\sqrt{v^2 - w^2}}$.

Bij deze hybride werkwijze waarbij het gebruik van een CAS gecombineerd wordt met een stap-voor-stap berekende oplossing blijft de meerwaarde van een CAS overeind: het rekenwerk wordt tegen hoge snelheid uitgevoerd. Maar het moeilijke denkwerk, het modelleren, mathematiseren en wiskundig of algebraïsch redeneren blijft intact. Een win-win-situatie, zeg maar.

Beauty and the beast

Meer dan eens kwam het voor dat de kracht van het rekentoestel de leerlingen misleidde en dat ze niet gedwongen werden een alternatief te zoeken door onoverkomelijk rekenwerk. Ook met CAS in de hand is het wiskundig gezien waardevol te blijven zoeken naar alternatieven die eleganter zijn. Gaande weg hebben we dit vertaald in het advies “heb oog voor de schoonheid”.

Als een rechte r een hyperbool \mathcal{H} snijdt in de punten P en Q en de asymptoten van die hyperbool in de punten C en D , dan is $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{QD}$.



Dit is zeker geen evidente eigenschap. Een bewijs is nodig. We pakken het analytisch aan. We kiezen het assenstelsel zo dat we kunnen werken met de canonieke vergelijking van de hyperbool:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De asymptoten hebben als vergelijkingen

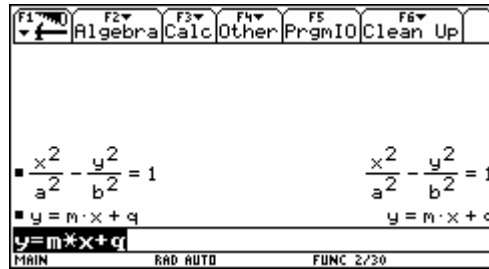
$$y = \pm \frac{b}{a} x.$$

De rechte r geven we als vergelijking

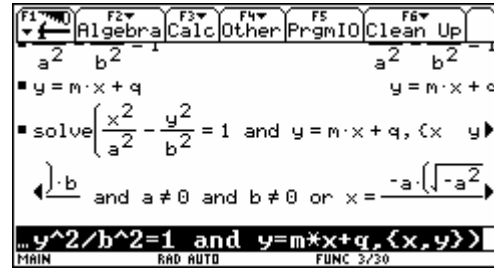
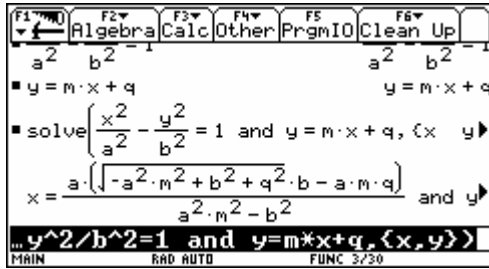
$$y = m \cdot x + q.$$

Eerste werkwijze: we gebruiken de brute kracht van de machine

We zoeken de snijpunten van de hyperbool \mathcal{H} met de rechte r . We geven de vergelijkingen in en lossen het stelsel op naar x en y . We gebruiken de gewone **solve**-instructie.



vergelijkingen kunnen gewoon ingegeven worden om later opgelost te worden naar een bepaalde variabele, om een variabele te substitueren, ...



$$\text{solve}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ and } y = mx + q, \{x, y\}\right)$$
 lost beide vergelijkingen op naar x en y

klikken we met de cursor naar rechts, dan krijgen we alle oplossingen en bijbehorende voorwaarden te zien

De oplossing ziet er erg zwaar uit. Als we met de cursor naar rechts gaan, wordt de onaantrekkelijkheid van de oplossingen pas echt duidelijk.

Hieronder is het hele antwoord zichtbaar gemaakt met een ander CAS-programma.

$$\text{solve}\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ and } y = m \cdot x + q, \{x, y\}\right)$$

$$x = \frac{a \cdot \left(\sqrt{-(a^2) \cdot m^2 + b^2 + q^2} \cdot b - a \cdot m \cdot q\right)}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \text{ and } y = \frac{\left(a \cdot \sqrt{-(a^2) \cdot m^2 + b^2 + q^2} \cdot m - b \cdot q\right) \cdot b}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \text{ and } a \neq 0$$

$$\text{and } b \neq 0 \text{ or } x = \frac{-a \cdot \left(\sqrt{-(a^2) \cdot m^2 + b^2 + q^2} \cdot b + a \cdot m \cdot q\right)}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \text{ and } y =$$

$$\frac{-\left(a \cdot \sqrt{-(a^2) \cdot m^2 + b^2 + q^2} \cdot m + b \cdot q\right) \cdot b}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \text{ and } a \neq 0 \text{ and } b \neq 0$$

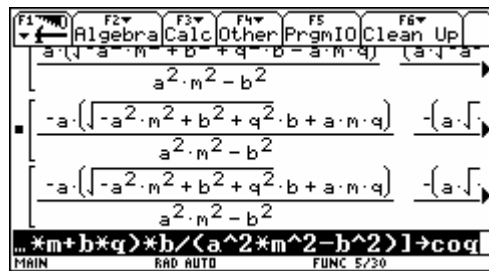
Aangezien we eigenlijk kwadratische vergelijkingen $Ax^2 + Bx + C = 0$ aan het oplossen zijn, zijn de

oplossingen voor x in essentie van de vorm $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$:

$$x = \frac{-a^2 m q \pm a b \sqrt{b^2 + q^2 - a^2 m^2}}{a^2 m^2 - b^2}$$

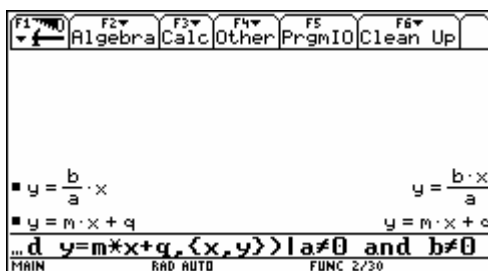
Het bleek nuttig de leerlingen daarop te wijzen, opdat ze de oplossingen op die manier sneller en juist zouden kunnen lezen en interpreteren. Voor het verdere verloop van het bewijs zullen we de

bovenstaande coördinaten nog enkele keren nodig hebben. We slaan beide oplossingen voor x en y daarom op in een vector *cop* resp. *coq*.

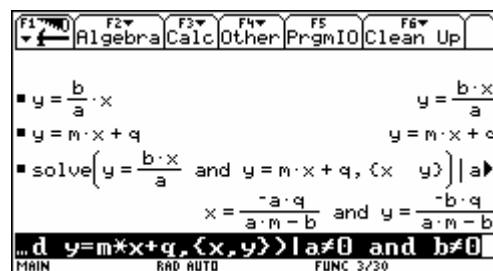


de coördinaten van het tweede punt worden gestockeerd d.m.v. “[..., ...]→coq”

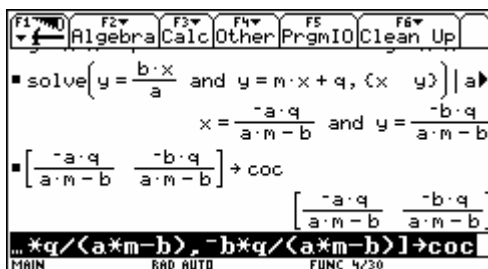
We kunnen nu de snijpunten van de rechte r met de asymptoten bepalen. Dit zijn de punten C en D . De berekening van de coördinaten van C zie je in de schermafdrucken hieronder. We geven *zelf* aan dat $a \neq 0$ en $b \neq 0$, zodat het toestel daar niet meer op hoeft te wijzen.



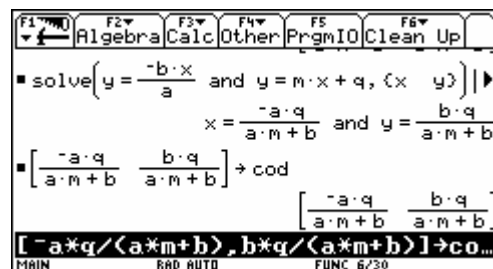
$\text{solve}\left(y = \frac{b}{a}x \text{ and } y = mx + q, \{x, y\}\right) | a \neq 0 \text{ and } b \neq 0$



beide coördinaten worden nu gegeven, zonder de extra voorwaarde $a \neq 0$ en $b \neq 0$

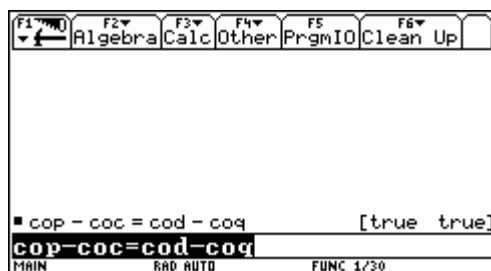


beide coördinaten worden gestockeerd in de vector *coc*



hetzelfde gebeurt nu voor het snijpunt van r met de andere asymptoot

Het enige wat we nu nog moeten doen is controleren of $\overline{CP} = \overline{QD}$. De machine doet dat voor ons.



zowel de x- als de y-coördinaat van beide vectoren blijken gelijk te zijn

Het bewijs is geleverd.

Maar de vraag is wel of dit soort van bewijs voldoende geeft. Het klopt allemaal, dat wel. Maar je hebt geen inzicht gekregen in deze eigenschap.

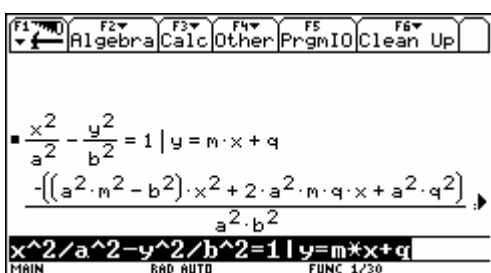
Tweede strategie: redeneren als leidraad

Een andere manier van werken is niet alles aan de machine over te laten. Door opnieuw de redenering in kleinere stapjes op te splitsen, zoals bij het manueel werken, houden we de berekeningen beter in de hand en krijgt ons denkvermogen meer kansen om met een snellere, elegantere redenering op de proppen te komen.

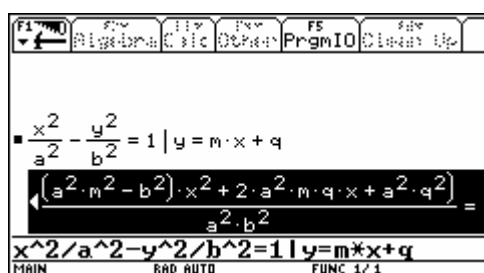
Als je het stelsel

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = m \cdot x + q \end{cases}$$

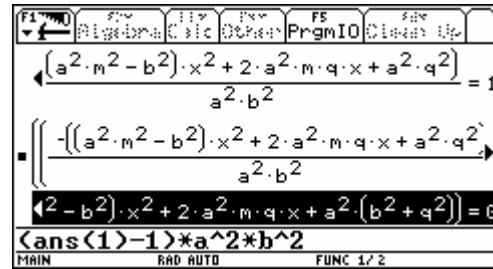
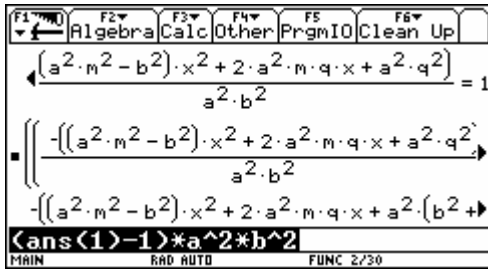
met de hand oplost, zal je ongetwijfeld de tweede vergelijking gebruiken om y te vervangen in de eerste. Dit kunnen we ook met de TI89. We krijgen een vierkantsvergelijking in x die we kunnen herleiden naar de standaardvorm (zie schermafdrucken):



de verticale streep zorgt ervoor dat y gesubstitueerd wordt in de linkse uitdrukking



indien we van beide leden 1 aftrekken en vervolgens vermenigvuldigen met a^2b^2 , staat de vergelijking in standaardvorm



We vinden: $-((a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(b^2 + q^2)) = 0$.

De uitdrukking ‘ans(1)’ in de opdrachtregel hierboven, staat voor de volledige uitdrukking in het rekenscherm, d.w.z. linkerlid en rechterlid. De opdracht ‘ans(1) – 1’ trekt dus van beide leden 1 af; in die zin worden leerlingen verplicht om ‘correcter’ te denken over de betekenis van “ik breng die 1 over van het rechter- naar het linkerlid”. Een verkeerde bewerking op beide leden is ook meteen zichtbaar op het scherm, zodat de redeneerfout gecorrigeerd kan worden, wat niet het geval is met het foutief toepassen van “ik breng dit over naar het andere lid” met potlood en papier.

We doen nu hetzelfde met de asymptoten. We kunnen dit rechtepaar samenvatten in één enkele vergelijking:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

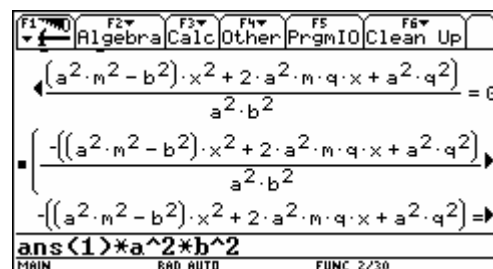
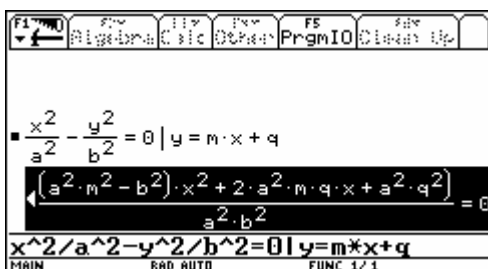
of ook:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Om de snijpunten van de asymptoten met r te bepalen, moeten we het stelsel

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \\ y = m \cdot x + q \end{cases}$$

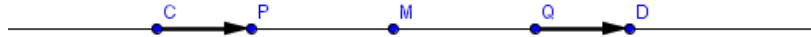
oplossen. De gelijkennis met het vorige valt onmiddellijk op. Ook hier krijgen we een vierkantsvergelijking in x die we herleiden naar de standaardvorm.



Nu vinden we $-((a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2q^2) = 0$

Het resultaat is bijna dezelfde vierkantsvergelijking als hierboven: alleen de constante term is verschillend. Zonder de vergelijking verder op te lossen kunnen we de redenering nu afwerken.

Om aan tonen dat $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{QD}$ is het voldoende aan te tonen dat het midden van $[PQ]$ gelijk is aan het midden van $[CD]$. Dit is eenvoudig in te zien en na te rekenen met vectoren.



Om analytisch het midden van een lijnstuk te bepalen nemen we de helft van de som van de coördinaten van de eindpunten van het lijnstuk. Nu zijn de x -coördinaten van de punten P en Q de oplossingen van de eerste vierkantsvergelijking die we opstelden. Anderzijds zijn de x -coördinaten van de punten C en D de oplossingen van de tweede vierkantsvergelijking. Van beide vergelijkingen hebben we slechts de som $x_1 + x_2$ van de oplossingen x_1 en x_2 nodig. Daarvoor heb je de coëfficiënten nodig van de eerste twee termen en niet de constante term!

Uit de vergelijkingen hierboven volgt, zonder enige verdere berekening, dat die sommen inderdaad gelijk zijn. Omdat de vier punten op één rechte liggen hebben we hiermee laten zien dat $[PQ]$ en $[CD]$ hetzelfde midden hebben.

Ook in deze opgave heeft CAS haar nut, maar door een goede wisselwerking tussen machine en mens kunnen we zeker tot een mooier resultaat komen dan bij een blindelings vertrouwen op de kracht van de machine.

Besluit

Een te doorgedreven gebruik van CAS leidt tot een zeer technische afhandeling van het bewijs. Aangezien de machine correct rekt, zal de bewijsvoering ook correct zijn. Maar een leerling heeft weinig of niets geleerd na een dergelijk bewijs. Hij heeft niet aan inzicht gewonnen. Eventueel heeft hij wel een resultaat dat hij in andere situaties kan toepassen, maar het resultaat op zich is een lege doos.

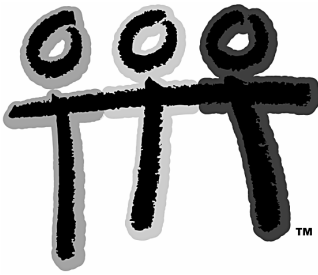
Door opnieuw stap per stap te werk te gaan bouwen we zelf nog wel de redenering op en daardoor kunnen we bijleren. In dit geval leerden we dat het werken met middens voordelig is bij bepaalde eigenschappen van kegelsneden. Door de CAS kunnen we ons helemaal concentreren op die redenering en moeten we niet bang zijn voor rekenfouten.

Tot slot

Het inschakelen van nieuwe technologieën leidt niet vanzelf tot beter wiskundeonderwijs. Elk hulpmiddel heeft voor- en nadelen, kan ten goede of ten kwade aangewend worden. Dat is zo voor krijt en bord, voor overheadprojectoren, voor computers of rekentoestellen, ... Uit reflectie op de eigen lespraktijk, de terugkoppeling van onze leerlingen en een eerste jaar ervaring groeide al een eerste beetje vakmanschap voor wat betreft het gebruik van een CAS in de klas.

Het uitwisselen van materiaal kan ons allen helpen om sneller tot een goed gebruik van zo'n computeralgebrasysteem te komen.

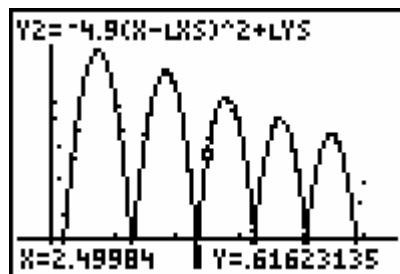
T³ EUROPE



9^{de} Symposium Oostende 17-18 augustus 2006

Amusant, les Maths avec la TI-84 Plus!!

Michelle Solhosse



```
[A]^100  
...7 .2857 .2857]  
...9 .1429 .1429]  
...4 .5714 .5714]]
```

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U.Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

1. Migration d'oiseaux et calcul matriciel

Une population stable de 35000 oiseaux vit sur trois îles.

Chaque année, 10% de la population de l'île **A** migre vers l'île **B**, 20% de la population de vers l'île **B** migre vers l'île **C** et 5% de la population de l'île **C** migre vers l'île **A**.

- si le nombre d'oiseaux aujourd'hui est 12000 sur **A**, 9000 sur **B** et 14000 sur **C**, que sera cette population dans 1 an, dans 10 ans,..... et plus (50, 100) ???
- si la population de départ est 34000, 500, 500 ??? que se passe-t-il dans 1 an, dans 10 ans ?
- dans les mêmes conditions de migration, trouver le nombre d'oiseaux sur chaque île si la population de chacune de celles-ci ne varie pas d'une année à l'autre.

1. Mise en place du problème.

Si **a**, **b**, **c** sont les populations des îles une année déterminée, l'année suivante,

la population de A est : $0.9a + 0.05c$

la population de B est : $0.1a + 0.8b$

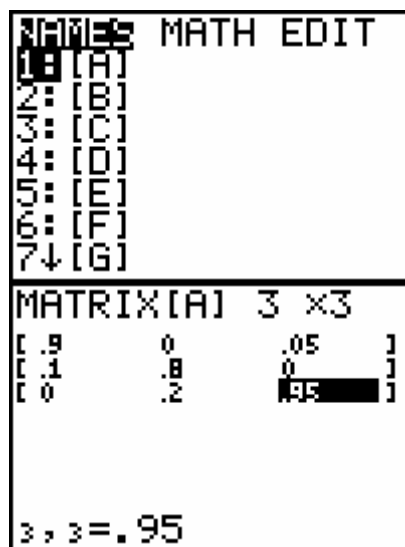
la population de C est : $0.2b + 0.95c$

Ou encore, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

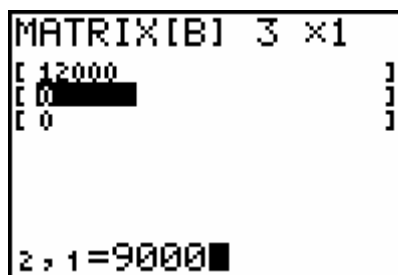
2. Utiliser les données initiales

Commençons avec 12000, 9000 et 14000 oiseaux sur **A**, **B** et **C** :



Editer la matrice **A** (dim 3x3) par $\boxed{2nd}$ - Matrix - Edit - 1 : A et compléter avec les valeurs adéquates.

De même, éditer **B** (dim 3x1) et compléter avec les valeurs adéquates.



Le nombre d'oiseaux l'année prochaine sur chacune des îles s'obtient par le produit

$$\text{matriciel : } \begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12000 \\ 9000 \\ 14000 \end{pmatrix}, \text{ soit 11500 oiseaux sur } \mathbf{A}, 8400 \text{ sur } \mathbf{B} \text{ et } 15100 \text{ sur } \mathbf{C}$$

<pre>[A] [A]*[B] [[11500] [8400] [15100]]</pre>	<p>dans l'écran de calcul :</p> <pre>[2nd] - Matrix - Names - 1 : A [X] [2nd] - Matrix - Names - 1 : B .</pre>
--	---

Pour obtenir la quantité d'oiseaux sur chaque île dans 10, ...50,....100 ans, on applique plusieurs fois la matrice au résultat obtenu. A la main ce travail est fastidieux !! Avec une calculatrice (ou un logiciel EXCEL, DERIVE,), cela prend quelques secondes.

Après 10 ..., 50, itérations

Avec une calculatrice (TI 84 Plus)

<pre>[A] [A]*[B] [[11500] [8400] [15100]]</pre>	<pre> [[11500] [8400] [15100]] [A]*Ans [[11105] [7870] [16025]]</pre>
<pre>[2nd] - Matrix - Names - 1 : A [X] [2nd] ANS</pre> <p>..... recommencer plusieurs fois la même opération (le plus aisé est de reprendre l'expression encodée par [2nd] . ENTRY)</p>	<pre>[[19451.35204]] [[9940.874246]] [[5463.568753]] [[19595.557]] [[9926.564672]] [[5364.942427]] [[19708.4929]]</pre>

3. Refaire le même type de travail avec des populations initiales 34000, 500, 500.

Modifier la matrice B ` [2nd] - Matrix - Edit - 2 : B et modifier les valeurs et recommencer les différents produits matriciels.

On constate que les résultats sont indépendants des populations initiales sur chaque île.

C'est donc la matrice **A** qui est particulière ???
Rechercher les puissances 5, 10, 50,.... de la matrice

Avec la calculatrice (ici la TI 84 Plus)

A^5

```
[A]^5
[ [.5984 .0692 ...
  [.2632 .3351 ...
  [.1384 .5957 ...
```

```
[A]^5
...4 .0692 .1835]
...2 .3351 .0346]
...4 .5957 .7819]
```

.....
 A^{100}

```
[A]^100
[ [.2857 .2857 ...
  [.1429 .1429 ...
  [.5714 .5714 ...
```

```
[A]^100
...7 .2857 .2857]
...9 .1429 .1429]
...4 .5714 .5714]
```

On peut constater que les puissances de la matrice A convergent vers une matrices dont les vecteurs colonnes sont tous identiques (v), ceci parce que la matrice A est une matrice stochastique régulière.

Matrice :

- *stochastique* : chacune de ses colonnes est un vecteur de probabilité (éléments positifs - somme 1)
- *régulière* car tous les éléments d'un puissance quelconque de cette matrice sont positifs.

Le vecteur colonne cité plus haut, v , s'appelle vecteur constant de la matrice;

Pour une matrice stochastique régulière il est unique et répond à la condition que $A \cdot v = v$

4. Pour répondre à la dernière question, résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 0.9 & 0 & 0.05 \\ 0.1 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0.95 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow (A - E) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
[A]-identity(3)
[ [-.1 0 .05 ]
  [.1 -.2 0 ]
  [0 .2 -.05]]
```

Construire la différence entre la matrice A et la matrice identité de dimension 3x3 :

$\boxed{2nd}$ - Matrix - Names - 1: A $\boxed{=}$ - $\boxed{2nd}$ - Matrix - MATH - 5: identity (...)

Et compléter dans les parenthèses par la dimension de la matrice (à savoir 3)

Rendre triangulaire ou appliquer la méthode du pivot de Gauss à cette matrice **A-E** et conserver ce résultat dans une matrice **F**.

```

NAMES [ ] EDIT
0: cumSum(
A: ref(
B: rref(
C: rowSwap(
D: row+(
E: *row(
F: *row+(

```

<pre> [[[-.1 0 .05] [.1 -.2 0] [0 .2 -.05]]] ref(A) [[[1 0 -.5] [0 1 -.25] [0 0 0]]] ref(A) </pre>	<pre> [[[1 0 -.5] [0 1 -.25] [0 0 0]]] Ans→[F] [[[1 0 -.5] [0 1 -.25] [0 0 0]]] </pre>
--	--

La solution du système est: $x - \frac{z}{2} = 0 \wedge y - \frac{z}{4} = 0$.

On peut ensuite ajouter à ces deux équations la condition de départ, à savoir, $x + y + z = 35000$ afin de trouver les valeurs de x , y et z .

Pour cela, modifier la matrice **F**.

<pre> MATRIX[F] 3 x4 [[1 0 -.5 0] [0 1 -.25 0] [1 1 1 35000] </pre>	<pre> MATRIX[F] 3 x4 [[0 -.5 0 1] [-1 -.25 0 0] [-1 1 35000 0] </pre>
z, z=1	z, 4=35000

Résoudre à l'aide de la méthode du pivot

```

[[[1 0 -.5 0 ...
[0 1 -.25 0 ...
[1 1 1 3500...]]]
rref([F])
[[[1 0 0 10000]
[0 1 0 5000 ]
[0 0 1 20000]]]

```

On obtient $z = 20000$, $y = 5000$ et $x = 10000$.

2. Mouvements et mathématiques

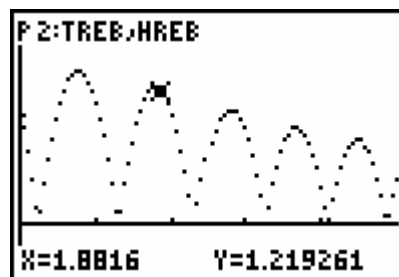
On laisse tomber une balle magique sur le sol. On capte, à intervalle régulier, les distances de cette balle par rapport au sol avec le CBR. On se propose d'étudier les rebonds de cette balle.

1. Mesures.

Avec le CBR, enregistrer les rebonds de la balle et conserver les données utiles L1 et L2. Replacer ces mesures "à l'endroit", donc retourner et translater le graphique pour que le sol se trouve à 0 (remplacer L2 par $h_{max} - L2$).

Pour voir ce graphique [2nd] - [STAT PLOT] - [1] : Plot1-0n (Mark : choisir les petits points)

(Rem : si on utilise le menu Ball Bounce, ce retournement n'est pas nécessaire).



Avec les mesures du premier rebond, rechercher (avec une régression quadratique) l'équation de la parabole qui colle le mieux possible aux données.

Il faut donc sélectionner les 20 à 25 valeurs des listes L1 et L2 qui correspondent au premier rebond, et les placer dans L3 et L4.

<p>Dans le menu [STAT] – Edit, placer le curseur sur la tête de L3 et [ENTER].</p> <p>Choisir les éléments souhaités à l'aide de la commande : [2nd] - LIST – OPS – 5 : seq .</p> <p>Compléter la ligne de commande Seq(L1 (X), X, 6, 24)</p>	
<p>Dans l'écran de travail, [STAT] - CALC - 5 : QuadReg L3, L4, [VARS] - Y-VARS - 1:Function - 1: Y1</p>	

Le coefficient du terme du second degré est $\approx \frac{-g}{2}$, le rechercher dans les « variables statistiques » et le stocker dans une variable g .

Mais aussi, **VAR** - 5: Statistics - EQ -2:a **STO** - **ALPHA** G

Y-VARS	XY Σ	TEST	PTS
1:Window...	RegEQ	2:a	
2:Zoom...	3:b	4:c	
3:GDB...	5:d	6:e	
4:Picture...	7:↓r		
5:Statistics...			
6:Table...			
7:String...			

2. Equations des différentes courbes.

Le coefficient **g** est constant. Les paraboles successives sont l'image de la parabole initiale par translations selon l'axe horizontal et l'axe vertical.

Pour écrire les équations des fonctions associées, il faut tout d'abord repérer les coordonnées des différents sommets ; on les conservera dans des listes **XS** et **YS** (créées préalablement).

Pour créer ces nouvelles listes : **STAT** - Edit ; puis se placer sur une tête de liste existante, insérer une nouvelle liste par **2nd** - Ins et **ENTER**.

---	L2	L3	1
L1 =			

Dans la ligne d'édition, encoder le nom de cette nouvelle liste.

Rem : le sigle **---** clignote pour signaler que la machine est en mode alphabétique et attend donc des entrées de ce type.

---	L1	L2	1
Name=XS			

Il faut alors repérer les différents sommets des rebonds : avec **←**, se déplacer le long des courbes.

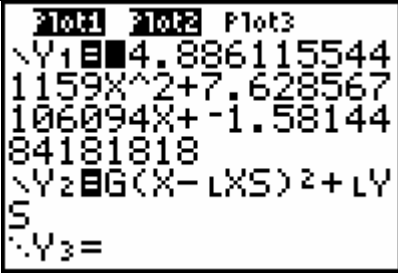
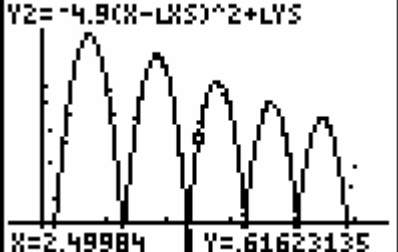
Se placer sur un sommet et basculer dans **STAT** -Edit

Sur **Xs(1)** **↵** et dans la ligne d'édition, taper **X** **↵**

Sur **Ys(1)** **↵** et dans la ligne d'édition, taper **Y** **↵**.

XS	YS	L1	3
7526	1.399	-----	
1.828	1.240		
2.796	1.045		
3.656	.885		
4.462	.772		
-----	-----		
XS(1)=.75264			

A l'aide de ces listes, écrire les équations des différentes paraboles : $y = g \cdot (x - x_s)^2 + y_s$

Encoder cette formule dans $\boxed{Y=}$.	
Les représentations graphiques « collent » bien aux données	

3. Coefficient de "restitution".

Intuitivement, le rebond dépend d'un coefficient propre à la balle utilisée, et il serait normal que la hauteur de chaque rebond soit une fraction de la hauteur précédente.

Pour mettre ceci en évidence, il est naturel de calculer les différents quotients $\frac{YS(i+1)}{YS(i)}$. Les valeurs obtenues : 0.886 , 0.843 , 0.847 , 0.872 sont fort proches les unes des autres.

On peut donc en conclure que les différentes hauteurs des sommets forment une suite de nombres presque en progression géométrique.

L'estimation de la raison de cette P.G. est: $q = \sqrt[4]{\frac{YS(5)}{YS(1)}} \approx 0.862$ (moyenne géométrique).

4. Durées des rebonds.

Existe-t-il la même relation entre les différentes durées des rebonds.

Pour obtenir les différents temps d'impact et les durées Δt_i des rebonds (encodées dans une liste DTR), on recherche les zéros des différentes fonctions du second degré et on calcule les différences

XS	YS	DTR	5
.753	1.399	1.000	
1.828	1.240	1.006	
2.796	1.045	.924	
3.656	.885	.850	
4.462	.772	.794	
-----	-----	-----	
DTR(1) = 1.068			

Les quotients $\frac{\Delta t(i+1)}{\Delta t(i)}$, 0.942, 0.918, 0.920, 0.934, laissent supposer que les Δt_i forment

une progression géométrique de raison est estimée à $r = \sqrt[4]{\frac{\Delta t(5)}{\Delta t(1)}} \approx 0.929$.

5. Relation entre les raisons des 2 progressions géométriques.

On a mis en évidence les relations :

entre les hauteurs des rebonds : $h(i+1) = q \cdot h(i)$.

entre les durées des rebonds : $\Delta t(i+1) = r \cdot \Delta t(i)$

Or on sait que la hauteur d'un rebond et la durée de celui-ci sont reliés par la relation :

$$h(i) = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{\Delta t(i)}{2} \right)^2.$$

$$\text{Alors } h(i+1) = \frac{g}{2} \cdot \left(\frac{\Delta t(i+1)}{2} \right)^2 \Leftrightarrow q \cdot h(i) = \frac{g}{2} \cdot r^2 \left(\frac{\Delta t(i)}{2} \right)^2$$

dont on extrait $r = \sqrt{q}$.

```
(LVS(5)/LVS(1))^
0.25+Q
.862
(LDTR(5)/LDTR(1)
)^0.25+R
.929
```

```
(LDTR(5)/LDTR(1)
)^0.25+R
.929
√(Q)
.928
R²
.862
```

6. Suite associée.

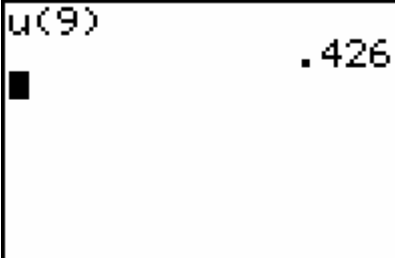
On peut construire un modèle idéal de cette suite de rebond en construisant la suite des hauteurs, sur laquelle il est possible de faire des calculs

Dans le mode séquentiel, on introduit introduire la suite $u(n) = 0.862 \cdot u(n-1)$ ainsi que la valeur initiale $u(nmin) = YS(1)$.

```
Plot1 [0] Plot3
nMin=0
u(n)=0.862*u(n-
1)
u(nMin)=(1.399)
u(n)=
u(nMin)=
u(n)=
```

7. Prévoir le Xième rebond.

Par exemple, le neuvième rebond est le neuvième terme de la suite introduite dans l'éditeur de fonction $u(9)$:

Atteindre le u par $\boxed{2nd}$ - u (au-dessus du chiffre 7)		
---	--	--

8. Distance totale parcourue par la balle.

après 1 rebond : $d_1 = 1.399 + u_1 + u_1 = 0.93 + 2 \cdot u_1 = 2 \cdot (1.399 + u_1) - 1.399$

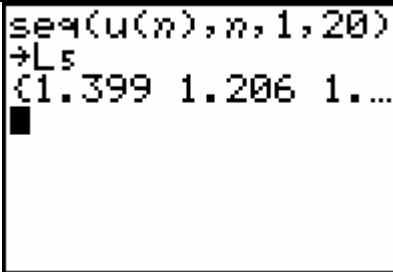
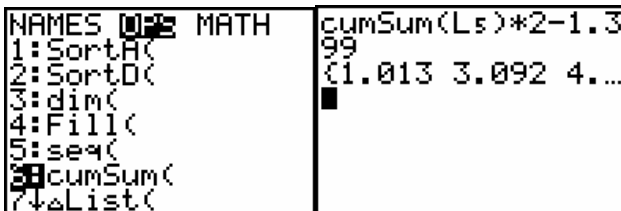
après 2 rebonds : $d_2 = 1.399 + 2 \cdot u_1 + 2 \cdot u_2 = 2 \cdot (1.399 + u_1 + u_2) - 1.399$

.....

après n rebonds : $d_n = 2 \cdot (1.399 + u_1 + u_2 + \dots + u_n) - 1.399$

Dans les parenthèses on voit apparaître les sommes cumulées des termes de la suite $u(n)$.

Sur la calculatrice, introduire 20 termes de cette suite $u(n)$ dans L5, puis faire la somme cumulée :

	<p>Compléter la ligne de commande Seq($u(n)$, n, 1, 25) \boxed{STO} L5</p>
	<p>Ensuite, avec la commande cumSum que l'on trouve dans $\boxed{2nd}$[LIST] - OPS ou dans $\boxed{2nd}$ [CATALOG], on obtient une valeur approximative de cette longueur totale.</p>
<p>Rem : Se déplacer avec la flèche pour voir d'autres valeurs.</p>	

Recommencer avec une suite de 30, 50,termes.

La longueur du trajet effectué par la balle peut être obtenue par la formule classique (somme des termes d'une progression géométrique) : $2 \cdot 1.399 \frac{1 - 0.862^{20}}{1 - 0.862} - 1.399 \approx 17.836$

Si on augmente le nombre de termes de la suite, cette somme s'approche d'une valeur déterminée : $2 \cdot 1.399 \frac{1}{1 - 0.862} - 1.399 \approx 18.876$

3. Longueur d'un segment (V.A. continue).

(documentation Tcube - Daniel Vagost)

Quelle est la moyenne de la longueur d'un segment dont les extrémités sont deux points **A** et **B** placés au hasard sur un segment de longueur 1 ?

Remarque : Placer un point au hasard sur un segment revient à chercher un nombre aléatoire compris entre 0 et 1 qui serait l'abscisse de ce point.

On construit la variable aléatoire **X** qui à chaque couple de points (**A,B**) associe la longueur du segment **AB**. Les valeurs que peut prendre la variable aléatoire ne sont pas en nombre fini ; elles constituent l'ensemble des nombres de $[0,1]$. On a affaire à une variable aléatoire continue. Quelle loi de probabilité peut-on établir?

1. Simulation

Pour se faire une idée, essayons la simulation avec une calculatrice.

La longueur d'un segment comme défini plus haut est calculée par **abs(rand-rand)**. Les commandes **abs** et **rand** se trouvent dans le menu **[MATH] - NUM** et **[MATH] - PRB**.

<p>On peut alors effectuer 300 fois ce travail et conserver les résultats dans une liste L1 avec les commandes suivantes :</p> <p>[2nd] - [STAT] - OPS - 5.seq(abs(rand-rand),X,1,100) [STO] L1</p>	<pre>seq(abs(rand-ran d),X,1,300)→L1 (.5992261616 .6... █</pre>	
--	---	--

<p>Les caractéristiques statistiques de cette liste sont obtenues par</p> <p>[STAT] - Calc - 1. Var Stats L1</p>	<pre>1-Var Stats x̄=.3470839193 Σx=104.1251758 Σx²=53.2293791 Sx=.23907014 σx=.2386713572 ↓n=300</pre>	<pre>1-Var Stats ↑n=300 minX=1.6421E-4 Q1=.1344238802 Med=.31342384 Q3=.5059501068 maxX=.96091842 █</pre>
---	--	---

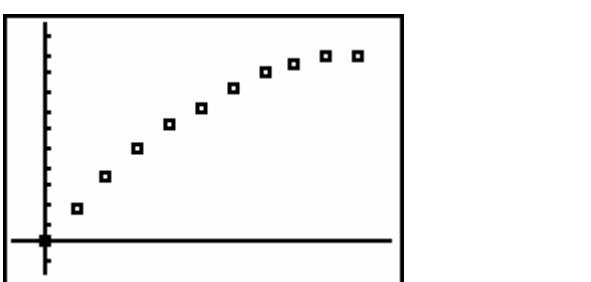
Après observation des résultats, la moyenne semble être proche de $\dots \frac{1}{3}$.

Pour construire la fonction de répartition, il faut compléter un tableau de ce type :

k	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
P(X ≤ k)	0										

Pour cela, on trie les résultats obtenus, présents dans **L1**, à l'aide d'un petit programme appelé TRI (voir annexe).

Dans ce programme les valeurs de k sont stockées dans L2 et les valeurs que prend la fonction de répartition se trouvent dans L4.

<p>Représentation graphique des résultats : $\boxed{2^{nd}}$ - STAT PLOT et choisir : 1 : Plot 1 \boxed{ENTER}; le mettre On et choisir Xlist : L2 et Ylist : L4</p> <p>Choisir une bonne fenêtre graphique ou \boxed{ZOOM} - 9. ZoomStat</p>	
---	--

2. Ajustement

Quelle courbe peut-on ajuster à ce nuage de points ? Essayons une représentation quadratique.

<p>Essayons donc une courbe de régression quadratique.</p> <p>\boxed{STAT} - CALC- 5: QuadReg L2, L4, \boxed{VARS} - Y-VARS -1: Function Y1</p>	<pre> EDIT $\boxed{2^{nd}}$ TESTS 1: 1-Var Stats 2: 2-Var Stats 3: Med-Med 4: LinReg(ax+b) 5: $\boxed{2^{nd}}$ QuadReg 6: CubicReg 7: \downarrow QuartReg </pre>	<pre> QuadReg y=ax²+bx+c a=-.9502719503 b=1.95996892 c=-.0052680653 R²=.9994614626 </pre>
---	---	---

Quelle fonction peut-on conjecturer ???

La fonction de répartition est proche de $f(x) = -x^2 + 2x$!!! Cela se justifie-t-il ?

3. Explication géométrique

Géométriquement, ce résultat s'explique :

Choisir deux points A et B au hasard sur le segment $[0,1]$ revient à choisir deux nombres aléatoires entre 0 et 1 ou encore un point M au hasard dans le carré de côté 1 (les coordonnées de ce point étant ces deux nombres aléatoires).

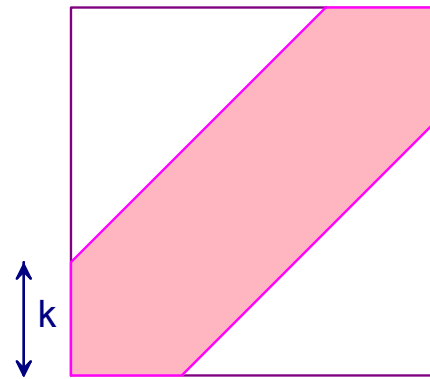
Plaçons alors un repère orthonormal d'origine O dans le plan. Le point M a pour coordonnées (x_M, y_M) et la longueur de $[AB]$, $|x_A - x_B|$ vaut aussi $|x_M - y_M|$.

Alors $X \leq k$ prend la forme $|x_M - y_M| \leq k$; cette relation est vérifiée lorsque le point M se trouve dans la zone délimitée par les côtés du carré et les droites d'équation $y = x + k$ et $y = x - k$.

Cette zone forme le polygone ci-contre et la probabilité $P(X \leq k)$ s'exprime par le quotient des aires du polygone et du carré.

L'aire hachurée (calculée aisément par différence d'aires), est égale à $2k - k^2$.

La probabilité est donc égale à $2k - k^2$.



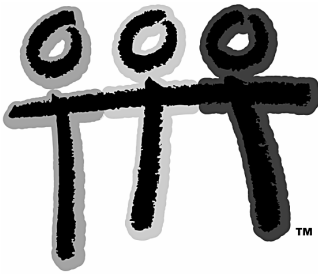
La fonction de répartition est $P(X \leq x) = -x^2 + 2x$ et la fonction de densité de cette distribution est $f(x) = -2x + 2$.

4. Calculs

L'espérance mathématique vaut $\int_0^1 x \cdot (-2x + 2) dx = \left[-\frac{2}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{3} \approx 0.33$

La variance est égale à $\int_0^1 x^2 \cdot (-2x + 2) dx - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$ et l'écart-type égal à $\frac{\sqrt{2}}{6} \approx 0.2357$.

T³ EUROPE



9^{de} Symposium Oostende 17-18 augustus 2006

Begeleid zelfstandig leren en evalueren

Mark Verbelen



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U. Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Inhoud

1	Inleidende begrippen	2
1.1	Opdracht	2
1.2	Enkele voorbeelden	3
2	Lineaire functies	4
2.1	Inleidende voorbeelden	4
2.2	Algemeen	9
2.3	Oefeningen	12
3	Evalueren	19
3.1	Inleiding	19
3.2	Een aantal instrumenten.....	19

1 Inleidende begrippen

1.1 Opdracht

Hieronder vind je een aantal begrippen over visies op leren waaruit de accentverschuiving blijkt van klassieke instructie naar begeleiding van competentieontwikkeling.

BZL dient binnen deze accentverschuiving gekaderd te worden.

Groep de begrippen in paren volgens "VAN ... NAAR ..."

leerdoelgericht	zuiver instructiemodel	overleggen
samenwerken	korte opgaven	vaardigheden
inhoudsgericht	product- en procesgericht	cognitief
meerdere oplossingen	relatief uitgebreide opgaven	transfergericht
individueel	kennisconstructie	enkel uitvoeren
eenduidige oplossing	metacognitief en affectief	kennis

VAN klassieke instructie	NAAR competentieontwikkeling

1.2 Enkele voorbeelden

1.2.1 Inleiding

BZL is in het hedendaags onderwijs niet meer weg te denken, denk maar aan het hoeken- en contractwerk in het basisonderwijs, aan het methodeonderwijs, aan het omgaan met de onderzoekscompetentie in tweede en derde graad ASO, enzovoort.

1.2.2 Basisonderwijs

Hoekenwerk

Reeds van bij de geboorte stelt men vast dat kinderen zeer spontaan actief (willen) bezig zijn met en in de wereld waarin ze zich bevinden. Ook worden vanaf het kleuteronderwijs werkvormen gehanteerd die de zelfstandigheid van kinderen stimuleren. Eén van deze werkvormen is het gedifferentieerd werken in hoeken. De kleuters krijgen dan de kans om een bewuste keuze te maken en om hun opeenvolgende activiteiten die ze willen doen gedurende de dag te plannen. Kleuters bepalen zelf wanneer hun activiteit klaar is. Ze kunnen individueel van hoek wisselen om een nieuwe activiteit te beginnen. Vooraf dient de leerkracht de nodige voorbereidingen te treffen en afspraken te maken.

Contractwerk

Bij contractwerk leggen we voor elk kind een activiteitenpakket voor een bepaalde periode formeel vast. Hij/zij werkt zijn/haar contract af binnen een bepaalde periode waarbij hij/zij relatief zelfstandig mag beslissen over de duur en de volgorde van de activiteiten. Contractwerk is een organisatievorm die binnen het hoekenwerk kan geïntegreerd worden. In de lagere school worden zowel hoekenwerk als contractwerk verder gezet.

1.2.3 Hoger onderwijs

Ook in het hoger onderwijs (hogescholen en universiteiten) wordt meer en meer de nadruk gelegd op begeleid zelfgestuurd leren. Onder meer studenten uit wetenschappelijke richtingen moeten een portfolio samenstellen. Aan de hand van een bepaald onderwerp, artikel of foto gaan de studenten in groep op zoek naar meer informatie. Op regelmatige basis brengen de studenten hun docent op de hoogte die – indien nodig - kan bijsturen. Dit werk kan later eventueel gepresenteerd worden of kan interdisciplinair of vakoverschrijdend ingevuld worden.

1.2.4 Deze werkwinkel

In deze werkwinkel wordt een onderwerp uit de tweede graad (toegankelijk voor zowel ASO als TSO) uitgewerkt op basis van BZL, namelijk lineaire functies (deze nota's hebben wel niet de intentie om een volledige behandeling te zijn van het gedeelte lineaire functies). Daarbij worden een aantal evaluatie-instrumenten aangereikt en besproken, waarbij de nadruk ligt op de evaluatie van vaardigheden en attitudes.

2 Lineaire functies

2.1 Inleidende voorbeelden

2.1.1 Huren van een auto

In de onderstaande tabel vind je de dagprijs voor het huren van een auto voor één dag, afhankelijk van het aantal afgelegde kilometer.

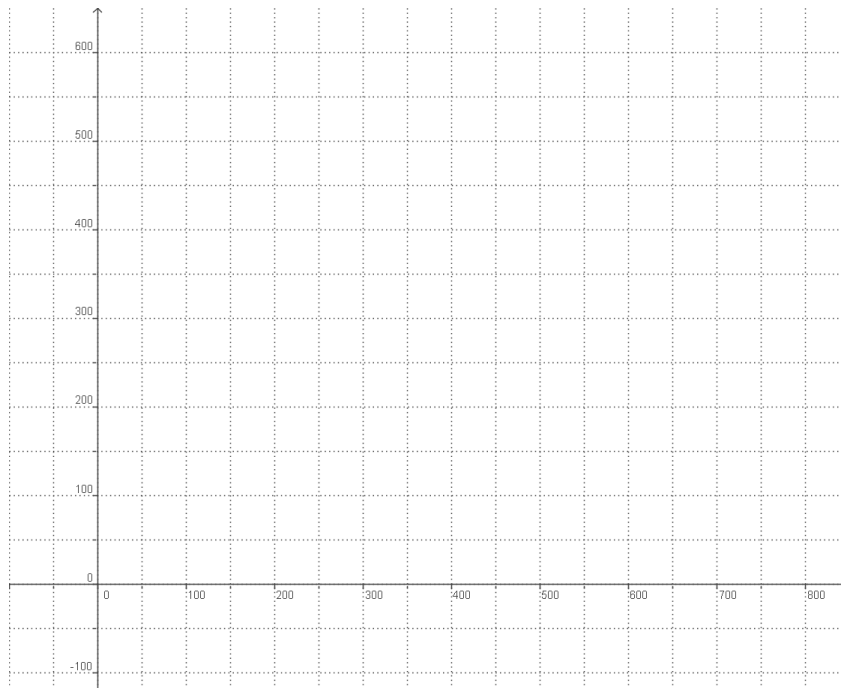
Afgelegde kilometer	Kostprijs (in euro)
0	100
100	150
200	200
300	250
400	300

We kunnen ons dan de volgende vragen stellen:

Hoeveel kost het huren van een auto voor één dag als er

- 400 km mee wordt gereden?
- 500 km mee wordt gereden?
- 250 km mee wordt gereden?
- 320 km mee wordt gereden?

Je kunt de gegevens uit de bovenstaande tabel ook uitzetten in een grafiek (met op de X-as de afgelegde afstand in km en op de Y-as de kostprijs in euro):



Je stelt vast dat al de punten op één lijn liggen. Je kunt nu de waarden van de vragen a) tot en met d) ook aflezen van de grafiek.

Tenslotte kunnen we de gegevens ook samenvatten in een formule:

$$k = 100 + 0,5s$$

waarbij k de kostprijs is in euro en s de afgelegde weg in km. Je vindt nu de antwoorden op de vragen a) tot en met d) door de aantallen kilometer in te vullen op de plaats van s .

Je kunt bij dit probleem de vragen ook 'omgekeerd' stellen. Hoeveel kilometer kun je rijden voor een kostprijs van:

a. € 200?

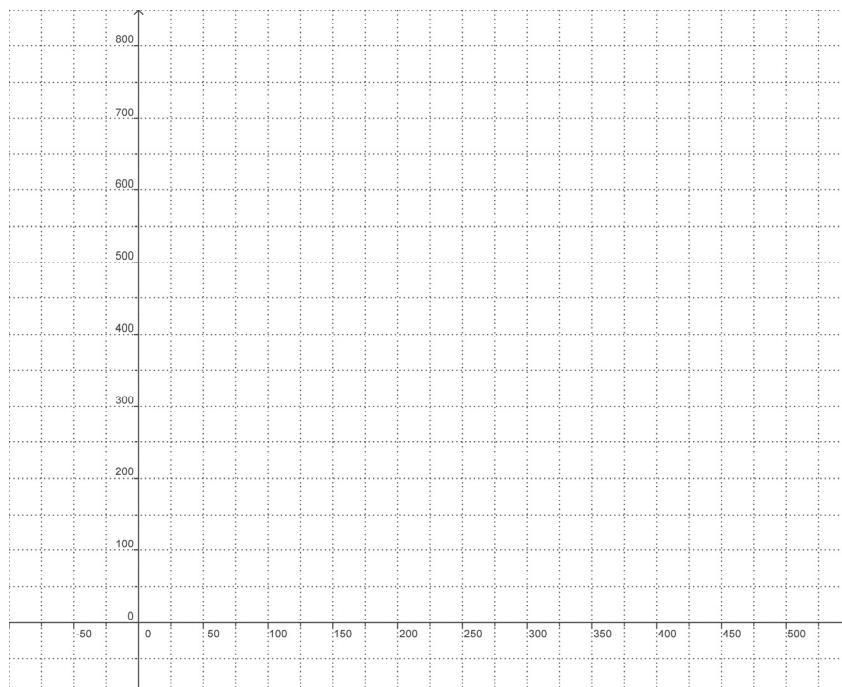
b. € 225?

c. € 275?

d. € 115?

OPDRACHTEN

1. Teken de grafische voorstelling van dit 'omgekeerde' probleem, met op de X-as de kostprijs in euro en op de Y-as de afgelegde weg in km.



2. Stel een algemene formule op die de afgelegde weg s (in km) weergeeft in functie van de kostprijs k (in euro).

2.1.2 Gewicht

2.1.2.1 Nico

Nico Tine is sinds acht maanden in het leger. Hij heeft daar niet zoveel te doen en dat heeft invloed op zijn gewicht. Acht maanden geleden woog hij 66 kg en sindsdien is hij elke maand 2 kg bijgekomen.

a) Vul de onderstaande tabel in verband met Nico's gewicht aan:

Aantal maanden legerdienst	Gewicht van Nico (in kg)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

b) Stel een algemene formule op voor het gewicht G van Nico in functie van het aantal maanden legerdienst (t).

- c) Maak een grafische voorstelling van de evolutie van Nico's gewicht met de tijd (in maanden) op de X-as en het gewicht (in kg) op de Y-as. (gebruik op de X-as 1 cm per maand en op de Y-as 1cm per 2 kg).

2.1.2.2 An

An Dijvie weegt op een bepaald moment 81 kg en begint aan een vermageringskuur waarbij ze maandelijks 3 kg afvalt.

- a) Vul de onderstaande tabel aan:

Aantal maanden vermageringskuur	Gewicht van An (in kg)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

- b) Kun je ook hierbij een voorschrift bedenken? (gebruik opnieuw G voor het gewicht in kg en t voor het aantal maanden; ook dit voorschrift drukt het gewicht, in dit geval van An, uit in functie van de tijd)

- c) Maak een grafische voorstelling voor zes maanden vermageringskuur met de tijd (in maanden) op de X-as en het gewicht (in kg) op de Y-as. (gebruik op de X-as 1 cm per maand en op de Y-as 1cm per 3kg)

2.1.2.3 Afronding

Beantwoord de onderstaande vragen in de context van de twee bovenstaande voorbeelden.

- a) Wat is de betekenis van de coëfficiënt van t?

- b) Wat is de betekenis van het andere getal?
- c) Wat betekent een negatieve coëfficiënt bij t?
- d) Kan ook het andere getal negatief zijn?

2.2 Algemeen

2.2.1 Definitie

Een lineaire functie is een functie van het type:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow f(x) = ax + b$$

met $a \in \mathbb{R}_0$ en $b \in \mathbb{R}$.

2.2.2 Opmerkingen

1. Andere notatie

Het beeld van x door de functie f wordt de functiewaarde of getalwaarde van f in x genoemd en wordt dikwijls voorgesteld door y . We kunnen dan ook schrijven:

$$f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax+b\}$$

waarbij we $y = ax+b$ het **functievoorschrift** noemen.

2. Een lineaire functie is in het algemeen gedefinieerd voor alle reële getallen. Er kunnen echter wel beperkingen optreden bij toepassingen, zoals bij voorbeeld 1.1 (huren van een auto), waar je geen negatief aantal kilometers kunt rijden en ook niet minder dan € 100 kunt moeten betalen.

2.2.3 Grafiek

De grafiek van een lineaire functie $f : x \rightarrow f(x) = ax + b$ is een rechte met richtingscoëfficiënt a en snijpunt met de Y-as $(0,b)$.

2.2.4 Nulwaarde

Een nulwaarde van een willekeurige functie $f : x \rightarrow f(x) = ax + b$ is een reëel getal dat door f op nul wordt afgebeeld.

Dus:

$$p \text{ is een nulwaarde van } f \Leftrightarrow f(p) = \dots$$

Voor de nulwaarde van een lineaire functie geldt:

$$f(p) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \quad \dots\dots\dots$$

$$\Leftrightarrow \quad \dots\dots\dots$$

BESLUIT:

Het reële getal $-\frac{b}{a}$ is de enige nulwaarde van de lineaire functie met voorschrift $f(x) = ax+b$.

Opmerking

De grafische betekenis van de nulwaarde is

2.2.5 Stijgen en dalen

Uit een vorig hoofdstuk weten we dat een rechte met positieve richtingscoëfficiënt stijgt en een rechte met negatieve richtingscoëfficiënt daalt. Hieruit volgt onmiddellijk voor de lineaire functie:

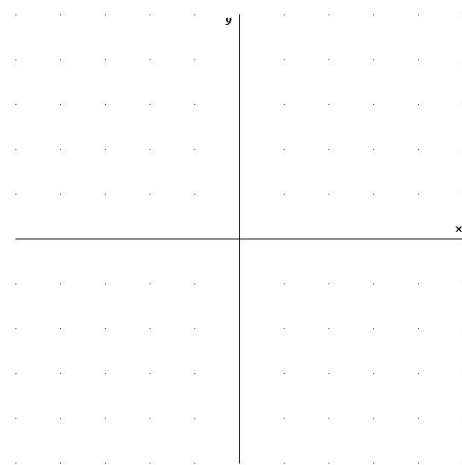
$$a > 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

$$a < 0 \Rightarrow \dots\dots\dots$$

2.2.6 Tekenverloop

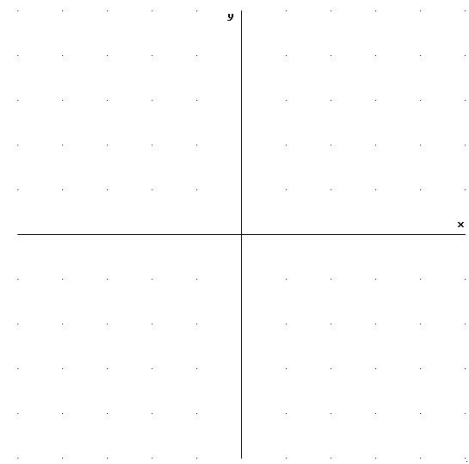
Voor een stijgende lineaire functie geldt:

x	$-\frac{b}{a}$
f(x)	



Voor een dalende lineaire functie geldt:

x	$-\frac{b}{a}$
f(x)	



2.3 Oefeningen

1. Bepaal voor de onderstaande lineaire functies telkens:

- stijgen of dalen
- de nulwaarde
- het snijpunt met de Y-as
- het tekenverloop
- de grafiek

a) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2x-4$

b) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 1-x$

c) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -3x-3$

d) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow -2+x$

e) $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow \frac{2}{3}x$

2. Gegeven zijn de onderstaande functievoorschriften:

$$f_1 : x \rightarrow 2x-1$$

$$f_2 : x \rightarrow 2x+1$$

$$f_3 : x \rightarrow \frac{1}{2}x-1$$

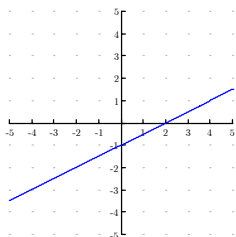
$$f_4 : x \rightarrow -2x-1$$

$$f_5 : x \rightarrow -\frac{1}{2}x+1$$

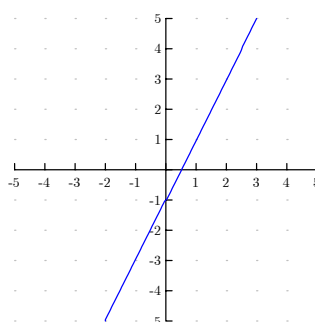
$$f_6 : x \rightarrow -\frac{1}{2}x-1$$

Hieronder zijn ook drie grafische voorstellingen gegeven. Plaats het juiste voorschrift bij de grafieken.

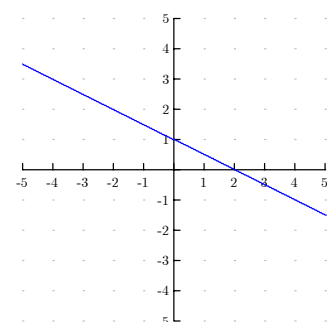
A:



B:



C:



3. Om de temperatuur te meten werken wij met graden Celsius, in de Verenigde Staten werken ze echter met graden fahrenheit. De overgang van Celsius (C) naar fahrenheit (F) wordt gegeven door de volgende formule:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Deze formule bepaalt eigenlijk de volgende functie:

$$f : C \rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32$$

- a) Bepaal het aantal graden fahrenheit als het aantal graden Celsius gelijk is aan:

Graden C	Graden F
0	
10	
20	
-10	
-20	

- b) Bepaal de nulwaarde van deze functie. Wat is de betekenis van deze nulwaarde?

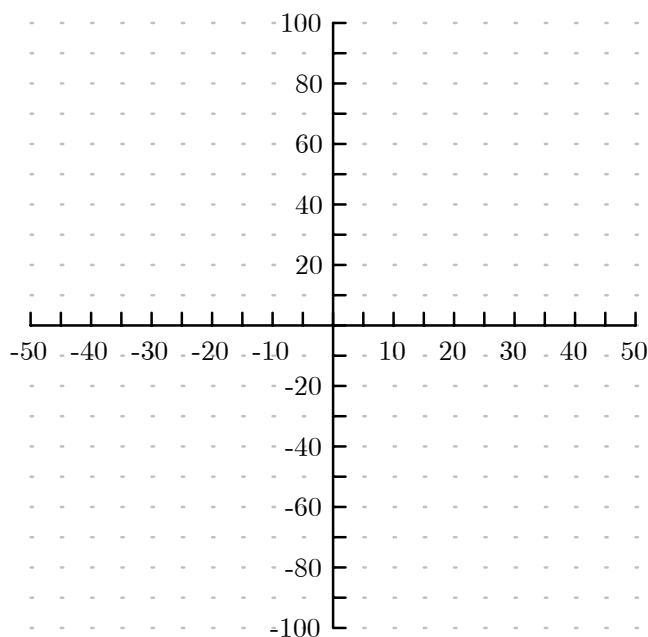
- c) Bepaal de 'omgekeerde functie', dit is de functie die het aantal graden Celsius berekent als het aantal graden fahrenheit gegeven is.

- d) Bepaal met deze 'nieuwe' functie het aantal graden Celsius als het aantal graden fahrenheit gelijk is aan:

Graden F	Graden C
0	
10	
20	
-10	
-20	

e) Bepaal de nulwaarde van deze functie. Wat is de betekenis van deze nulwaarde?

f) Maak een grafische voorstelling van de eerste (gegeven) functie. Gebruik hiervoor de in punt a) bepaalde waarden.



g) Kun je op deze grafiek ook de in punt d) bepaalde waarden aflezen? Of moet je voor de tweede functie een nieuwe grafiek maken? Verklaar je antwoord.

4. Bij een tennisclub zijn er twee mogelijke tarieven:

- ofwel betaalt men € 100 lidgeld en nadien € 10 per uur dat men speelt
- ofwel betaalt men geen lidgeld, maar dan wel € 25 per uur dat men speelt

Stel voor beide gevallen een lineaire functie van de vorm

$$x \rightarrow y = ax+b$$

op, waarbij y de te betalen prijs is en x het aantal gespeelde uren.

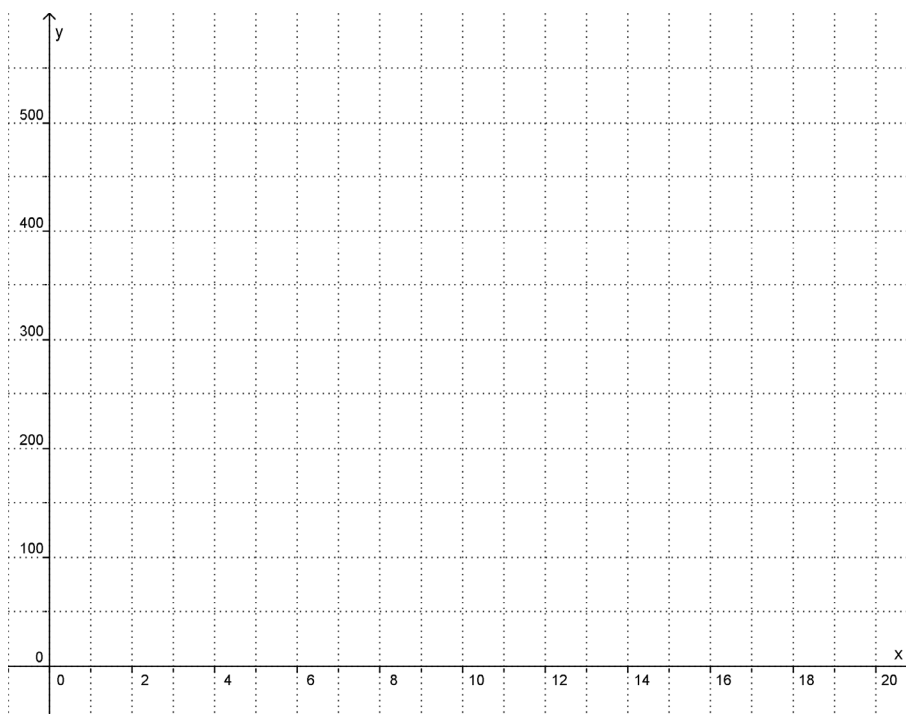
Eerste geval:

$$f : x \rightarrow y =$$

Tweede geval:

$$g : x \rightarrow y =$$

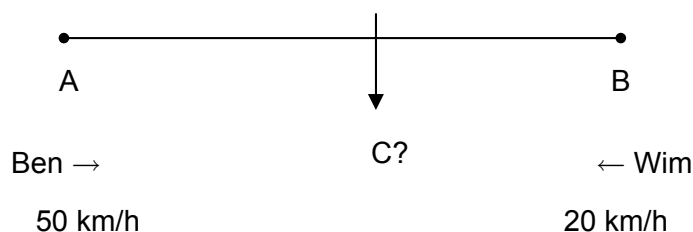
Stel beide gevallen grafisch voor:



Lees op de grafiek af vanaf welk aantal uren het interessant is om lid te worden van de club. Beschrijf hierbij bondig je werkwijze.

Kun je dit resultaat ook exact berekenen met behulp van de functies f en g ? Zo ja, doe het!

5. Twee vrienden, Ben Idorm en Wim Bledon, wonen respectievelijk in A en B, 200 km uit elkaar gelegen. Ze spreken af om op een bepaalde dag mekaar te ontmoeten. Daarbij verplaatsen ze zich allebei. Ben (die uit A vertrekt) heeft een 'brommerke', waarmee hij constant 50 km/h kan rijden. Wim is alleen mobiel per fiets, waarmee hij constant 20 km/h rijdt. Ze vertrekken beiden op hetzelfde tijdstip. Hoe lang zijn ze onderweg en hoe ver zijn ze van A verwijderd als ze mekaar ontmoeten?



Stel A gelijk aan kilometer 0.

Wat is B dan?

Vul de tabel op de volgende pagina aan, die aanduidt hoe ver Ben en Wim zich op een bepaald tijdstip van A bevinden. Hierbij is $t=0$ het tijdstip van vertrek van beide jongens.

t	Ben	Wim
0	0	200
0,5	25	
1		
1,5		
2		
2,5		
3		
3,5		
4		

Is het zinvol om deze tabel zo ver uit te rekenen? Waarom wel of waarom niet?

De afstand die Ben aflegt vanaf punt A is een lineaire functie van de tijd. Leid deze functie af uit de voorgaande tabel:

$$f : t \rightarrow$$

De afstand die Wim nog verwijderd is van A is eveneens een lineaire functie van de tijd. Leid ook deze functie af:

$$g : t \rightarrow$$

Maak een zinvolle grafische voorstelling van de afgelegde afstand van beide jongens als functie van de tijd. (kies zelf de gepaste eenheden, zodat je de vragen op de volgende bladzijde kunt beantwoorden)



Lees de in de opgave gestelde vraag af van de grafiek.

Tijdstip:

Afgelegde weg (vanaf A):

Bereken dit gevraagde eveneens exact met behulp van de opgestelde formules.

Tijdstip (in hms):

Afgelegde weg (vanaf A):

3 Evalueren

3.1 Inleiding

Het evalueren bij het behandelen van het hoofdstuk rond lineaire functies aan de hand van BZL kan op verschillende manieren gebeuren. Het is echter logisch dat er een zekere aandacht dient te gaan naar alternatieve evaluatievormen, waarbij vooral vaardigheden en attitudes aan bod komen. De leerkracht kan daarbij op zoek gaan naar informatie van het door de leerlingen doorgemaakte proces. Zonder alle mogelijkheden te willen opsommen worden hier een aantal voorbeelden gegeven.

Daarnaast spreekt het voor zich dat er nog altijd naar kennis en cognitieve vaardigheden kan getoetst worden op "klassieke wijze", waarbij eerder naar een product wordt geëvalueerd.

3.2 Een aantal instrumenten

3.2.1 Voorbeeld 1

Je kunt als leerkracht gebruik maken van een vorm van zelfevaluatie door de leerling en een evaluatie van een aantal vaardigheden door jezelf.

Zelfevaluatie

Doorstreep zodat het passende antwoord overblijft:

- Mijn resultaten en besluiten zijn

zeer goed
goed
voldoende
onvoldoende

- Ik vind deze opdracht

gemakkelijk
haalbaar
moeilijk
zeer moeilijk

- Ik vind deze opdracht

duidelijk
verwarrend

Evaluatie door de leerkracht, naar een aantal attitudes

- ◇ De leerling was geïnteresseerd.
- ◇ De leerling komt de gemaakte afspraken na.
- ◇ De leerling werkt de opdracht binnen de voorziene tijdsduur af.
- ◇ De leerling maakt thuis de nodige voorbereidingen.
- ◇ De leerling werkt ordelijk.
- ◇ De leerling laat zich niet afleiden en kan zelfstandig werken

3.2.2 Voorbeeld 2

Het kan zijn dat je bij dergelijke BZL-opdracht de leerlingen in groepjes laat werken. Dan kun je aandacht schenken aan het evalueren van het in groep werken. Dit in groep werken is in de tweede graad trouwens zowel voor ASO, TSO als KSO een eindterm.

Hieronder een aantal mogelijke instrumenten die bij evalueren van groepswork kunnen gebruikt worden.

Instrument 1, een aantal criteria aan de hand van vier categorieën (SAM-schaal)

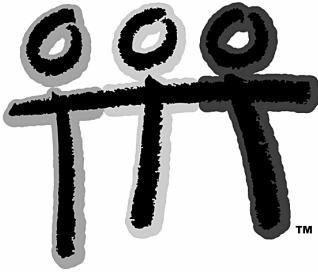
Onvoldoende	Matig	Goed	Zeer goed
Geeft geregeld aanleiding tot conflicten.	Kan zich handhaven in de groep, maar wordt afgeschrikt door conflictsituaties. Laat ruzies overgaan.	Wil ruzies bijleggen en zet hiervoor actief stappen.	Bemiddelt bij conflicten in de groep en werkt aan een compromis.
Is onbeleefd of zelfs onbeschoft.	Doet weinig moeite om vriendelijk of beleefd te zijn.	Volgt de essentiële regels van vriendelijkheid en beleefdheid.	Is op een natuurlijke manier vriendelijk en beleefd.
Heeft over niets een eigen mening. Blijft defensief en vaag.	Ontwikkelt een eigen mening indien de anderen hem/haar een zetje in de goede richting geven.	Durft het aan een ander idee te verdedigen, mits iemand zijn mening deelt.	Zelfs waar zijn/haar mening niet verwacht wordt, wil hij/zij de anderen voor zijn/haar idee winnen.
Kan de anderen niet overtuigen. Wordt keer op keer zelf overtuigd.	Heeft het moeilijk om de anderen te overtuigen. Lukt enkel indien die al enigszins enthousiast zijn.	Durft actie te ondernemen om de anderen te overtuigen.	Overtuigen gebeurt spontaan op basis van weldoordachte argumenten.
Kan gedachten niet duidelijk onder woorden brengen.	Heeft moeite met gedachten duidelijk onder woorden te brengen.	Kan gedachten onder woorden brengen.	Brengt makkelijk gedachten onder woorden.
Bijna geen interactie met de anderen.	Weinig interactie met de anderen.	Wisselende interactie met de anderen.	Goede interactie met de anderen als het nodig is.
Kan moeilijk luisteren.	Is soms afgeleid bij het luisteren.	Luistert in gewone situaties.	Luistervaardigheid verslapt niet in uitzonderlijke situaties.
Taalgebruik is doorspekt met dialect of andere talen.	Taalgebruik is soms onaangepast.	Taalgebruik is aangepast als gevolg van consequente aandacht.	Taalgebruik is natuurlijk aangepast.

Instrument 2, een aantal criteria met twee categorieën.

Criterium	Ja	Neen
De leerling komt goed voorbereid naar het groepswerk.		
De leerling brengt individuele opdrachten tijdig tot een goed einde.		
De leerling participeert op een constructieve wijze aan het groepswerk.		
De leerling stimuleert de anderen om constructief te werken.		
De leerling luistert goed naar de inbreng van de anderen.		
De leerling beargumenteert het eigen standpunt op duidelijke en doordachte manier.		
De leerling laat op een aangename manier merken dat hij/zij het met iets oneens is.		
De leerling kan compromissen bereiken.		
De leerling helpt de groep om richtlijnen te volgen en het tijdschema te respecteren.		
De leerling bewaakt de positieve relaties binnen de groep.		

Instrument 3, aan de hand van een zelfevaluatie.

<p>Vragenlijst bij groepswork</p>		
<p>Naam:</p>		<p>Klas:</p>
<p>Andere leden van de groep:</p>		
<p>Voordat ik een opgave maak, ga ik eerst na of ik begrijp wat er staat en wat er gevraagd wordt.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Als ik de uitleg en/of de vraag niet begrijp, vraag ik uitleg aan anderen uit de groep.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Als ik de opdrachten gemaakt en nagekeken heb, vergelijk ik mijn 'foute' antwoorden met die van anderen in de groep.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Als ik de opdracht in de les niet afkrijg, maak ik die thuis af en kijk dan meteen daarna ook het gemaakte werk na.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>In de groep ben ik degene, die zegt, wat we moeten doen.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>In de groep wacht ik tot iemand zegt wat we moeten doen.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Ik zorg ervoor dat de groep goed aan het werk is en dat er niet over andere dingen gepraat wordt.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Ik help bij het uitzoeken naar uitleg (voorbeelden) in de paragraaf.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Ik werk liever alleen dan met iemand anders samen.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Ik heb liever dat de leerkracht alles uitlegt, dan dat ik het zelf moet uitzoeken.</p>		
<p>0 altijd</p>	<p>0 soms</p>	<p>0 nooit</p>
<p>Wat liep er goed? Wat vond ik leuk?</p>		



***Vossen en konijnen of
over eigenwaarden en eigenvectoren***

Paul Verbelen

```
F1 F2 F3 F4 F5 F6
Algebra Calc Other PrgmIO Clean Up
[9 -1] → a [9 -1]
identity(2) → i [1 0]
solve(det(a - s·i) = 0, s) s = -1
eigVl(a) (-1. -1.)
eigVc(a) [0. 1.11111E-16]
          [1. -1.]
eigVc(a)]
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30
```


Over vossen en konijnen
of
Een discreet lineair dynamisch systeem

Paul Verbelen

1 Vossen en konijnen

In een afgebakend bebost gebied leven vossen en konijnen. Oorspronkelijk is het aantal vossen F_0 en het aantal konijnen R_0 . Na k maanden is het aantal vossen gelijk aan F_k en het aantal konijnen gelijk aan R_k . Het aantal vossen en konijnen na $k + 1$ maanden wordt gegeven door

$$\begin{aligned}F_{k+1} &= 0,4.F_k + 0,3.R_k \\R_{k+1} &= -r.F_k + 1,2.R_k\end{aligned}$$

Hierbij is r een positieve constante die het gemiddeld aantal konijnen weergeeft dat maandelijks opgegeten wordt door één vos, de “vangmaat”.

Dit probleem kan beschreven worden met behulp van een (*populatie*)*evolutiematrix*, namelijk

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -r & 1,2 \end{pmatrix}$$

De beschrijving wordt

$$\begin{pmatrix} F_{k+1} \\ R_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -r & 1,2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix}$$

en dus

$$\begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -r & 1,2 \end{pmatrix}^k \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$$

De elementen $\begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_1 \\ R_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F_2 \\ R_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix}, \dots$ noemt men de *elementen* of de *toestanden* van het *discreet lineair dynamisch systeem* dat volledig bepaald wordt door de begintoestand $\begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix}$ en door de evolutiematrix A .

Wij willen nagaan welke de evolutie is van de vossen- en de konijnenpopulatie op langere termijn en of deze evolutie beïnvloed wordt door de waarde van r .

2 Eigenwaarden en eigenvectoren

Wij verlaten onze vossen en onze konijnen en maken een ommetje langs eigenwaarden en eigenvectoren.

Wij hernemen het probleem van het evenwicht van een migratiematrix. Er is een evenwicht als

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

een oplossing heeft.

Er bestaat dus een koppel (x_0, y_0) zodat

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{7}{8} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Het, overbodige, getal 1 is een *eigenwaarde* van de (migratie)matrix en het koppel $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ een *eigenvector*.

Vorig probleem kan veralgemeend worden tot het zoeken naar kolommen die in een veelvoud afgebeeld worden, m.a.w. men zoekt naar getallen λ en naar kolommen X waarvoor geldt

$$A.X = \lambda.X$$

Elk van deze getallen λ noemt men een eigenwaarde van A en elk van de kolommen een eigenvector.

De eigenwaarden van A zijn de oplossingen van $\det(A - \lambda.I) = 0$ of gedetailleerd

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

De eigenvectoren die behoren bij de eigenwaarde λ zijn de, van de nuloplossing verschillende, oplossingen van het stelsel

$$(A - \lambda.I) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = O$$

\Leftrightarrow

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda).x + a_{12}.y + a_{13}.z = 0 \\ a_{21}.x + (a_{22} - \lambda).y + a_{23}.z = 0 \\ a_{31}.x + a_{32}.y + (a_{33} - \lambda).z = 0 \end{cases}$$

Voorbeeld :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & -1 \end{pmatrix}$$

De karakteristieke vergelijking is :

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ 9 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1 - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

De eigenruimte behorend bij -1 is:

$$\begin{cases} (-1 + 1).x + 0.y = 0 \\ 9.x + (-1 + 1).y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0.x + 0.y = 0 \\ 9.x + 0.y = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow V = \{(0, r) | r \in \mathbb{R}\}$$

De TI89 rekent dit voor ons uit:

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
[-1 0] [-1 0]
[9 -1] [9 -1]
[-1 -s 0] [-s -1 0]
[9 -1 -s] [9 -s -1]
det([-s -1 0] (s+1)^2
[9 -s -1])
det([[-s-1,0][9,-s-1]])
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
[-1 0] [-1 0]
[9 -1] [9 -1]
[-1 0] + a [-1 0]
[9 -1] + a [9 -1]
identity(2) + i [1 0]
solve(det(a-s*i)=0,s) [0 1]
s = -1
solve(det(a-s*i)=0,s)
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
[-1 0] [-1 0]
[9 -1] + a [9 -1]
solve(det(a-s*i)=0,s) s = -1
rref(a - (-1)*i) [1 0]
[0 0]
rref(a - (-1)*i)
MAIN RAD AUTO FUNC 3/30

```

```

F1 Algebra F2 Calc F3 Other F4 PrgmIO F5 Clean Up F6
[9 -1] + a [9 -1]
identity(2) + i [1 0]
solve(det(a-s*i)=0,s) s = -1
eigV1(a) (-1. -1.)
eigVc(a) [0. 1.111111E-16]
[1. -1.]
eigVc(a)
MAIN RAD AUTO FUNC 5/30

```

Het toestel geeft meteen genormeerde eigenvectoren (wat niet altijd een voordeel is).

3 Diagonaliseren van een matrix

De matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

heeft als eigenwaarden $\lambda = 2$ en $\lambda = 3$. De corresponderende eigenruimten zijn

$$V_2 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}, \quad V_3 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In elke eigenruimte kiezen wij een willekeurige eigenvector, bijvoorbeeld

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in V_2 \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V_3$$

Enig rekenwerk met de gevonden eigenwaarden en eigenvectoren levert ons

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2.1 & 3.1 \\ 2.2 & 3.1 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Het linkerlid bevat de gediagonaliseerde matrix. Het rechterlid bevat de oorspronkelijke matrix “omgeven” door de matrix met in de kolommen de eigenvectoren en door de omgekeerde van deze matrix.

$$D = P^{-1}.A.P$$

en dus ook

$$A = P.D.P^{-1}$$

4 Macht van een diagonaalmatrix

$$\begin{aligned} A^k &= (P.D.P^{-1})^k \\ &= \underbrace{(P.D.P^{-1}).(P.D.P^{-1}). \dots .(P.D.P^{-1})}_{k \text{ factoren}} \\ &= P.D.(P^{-1}.P).D.(P^{-1}.P).D. \dots .D.P^{-1} \\ &= P.D.I.D.I.D. \dots .D.P^{-1} \\ &= P.\underbrace{D.D. \dots .D}_{k \text{ factoren}}.P^{-1} \\ &= P.D^k.P^{-1} \end{aligned}$$

Voorbeeld:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \text{ en } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

5 Opnieuw vossen en konijnen

5.1 Model 1

Wij kiezen $r = 0,4$. De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{aligned} &\begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ &(0,4 - \lambda).(1,2 - \lambda) + 0,4.0,3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ &\lambda^2 - 1,6.x + 0,6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ &\lambda = 1 \vee \lambda = 0,6 \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus 1 en 0,6.

De eigenruimte behorend bij 1 is

$$\begin{cases} -0,6.x + 0,3.y = 0 \\ -0,4.x + 0,2.y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Opl } S = \{(r, 2r) | r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ 2r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

De eigenruimte behorend bij 0,6 is

$$\begin{cases} -0,2x + 0,3y = 0 \\ -0,4x + 0,6y = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \{(3r, 2r) | r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_{0,6} = \left\{ \begin{pmatrix} 3r \\ 2r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus ook

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 \end{pmatrix}^k &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 \\ 0 & 0,6^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,6^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Op langere termijn, dus als k vrij groot wordt dan vinden wij

$$0,6^{12} = 0,00217678 ; 0,6^{24} = 0,0000474 ; 0,6^{36} = 0,0000001$$

Het is duidelijk dat wij op lange termijn de waarde van $0,6^k$ zonder problemen gelijk mogen stellen aan 0. Dan vinden wij

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 \end{pmatrix}^k = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat het aantal vossen en konijnen na een lange periode gegeven wordt door

$$\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3.R_0 - 2.F_0 \\ 6.R_0 - 4.F_0 \end{pmatrix}$$

Of

$$\begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{met } \alpha = \frac{1}{4} \cdot (3.R_0 - 2.F_0)$$

Als bij de aanvang van het proces, op het tijdstip $t = 0$, α een strikt positief getal is, m.a.w. $3.R_0 > 2.F_0$, dan ontstaat er na verloop van tijd een stabiele bevolkingstoestand met dubbel zoveel konijnen als vossen. Deze uiteindelijke verdeling is wel afhankelijk van het oorspronkelijke aantal konijnen en vossen maar men komt altijd tot dezelfde verhouding.

Als er oorspronkelijk 100 vossen en 100 konijnen zijn, dan ontstaat er een evenwichtssituatie met 50 konijnen en 25 vossen.

Als er oorspronkelijk 100 konijnen en 30 vossen zijn, dan ontstaat er een evenwichtssituatie met 120 konijnen en 60 vossen.

5.2 Model 2

Wij kiezen $r = 0,325$. De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,3 \\ -0,325 & 1,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & (0,4 - \lambda) \cdot (1,2 - \lambda) + 0,325 \cdot 0,3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \lambda^2 - 1,6x + 0,5775 = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \lambda = 1,05 \vee \lambda = 0,55 \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus 1,05 en 0,55. De eigenruimte behorend bij 1,05 is

$$\begin{cases} -0,650.x + 0,30.y = 0 \\ -0,325.x + 0,15.y = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \{(6r, 13r) | r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 6r \\ 13r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix}$

De eigenruimte behorend bij 0,55 is

$$\begin{cases} -0,150.x + 0,30.y = 0 \\ -0,325.x + 0,65.y = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \{(2r, r) | r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_{0,6} = \left\{ \begin{pmatrix} 2r \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,325 & 1,2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{20} & \frac{2}{20} \\ \frac{13}{20} & -\frac{6}{20} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1,05 & 0 \\ 0 & 0,55 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus ook

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,325 & 1,2 \end{pmatrix}^k = -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,05^k & 0 \\ 0 & 0,55^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{pmatrix}$$

Op langere termijn, dus als k vrij groot wordt dan vinden wij

$$0,55^{12} = 0,0007662179 \quad , \quad 1,05^{12} = 1,795856326$$

$$0,55^{24} = 0,0000005871 \quad , \quad 1,05^{24} = 3,225099944$$

$$0,55^{36} = 0,0000000004 \quad , \quad 1,05^{36} = 5,791816136$$

Het is duidelijk dat wij op lange termijn de waarde van $0,55^k$ zonder problemen gelijk mogen stellen aan 0. De waarde van $1,05^k$ daarentegen wordt alsmaar groter. Bijgevolg geldt “voor voldoende grote waarden van k ”:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,325 & 1,2 \end{pmatrix}^k &= -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 13 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,05^k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 1,05^k & 0 \\ 13 \cdot 1,05^k & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -13 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{20} \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot 1,05^k & -12 \cdot 1,05^k \\ 13 \cdot 1,05^k & -26 \cdot 1,05^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{20} \cdot 1,05^k \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 13 & -26 \end{pmatrix}$$

Hieruit volgt dat het aantal vossen en konijnen na een lange periode gegeven wordt door

$$-\frac{1}{20} \cdot 1,05^k \cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ 13 & -26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{20} \cdot 1,05^k \cdot \begin{pmatrix} 6 \cdot F_0 - 12 \cdot R_0 \\ 13 \cdot F_0 - 26 \cdot R_0 \end{pmatrix}$$

Of

$$\begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix} = 1,05^k \cdot \beta \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 13 \end{pmatrix} \quad \text{met } \beta = \frac{1}{20} \cdot (2 \cdot R_0 - F_0)$$

Als $\beta > 0$, m.a.w. als $2 \cdot R_0 > F_0$, dan groeien de populaties konijnen en vossen maandelijks met 5%. Beide populaties groeien dus onbeperkt, maar na voldoende lange tijd ontstaat er een constante verhouding voor de populaties van de vossen en konijnen. Deze verhouding is 6/13, voor elke 6 vossen zijn er 13 konijnen.

Merk op dat de maandelijkse aangroei van de populaties overeenkomt met de grootste eigenwaarde $\lambda = 1,05$ en dat de uiteindelijke verhouding van de populaties bepaald wordt door de corresponderende eigenvector $v_1(6,13)$.

5.3 Model 3

Wij kiezen $r = 0,5$. De karakteristieke vergelijking is

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 0,4 - \lambda & 0,3 \\ -0,5 & 1,2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & (0,4 - \lambda) \cdot (1,2 - \lambda) + 0,5 \cdot 0,3 = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \lambda^2 - 1,6x + 0,63 = 0 \\ & \Leftrightarrow \\ & \lambda = 0,9 \vee \lambda = 0,7 \end{aligned}$$

De eigenwaarden zijn dus 0,9 en 0,7.

De eigenruimte behorend bij 0,9 is

$$\begin{cases} -0,5x + 0,3y = 0 \\ -0,5x + 0,3y = 0 \end{cases} \Rightarrow V = \{(3r, 5r) | r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 3r \\ 5r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$

De eigenruimte behorend bij 0,7 is

$$\begin{cases} -0,3x + 0,3y = 0 \\ -0,5x + 0,5y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Opl } S = \{(r, r) \mid r \in \mathbb{R}\}$$

en dus

$$V_{0,6} = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

In deze eigenruimte kiezen wij een willekeurige vector $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Hieruit volgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,5 & 1,2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,9 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en dus ook

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,5 & 1,2 \end{pmatrix}^k = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,9^k & 0 \\ 0 & 0,7^k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Op langere termijn, dus als k vrij groot wordt dan vinden wij

$$0,9^{12} = 0,2824295365 \quad , \quad 0,7^{12} = 0,0138412872$$

$$0,9^{36} = 0,0225283995 \quad , \quad 0,7^{36} = 0,0000026517$$

$$0,9^{60} = 0,0017970103 \quad , \quad 0,7^{60} = 0,0000000005$$

Het is duidelijk dat wij op lange termijn de waarden van $0,9^k$ en $0,7^k$ zonder problemen gelijk mogen stellen aan 0. Dan vinden wij

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,5 & 1,2 \end{pmatrix}^k &= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat het aantal vossen en konijnen na een lange periode gegeven wordt door

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} F_0 \\ R_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Of

$$\begin{pmatrix} F_k \\ R_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Beide diersoorten zullen uiteindelijk uitsterven.

5.4 Besluit

De kritische “vangmaat” is duidelijk 0,4. Enkel als elke vos per maand gemiddeld 0,4 konijnen eet, ontstaat er een stabiele evenwichtssituatie in de loop van de tijd.

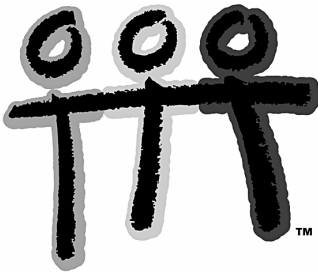
Zijn de vossen niet in staat dit aantal konijnen te consumeren, dan zullen beide populaties in de tijd onbeperkt in aantal toenemen.

In een beperkt gebied zal deze situatie op termijn natuurlijk onleefbaar zijn.

Zijn de vossen echter te hongerig en worden er te veel konijnen geconsumeerd, dan zullen beide diersoorten op termijn uitsterven.

Tenslotte: waarom is 0,4 de kritische vangmaat?

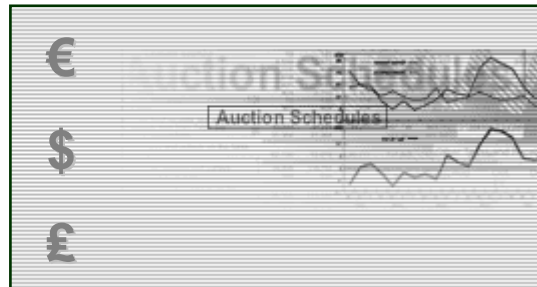
T³ EUROPE



**9^{de} Symposium
Oostende
17-18 augustus 2006**

***Financiële algebra in de praktijk:
nieuwe begrippen en opdrachten***

Bart Vinck



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U. Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

"Financiële algebra in de praktijk; nieuwe begrippen en opdrachten"

B. Vinck, Ehsal, Brussel

Abstract

Van Roger Ibbotson (Yale School of Management) stamt de uitspraak "Bonds are mathematical securities" ("Obligaties zijn wiskundige effecten").

Tijdens de workshop ontrafelen we aan de hand van voorbeelden uit de reële obligatiemarkt de wiskundige relaties tussen de verschillende parameters die een obligatie definiëren. We hebben met name aandacht voor de prijs, de (resterende) looptijd, de couponrente, het agio en het actuariële rendement.

Door deze exploratie raken de deelnemers vertrouwd met de begrippen duratie, convexiteit en immunisatie die centraal staan bij het beheer van een reële obligatieportefeuille. Einddoel is de constructie van een obligatieportefeuille die optimaal voldoet aan vooraf (willekeurig) gekozen specificaties.

In deze bijdrage worden een aantal begrippen en opdrachten aangereikt die tijdens de workshop de basis voor discussie en uitwerking met het rekentoestel zullen vormen.

1. Instrumentarium

a. Basis

Een *rentebetalende obligatie* beschouwen we als een financieel instrument dat de houder recht geeft op ontvangst van een eindig aantal n bedragen C_i op tijdstippen t_i in de toekomst.

Voor het vervolg van deze tekst maken we een aantal bijkomende vereenvoudigingen:

- De tijdstippen t_i , de zogenaamde *coupondagen* of *vervaldagen*, vormen een eindige rekenkundige rij met verschil (of periode) 1 (jaar). Er wordt ondersteld dat $t_1 \leq 1$. Het verst in de toekomst gelegen tijdstip $t_n = T$ noemen we de (resterende) *looptijd* van de obligatie. T hoeft geen geheel getal te zijn. Het is duidelijk dat $T = t_1 + n - 1$.
- De bedragen C_i , $i < n$, zijn alle gelijk en kunnen worden berekend aan de hand van parameters W (de *nominale waarde*) en r (de *couponrente*) in de vorm $C_i = r \cdot W$. De nominale waarde van alle obligaties die we in deze tekst beschouwen is gelijk aan 1. Dit impliceert dat $C_i = r$, $i < n$.

De couponrente wordt in praktische berekeningen genoteerd onder de vorm van een perunage.

De laatste betaling C_T is gegeven door $C_T = r + 1$. Een zogenaamd agio bij terugbetaling blijft voorlopig buiten beschouwing.

- Het al dan niet plaatsvinden van de betalingen is niet aan risico onderhevig.
- De *prijs* P waartegen een obligatie wordt verhandeld, wordt in berekeningen uitgedrukt als een fractie van de nominale waarde.
- Doorgaans (onder andere in de koerstabellen die verder aan bod zullen komen) worden zowel de couponrente als de prijs uitgedrukt onder de vorm van een percentage.

De geformuleerde vereenvoudigingen impliceren dat we de gedachten in eerste instantie best beperken tot de meest eenvoudige rentedragende financiële instrumenten, dit zijn obligaties met vaste looptijd en vaste coupon uitgegeven door een betrouwbare overheid. Zelfs indien we ons verder beperken tot dergelijke instrumenten uitgegeven door de *Belgische* overheid, blijft de keuze voldoende ruim. We maken verder gebruik van een selectie bestaande uit enerzijds zogenaamde OLO's¹ die voornamelijk door grote, institutionele beleggers worden gebruikt en anderzijds de welbekende Staatsbons die met vaste regelmaat aan de particuliere beleggers worden aangeboden. Alle relevante gegevens met betrekking tot deze instrumenten zijn opgenomen in de bijlagen².

Naast de hierboven gedefinieerde rentebetallende obligaties beschouwen we ook *nulcouponobligaties*. Een nulcouponobligatie is een financieel instrument dat de houder recht geeft op ontvangst van één enkel bedrag C_T op een tijdstip T in de toekomst.

Voor het vervolg van deze tekst maken we onderstaande vereenvoudigingen:

- Het tijdstip T noemen we ook de (resterende) *looptijd* van de obligatie. T hoeft geen geheel getal te zijn.
- Het al dan niet plaatsvinden van de betaling is niet aan risico onderhevig.
- De *prijs* P waartegen een obligatie wordt verhandeld, wordt in berekeningen uitgedrukt als een fractie van de nominale waarde. Het is evident dat een nulcouponobligatie altijd onder de nominale waarde noteert.
- Doorgaans wordt de prijs uitgedrukt onder de vorm van een percentage.

Op de OLO-markt komen van de meeste reeksen zowel de nulcouponvariant als de rentebetallende variant voor. De nulcouponvariant ontstaat doordat de overheid³ voor de meeste OLO-reeksen toelaat dat de mantel (de nominale waarde) en de coupons (de periodieke rentebedragen) van de rentebetallende variant gescheiden worden verhandeld. Dergelijke scheiding van mantel en coupons noemt men *stripping*⁴. Staatsbons komen niet in gestripte vorm voor.

b. Afgeleide grootheden

Hoewel obligaties in se eenvoudige instrumenten zijn, is het geen sinecure de opportuniteit van het al dan niet beleggen in deze of gene obligatie te bepalen aan de hand van ondubbelzinnige karakteristieken⁵. Bovendien kunnen obligatieportefeuilles met vergelijkbare karakteristieken op verschillende manieren worden samengesteld.

i. De ene prijs is de andere niet

Voor de meeste obligaties wordt op de markt een zogenaamde *clean price* geafficheerd. Deze clean price is niet de netto som die de koper aan de verkoper moet. Bij een transactie betaalt de koper aan de verkoper namelijk bovenop de clean price ook de zogenaamde *verlopen rente*, d.i. een bedrag gelijk aan de couponrente vermenigvuldigd met de fractie van de renteperiode die is verstreken sedert de meest recente couponbetaling. Conceptueel is het daarom

¹ Een OLO (Obligation Linéaire Obligatie) is een obligatie met vaste coupon en vaste eindvervaldag die terugbetaalbaar is tegen nominale waarde (*a pari*). Op dit ogenblik zijn er in totaal een twintigtal zogenaamde OLO-reeksen in omloop. Deze hebben eindvervaldagen tussen 28/09/2006 en 28/03/2035. Naargelang de behoefte van de overheid worden regelmatig nieuwe pakketten OLO's in bestaande reeksen geveild.

² Tijdens de workshop kunnen alle data naar het rekentoestel worden gedownload in de vorm van een aantal lijsten.

³ I.c. het Agentschap van de Schuld (www.debtagency.be).

⁴ STRIPS staat voor "Separate Trading of Registered Interest and Principal of Securities".

⁵ De vraag naar dergelijke karakteristieken ontstaat zodra twee obligaties verschillen qua looptijd, couponrente of (aantal) vervaldagen en een prijsverschil bijgevolg natuurlijk lijkt. De vraag naar onderliggende karakteristieken valt dan samen met de vraag (in) hoe(verre) een prijsverschil kan worden verantwoord.

eenvoudiger te werken met een *dirty price*, d.i. de som van clean price en verlopen rente. Het beeld van één enkele uitgaande kasstroom op de transactiedatum in ruil voor een aantal inkomende kasstromen in de toekomst blijft dan in de eenvoudigste vorm behouden. In de verdere behandeling werken we daarom ook steeds met dirty prices. Merk op dat voor nulcouponobligaties het onderscheid tussen dirty price en clean price zinloos is.

ii. De ene rente is de andere niet

Uitgaande van de prijs P_T van een nulcouponobligatie met resterende looptijd T wordt de *nulcouponrente* r_T op T jaar bepaald als de oplossing van

$$P_T \cdot e^{T \cdot r_T} = C_T \text{ of alternatief } P_T = C_T \cdot e^{-T \cdot r_T}$$

zodat

$$r_T = \frac{1}{T} \cdot \ln\left(\frac{C_T}{P_T}\right). \quad (1)$$

Merk op dat we er hier (en verder) van uitgaan dat de rente continu wordt samengesteld (vandaar het verschijnen van de exponentiële functies). Deze aanname vereenvoudigt het rekenwerk hier en daar en maakt de behandeling iets algemener.

Uit de nulcouponrente op T jaar r_T en de nulcouponrente op $T' > T$ jaar $r_{T'}$, kan de $T'-T$ *forward rate* over T jaar worden berekend. We noteren deze forward rate als ${}_{T'-T}r_T$. De definitieformule luidt

$$e^{r_T \cdot T} \cdot e^{T'-T \cdot r_{T'} \cdot (T'-T)} = e^{r_{T'} \cdot T'}$$

Het is de rente die men op dit ogenblik kan vastleggen voor een nulcouponbelegging op $T'-T$ jaar die over T jaar ingaat. Uit de definitie kan de forward rate rechtstreeks worden opgelost

$${}_{T'-T}r_T = \frac{r_{T'} \cdot T' - r_T \cdot T}{T'-T} \quad (2)$$

Voor rentebetallende obligaties heeft de *couponrente* op zich weinig betekenis. De meest prominente karakteristiek in dit geval staat bekend als de *yield to maturity*. Voor een rentebetallende obligatie met parameters zoals supra gedefinieerd is deze gegeven als oplossing y van de vergelijking

$$P = \sum_{i=1}^n C_i \cdot e^{-i \cdot y} \Leftrightarrow P = r \cdot \sum_{i=1}^n e^{-(i+i-1) \cdot y} + e^{-(i+n-1) \cdot y}. \quad (3)$$

Deze vergelijking kan alternatief worden geschreven als

$$P = e^{-(1-t_1) \cdot y} \cdot \left(r \cdot \frac{1 - e^{-n \cdot y}}{e^y - 1} + e^{-n \cdot y} \right) \quad (4)$$

maar blijkt meestal niet analytisch oplosbaar. De *yield to maturity* wordt ook wel de *werkelijke rentevoet* genoemd. Beide benamingen zijn in een reële beleggingscontext vrij verwarrend, de *yield to maturity* is enkel realiseerbaar indien de coupons die op elke vervaldag worden geïncasseerd ook kunnen worden herbelegd aan deze zelfde rentevoet. Dat is in realiteit zo goed als nooit het geval. De benaming *vereist rendement* – die ook in andere beleggingscontexten voorkomt – is beter geschikt. Het is dan een maatstaf die

aangeeft welke minimaal rendement een belegger wenst vooraleer te overwegen een instrument in portefeuille te nemen.

iii. De ene looptijd is de andere niet

Ingeval van een nulcouponobligatie is de enige relevante tijdsparameter de resterende looptijd van de obligatie. Voor rentebetallende obligaties zijn er per definitie diverse tijdsparameters in het spel (in het algemeen de volledige rij coupondata, in het eenvoudig geval hier enkel het aantal vervaldagen n en de resterende looptijd $T = t_1 + n - 1$). De *duration* tracht in één enkele karakteristiek deze tijdsparameters te vatten. Ze wordt gedefinieerd als een gewogen gemiddelde van de vervaldagen van coupons en slotbedrag. De wegingsfactoren zijn de waarden van de te verwachten kasstromen, contant gemaakt met behulp van de yield to maturity y . In formulevorm luidt de definitie

$$D(y) = \sum_{i=1}^n t_i \cdot C_i \cdot e^{-t_i \cdot y} \Leftrightarrow D(y) = r \cdot \sum_{i=1}^n t_i \cdot e^{-(t_i+i-1) \cdot y} + (t_1 + n - 1) \cdot e^{-(t_1+n-1) \cdot y}. \quad (5)$$

De duration kan als een van de yield to maturity afhankelijke functie worden bekeken. In het vereenvoudigd geval kan een formule analoog aan (4) worden afgeleid waarin de expliciete afhankelijkheid van het aantal vervaldagen beter tot uiting komt. Deze formule is evenwel te bewerkelijk om verder op in te gaan.

2. Theorie versus praktijk

a. Theorie

i. Stellingen

Een aantal verbanden tussen de verschillende hierboven gedefinieerde grootheden is vrij voor de hand liggend. Al deze verbanden worden *ceteris paribus* geformuleerd, wat betekent dat de invloed wordt bekeken van een wijziging in één van de grootheden op één van de andere terwijl de overige grootheden constant blijven. Technisch gesproken gaat het voornamelijk om het teken van een aantal partiële afgeleiden.

Zo stellen we vast:

$\frac{\partial P}{\partial r} > 0$	Hoe hoger de couponrente, hoe hoger de prijs bij gegeven yield en looptijd.
$\frac{\partial P}{\partial n} > 0$	Hoe langer de looptijd, hoe hoger de prijs bij gegeven couponrente en yield.
$\frac{\partial P}{\partial y} < 0$	Hoe hoger de yield, hoe lager de prijs bij gegeven looptijd en couponrente.

$\frac{\partial y}{\partial r} > 0$	Hoe hoger de couponrente, hoe hoger de yield bij gegeven prijs en looptijd.
$\frac{\partial y}{\partial n} > 0$	Hoe langer de looptijd, hoe hoger de yield bij gegeven couponrente en prijs.

$\frac{\partial y}{\partial P} < 0$	Hoe hoger de prijs, hoe lager de yield bij gegeven looptijd en couponrente.
-------------------------------------	---

Indien we de effecten op de duration willen formuleren, zijn de verbanden wiskundig gesproken wel duidelijk maar de reële betekenis ligt minder voor de hand.

$\frac{\partial D}{\partial r} > 0$	Hoe hoger de couponrente, hoe langer de duration bij gegeven yield en looptijd.
$\frac{\partial D}{\partial n} > 0$	Hoe langer de looptijd, hoe langer de duration bij gegeven couponrente en yield.
$\frac{\partial D}{\partial y} < 0$	Hoe hoger de yield, hoe korter de duration bij gegeven looptijd en couponrente.

ii. Duration, yield to maturity en prijsbewegingen

De verbanden tussen de verschillende karakteristieken kunnen worden doorgetrokken naar de tweede orde. Het meest prominente probleem dat zich voordoet, is een uitdieping van het verband tussen prijs(beweging), yield en duration. Uit (3) en (5) volgt onmiddellijk dat

$$D(y) = -\frac{\partial P}{\partial y}, \quad (6)$$

wat impliceert dat in eerste orde

$$P(y + \Delta y) \approx P(y) - D(y) \cdot \Delta y.$$

Omdat de duration toeneemt met de looptijd kunnen we hier reeds concluderen dat langere looptijden een sterkere prijsgevoeligheid inhouden.

Uit (3) volgt eveneens dat

$$\gamma(y) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{i=1}^n t_i^2 \cdot C_i \cdot e^{-t_i y} > 0. \quad (7)$$

De prijs van een obligatie kan bijgevolg worden gezien als een concave functie van de yield. Bij een stijging van de yield daalt de prijs minder dan de prijsstijging die samengaat met een even grote daling van de yield. Doordat $C_i = r$, $i < n$ is dit effect des te uitgesprokener naarmate de couponrente hoger ligt.

Puur wiskundig bekeken vinden we

$$\Delta P = P(y + \Delta y) - P(y) \approx -D(y) \cdot \Delta y + \frac{1}{2} \gamma(y) \cdot (\Delta y)^2. \quad (8)$$

Deze relatie geeft het absolute effect weer van een wijzigende yield op de prijs van een obligatie. Het relatieve effect van veranderingen in yield op de prijs van een obligatie vereist een iets complexere formulering waarop we hier niet ingaan.

iii. De rentecurve(s)

De bovenstaande beschouwingen situeren zich in een theoretische één-obligatie-context. Voor een obligatie met gegeven looptijd, couponrente en prijs kunnen yield to maturity, duration en convexiteit worden berekend en kunnen de hierboven aangegeven verbanden tussen diverse grootheden exact worden

gemaakt. Meer algemeen kan een volledige klasse van beschikbare obligaties (bijvoorbeeld OLO's) als geheel worden beschouwd en kan de variatie van de verschillende grootheden over deze klasse worden bestudeerd. De meest voor de hand liggende voorstelling wordt gevormd door de zogenaamde *rentecurve* waarbij voor de verschillende beschikbare looptijden de corresponderende yield wordt weergegeven. Meer specifiek gaat het dan om de yieldcurve voor rentebetallende OLO's.

b. *Praktijk*

i. Taak van de portefeuillebeheerder

De *ceteris paribus* formuleringen lijken in de praktijk weinig realistisch en aanzienlijke arbitragemogelijkheden op grond van een dergelijke eerste orde benadering zouden niet mogen bestaan. Integendeel, indien prijsverschillen tussen obligaties met vergelijkbare karakteristieken wel persistent blijken, verwachten we dat er andere factoren zijn die het prijsverschil verklaren (bijvoorbeeld liquiditeitsverschillen of verschillen in kredietwaardigheid). Anderzijds is het ook zo dat in de praktijk het aantal rechtstreeks vergelijkbare obligaties uiterst beperkt is. Wie bijvoorbeeld een portefeuille wil samenstellen uit OLO's, heeft de keuze uit amper een 20-tal obligaties. Van deze obligaties worden prijs, looptijd en couponrente als gegeven beschouwd terwijl yield en duration worden gehanteerd als de karakteristieken die een eventuele opname in portefeuille bepalen.

De taak van een beheerder van een obligatieportefeuille bestaat erin aan de hand van dit beperkt aantal instrumenten (met te nemen of te laten karakteristieken) een portefeuille samen te stellen (of te behouden) die voldoet aan voorafbepaalde vereisten in verband met yield to maturity en duration. Zo zal een beheerder van een obligatiefonds (dat in principe nooit volledig moet worden geliquideerd) vaak als opdracht hebben een constante duration aan te houden (bijvoorbeeld vijf jaar) gekoppeld aan een zo hoog mogelijke yield to maturity. Binnen deze beperkingen staat de beheerder dan voor de opdracht een optimale keuze te maken. Het zijn overigens precies de verschillen in doelstellingen van portefeuillebeheerders die een deel van de prijsverschillen verklaren in het obligatieuniversum.

ii. Een echte rentecurve opstellen via de bootstrap methode

Supra werd reeds aangegeven dat de yield to maturity of werkelijke rentevoet voor een rentebetallende obligatie alleen een maatstaf is voor het reële rendement aan het einde van de looptijd van de obligatie indien ondertussen alle ontvangen bedragen effectief kunnen worden herbelegd aan de gevonden werkelijke rentevoet. Dit is in de praktijk onmogelijk, de yield to maturity is daardoor ook niet de best mogelijke schatting die kan worden gemaakt van het reële rendement dat tot het einde van de looptijd kan worden gerealiseerd. Een correctere benadering verkrijgt men door alle vervallende coupons te herbeleggen aan de relevante forward rates die op dit ogenblik uit de beschikbare nulcouponrentes kunnen worden afgeleid. Equivalent kan men trachten de vervallende coupons contant te maken met de nulcouponrente op die looptijd. In de dagelijkse marktpraktijk blijkt de zogenaamde *nulcouponrentecurve* (en de erin geïmpliceerde forward rates) een belangrijke rol te spelen als referentiepunt.

De berekening van de nulcouponrentecurve is niet echt evident omwille van twee redenen:

- o de nulcouponrentes kunnen niet zomaar worden afgelezen in de markt, sowieso moet er worden rekening gehouden met de prijszetting van de rentebetallende obligaties (zie verder).
- o het aantal ijkpunten is beperkt, tussen twee looptijden waarvoor een exacte nulcouponrente beschikbaar is, zal altijd moeten worden geïnterpoleerd.

In de praktijk wordt voor de berekening van de nulcouponrentecurve een zogenaamde bootstrapmethode⁶ gebruikt. We zullen de aanzet van deze methode illustreren met behulp van de eerste vier OLO's die in Bijlage 1 zijn weergegeven. De datum waarop de prijzen zijn genoteerd was 10/05/2006. De resterende looptijd (in jaren) is voor de eenvoud mee opgenomen in onderstaande tabel.

nummer ⁷	couponrente r	eindvervaldag	looptijd T	prijs P
OLO 1	6.25	28/03/07	0.88	102.59
OLO 2	3.75	28/03/09	2.88	100.52
OLO 3	3.00	28/03/10	3.88	97.64
OLO 4	5.75	28/09/10	4.38	108.07

Uit de prijs van OLO 1 kan de nulcouponrente tot 28/03/07 worden afgeleid. Deze bedraagt volgens (1)

$$r_{0.88} = \frac{1}{0.88} \cdot \ln\left(\frac{1 + 0.0625}{1.0259}\right) = 3.98\% .$$

Om aan de hand van OLO 2 ook de nulcouponrente $r_{2.88}$ op 2.88 jaar af te leiden beschikken we over de volgende vergelijking

$$1.0052 = 0.0375 \cdot (e^{-0.88 \cdot r_{0.88}} + e^{-1.88 \cdot r_{1.88}}) + 1.0375 \cdot e^{-2.88 \cdot r_{2.88}} . \quad (9)$$

Probleem hierbij is dat de nulcouponrente $r_{1.88}$ op 1.88 jaar niet bekend is.

Daarom onderstellen we dat de nulcouponrente $r_{1.88}$ kan worden gevonden via lineaire interpolatie tussen (de reeds bekende) $r_{0.88}$ en (de nog onbekende)

$r_{2.88}$. Meer expliciet geldt

$$r_{1.88} = r_{0.88} + \frac{1.88 - 0.88}{2.88 - 0.88} \cdot (r_{2.88} - r_{0.88}) = \frac{1}{2} \cdot (r_{2.88} + r_{0.88}) . \quad (10)$$

Invullen in (9) levert $r_{2.88} = 3.65\%$. Uit (10) volgt $r_{1.88} = 3.81\%$.

De volgende nulcouponrente die aan de beurt komt is die op 3.88 jaar. Ze kan rechtstreeks worden gevonden als enige onbekende uit de vergelijking

$$0.9764 = 0.03 \cdot (e^{-0.88 \cdot r_{0.88}} + e^{-1.88 \cdot r_{1.88}} + e^{-2.88 \cdot r_{2.88}}) + 1.03 \cdot e^{-3.88 \cdot r_{3.88}} \quad (11)$$

Het resultaat bedraagt $r_{3.88} = 3.69\%$.

Vooraleer OLO 4 de nulcouponrente $r_{4.38}$ op 4.38 jaar kan aanleveren, moeten de nulcouponrentes $r_{0.38}$, $r_{1.38}$, $r_{2.38}$ en $r_{3.38}$ op respectievelijk 0.38, 1.38, 2.38 en 3.38 jaar door interpolatie worden geschat. De laatste drie vormen geen probleem (ze bedragen respectievelijk 3.90%, 3.73% en 3.67%), maar de eerste wel, gezien er geen OLO-nulcouponrente beschikbaar is op kortere termijn dan

⁶ Bootstrapping is een algemene term die wordt aangewend om methodes te karakteriseren die vertrekkend van een eenvoudige techniek geleidelijk aan meer complexe systemen in werking zetten.

⁷ Dit nummer is niet het officiële nummer van de OLO's in kwestie.

0.88 jaar. Om hier een mouw aan te passen, gebruiken we voor dergelijke korte looptijden de rendementen op schatkistcertificaten⁸. Op 10/05/2006 vonden we onderstaande rendementen terug

1 maand	2.69%
2 maand	2.83%
3 maand	2.89%
6 maand	3.07%

Via lineaire interpolatie verkrijgen we $r_{0.38} = 2.98\%$. Voor de nulcouponrente $r_{4.38}$ op 4.38 jaar vinden we via een vergelijking analoog aan (9) en (11) dat $r_{4.38} = 4.56\%$.

Eens de nulcouponrente is verkregen voor alle maturiteiten waarvoor een rentebetallende obligatie beschikbaar is, kan een gestandaardiseerde rentecurve worden geconstrueerd voor vaste maturiteiten⁹. De centrale banken berekenen zelfs een officiële rentecurve voor vaste maturiteiten. Het resultaat wordt eens per dag gepubliceerd¹⁰. De methodologie die aan de basis van de berekeningen ligt is meestal niet publiek, maar pogingen om de gepubliceerde officiële rentecurves te reconstrueren aan de hand van voornamelijk *cubic spline interpolation*¹¹ zijn zeer accuraat gebleken.

⁸ Schatkistcertificaten zijn kortlopende overheidsobligaties die kunnen worden beschouwd als de kortlopende broertjes van de OLO's. Schatkistcertificaten spelen een belangrijke rol in de uitvoering van het monetair beleid. Het belangrijkste nadeel van het gebruik ervan (in de context van de bepaling van de nulcouponrentecurve) bestaat erin dat de prijs soms rechtstreeks wordt beïnvloed door interventies van de monetaire overheid. Van deze beperking maken we hier even abstractie.

⁹ Bijvoorbeeld met stappen van één jaar tussen één en 30 jaar of met de "natuurlijke" looptijden (1, 2, 3, 6 maand en 1, 2, 5, 10 en 30 jaar).

¹⁰ Voor Belgische overheidsobligaties is de referentie het Rentenfonds (www.rentenfonds.be), in Duitsland staat de Deutsche Finanzagentur centraal (<http://www.deutsche-finanzagentur.de/eng/>), informatie over Gilts (UK-overheidsobligaties) is te vinden bij de Debt Management Office (<http://www.dmo.gov.uk/gilts/f2gilts.htm>) en voor US Treasury Bonds raadpleegt men best <http://www.treasury.gov/offices/domestic-finance/debt-management>.

¹¹ *Cubic spline interpolation* is een interpolatietechniek waarbij een stuksgewijs continue curve wordt geconstrueerd die door een gegeven aantal punten gaat door elk (horizontaal) opeenvolgend tweetal te verbinden door een derdegraadsveelterm. Het aantal vrije parameters laat toe de eerste en tweede afgeleide in elk punt continu te maken. Het resultaat is een kromme die zo goed als perfect glad lijkt zonder vervormingen aan de uiteinden (wat een nadeel is dat nogal eens optreedt bij polynomiale interpolaties van hogere graad).

Opdrachten vooraf

1. Maak grafische voorstellingen van de stellingen geformuleerd onder 2.a.i.
2. Ga voor een aantal OLO's uit de lijst in Bijlage 1 de accuraatheid na van de tweede ordebenadering (8).
3. Beschouw de lijst met OLO's in Bijlage 1.
 - c. Stel een lijst op met de yield van deze OLO's.
 - d. Stel de resulterende rentecurve grafisch voor.
 - e. Stel nu een lijst op met de duration van de OLO's.
 - f. Teken een curve die de yield afzet tegen de duration.
4. Beschouw de lijst met Staatsbons in Bijlage 2.
 - g. Stel een lijst op met de yield van deze Staatsbons.
 - h. Stel de resulterende rentecurve grafisch voor.
 - i. Vergelijk met de rentecurve voor OLO's.
 - j. Stel nu een lijst op met de duration van de Staatsbons.
 - k. Teken een curve die de yield afzet tegen de duration.
 - l. Vergelijk weer met de OLO's.
5. Beschouw de constructie van de OLO-nulcouponrentecurve zoals die werd opgestart in 2.b.ii.
 - a. Zet deze constructie verder
 - b. Leid uit de OLO-nulcouponrentecurve enkel forward rates af.
 - c. Leid met behulp van de forward rates voor enkele OLO's het reëel rendement tot op de vervaldag af en vergelijk dit met de yield to maturity.
6. Construeer de nulcouponrentecurve voor de Staatsbons.

Opdrachten tijdens de workshop

1. Barbell versus bullet strategie
2. Immunisatie

Verloop workshop

- | | |
|---|--------|
| 1. Uploaden data en programma's | Vooraf |
| 2. Theoretische uiteenzetting | 30' |
| 3. Uiteenzetting opdracht 1 (barbell versus bullet strategie) | 10' |
| 4. Uitvoering opdracht 1 | 20' |
| 5. Uiteenzetting opdracht 2 (immunisatie) | 10' |
| 6. Uitvoering opdracht 2 | 20' |

Bijlage 1

Overzichtstabel OLO's (met prijzen d.d. 10/05/06)¹²

nummer ¹³	couponrente r	eindvervaldag T	prijs P
1	6.25	28/03/07	102.59
2	3.75	28/03/09	100.52
3	3.00	28/03/10	97.64
4	5.75	28/09/10	108.07
5	5.00	28/09/11	105.76
6	5.00	28/09/12	106.32
7	8.00	24/12/12	123.71
8	4.25	28/09/14	101.88
9	8.00	28/03/15	129.54
10	5.50	28/03/28	117.20
11	5.00	28/03/35	111.12

De prijzen in de laatste kolom zijn zogenaamde *dirty prices* die standaard voor OLO's worden genoteerd. Dergelijke dirty prices zijn prijzen inclusief de *verlopen rente*.

¹² Deze informatie wordt in deze vorm dagelijks gepubliceerd in de krant De Tijd. Ook het Rentenfonds (<http://www.nbb.be/rk/N/page01fr.htm>) en het Agentschap van de Schuld (www.debtagency.be) publiceren dagelijks referentie-informatie. In de praktijk worden op de markt continu aan- en verkoopprijzen voor OLO's geafficheerd.

¹³ Dit nummer is niet het officiële nummer van de OLO's in kwestie.

Bijlage 2

Overzichtstabel Staatsbons (met prijzen d.d. 10/05/06)¹⁴

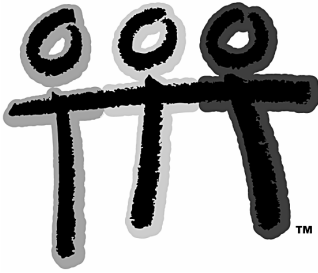
nummer ¹⁵	couponrente r	eindvervaldag T	prijs P
1	5.05	04/12/07	104.29
2	5.50	04/03/08	104.18
3	5.50	04/06/08	108.63
4	2.80	04/06/08	100.98
5	5.45	04/09/08	107.42
6	3.20	04/09/08	101.21
7	5.30	04/12/08	105.95
8	3.40	04/12/08	100.89
9	4.75	04/03/09	103.40
10	3.10	04/03/09	99.32
11	4.90	04/06/09	107.59
12	3.30	04/06/09	101.95
13	4.75	04/09/09	105.93
14	3.15	04/09/09	100.42
15	4.15	04/12/09	102.72
16	2.90	04/12/09	98.56
17	4.70	04/03/10	103.52
18	2.80	04/03/10	97.11
19	4.95	04/06/10	108.20
20	2.60	04/06/10	98.05
21	4.20	04/09/10	103.90
22	2.60	04/09/10	97.13
23	4.05	04/12/10	102.32
24	2.85	04/12/10	97.10
25	3.60	04/03/11	99.65
26	3.00	04/03/11	97.12
27	3.40	04/06/11	99.98
28	3.70	04/09/11	101.50
29	3.95	04/12/11	101.79
30	3.60	04/03/12	100.29
31	3.80	04/06/12	102.36
32	3.65	04/09/12	100.66
33	3.40	04/12/12	97.97
34	3.25	04/03/13	95.94
35	3.00	04/06/13	96.61
36	3.00	04/09/13	100.51
37	3.20	04/12/13	96.10

De prijzen die worden vermeld in de laatste kolom zijn ook hier *dirty prices*. Standaard worden voor Staatsbons nochtans *clean prices* genoteerd dus exclusief de zogenaamde *verlopen rente*.

¹⁴ Ook deze informatie wordt dagelijks gepubliceerd in de krant De Tijd.

¹⁵ Dit nummer is niet het officiële nummer van de Staatsbons in kwestie.

T³ EUROPE



9^{de} Symposium
Oostende
17-18 augustus 2006

**Sensoren aan het werk
in het lab Fysica**

Luc Vanden Abeele



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U.Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

SENSOREN AAN HET WERK IN HET LAB FYSICA

Beschrijving van de workshop

Met behulp van TI Calculated Based Ranger (CBR™) en Laboratory 2 (CBL 2™), sensoren (ook EasyTemp™ sensor) en het programma Datamate worden fysische metingen uitgevoerd. De data worden op de grafische rekenmachine verder verwerkt en getoetst aan het fysische model (barometrische hoogtemeting, harmonische trilling, laden van een condensator, afkoeling van een vloeistof ...).

In de T³ Cahier nr. 7 *Modelleren vanuit experimenteel verkregen data* (auteur: Dominiek Ramboer) worden een tweetal vakoverschrijdende projecten – botsende bal en trillingen – uitvoerig beschreven. Men vindt er heel wat didactische tips en een bijlage over het werken met de CBR en de CBL. Enkele voorstellen om vanuit concrete meetresultaten van fysische proeven tot wiskundige modellen te komen, sluiten dit cahier af.

Op de website van LEPLA (Learning Environment for Physics Laboratory Activities) vindt men heel wat kant en klare experimenten voor fysica en wiskunde. Naast een gedetailleerde beschrijving worden per experiment ook volgende zaken gepubliceerd: stappenplan, meetgegevens, programma's voor de GR en data-analyses.
(zie <http://www.lepla.org/>)

Workshop experimenten

-1- met EasyData sensor en TI-84 Plus

temperatuurmeting met EasyTemp sensor

Zoals de naam al doet vermoeden laat deze sensor toe eenvoudig meetgegevens over de temperatuur te verzamelen dankzij de nieuwe mogelijkheden van de GR TI-84 Plus. De temperatuursensor sluit men rechtstreeks aan op de USB-uitgang van de TI-84 Plus. De USB-poort wordt gebruikt om direct meetwaarden te verzamelen zonder aansluiting op een datalogger als de CBL. De GR herkent de sensor onmiddellijk (Easy!) en start automatisch een EasyData stuurprogramma op. Druk Start om het verzamelen van meetgegevens te starten.

(zie <http://www.vernier.com/easy/easytemp.html>)

Bij de opwarming van een vloeistof in een calorimeter wordt de temperatuur van de vloeistof gedurende een bepaalde tijd opgemeten, bijvoorbeeld 100 samples om de 10 s. Zo bekomt men een tijdsgrafiek op de GR waaruit de begin- en de eindtemperatuur af te lezen is. Indien de opwarming elektrisch gebeurt en ook de spanning V en I opgemeten worden, berekent men met de wet van Joule de soortelijke warmtecapaciteit c van de vloeistof.

Uitbreiding naar andere sensoren is mogelijk als een Vernier EasyLink hulpstuk op de GR aangesloten wordt.

(zie <http://www.vernier.com/easy/easylink.html>)

-2- met CBL2 + Datamate op GR

barometrische hoogtemeter met barometersensor

De luchtdruk p neemt exponentieel af met de hoogte h . Met de druksensor *Barometer*

gekoppeld aan CBL2, wordt in het programma Datamate op de GR een tijdsgrafiek opgemeten terwijl men de trappen neemt van beneden naar boven. Door de kleine gevoeligheid van de druksensor kan slechts per verdieping een nieuwe 'digitale' meetwaarde opgemeten worden. We meten hier op de grens van de resolutie van het toestel. Er is geen exponentieel model bruikbaar.

Maar voor kleine hoogtes is dit verband lineair. Om dit lineaire model te controleren, wordt de luchtdruk op elke verdieping van het gebouw gemeten en een spreidingsdiagram van de hoogte (aantal treden \times hoogte van 1 trede) als functie van de luchtdruk opgetekend.

massaveersysteem met CBR

De harmonische trilling bij een massaveersysteem wordt bestudeerd met behulp van de ultrasonische bewegingsdetector CBR. Via statische metingen van de uitrekking van de veer wordt de veerconstante bepaald. Hiervoor stelt met het programma Datamate op de GR in op de functie Events with entry, bij bepaalde massa's (= entry) aan de veer wordt de uitrekking (= event) opgemeten. Bij de dynamische methode kiest men voor de functie Time Graph, waarbij 100 samples met een tussentijd van 0,05 s opgemeten worden. De grafische voorstelling van de meetpunten (distance versus time), samen met de voorstelling van velocity en acceleration versus time levert informatie op over het sinusoïdaal model voor de harmonische trilling. Om het model te vervolledigen, worden ook amplitude, eigenfrequentie en periode uit de grafiek afgelezen, zodat via het invoeren van een nieuw functievoorschrift $Y1=a\sin(b\cdot t+c)$ het sinusvormige verloop van de meetpunten benaderd wordt.

(zie applet op <http://www.phys.uu.nl/~wwnatdc/natuurkundel/veertrilling.html>)

-3- met CBL + stuurprogramma op GR

afkoelingskrommen opmeten met 2 temperatuursensoren

Op de CBL worden 2 temperatuursensoren aangesloten. Elke sensor meet de gelijktijdige afkoeling van één vloeistof, bijvoorbeeld ethanol en water. De afkoeling verloopt exponentieel en minder snel voor water wegens de grotere soortelijke warmtecapaciteit.

lading van een condensator met spanningssensor

Met behulp van de CBL worden de elektrische meetgegevens rechtstreeks in de GR bewaard. Het spanningsverloop over de condensator wordt met een spanningssensor opgemeten. In de GR wordt een programma geladen om de CBL te sturen bij de metingen en om de meetgegevens naar de GR te versturen. Met de functie ExpReg worden de spanningswaarden aan een exponentieel model getoetst. Hieruit wordt ook de capaciteit C en de lading Q van de condensator berekend.

Benodigheden voor deze opstellingen: CBL2, CBR, GR TI-84 of TI-89, sensoren plus materiaal lab fysica

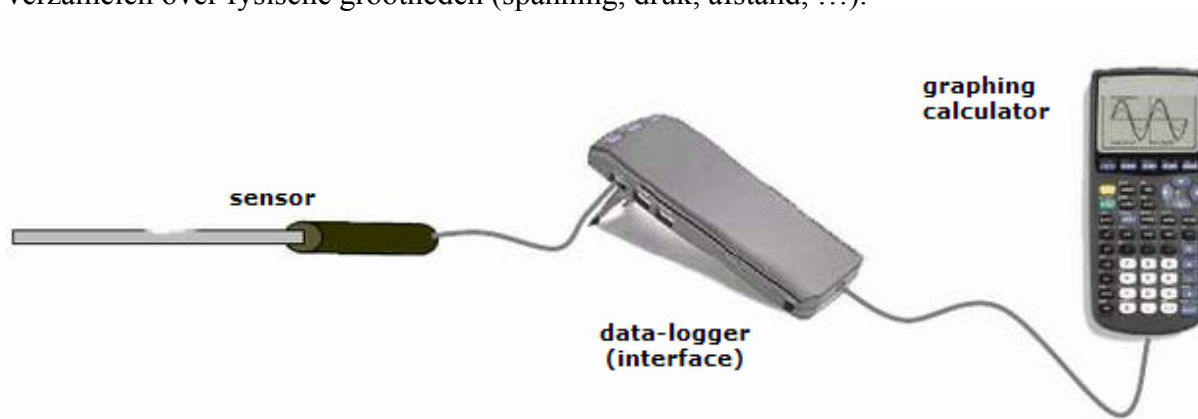
Calculator-Based Laboratory 2™ System (CBL 2™)



The CBL 2 is an easy to use, powerful, and inexpensive data collection tool. You can start collecting data right out of the box with CBL 2 in four easy steps:

1. Transfer the built-in user program from the CBL 2 to your calculator with a single button push.
2. Run the program.
3. Plug in one of our auto-ID sensors.
4. Begin collecting data.

In de workshop gebruikt men de GR (Grafische Rekenmachine TI-89/83+/84) en de CBL (Calculator-Based Laboratory CBL2) van Texas Instruments om met allerlei sensoren (spanningssensor, barometer, ultrasone bewegingsdetector, ...) digitale meetgegevens te verzamelen over fysische grootheden (spanning, druk, afstand, ...).



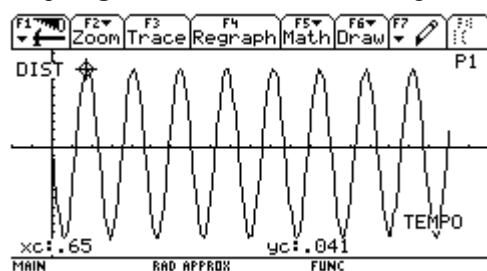
Handheld technology

Hiervoor wordt zogenaamde 'handheld technology' gebruikt: meestal 3 draagbare instrumenten die onderling gekoppeld zijn:

1. de TI **grafische rekenmachine** (GR, om de meetwaarden te analyseren en grafisch voor te stellen en om de interface via een programma aan te sturen),
2. de **interface** (CBL, om de elektrische signalen in digitale informatie om te zetten en te bewaren)
3. één of meerdere **sensoren** (om de fysische grootheid om te zetten in een elektrisch signaal)

voorbeeld

bij het massaveersysteem wordt een ultrasone bewegingsdetector (CBR) als **sensor** gebruikt; de signalen worden tijdens de meting doorgestuurd naar de **interface** (CBL); deze wordt door een programma DATAMATE op de **grafische rekenmachine** aangestuurd



De procedure voor de gegevensverzameling gebeurt in 4 stappen:

1. download en start het programma DATAMATE op de grafische rekenmachine (APPS),

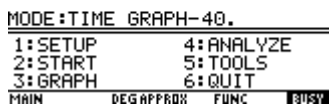
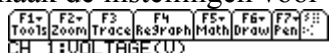


op TI-84 Plus



op TI-89

2. selecteer de sensoren en verbind ze met de interface CBL, die de sensoren automatisch herkent en kalibreert,
3. maak de instellingen voor de meting (SETUP),



4. start de meting (START)

De GR slaat de meetwaarden op in de vorm van tabellen (data, lists L1 of c1) en zet ze vervolgens in grafieken om. Wanneer de gebruiker het programma Datamate verlaat (6:QUIT), dan blijven de meetwaarden in de lijsten staan.



Zo kunnen de meetwaarden verder wiskundig geanalyseerd (regressie, integratie, ...) worden om te komen tot de bepaling van de gevraagde parameters.

Aan de slag met de CBL

Van links naar rechts: temperatuursensor / CBL / GR / GR-houder



Sluit de sensor aan op de CBL (analoge of digitale ingang) en verbind de CBL met de GR.



Zet de GR-houder op de CBL en plaats de GR in de GR-houder.



DataMate

Nadat de hardware tot één systeem gekoppeld is, wordt de GR klaargemaakt voor de software. Omdat men voor het programma DATAMATE zoveel mogelijk geheugenruimte nodig heeft, moet zoveel mogelijk geheugen gewist worden. Een reset van *All Memory* lijkt misschien drastisch maar is veelal de beste oplossing.

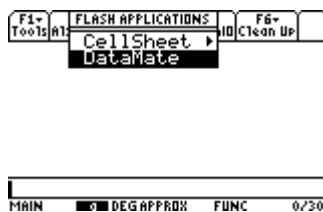
Download vanaf de computer het programma DATAMATE via TI-Connect naar de GR.

Start het programma DATAMATE op (hier afgebeeld voor de TI-89):

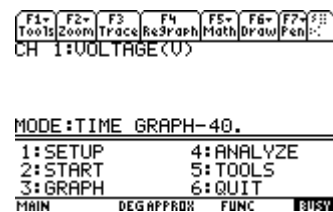
APPS



FlashApps



DataMate



Het openingsscherm van DataMate verschijnt,
 VERNIER SOFTWARE DATAMATE (VER 1.15)
 gevolgd door het onderstaande hoofdmenu



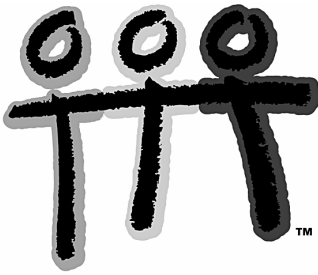
Hieruit leest men af welke sensor gekoppeld is aan welke ingang. De spanningssensor, aangesloten op kanaal CH 1, meet de spanning in volt. De getalwaarde rechtsboven (niet op bovenstaande figuur aangeduid) geeft de huidige meetwaarde aan die de sensor meet.

Boven de menu-items 1 tot 6 staat de MODE waarin de CBL ingesteld is, hier TIME GRAPH-40. In de handleiding van de CBL vindt men alle uitleg over de verschillende instellingen.

Wordt het programma DATAMATE afgesloten (6:QUIT), dan worden de meetgegevens in lijsten bewaard.



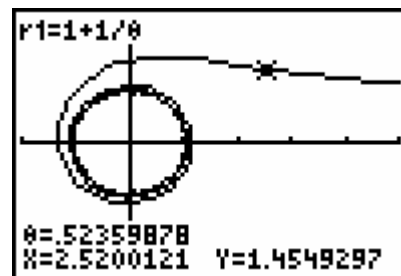
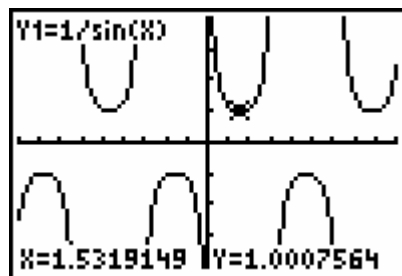
T³ EUROPE



9^{de} Symposium
Oostende
17-18 augustus 2006

Analyse in de derde graad met de TI-84 Plus

Didier Deses



KATHOLIEKE UNIVERSITEIT
LEUVEN

KHBO
Katholieke Hogeschool Brugge-Oostende
Associatie K.U. Leuven

 **TEXAS
INSTRUMENTS**

Analyse in de derde graad met de TI-84 Plus

Dr Didier Deses*

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
2	Wat kan de TI-84+ al?	2
2.1	Nuttige functies in het kader van de analyse van de 3de graad	2
2.2	Voorbeelden en opdrachten	3
3	De gebruikte algoritmen en de problemen die daaruit volgen.	8
3.1	Hoe maakt de TI-84+ een grafiek?	8
3.2	Nulpunten bepalen.	10
4	Leer je leerlingen hoe de TI-84+ werkt.	13
4.1	In TIBasic programmeren is eenvoudig.	13
4.2	Nulpunten bepalen.	15
4.3	Numerieke integratie.	18

1 Inleiding

Deze tekst bevat drie luiken. In het eerste deel is de bedoeling om zo eenvoudig mogelijk het dagelijks gebruik van de **TI-84+** in de lessen analyse te bespreken. Dit gaat in het algemeen zeer gemakkelijk gezien tal van functies al in de **TI-84+** werden voorgeprogrammeerd. Dit deel is tevens geschreven met het oog op voorbeelden die in de lessen kunnen worden gebruikt, zij het als effectief voorbeeld, zij het als controle voor een klassieke oefening.

Het tweede deel gaat dieper in op de gebruikte algoritmen en verklaart waarom sommige resultaten al dan niet gevonden worden. Hoewel dit deel lichtjes technischer is, leunt de inhoud ervan sterk aan bij de wiskunde. Mijn

*Leerkracht wiskunde K. A. Koekelberg, medewerker aan het departement wiskunde van de VUB

inziens is het onontbeerlijk om, zeker in de sterkere richtingen, de werking en de algoritmen van de **TI-84+** te behandelen. De **TI-84+** is immers een duidelijk voorbeeld van een directe toepassing van de wiskunde die in het dagelijks leven van wetenschappers, ingenieurs, architecten en nog vele anderen wordt gebruikt.

Het laatste luik bevat een aantal uitgewerkte opdrachten en programma's die de leerlingen kunnen maken. Deze tonen dat ook leerlingen uit de 3de graad in staat zijn om de algoritmen die in de **TI-84+** zitten zelf te begrijpen en te programmeren.

Ten slotte wordt er benadrukt dat hoewel niet alle voorbeelden uit deze tekst in de klas werden gebruikt, er toch een meerderheid van de oefeningen, opdrachten en programma's werden behandeld in een 5de of 6de ASO met 5 uren wiskunde per week.

2 Wat kan de **TI-84+** al?

2.1 Nuttige functies in het kader van de analyse van de 3de graad

*We zullen regelmatig dingen intikken op de **TI-84+**. We gebruiken hier $\boxed{y=}$ om een knop aan te duiden en $\boxed{2nd}[calc]$ om een keuze aan te duiden die met behulp van de $\boxed{2nd}$ knop kan worden gevonden. De notatie $\boxed{math}[fmax]$ gebruiken we dan weer om selectie uit een menu te maken. Zo vind je bijvoorbeeld onder $\boxed{2nd}[angle][DMS]$ het commando om hoeken om te zetten van radialen naar graden, minuten en seconden. Soms zullen we ook de opeenvolgende stappen op de **TI-84+** geven door 'screenshots'. Deze moeten dan gelezen en uitgevoerd worden op de manier van een stripverhaal: van links naar rechts en van boven naar onder.*

De meeste nuttige functies die kunnen dienen in de lessen analyse van de derde graad kunnen worden verkregen via het menu $\boxed{2nd}[calc]$ nadat je een grafiek hebt gemaakt. Dit doe je als volgt. Via $\boxed{y=}$ kun je één of meerder functievoorschriften ingeven. Daarna druk je op \boxed{graph} om de grafiek te maken, of je gebruikt een keuze uit \boxed{zoom} , de beste is waarschijnlijk $[zdecimal]$, omdat deze ervoor zorgt dat je een orthonormaal assenstelsel krijgt.



Zoals eerder gezegd kun je nu via $\boxed{2\text{nd}}$ [calc] aan verschillende nuttige ingebouwde functies geraken.

$\boxed{2\text{nd}}$ [calc]	
[value]	om functiewaarden te bepalen
[minimum], [maximum]	om extrema te benaderen
[intersect]	om het snijpunt tussen twee krommen te benaderen
[dy/dx]	om de afgeleide in een punt te bepalen
$\int f(x)dx$	om een bepaalde integraal te benaderen

Het is goed om weten dat verschillende van deze functies ook via het menu $\boxed{\text{math}}$.

$\boxed{\text{math}}$	
[fmin], [fmax]	om extrema te bepalen
[nderiv]	om numeriek de afgeleide in een punt te bepalen nderiv(funcctie, variabele, punt)
[fnint]	om numeriek een bepaalde integraal te bepalen fnint(funcctie, variabele, ondergrens, bovengrens)

Deze zijn echter iets moeilijker en uitgebreider in het gebruik. We beperken ons hier tot het gebruik van [nderiv]. Wij zullen dit enkel benutten om in sommige gevallen het afgeleid getal in een punt te berekenen. De syntax is dan nderiv(funcctie, variabele, punt). We zullen gebruik maken van bijvoorbeeld nderiv(Y1(X), X, 2) waarbij Y1 de functie is die via $\boxed{\text{y=}}$ ingevoerd kan worden. Y1 kun je via $\boxed{\text{vars}}$ [y-vars] [function...] intypen.



2.2 Voorbeelden en opdrachten

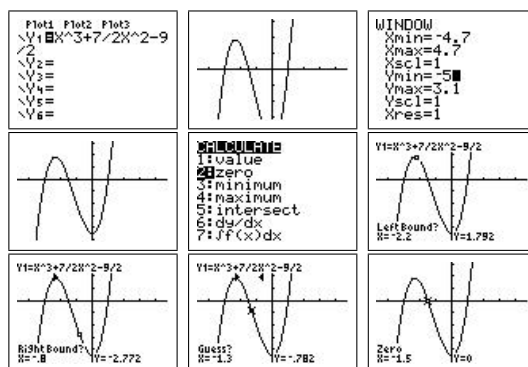
Ziezo! We beschikken nu over alle functies omtrent analyse van de derde graad die we nodig hebben in onze lessen. We geven nu een aantal voor-

beelden van eenvoudige opdrachten die in de klas kunnen gemaakt worden. We beginnen met het meest eenvoudige, nml. nulpunten zoeken.

Opdracht 1. *Nulpunten bepalen*

Soms vergt het bepalen van de nulpunten van een veelterm inzicht en kan de **TI-84+** helpen. Maak de grafiek van de reële functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = x^3 + \frac{7}{2}x^2 - \frac{9}{2}$. Bepaal de nulpunten zowel manueel als met de **TI-84+**.

Oplossing 1. Om de nulpunten te vinden kan men de veelterm ontbinden in factoren. Door op te merken dat de som van de coëfficiënten nul is, weten we dat de veelterm deelbaar is door $(x - 1)$. Deling of de methode van Horner geeft dan de andere factor die van de tweede graad is en kan worden ontbonden via de discriminant methode. De nulpunten $1, -3$ en $\frac{3}{2}$ kunnen aldus gevonden worden. Met de **TI-84+** gebeurt dit als volgt.



Opdracht 2. *Even en oneven functies*

Volgende stelling laat zien dat elke functie de som is van een even en een oneven functie.

Stelling 1. *Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie. Stel*

$$f_e(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ en } f_o(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

Dan is f_e even, f_o oneven en $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$.

Bewijs deze stelling. Werk enkel voorbeelden met veeltermen uit. Van waar komt de benaming ‘even’ en ‘oneven’? Wat gebeurt er indien f zelf al even of oneven is, bijvoorbeeld $f(x) = \sin x$ of $f(x) = \cos x$? Gebruik de **TI-84+** om de grafieken van f, f_e en f_o te maken voor een willekeurige f . Indien $f(x) = e^x$ dan is $f_e(x) = \cosh x$ en $f_o(x) = \sinh x$, maak hiervan de grafieken.

Oplossing 2. Het bewijs van de stelling is een eenvoudige verificatie. Wanneer men echter de stelling als volgt formuleert is het bewijs uitdagender en leidt vanzelfsprekend tot bovenstaande formules. Deze kan gegeven worden in de betere klassen.

Stelling 2. *Elke functie de som is van een even en een oneven functie.*

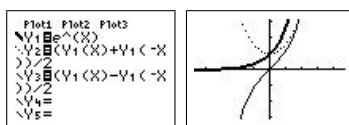
Bewijs. Stel dat $f(x) = f_e(x) + f_o(x)$ waarbij f_e even is en f_o oneven. Dan bekomen we:

$$\begin{cases} f(x) &= f_e(x) + f_o(x) \\ f(-x) &= f_e(x) - f_o(x) \end{cases}$$

Oplossen van dit stelsel naar f_e en f_o levert de bovenstaande formules. \square

Als $f(x)$ een veelterm is, dan bestaat $f_e(x)$ uit alle termen van even graad en $f_o(x)$ uit alle termen van oneven graad. Indien f reeds even is zal $f_e(x) = f(x)$ en $f_o(x) = 0$. Eenzelfde conclusie kan getrokken worden indien f oneven is.

Deze stelling door de **TI-84+** laten illustreren kan op eenvoudige wijze.



De bovenstaande aanpak laat ook toe om te spreken over \sinh en \cosh . Alhoewel deze functies vaak als ‘vergezocht’ worden betiteld hebben ze vele toepassingen bijvoorbeeld in de fysica (hangende ketting) of in de architectuur en de kunst (gewelven van Gaudi).

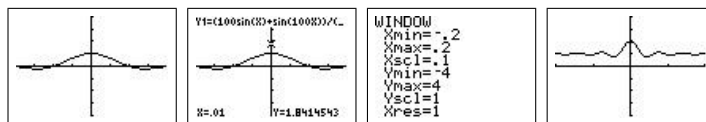
Opdracht 3. Limieten

Soms leidt het gebruik van de **TI-84+** tot een verkeerde conclusie. We behandelen een klassieker. Maak de grafiek van de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ met voorschrift $f(x) = \frac{100 \sin x + \sin 100x}{100x}$, met de grenzen uit **zoom**[ztrig]. Gebruik **2nd**[calc][value] om na te gaan welke beelden de **TI-84+** geeft voor waarden rond 0 (bijvoorbeeld 0.1, 0.01 en 0.001). Vergelijk met de grafiek. Maak de grafiek opnieuw door via **window** de grenzen van de x-as te veranderen in $x_{\min} = -0.2$ en $x_{\max} = 0.2$. Bereken natuurlijk ook de limiet.

Oplossing 3. De limiet is eenvoudig te berekenen als men beschikt over $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{100 \sin x + \sin 100x}{100x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{100 \sin x}{100x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 100x}{100x} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

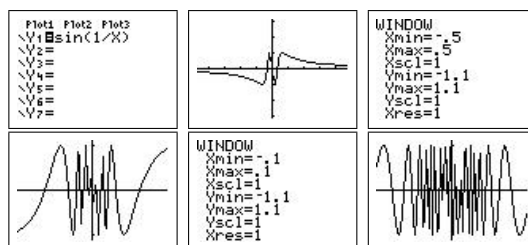
Met de **TI-84+** bekommt men echter een grafiek waarop men zonder de grenzen aan te passen niets van het gedrag van f ziet.



Opdracht 4. *Limieten*

De limiet $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ bestaat niet. Gebruik de **TI-84+** om grafisch te achterhalen wat er precies gebeurt.

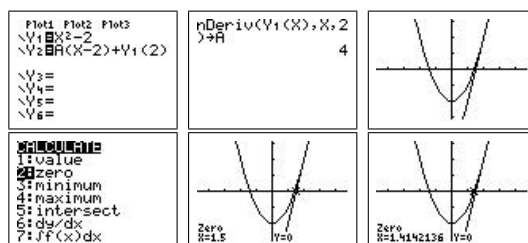
Oplossing 4. Dit is opnieuw een klassieker. Wanneer $x \rightarrow 0$ gaat, dan zal de functie $\sin \frac{1}{x}$ steeds sneller gaan oscilleren. Met de **TI-84+** kan men tenminste dit gedrag laten zien, hetgeen zonder ICT moeilijker zou zijn.



Opdracht 5. *Raaklijnen*

Men kan irrationale getallen niet schrijven onder breukvorm, toch kan men deze benaderen aan de hand van een breuk. Vandaag is dit geen probleem meer, want elk rekenmachine doet exact dit (leg uit!). Vroeger was dit echter een probleem. Eén methode gebruikte de nulwaarde van een raaklijn aan een gepaste kromme. Benader $\sqrt{2}$ door middel van de raaklijn aan $y = x^2 - 2$ in het punt $x = 2$. Deze methode kan gebruikt worden om elke n de machtswortel van een natuurlijk getal te benaderen. Probeer maar eens!

Oplossing 5. Indien $f(x) = x^2 - 2$ dan zijn de nulwaarden $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$. De afgeleide is $f'(x) = 2x$. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ is dan $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, in ons geval wordt dit $y = 4(x - 2) + 2 = 4x - 6$. Het snijpunt met de x-as is een benadering voor $\sqrt{2}$. We vinden dus de waarde $\sqrt{2} \approx \frac{3}{2}$. Met de **TI-84+** kunnen we dankzij $\boxed{\text{math}}$ [nderiv] hetzelfde doen.

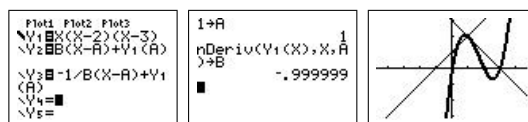


Wanneer deze methode iteratief wordt toegepast spreekt men van de Newton-Raphson methode om nulpunten te vinden (zie opdracht 15).

Opdracht 6. Raaklijn en normaal

Maak een grafiek van de kromme $y = x(x - 2)(x - 3)$, samen met de raaklijn en normaal in het punt (1, 2). Doe daarna hetzelfde in het punt (2, 0). Let erop dat je [zdecimal] gebruikt, anders zullen de rechten niet loodrecht op elkaar staan (probeer maar eens met [zstandard], leg uit hoe dit komt).

Oplossing 6. De vergelijking van de raaklijn in een punt $x = a$ aan de kromme $y = f(x)$ wordt gegeven door $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ en die van de normaal door $y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$.

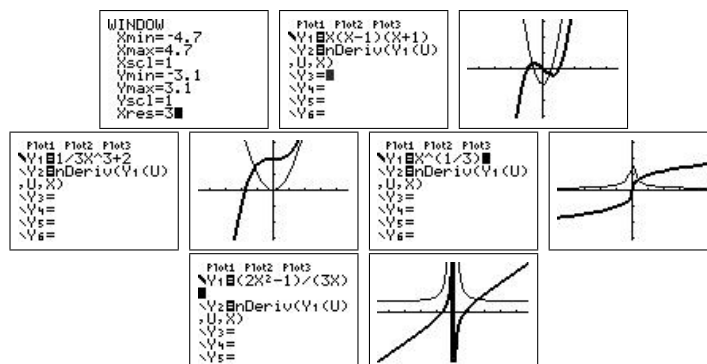


Dat men [zdecimal] moet gebruiken om de loodrechte stand te tonen, is een gevolg van het feit dat de schaalverdeling op beide assen anders niet noodzakelijk gelijk is. Men heeft meestal een orthogonaal assenstelsel, maar wanneer men [zdecimal] gebruikt bekomt men een orthonormaal assenstelsel.

Opdracht 7. Toepassing van afgeleiden

Gebruik de TI-84+ om de grafiek te maken van een functie en van haar afgeleide functie. Toon hiermee dat extrema overeenkomen met nulpunten van oneven graad van de afgeleide functie, dat een buigpunt overeenstemt met een verandering is stijgen en dalen van de afgeleide functie en dat een schuine asymptoot overeenkomt met een horizontale asymptoot voor de afgeleide functie.

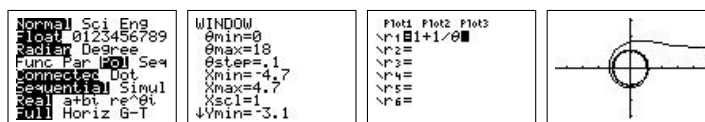
Oplossing 7. De afgeleide functie wordt numeriek bepaald door nderiv. Gezien dit een tamelijk rekenintensieve functie is wordt aangeraden om via [window] xres=3 te zetten (er zal dan maar één pixel op drie uitgerekend worden).



Opdracht 8. Poolcoördinaten / Asymptoten

Gebruik de **TI-84+** om de grafiek van de kromme $r(\theta) = 1 + \frac{1}{\theta}$, $\theta \in]0, +\infty[$ (in poolcoördinaten) te maken. Bespreek het asymptotisch gedrag en tracht dit wiskundig na te gaan.

Oplossing 8. We maken eerst de grafiek met de **TI-84+**. Eerst stellen we poolcoördinaten in via `[mode][pol]` en kiezen `[zoom][zdecimal]`. We passen met `[window]` de grenzen van θ aan. We kunnen nu de grafiek maken.



Leerlingen zullen waarschijnlijk wel een horizontale asymptoot $y = 1$ herkennen voor $x \rightarrow +\infty$. Verder is er ook een ‘asymptotische cirkel’ die zichtbaar wordt tijdens het tekenen.

Bevestiging van de horizontale asymptoot kan men krijgen door volgende limieten uit te rekenen.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} x = \lim_{\theta \rightarrow 0} r \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \cos \theta = +\infty$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} y = \lim_{\theta \rightarrow 0} r \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \sin \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta + \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

De ‘asymptotische cirkel’ volgt uit het feit dat het punt (r, θ) in poolcoördinaten om de oorsprong blijft draaien indien $\theta \rightarrow +\infty$ en dat

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} r = \lim_{\theta \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\theta} = 1$$

Zo zie je maar dat asymptotisch gedrag niet rechtlijnig hoeft te zijn. Een ander voorbeeld is de functie met voorschrift $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ dat een asymptotisch parabolisch gedrag heeft.

3 De gebruikte algoritmen en de problemen die daaruit volgen.

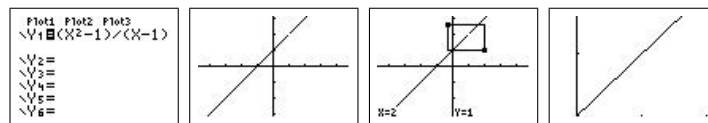
3.1 Hoe maakt de TI-84+ een grafiek?

Opdracht 9. Limieten en continuïteit

Maak de grafiek van de functie met voorschrift $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$. Bespreek de continuïteit en de nodige limieten. Gebruik nu de **TI-84+** om de grafiek te

maken (kies `zoom`[`zdecimal`]!). Wat merk je? Gebruik nu `zoom`[`zbox`] om in te zoomen rondom de discontinuïteit. Probeer dit enkele malen. Wat merk je nu? Verklaar de fout die de **TI-84+** maakt.

Oplossing 9. De eerste maal dat je de grafiek maakt met `zoom`[`zdecimal`] verschijnt de grafiek correct, met een discontinuïteit in 1. Na het inzoomen kan het echter wel zijn dat deze discontinuïteit verdwijnt – dit hoeft echter niet altijd te gebeuren.



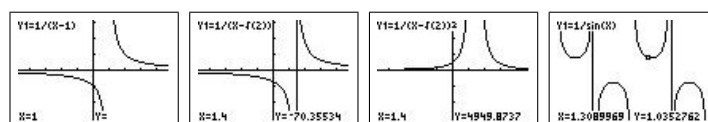
Verklaring 9. Dit komt omdat de **TI-84+** een grafiek maakt door 95 punten gelijkmatig uit het interval `[xmin,xmax]` te kiezen, dit komt overeen met het aantal pixels dat het grafische scherm in de x -richting benut (1 extra pixel wordt gebruikt om te tonen dat een berekening bezig is). In deze punten wordt het beeld berekend en deze beelden worden verbonden met een lijnstuk. In ons voorbeeld zal met de standaardwaarden uit `[zdecimal]` ook het punt 1 gekozen worden, waarvoor er geen beeld bestaat en dus zal de **TI-84+** de lijn niet doortrekken. Als men echter inzoomt kan het zijn dat 1 niet wordt gekozen om de grafiek te tekenen maar bijvoorbeeld wel 0.98 en 1.02 In deze punten bestaat het beeld wel en dus trekt de **TI-84+** er een lijnstuk door. Gevolg: de discontinuïteit wordt onzichtbaar.

Opdracht 10. *Verticale asymptoten*

Opmerking: Deze opdracht hangt sterk af van het gebruikte machine (zie verklaring).

Maak achtereenvolgens de grafieken van de functies met voorschriften $f_1(x) = \frac{1}{x-1}$, $f_2(x) = \frac{1}{x-\sqrt{2}}$ en $f_3(x) = \frac{1}{(x-\sqrt{2})^2}$, gebruik `[zdecimal]`. Bekijk de verticale asymptoten, worden ze getekend of niet? Tracht een verklaring te bedenken. Gebruik `2nd`[`trace`] om functiewaarden na te gaan. Ga je verklaring na door de functie $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ te tekenen. Gebruik `[ztrig]` en doe de assen weg met `2nd`[`format`][`axesoff`].

Oplossing 10. Afhangend van de gekozen functie lijkt het dat er soms een verticale asymptoot wordt getekend en soms niet.



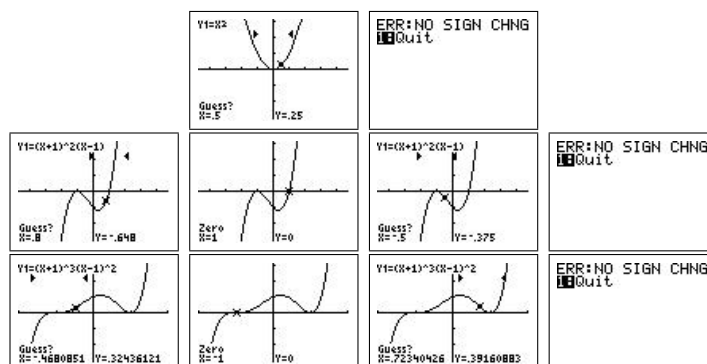
Verklaring 10. We hebben te maken met een analoog probleem als bij de vorige opdracht. Omdat `mode` `[connect]` aan staat zal de **TI-84+** tussen elke twee punten die het berekent om een grafiek te maken een lijnstuk trekken. Wanneer een functie in een punt een verticale asymptoot heeft en van teken verandert zal de **TI-84+** de twee punten die het aan weerskanten heeft berekent, verbinden met een lijnstuk. Het lijkt dus alsof de asymptoot getekend wordt. Eén uitzondering is wanneer het punt waardoor de asymptoot gaat gekozen werd om de grafiek te maken, dit punt heeft immers geen beeld dus kan er ook geen lijnstuk door getrokken worden. Bovendien zijn de modernere machines (sommige **TI-84+**) uitgerust met een extra algoritme dat tussen twee opeenvolgende uitgerekende beelden nagaat of het lijnstuk niet *te* stijl is, indien wel, dan wordt de lijn niet doorgetrokken. Het kan dus zijn dat bij de bovenstaande opdracht u nooit enige ‘asymptoot’ ziet. Zet dan maar de parameter `[window]` `[xres]` op 2 (of 3) en probeer opnieuw – er worden dan maar voor één op twee van de 95 gekozen punten de beelden berekend, zodat de verbindingslijnstukken minder stijl worden en het extra algoritme niet meer werkt.

3.2 Nulpunten bepalen.

Opdracht 11. *Nulpunten benaderen / continuïteit*

Soms slaat de **TI-84+** reeds tilt bij de meest eenvoudige oefening! Probeer maar eens het nulpunt te zoeken van $f(x) = x^2$. Gebruik de **TI-84+** om de nulpunten te zoeken van $(x + 1)^2(x - 1)$ en van $(x + 1)^3(x - 1)^2$. Welke nulpunten kan de **TI-84+** wel vinden? Wat is het verband met de foutmelding?

Oplossing 11. Bij het zoeken naar een nulpunt waarbij het teken niet verandert (d.w.z. een nulpunt van even graad voor een veeltembreuk) geeft de **TI-84+** de foutmelding `[no sign change]`.



Verklaring 11. Welk algoritme de **TI-84+** juist gebruikt om een nulpunt te bepalen is moeilijk te achterhalen gezien *Texas Instruments* deze informatie niet in de handleiding of op hun website zet. Maar het gebruikte algoritme leunt sterk aan bij de dichotomie methode of de regula falsi methode. Deze methoden kunnen gemakkelijk besproken worden met de leerlingen. Volgende stelling wordt behandeld.

Stelling 3. (*Bolzano*)

Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a , linkscontinu in b . Indien $f(a) < f(b)$ (resp. $f(b) < f(a)$) dan bestaat er voor elke $c \in [f(a), f(b)]$ (resp. $c \in [f(b), f(a)]$) een $x \in [a, b]$ zodat $c = f(x)$.

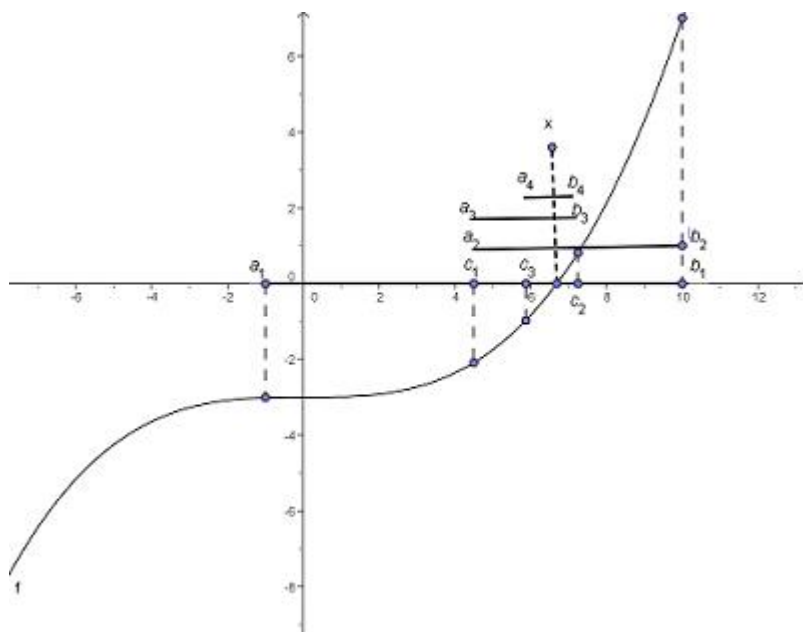
Een uiterst nuttige stelling die onmiddellijk uit de vorige volgt is de volgende.

Stelling 4. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a, b[$ en rechtscontinu in a , linkscontinu in b . Indien $f(a)$ en $f(b)$ een verschillend teken hebben, dan bezit f een nulpunt in $[a, b]$.

Het nut van deze stelling ligt vooral in haar vele toepassingen. Leerlingen kunnen hiermee gemakkelijk tonen dat elke derdegraadsveelterm (of veelterm van oneven graad) altijd minstens één nulpunt heeft, gewoon door twee waarden uit te rekenen.

Een andere toepassing is het numeriek benaderen van nulpunten door deze stelling iteratief toe te passen. Zij $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ een functie, continu op het interval $]a_1, b_1[$ en rechtscontinu in a_1 , linkscontinu in b_1 . Stel dat $f(a_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben. De functie heeft een nulpunt x in $[a_1, b_1]$. Bepaal nu het midden $c_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$. Als $f(c_1) = 0$ hebben we het nulpunt gevonden. Indien $f(c_1)$ en $f(a_1)$ een verschillend teken hebben dan stellen we $a_2 = a_1$ en $b_2 = c_1$ en anders, als $f(c_1)$ en $f(b_1)$ een verschillend teken hebben, kiezen we $a_2 = c_1$ en $b_2 = b_1$ (zie figuur). De functie heeft nu een nulpunt $x \in [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. We bereken opnieuw het midden $c_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ en herhalen de procedure. Aldus bekomen we een rij intervallen die steeds het nulpunt x beter benaderen:

$$x \in \dots \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$$



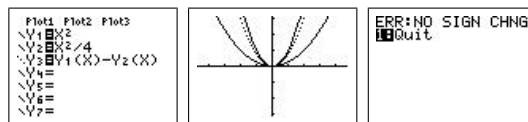
Deze methode om nulpunten te benaderen (soms ook dichotomie of bisectiemethode genoemd) werkt enkel onder voorwaarde dat f van teken verandert in het nulpunt. De foutmelding [no sign change] duidt aan dat deze methode (of een analoge methode zoals de regula falsi) wordt gebruikt, en wegens gebrek aan een tekenverandering in het nulpunt, geen benadering kan geven. De bisectiemethode kan bovendien op eenvoudige manier geprogrammeerd worden door de leerlingen (zie opdracht 14).

Opdracht 12. Extrema en snijpunten

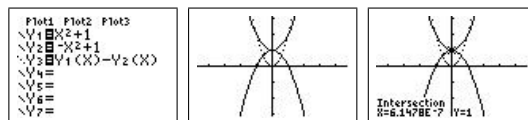
Je weet nu hoe de **TI-84+** nulpunten benadert (zie verklaring 11). Denk na op welke manier er nu ook minima, maxima en snijpunten van krommen (zie **2nd**[calc]) kunnen bepaald worden. Laat zien dat minima en maxima altijd gevonden zullen worden. Geef een voorbeeld van twee krommen waarvan de **TI-84+** geen snijpunt kan bepalen. Bespreek het voorbeeld $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = -x^2 + 1$, kan de **TI-84+** hiervan het snijpunt vinden?

Oplossing 12. We weten dat een functie f een extremum heeft in x wanneer $f'(x) = 0$ en f' van teken verandert, dit wordt dus herleid tot het vinden van een nulpunt waarin het teken veranderd. De voorwaarden voor de bisectiemethode zijn dus voldaan: een extrema zal gevonden worden.

Wat het bepalen van een snijpunt betreft: de vergelijking $f(x) = g(x)$ herleidt zich tot $f(x) - g(x) = 0$. Dus kan er misschien weer een nulpunt gevonden worden. Dit lukt echter niet altijd. Neem bijvoorbeeld $f \geq g$, dwz. dat $f - g \geq 0$ en dat er dus geen tekenverandering is.

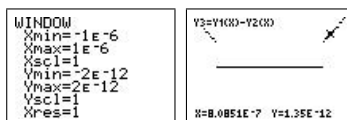


Je verwacht dus dat in het voorbeeld $f(x) = x^2 + 1$ en $g(x) = -x^2 + 1$ er geen snijpunt zal gevonden worden. Nochtans:



Verklaring 12. We weten dat een functie f een extremum heeft in x wanneer $f'(x) = 0$ en f van teken verandert. De **TI-84+** kan wel een nulpunt vinden maar geen afgeleide functie bepalen! Wanneer je echter het algoritme beschreven in verklaring 11 bekijkt moeten er slechts in enkele punten het afgeleid getal bepaald worden, dit kan de **TI-84+** benaderen door een passend differentiequotient $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ met behulp van [nderiv].

We merken eerst op dat het gebruikte algoritme om snijpunten te bepalen (lichtjes) anders moet zijn dan die om nulpunten, maxima of minima te bepalen. Dit merken we aan het feit dat we deze keer geen grenzen moeten meegeven. Ten tweede wordt in ons voorbeeld wel het snijpunt $(6.147 \cdot 10^{-7}, 1)$ gegeven, maar dit is niet het exacte snijpunt $(0, 1)$. Er is duidelijk een afronding gebeurd. Als we de grafiek maken van $f - g$ op een veel kleiner interval, zien we duidelijk het effect van de afrondingen.



4 Leer je leerlingen hoe de TI-84+ werkt.

4.1 In TIBasic programmeren is eenvoudig.

In deze paragraaf zullen we enkele bekende algoritmen implementeren voor de **TI-84+**. Dit vereist slechts een klein beetje programmeerwerk. Bovendien zijn een aantal van deze programma's reeds voorgeprogrammeerd in de gebruiksfuncties van de **TI-84+**. Als leerlingen dus zelf eens deze programma's behandelen tijdens de lessen, krijgen ze inzicht in hoe een grafisch rekenmachine de dingen, die gevraagd worden, berekent. Bovendien is tegenwoordig de belangrijkste toepassing van de wiskunde de informatica, in ruime zin. Van grafisch rekenmachine tot statistische computerprogramma's, via

gsm's, mp3-spelers, gameboy's en play stations, computer games en internet-toepassingen, in bijna elke moderne technologie zit meer dan 50% wiskunde. Zonder wiskunde geen moderne technologie!

De programmeertaal die in de **TI-84+** zit is TIBasic. Dit is een dialect van BASIC, een programmeertaal waarmee Bill Gates (Microsoft) zijn faam heeft verworven. BASIC (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code) werd ontworpen om ook de leek in staat te stellen om kleine programma's te schrijven. Het TIBasic-dialect is trouw aan deze filosofie: er is geen enkele programmeer-ervaring nodig om programma's te schrijven voor de **TI-84+**. Enkel een beetje doorzettingsvermogen en zelfvertrouwen is nodig.

Om een programma te schrijven ga je naar `[prgm]`. Je kunt hier kiezen om een programma uit te voeren (`[exec]`), te veranderen (`[edit]`) of om een nieuw programma te schrijven (`[new]`). Indien je de laatste keuze maakt wordt er naar een naam gevraagd. Nadien kom je op de editor uit, waar je je programma kan invoeren. De commando's die met het programmeren te maken hebben zitten nu onder `[prgm]`. We geven hier een kort overzicht van de nuttigste programmeerfuncties.

<code>[ctl]</code>	
<code>[if]</code>	Eerste vorm: <code>:if voorwaarde : commando</code>
<code>[then]</code>	Tweede vorm: uitgebreide if structuur:
<code>[else]</code>	<code>:if voorwaarde</code> <code>:then</code> <code>: commando's</code> <code>:else</code> <code>: commando's</code> <code>:end</code>
<code>[for]</code>	om lussen te maken <code>:for(var, beginwaarde, eindwaarde [, stapgrootte])</code> <code>: commando's</code> <code>:end</code>
<code>[end]</code>	om bovenstaande blokken te eindigen
<code>[i/o]</code>	
<code>[disp]</code>	om een waarde/string op het scherm te printen
<code>[prompt]</code>	om de waarde van een variabele te vragen aan de gebruiker
<code>[input]</code>	om een text op het scherm te tonen en een waarde te vragen aan de gebruiker, deze kan ook een functie zijn. <code>:input "text", variabele (bijv. y_1)</code>

Nu we de nodige commando's kennen kunnen we een zeer eenvoudig voorbeeld behandelen, dat inzicht geeft over hoe de **TI-84+** grafieken maakt (zie o.a. verklaring 9).

Opdracht 13. Gebruik een `for`-lus om een programma te schrijven dat de grafiek van een functie (bijvoorbeeld de sinusfunctie) maakt dmv. het volgend algoritme.

```

voor x gaande van -6 tot 6 met een stap van 0.1
bereken y=sin(x)
teken het punt (x,y)
sluit de lus

```

Gebruik de grafische commando's `2nd`[draw] [clrdraw] (om een leeg scherm te krijgen) en `2nd`[draw] [point] [pt-on] om een punt te tekenen. Vergeet niet van via `y=` alle functies weg te halen en om met `window` de grenzen aan te passen!

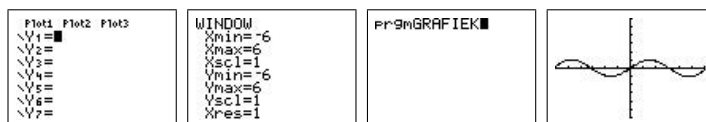
Oplossing 13. Het programma telt exact vijf regels:

```

PROGRAM:GRAFIEK
:ClrDraw
:For(X,-6,6,.1)
:  sin(X)→Y
:  Pt-On(X,Y)
:End

```

Het resultaat is hetzelfde als hetgeen we zouden verkrijgen door de ingebouwde functies te gebruiken.



4.2 Nulpunten bepalen.

Opdracht 14. *Nulpunten benaderen - dichotomie methode*

Lees verklaring 11 en schrijf het corresponderende programma.

Oplossing 14. Voor een bespreking van het algoritme verwijzen we naar verklaring 11. Het programma dat we geven gaat ervan uit dat de functie in y_1 zit. Er wordt gevraagd naar het interval $[a, b]$ waarin een nulpunt zit en waarbij $y_1(a)$ en $y_1(b)$ een verschillend teken hebben. Bovendien wordt ook het aantal iteraties n gevraagd. In het programma moeten we ondermeer nagaan of $y_1(a)$ en $y_1(c)$ een verschillend teken hebben, dit kan het gemakkelijkst door de voorwaarde $y_1(a) \cdot y_1(c) \leq 0$ na te gaan. Afhangend hiervan passen we de grenzen van het interval waarin het nulpunt zit aan.

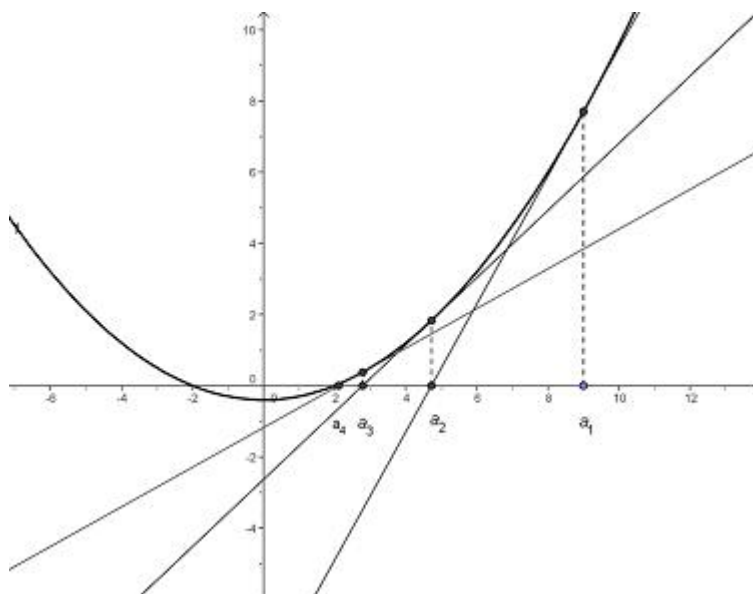
<pre> PROGRAM:DICHO :Disp "FTIE V1" :Promp{ A,B,N :For(K,1,N) :(R+B)/2>C :If V1<R)*V1<C)<= 0 :Then </pre>	<pre> PROGRAM:DICHO :C+6 :Else :C+R :End :End :Disp "NULPUNT T USSEN",R,"EN",B </pre>
---	---

Indien de voorwaarden voldaan zijn (en we gaan er vanuit dat dit zo is, om het programma zo eenvoudig mogelijk te houden) zal het programma een betere benadering geven (kleiner interval) dan het interval waarvan men vertrekt. Indien de voorwaarden niet voldaan zijn, zal een foute benadering gegeven worden. Door enkele extra regels toe te voegen kan men het foutief antwoord vervangen door een passende foutmelding, zoals de **TI-84+** dat doet. We werken een aantal voorbeelden uit, waarbij we $\sqrt{2}$ en de gulden snede benaderen. Het laatste voorbeeld toont wat er gebeurt indien de voorwaarden niet voldaan zijn, merk op dat het nulpunt vinden met het ingebouwde commando $\boxed{2\text{nd}}[\text{calc}][\text{zero}]$ ook geen resultaat opleverd. Dit komt doordat de **TI-84+** een analoog algoritme gebruikt.

<pre> Plot1 Plot2 Plot3 \Y1 X^2-2 \Y2 = \Y3 = \Y4 = \Y5 = \Y6 = \Y7 = </pre>	<pre> PRGM:DICHO FTIE V1 A=?0 B=?3 N=?20 </pre>	<pre> NULPUNT TUSSEN EN 1.414212227 1.414215088 Done √(2) 1.414213562 </pre>
<pre> Plot1 Plot2 Plot3 \Y1 X^2-X-1 \Y2 = \Y3 = \Y4 = \Y5 = \Y6 = \Y7 = </pre>	<pre> PRGM:DICHO FTIE V1 A=?0 B=?3 N=?20 </pre>	<pre> NULPUNT TUSSEN EN 1.618031502 1.618034363 Done (1+√(5))/2 1.618033989 </pre>
<pre> Plot1 Plot2 Plot3 \Y1 X^2 \Y2 = \Y3 = \Y4 = \Y5 = \Y6 = \Y7 = </pre>	<pre> PRGM:DICHO FTIE V1 A=?-3 B=?2 N=?10 </pre>	<pre> B=?2 N=?10 NULPUNT TUSSEN EN 1.995117188 2 Done </pre>

Opdracht 15. *Nulpunten benaderen - Newton-Raphson*

Een andere manier om nulpunten te benaderen maakt gebruik van de raaklijn. Als a_1 een benadering is van een nulpunt van $y = f(x)$, dan kunnen we de raaklijn in a_1 bepalen: $y = f'(a_1)(x - a_1) + f(a_1)$. Het snijpunt van deze rechte met de x -as is dan de oplossing van $f'(a_1)x - f'(a_1)a_1 + f(a_1) = 0$. We noemen dit punt a_2 , dus $a_2 = a_1 - \frac{f(a_1)}{f'(a_1)}$. Door iteratie van dit proces bekomen we een rij a_1, a_2, a_3, \dots die het nulpunt van f in vele gevallen steeds beter zal benaderen.



Schrijf een programma die dit doet. Zoek als voorbeelden het nulpunt van $f(x) = x^2 - 3$ en van $g(x) = x^2$. Gebruik ook de ingebouwde functies van de TI-84+ . Wat merk je?

Oplossing 15. Het programma is zeer eenvoudig en telt slechts zes regels.

```
PROGRAM:NEWTONRA
:Disp "FTIE Y1"
:Prompt A,N
:For(K,1,N)
:A-V1(A)/nDeriv(
V1(X),A)→A
:Disp A
:End
```

De nulpunten van de functies $f(x) = x^2 - 3$ en $g(x) = x^2$ kunnen hiermee benadert worden.

<pre>Plot1 Plot2 Plot3 V1 X^2-3 V2 = V3 = V4 = V5 = V6 = V7 =</pre>	<pre>PRGM:NEWTONRA FTIE Y1 A=?2 N=?4</pre>	<pre>1.75 1.732142857 1.73205081 1.732050808 Done f(3) 1.732050808</pre>
<pre>Plot1 Plot2 Plot3 V1 X^2 V2 = V3 = V4 = V5 = V6 = V7 =</pre>	<pre>PRGM:NEWTONRA FTIE Y1 A=?1 N=?20</pre>	<pre>3.051757813E-5 1.525878906E-5 7.629394531E-6 3.514697266E-6 1.907346633E-6 9.536743164E-7 Done</pre>

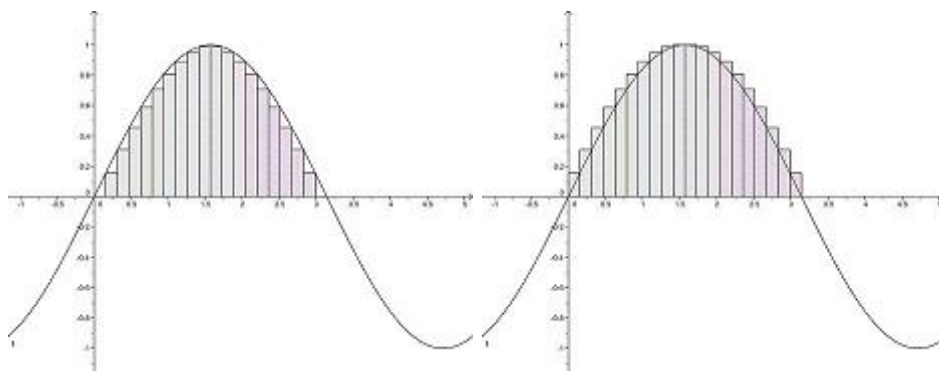
Het nulpunt van $g(x) = x^2$ wordt benadert, dit is een beter resultaat dan wat de TI-84+ met de ingebouwde functies kan doen (zie ook opdracht 11).

<pre>Y1=X2 Guess? N=5 Y=.25</pre>	<pre>ERR:NO SIGN CHNG Quit</pre>
-----------------------------------	----------------------------------

4.3 Numerieke integratie.

Opdracht 16. De Riemann integraal: boven- en ondersom

Een bepaalde integraal kan men benaderen door een ondersom of door een bovensom. De echte waarde ligt ertussen (zie figuur).



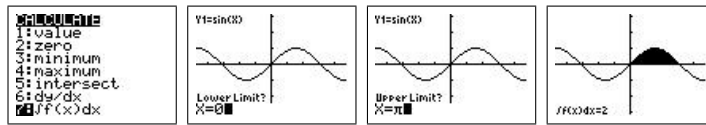
Schrijf een kort programma om elk van de benaderingen uit te rekenen. En behandel als voorbeeld $\int_0^\pi \sin x \, dx$.

Oplossing 16. We zullen er van uitgaan dat de functie in de variable Y1 zit. De grenzen van de bepaalde integraal zijn A en B. We verdelen het interval in n gelijke delen. Gezien we functiewaarden enkel berekend worden in de steunpunten x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , gebruiken we het minimum van opeenvolgende beelden voor de ondersom en het maximum voor de bovensom. Indien de onderverdeling fijn genoeg is zal te werkelijke waarde van de bepaalde integraal tussen beide benaderingen zitten.

<pre>PROGRAM:ONDERSOM :Disp "FTIE Y1" :Prompt A,B,N :(B-A)/N→H :θ→S :For(K,θ,N-1) :A+K*H→X</pre>	<pre>PROGRAM:ONDERSOM :S+min(Y1(X),Y1(X+H))*H→S :End :Disp S</pre>
<pre>PROGRAM:BOVENSOM :Disp "FTIE Y1" :Prompt A,B,N :(B-A)/N→H :θ→S :For(K,θ,N-1) :A+K*H→X</pre>	<pre>PROGRAM:BOVENSOM :S+max(Y1(X),Y1(X+H))*H→S :End :Disp S</pre>

Toepassing van beide programma's en vergelijking met de resultaten van de ingebouwde functies levert relatief goede resultaten.

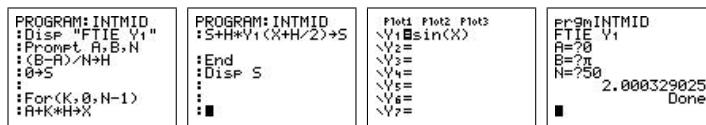
<pre>Plot1 Plot2 Plot3 Y1=ln(X)</pre>	<pre>PrgrONDERSOM FTIE Y1 A=0 B=π N=250 1.93651013 Done</pre>	<pre>PrgrBOVENSOM FTIE Y1 A=0 B=π N=250 2.062173836 Done</pre>	<pre>fnInt(Y1(X),X,0,π) 2</pre>
---------------------------------------	---	--	---------------------------------



Opdracht 17. Numerieke integratie: midpuntsregel

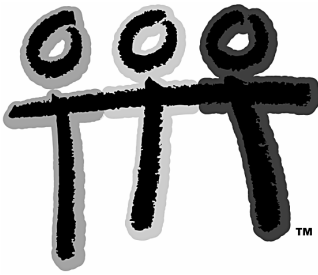
Om de bepaalde integraal $\int_a^b f(x) dx$ te benaderen kun je het interval $[a, b]$ verdelen in n gelijke delen, elk met een lengte h , dit geeft de punten $x_k = a + kh$, $k = 0, 1 \dots n - 1$. Meetkundig kun je de oppervlakte onder $y = f(x)$ onderverdelen in rechthoeken door x_k en x_{k+1} en met hoogte $f(x_k + \frac{h}{2})$. Je bekomt dan als benadering $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} hf(x_k + \frac{h}{2})$. Maak een tekening, en schrijf het programma `intmid` dat deze benadering gebruikt. Benader $\int_0^\pi \sin x dx$. Vergelijk en toon dat je in dit geval betere resultaten bekomt dan met een onder- of bovensom benadering.

Oplossing 17. Het programma `intmid` is opnieuw relatief kort en snel geschreven. We zullen dezelfde variabelen gebruiken als in de vorige opdracht.



Index

[2nd], 2
[DMS], 2
[angle], 2
[axesoff], 9
[calc], 2, 3, 5, 12, 16
[clrdraw], 15
[connect], 10
[ctl], 14
[disp], 14
[draw], 15
[dy/dx], 3
[edit], 14
[else], 14
[end], 14
[exec], 14
[fmax], 2, 3
[fmin], 3
[fnint], 3
[for], 14
[format], 9
[function...], 3
[graph], 2
[i/o], 14
[if], 14
[input], 14
[intersect], 3
[math], 2, 3, 6
[maximum], 3
[minimum], 3
[mode], 8, 10
[nderiv], 3, 6, 13
[new], 14
[no sign change], 10, 12
[point], 15
[pol], 8
[prgm], 14
[prompt], 14
[pt-on], 15
[then], 14
[trace], 9
[value], 3, 5
[vars], 3
[window], 5, 7, 8, 10, 15
[xres], 10
[y-vars], 3
[y=], 2, 3, 15
[zbox], 9
[zdecimal], 2, 7–9
[zero], 16
[zoom], 2, 5, 8, 9
[zstandard], 7
[ztrig], 5, 9



De eerste stappen in programmeerland met de TI-83/84 Plus

Dominiek Ramboer

```
PROGRAM:VIERKT
:ClrHome
:Prompt A,B,C
:B^2-4*A*C→D
:If D≥0
:Then
:Disp "X1=",(-B-
√(D))/(2*A),"X2=
```

```
PROGRAM:VIERKT
:Then
:Disp "X1=",(-B-
√(D))/(2*A),"X2=
",(-B+√(D))/(2*A
)
:End
:Stop
```


Programmeren met de TI84

Dominiek Ramboer
VTI Oostende

De programmeertaal die gebruikt wordt om de rekenmachine te programmeren lijkt goed op de programmeertaal BASIC. Daarom heet ze ook TI-BASIC.

Een programma bestaat uit verschillende opdrachten of instructies. Naast de typische programmeerinstrucies voor controle van de uitvoering en de in- en uitvoer mogen ook bijna alle andere opdrachten van de rekenmachine binnen een programma gebruikt worden.

<pre>1: I/O EXEC 1: If 2: Then 3: Else 4: For(5: While 6: Repeat 7: End</pre>	<pre>1: I/O EXEC 8: Pause 9: Lbl 0: Goto A: IS>(B: DS<(C: Menu(D: Prgm</pre>	<pre>1: I/O EXEC D: Prgm E: Return F: Stop G: DelVar H: GraphStyle(I: OpenLib(J: ExecLib</pre>
<pre>CTL EXEC 1: Input 2: Prompt 3: Disp 4: DispGraph 5: DispTable 6: Output(7: getKey</pre>	<pre>CTL EXEC 6: Output(7: getKey 8: ClrHome 9: ClrTable 0: GetCalc(A: Get(B: Send(</pre>	

In deze inleiding op het programmeren is het niet de bedoeling om alle instructies te overlopen maar enkele mogelijkheden te illustreren. Dit doen we aan de hand van een concreet probleem: de oplossingen bepalen van een tweedegraadsvergelijking.

Het invoeren van een programma kan rechtstreeks op de rekenmachine gebeuren maar ook op de computer aan de hand van het programma TI-GRAPHLINK 83 PLUS. Achteraf kan het geschreven programma dan overgezet worden naar de rekenmachine via TI-CONNECT. Beide programma's kunnen gedownload worden van de website van Texas Instruments: education.ti.com. Dit laatste biedt enkele voordelen. Het programma staat op de computer. Er is dus onmiddellijk een backup van gemaakt. Het is ook wat overzichtelijker werken. Je kan het programma een zeker beveiliging meegeven waardoor het niet veranderd kan worden. Iemand kan geen wijzigingen aan het programma aanbrengen via het rekentoestel want het programma wordt niet opgenomen in het edit-menu.

Wanneer een programma via de computer gemaakt wordt, is het aan te raden te werken met de instructies die voorzien zijn in verschillende menu's van GRAPHLINK. Zelf intikken van de instructies geeft soms conflicten. Er kunnen ook conflicten ontstaan door het verschil in taal tussen GRAPHLINK en de rekenmachine.

Een paar algemeenheden dienen in acht genomen te worden:

- Een algemene regel bij het programmeren is om één instructie per regel te schrijven. Wil je toch een tweede instructie op dezelfde regel plaatsen dan moet hij van de eerste instructie gescheiden worden door een dubbele punt.

- Plaats nooit spaties voor instructies.
- Bij grotere, langere programma's is het aan te raden eerst het ontwerp van het programma op papier te maken en daar een bepaalde structuur aan te brengen wat de leesbaarheid verhoogt. Na het intikken van het programma is die structuur niet meer zo duidelijk te zien en moeilijker te achterhalen.
- Ieder programma bestaat uit drie grote delen:
 - de invoer: dit zijn de zaken die nodig zijn om de verwerking te kunnen starten, de begingegevens,
 - de verwerking: hierin wordt de invoer zo gemanipuleerd dat de gewenste resultaten verkregen worden,
 - de uitvoer: de bekomen resultaten moeten onder een bepaalde vorm aan de buitenwereld kenbaar gemaakt worden.

1 Een eerste programmaatje

Probleem:

Gegeven de coëfficiënten van een tweedegraadsvergelijking. Bereken de oplossingen van de vergelijking.

Oplossing:

Invoer: de coëfficiënten a, b en c.

$$\text{Verwerking: } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Uitvoer: de oplossingen x_1 en x_2 .

Codering:

<pre>PROGRAM:VIERK :ClrHome :Prompt A,B,C :Disp "X1=",(-B- √(B^2-4*A*C))/(2 *A),"X2=",(-B+√(B^2-4*A*C))/(2*A)</pre>	<pre>PROGRAM:VIERK :Prompt A,B,C :Disp "X1=",(-B- √(B^2-4*A*C))/(2 *A),"X2=",(-B+√(B^2-4*A*C))/(2*A):Stop</pre>
---	---

Om een nieuw programma op de rekenmachine te maken, gaan we als volgt tewerk:

- We drukken op de toets PRGM.
- In het programmavenster selecteren we NEW en drukken op ENTER.
- Ze voeren de naam van het programma in. De Alpha-mode is al geactiveerd. Wanneer de naam ingevuld is drukken we op ENTER. De naam van een programma begint met een letter of θ en kan maximaal uit 8 karakters bestaan. De volgende tekens mogen letters, cijfers of θ zijn.
- We kunnen de invoer beëindigen door QUIT in te drukken.

Drukken we nu weer op PRGM dan verschijnt het programmaatje in de lijst van de uitvoerbare programma's. Selecteer nu het programma en druk op ENTER. Het programma wordt nu uitgevoerd.

EXEC EDIT NEW	EXEC EDIT Create New	PROGRAM Name=	PROGRAM:VIERK :
EXEC EDIT NEW VIERK	PrgrmVIERK	A=?	A=?1 B=?5 C=?4

```

B=?5
C=?4
X1=
X2=
-4
-1
Done

```

Het programmaatje kan nog wel op een aantal punten verbeterd worden niettegenstaande het blijkaar zijn werk doet.

- Er kan meer uitleg voorzien worden bij de invoer.
- De uitvoer kan ook mooier gemaakt worden door de uitdrukkingen en de getallen dichter bij elkaar te plaatsen.
- Er is geen inbreng van waar op het scherm de invoer en de uitvoer moet komen.
- Hier is de uitvoer en de verwerking in één enkele instructie gebeurt. Het is handiger die te scheiden van elkaar.
- Er wordt niet gecontroleerd of er wel oplossingen zijn. Indien er geen oplossingen zijn, wordt het programma afgesloten door een foutboodschap.

```

ERR:NONREAL ANS
1:Quit
2:Goto

```

- Het programma wordt slechts éénmaal uitgevoerd. Wil je het nog eens uitvoeren moet je de handelingen herhalen. Er zou binnen het programma kunnen gevraagd worden om te herhalen.

2 Structuur van een programma

We hebben reeds gezegd dat een programma bestaat uit invoer, verwerking en uitvoer. Dit onderscheid kan helpen om een zekere structuur aan te brengen. Maar dit kan nog beter.

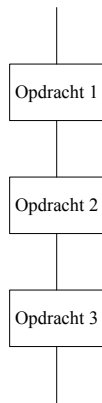
Elk programma kan geschreven, opgebouwd worden door gebruik te maken van drie basisstructuren:

- een sequentie: een opeenvolging van opdrachten,

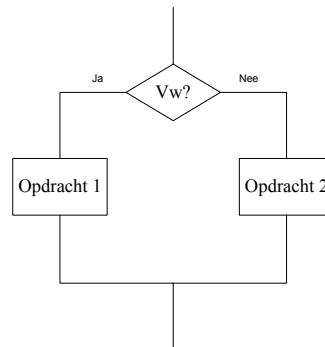
- een selectie: een keuze tussen opdrachten,
- een iteratie: een herhaling van opdrachten.

Schematisch:

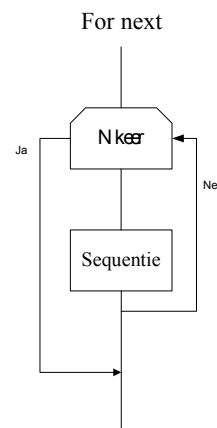
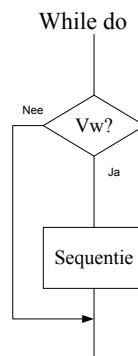
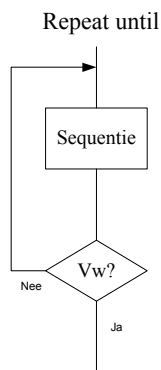
Selectie:



Selectie:



Iteratie



Ook deze basisstructuren kunnen we verzorgen met TI-BASIC.

Het eerste programmaatje VIERK is een voorbeeld van een sequentie. Daarvoor zijn geen speciale instructies nodig. We schrijven gewoon de ene opdracht na de andere.

Bij een selectie hebben we een aantal mogelijkheden:

```

:IF voorwaarde
:opdracht (waar)
:opdracht
  
```

```

:IF voorwaarde
:THEN
:opdracht (waar)
:opdracht (waar)
:END
:opdracht
  
```

```

:IF voorwaarde
:THEN
:opdracht (waar)
:opdracht (waar)
:ELSE
:opdracht (vals)
:opdracht (vals)
:END
:opdracht
  
```

Bij een iteratie voorziet TI-BASIC in een drietal mogelijkheden:

- een gekend aantal herhalingen:
 :FOR(variabele,begin,eind,[stapgrootte])
 :opdracht
 :opdracht
 :END
 :opdracht
- een onbekend aantal herhalingen met een voorwaarde bij het begin van de herhaling:
 :WHILE voorwaarde
 :opdracht
 :opdracht
 :END
 :opdracht
- een onbekend aantal herhalingen met een voorwaarde op het einde van de herhaling:
 :REPEAT voorwaarde
 :opdracht
 :opdracht
 :END
 :opdracht

Laten we deze structuren toepassen om het programmaatje VIERKT te verbeteren.

- We willen geen foutboodschap meer wanneer de waarde van de discriminant negatief is.

Dit is te realiseren door de invoering van een selectie. Op die manier kunnen we een onderscheid maken tussen $D \geq 0$ en $D < 0$.

<pre>PROGRAM:VIERKT :ClrHome :Promp A,B,C :B^2-4*A*C>D :If D>=0 :Then :Disp "X1=",(-B- :√(D))/(2*A),"X2= :√(D))/(2*A)" :End :Stop</pre>	<pre>PROGRAM:VIERKT :Then :Disp "X1=",(-B- :√(D))/(2*A),"X2= :",(-B+√(D))/(2*A) :) :End :Stop</pre>
<pre>B=?5 C=?4 X1= -4 X2= -1 Done</pre>	<pre>A=?2 B=?1 C=?6 Done</pre>

- Nog iets verdergaand, willen we de vermelding “GEEN REELE OPLOSSINGEN” zien verschijnen wanneer $D < 0$.

We gebruiken de instructie OUTPUT(om de tekst op het scherm te krijgen

:OUTPUT(rij,kolom,"tekst") of

:OUTPUT(rij,kolom,waarde).

Daarbij is rij een getal tussen 1 en 8 en kolom tussen 1 en 16.


```

Program:VIERKTT
ClrHome
Prompt A,B,C
B2-4AC→D
If D≥0
Then
Disp "X1=", (-B-√(D))/(2A), "X2=", (-B+√(D))/(2A)
Else
ClrHome
Output(3,4,"GEEN REELE")
Output(5,3,"OPLOSSINGEN")
End
Stop

```

het kolomnummer

het rijnummer

<pre> A=?2 B=?1 C=?6■ </pre>	<pre> GEEN REELE OPLOSSINGEN </pre>
------------------------------	---

- We krijgen nog altijd geen complexe oplossingen wanneer de waarde van de discriminant negatief is. Dit willen we met de volgende aanpassing veranderen. *Om dit mogelijk te maken, moeten we de mode van de rekenmachine omschakelen van reëel naar complex met de instructie a+bi. Bij het schrijven of aanpassen van het programma, drukken we op de plaats waar we de mode willen veranderen MODE in en maken de gewenste instellingen.*

Bijvoorbeeld:

 - alle getallen hebben maximaal 4 cijfers na de komma (FIX 4)
 - complexe mode van het type a+bi (a+bi).

```

Program:VIERKTC
ClrHome
Fix 4
Prompt A,B,C
B2-4AC→D
If D≥0
Then
Disp "X1=", (-B-√(D))/(2A), "X2=", (-B+√(D))/(2A)
Else
a+bi
Disp "X1=", (-B-√(D))/(2A), "X2=", (-B+√(D))/(2A)
End
Real
Float
Stop

```

hiermee wordt het aantal decimalen ingesteld

dit zorgt ervoor dat het programma in complexe mode werkt

herstel van de vlottende komma notatie en van de reële mode.

<pre>A=?4 B=?2 C=?3■</pre>	<pre>B=?2 C=?3 X1= -.2500-.8292i X2 -.2500+.8292i Done</pre>
----------------------------	--

Opmerking:

Alle instellingen die gemaakt of veranderd worden binnen een programma blijven geldig wanneer de uitvoering beëindigd is. Vandaar is het een goede gewoonte om op het einde van het programma de instellingen terug te plaatsen in de vroegere toestand.

Oefeningen:

- Schrijf een programma waarbij de straal, de hoogte van een cilinder gevraagd worden en de inhoud en de totale oppervlakte van een cilinder berekend en getoond worden. Noem dit programma CILIND.
- Schrijf een programma waarbij de lengte, de diepte en de hoogte van een balk gevraagd worden en de inhoud en de totale oppervlakte van de balk berekend en getoond worden. Noem dit programma BALK.

Verdere aanpassingen van het programma zullen vooral te maken hebben met de invoer en de uitvoer.

- Bij de vraag naar de coëfficiënten A, B en C van de tweedegraadsvergelijking hadden we graag wat commentaar gekregen van wat de betekenis van de verschillende letters is. Bijvoorbeeld:

A: COEFF X²
 B: COEFF X
 C: ONBEN. COEFF

Dit kan gerealiseerd worden aan de hand van de instructie INPUT.

INPUT[variabele] (er komt enkel een ? op het scherm)

INPUT["tekst",variabele] (er verschijnt tekst ? op het scherm)

Hou er rekening mee dat een regel op het scherm van de rekenmachine slechts uit 16 tekens kan bestaan.

- We willen voorzien in de mogelijkheid om de invoer te herhalen wanneer er een foutieve invoer van 1 of meerdere waarden zou gebeurd zijn.
Dit is te realiseren door een iteratie van een onbekend aantal herhalingen te gebruiken. Daarbij blijkt de REPEAT-UNTIL-lus de meeste elegante mogelijkheid te zijn. We moeten toch zeker één keer de invoer maken en daarna pas controleren of die juist is.

```

Program:VIERKTIC
Fix 4
Repeat W
ClrHome
Input "COEFF X²=",A
Input "COEFF X=",B
Input "ONBEN. COEFF=",C
Disp "INVOER OK"
Input "(Ø=N,1=J)",W
End
B²-4AC→D
If D<Ø
a+bi
ClrHome
Disp "X1=",(-B-√(D))/(2A),"X2=",(-B+√(D))/(2A)
Real
Float
Stop

```

Dit is het repeat-blok

De manier waarop de oplossingen worden berekend en weergegeven is ook hier efficiënter dan in de vorige voorbeelden.

<pre> COEFF X²=2 COEFF X=3 ONBEN. COEFF=1 </pre>	<pre> COEFF X²=2 COEFF X=3 ONBEN. COEFF=1 INVOER OK (Ø=N,1=J) 1 </pre>
<pre> X1= -1.0000 X2= -.5000 Done </pre>	<pre> X1= -.2500-.4330i X2= -.2500+.4330i Done </pre>

3 Combinatie van meerdere programma's

De mogelijkheid bestaat om verschillende programma's op te roepen vanuit eenzelfde overkoepelend programma. De opgeroepen programma's worden dan subroutines of subprogramma's genoemd.

Daarvoor is de instructie MENU(ideaal. Deze brengt een overzicht van de verschillende programma's op het scherm voorzien van een label dat dient om het desbetreffende programma aan te spreken. De schermopbouw is te vergelijken met de menuschermen die aanwezig zijn op de rekenmachine.

De labels kunnen uit 1 of 2 tekens bestaan, gekozen uit de letters A, ..., Z of de cijfers 0, ..., 9 of 0.

De instructie MENU(wordt op de volgende manier gebruikt:

MENU("titel", "tekst1", label1, "tekst2", label2, ...)

Laten we dit illustreren aan de hand van de programma's CILIND en BALK:

- als titel kiezen we RUIMTEFIG
- tekst1: CILINDER met label1 = 1
- tekst2: BALK met label2 = 2

Daarna gebruiken we de instructie LBL om de plaats aan te duiden waarnaar het programma moet springen bij het desbetreffende label.

```
Program:RUIMFIG
ClrHome
Menu("RUIMTEFIG", "CILINDER", 1, "BALK", 2)
Lbl 1
prgmCILIND
Stop
Lbl 2
prgmBALK
Stop
```

De titel van het menu is RUIMTEFIG, als onderdelen hebben we cilinder en balk.

De oproep van een programma

Het gebruik van de instructie Lbl om het programma in verschillende delen op te splitsen. Na zo'n Lbl instructie kan ook gewoon de programmacode gezet worden maar dit is nogal onoverzichtelijk.



4 Nog enkele programmeertips

1. Het is mogelijk om een programma een andere naam te geven. Maak een nieuw programma onder de nieuwe naam. Druk vervolgens op RCL PRGM. Kies uit het menu EXEC het programma (oude naam) dat moet gekopieerd worden.
2. Het kan belangrijk zijn wanneer er gewerkt wordt met geordende reeksen getallen gebruik te maken van lijsten en/of matrices. Gebruik liefst ook niet de lijsten L1 tot en met L6 want deze lijsten kunnen soms gebruikt worden door het systeem. Ook de leesbaarheid verbetert door lijsten een toepasselijke naam te geven.

3. De STOP-instructie mag op het einde van een programma weggelaten worden.
4. Bij het einde van een programma kan gebruik gemaakt worden van de instructie DelVar. Deze instructie zorgt ervoor dat overbodige variabelen, lijsten, matrices, strings, die gebruikt werden in het programma verwijderd worden. Alle variabelen die gebruikt worden binnen het programma blijven echter na afloop van het programma bestaan, waardoor de hoeveelheid vrij geheugen snel verminderd.
5. Maak zo weinig mogelijk gebruik van de GOTO-instructie. Hoe meer GOTO-instructies in een programma gebruikt worden, hoe meer de onleesbaarheid van het programma stijgt.
6. Het vermenigvuldigingsteken en het rechterhaakje kunnen weggelaten worden. Dit zorgt voor een aanzienlijke geheugenbesparing. Soms gaat de leesbaarheid van het programma hierdoor achteruit.
7. Indien door het programma een aantal basisinstellingen moeten worden aangepast, zorg ervoor dat die bij het beëindigen van het programma zoveel mogelijk hersteld worden.
8. Vergeet niet het basisscherm (ClrHome) en het grafisch scherm (ClrDraw) te wissen vooraleer er nieuwe resultaten te laten op verschijnen. Anders kan het wel eens gebeuren dat de nieuwe resultaten over de oude heen of tussen de oude door worden weergegeven.
9. Hou er rekening mee dat alle gebruikte variabelen binnen een programma reeds een waarde kunnen hebben uit eerder gebruikte programma's of gedane berekeningen. Vandaar is het interessant en veilig de variabelen vooraf een waarde toe te kennen.
10. Het scherm is een rechthoek waarbij er meer pixels horizontaal staan dan verticaal. De afstand tussen pixels volgens de x-richting is daarom verschillend van deze volgens de y-richting. Dit betekent dat we de indruk krijgen om niet te werken in een orthonormaal assenstelsel. Een cirkel wordt afgebeeld als een ellips. Willen we toch de indruk wekken t.o.v. orthonormaal assenkruis te werken, kunnen we de figuur verschalen. De verschalingsfactor bedraagt $94/62$. De vensterinstelling worden dan de $x_{\min} = y_{\min} \times 94/62$ en de $x_{\max} = y_{\max} \times 94/62$.

5 Oplossingen van de oefeningen

Het programma CILIND zou er zo kunnen uitzien:

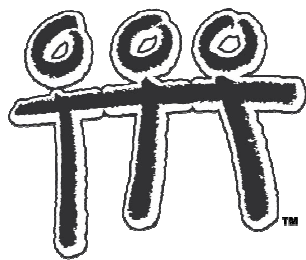
```
Program:CILIND
ClrHome
Prompt H
Prompt R
 $2 * (\pi * R * H + \pi * R^2) \rightarrow 0$ 
 $\pi * R^2 * H \rightarrow I$ 
ClrHome
Output(3,2,"DE OPP IS")
Output(4,5,0)
Output(5,2,"DE INHOUD IS")
Output(6,5,I)
Stop
```

H=?10 R=?3	DE OPP IS 245.044227 DE INHOUD IS 282.7433388
---------------	--

Het programma BALK zou er zo kunnen uitzien:

```
Program:BALK
ClrHome
Prompt L
Prompt D
Prompt H
 $L * D * H \rightarrow I$ 
 $2 * (L * D + L * H + H * D) \rightarrow 0$ 
ClrHome
Output(3,2,"DE OPP IS")
Output(4,5,0)
Output(5,2,"DE INHOUD IS")
Output(6,5,I)
Stop
```

L=?3 D=?5 H=?6	DE OPP IS 126 DE INHOUD IS 90
----------------------	--



www.t3vlaanderen.be