Lesliematrices en discrete dynamische systemen

Johan Deprez
johan.deprez@wis.kuleuven.be

T3-symposium, Oostende aug. 2006
slides op www.ua.ac.be/johan.deprez

Kennismaking

economisch hoger onderwijs van 2 cycli, wiskunde en statistiek in de kandidaturen/Bachelor

academische lerarenopleiding wiskunde

stuurgroep T^3

redactie tijdschrift Uitwiskeling

Overzicht

- Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel
- De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen
- De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen

Voorbeeld 1: Konijnen

twee leeftijdsklassen: 0 jaar oud (I), 1 jaar oud (II)
begin: 130 dieren in I, 470 dieren in II
in de loop van elk jaar:

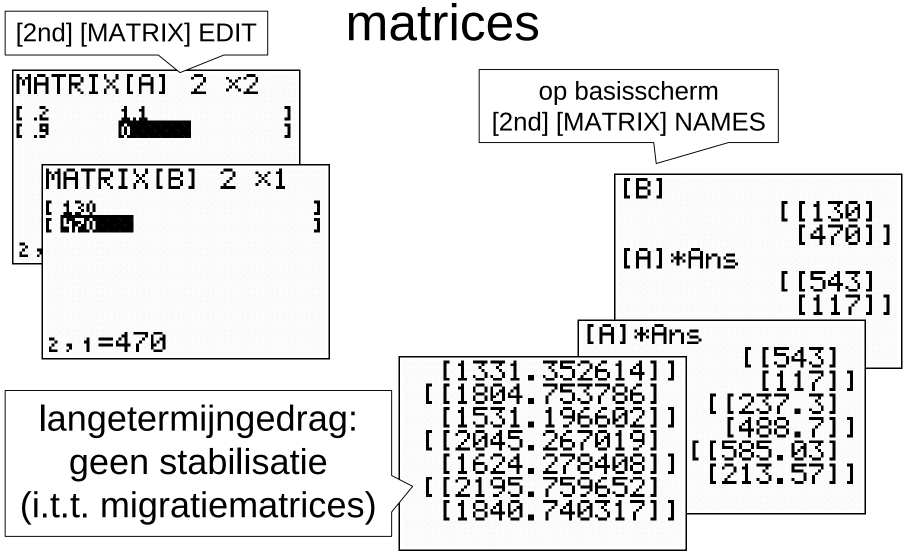
- sterven 10% van de konijnen die in het begin van het jaar 0 jaar oud zijn
- zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 0 jaar oud was gemiddeld voor 0.2 nakomelingen
- zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 1 jaar oud was gemiddeld voor 1.1 nakomelingen

Lesliematrix

$$X_0 = \begin{bmatrix} 130 \\ 470 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & \multicolumn{2}{c}{\text{van}} & \\ & \text{I} & \text{II} & \\ L = & \left[\begin{array}{cc} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{array}\right] & & \begin{array}{c} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \ \text{naar} \end{array}$$

Evolutie van het aantal konijnen via matrices

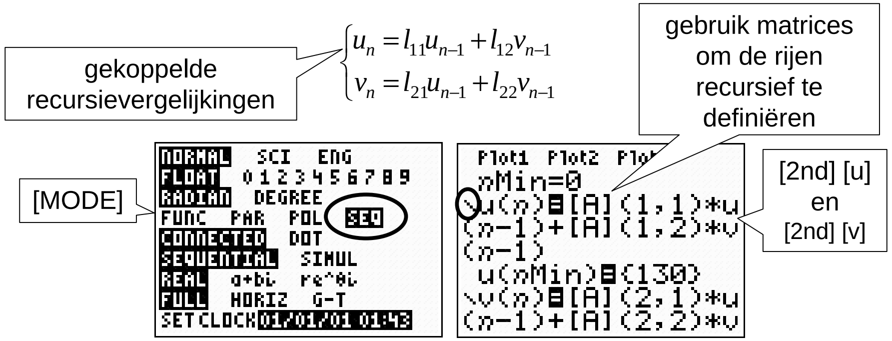


Evolutie van het aantal konijnen via matrices en rijen

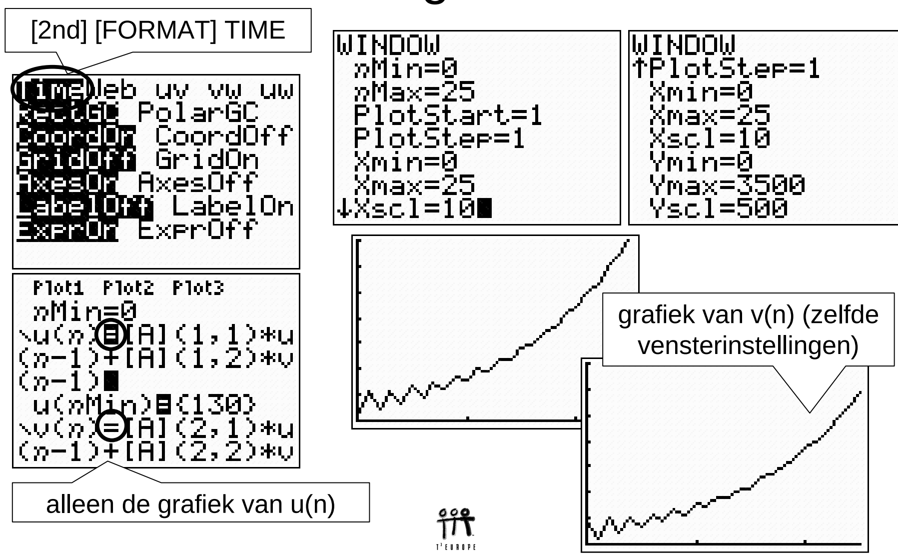
$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = X_n = L \cdot X_{n-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{bmatrix}$$

gekoppelde recursievergelijkingen

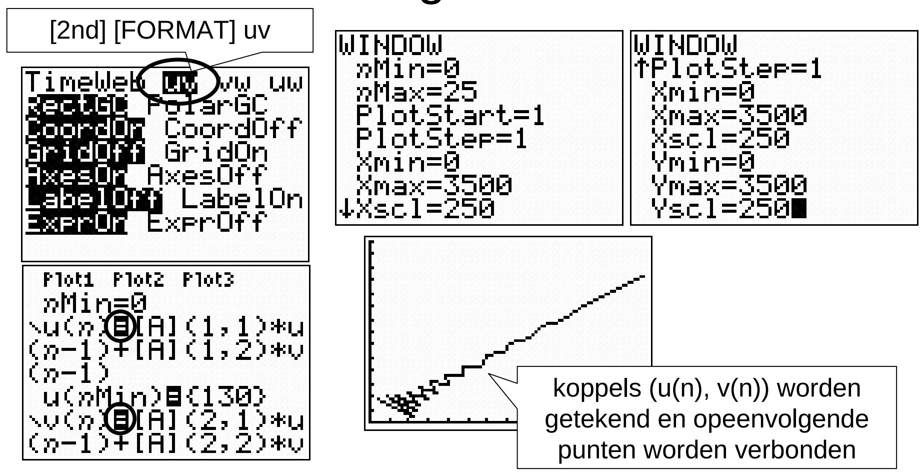
$$\begin{cases} u_n = l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ v_n = l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{cases}$$



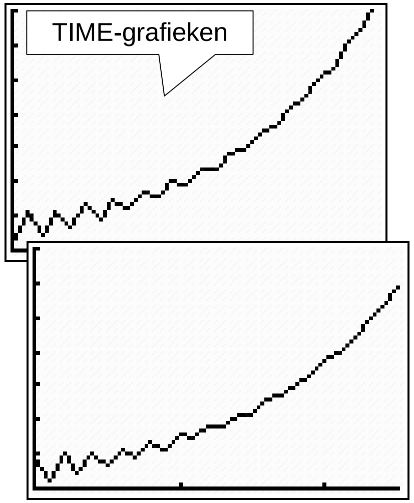
Evolutie van het aantal konijnen: TIME-grafieken

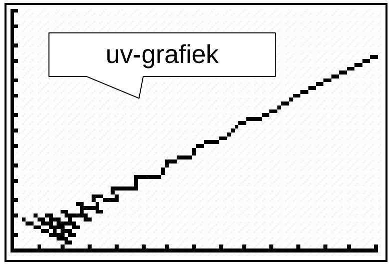


Evolutie van het aantal konijnen: uv-grafiek



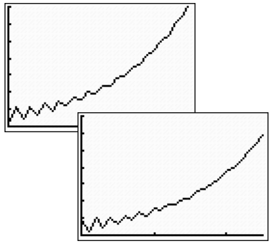
Evolutie van het aantal konijnen grafisch voorgesteld





wat leren deze grafieken ons over de evolutie op lange termijn?

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?



```
u(50)/u(49)
     1.099934961
v(50)/v(49)
     1.100079498
```

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) in beide leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

langetermijngroeifactor is 1.1 voor beide leeftijdsklassen en voor de totale populatie

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) in beide leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

langetermijngroeifactor is 1.1 voor beide leeftijdsklassen en voor de totale populatie

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \qquad t_n = u_n + v_n$$

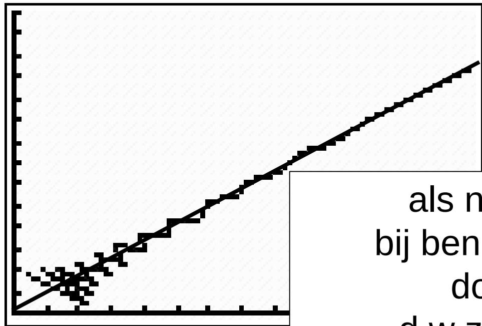
totale populatie
niet eenvoudig met de rekenmachine te vinden
(NIET w(n)=u(n)+v(n))

als n groot is, geldt:

$$u_n \approx 1.1 \cdot u_{n-1} \qquad v_n \approx 1.1 \cdot v_{n-1}$$

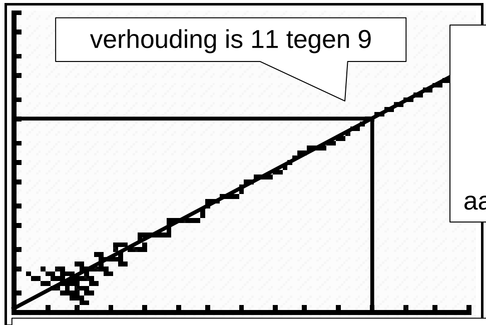
$$t_n \approx 1.1 \cdot t_{n-1} \qquad X_n \approx 1.1 \cdot X_{n-1}$$

Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



als n groot is, ligt (u_n, v_n) bij benadering op een rechte door de oorsprong, d.w.z. is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de twee leeftijdsklassen

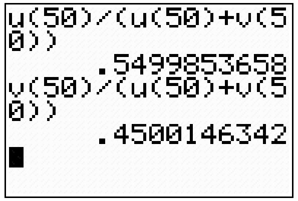
Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



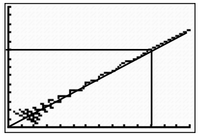
verhouding is 11 tegen 9

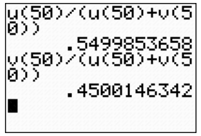
als n groot is, ligt (u_n, v_n) bij benadering op een rechte door de oorsprong, d.w.z. is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de twee leeftijdsklassen

langetermijnleeftijdsverdeling,
evenwichtsleeftijdsverdeling:
1ste leeftijdsklasse (ong.) 55%
2de leeftijdsklasse (ong.) 45%



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?





langetermijnleeftijdsverdeling,
evenwichtsleeftijdsverdeling:
1ste leeftijdsklasse (ong.) 55%
2de leeftijdsklasse (ong.) 45%

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \qquad t_n = u_n + v_n$$

$$V_n = \frac{1}{t_n} X_n$$

leeftijdsverdeling

als n groot is, geldt:

$$V_n \approx \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix} = V$$

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \begin{bmatrix} 0.55 \\ 0.45 \end{bmatrix} = V$$

Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) met een gemeenschappelijke langetermijngroeifactor voor alle leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

op lange termijn is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de leeftijdsklassen, weergegeven door de langetermijnleeftijdsverdeling

$$\text{als } n \text{ groot is, is } X_n \approx \lambda \cdot X_{n-1} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{t_n} X_n = V$$

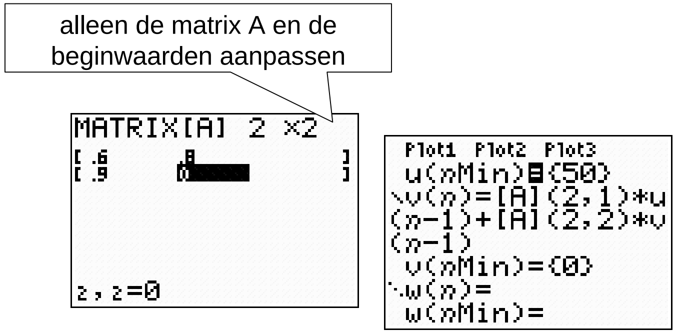
Oefening 1

Herhaal het voorbeeld en/of maak de onderstaande oefening.

$$L = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

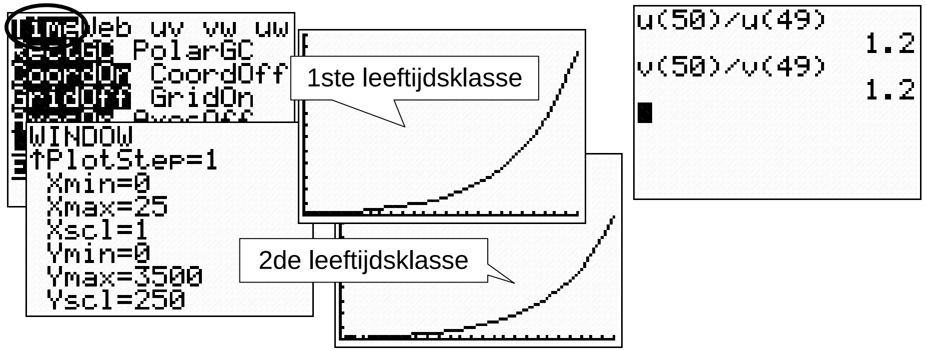
- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroeifactor
- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm

Oplossing van oefening 1



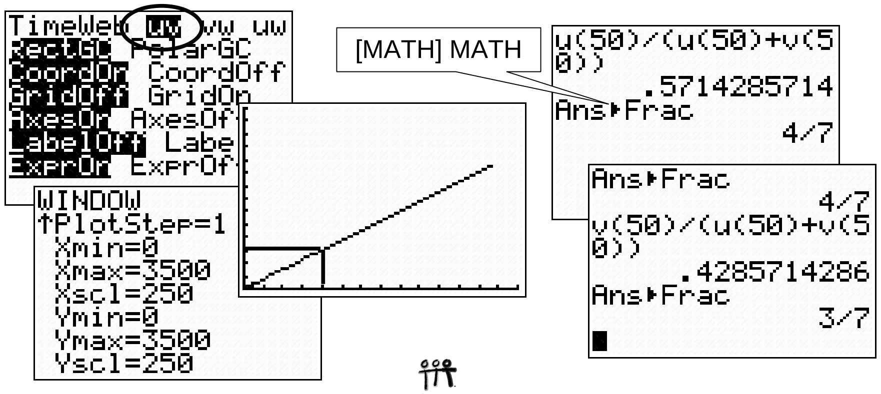
Oplossing van oefening 1

- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroeifactor



Oplossing van oefening 1

- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm



De langetermijnleeftijdsverdeling ‘wiskundig’ bepalen bij voorbeeld 1

als n groot is, geldt: $X_n \approx 1.1\cdot X_{n-1}$ of ook: $X_{n+1} \approx 1.1\cdot X_n$

$$L\cdot X_n \approx 1.1\cdot X_n$$

$$L\cdot(t_n\cdot V_n) \approx 1.1\cdot(t_n\cdot V_n) \qquad t_n\cdot L\cdot V_n \approx t_n\cdot 1.1\cdot V_n$$

$$L\cdot V_n \approx 1.1\cdot V_n$$

als n steeds groter wordt, wordt de benaderende gelijkheid steeds beter

bovendien: $\lim_{n\to+\infty} V_n = V$

$$L\cdot V = 1.1\cdot V$$

hiermee kunnen we de langetermijnleeftijdsverdeling vinden als we de langetermijngroeifactor kennen

De langetermijnleeftijdsverdeling ‘wiskundig’ bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.1\cdot V$

$$L=\begin{bmatrix}0.2 & 1.1\\0.9 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0.2 & 1.1\\0.9 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=1.1\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}0.2u + 1.1v = 1.1u\\0.9u = 1.1v\end{cases}$$

homogeen stelsel ...

$$\begin{cases}-0.9u + 1.1v = 0\\0.9u - 1.1v = 0\end{cases}$$

... waarvan u = 0, v = 0 een oplossing is (waar we niets mee zijn)

... dat oneindig veel oplossingen heeft ... (namelijk u = 11k, v = 9k)

... waarvan er één diegene is die wij zoeken, nl. die met u + v = 1 (d.w.z. k = 1/20)

De langetermijnleeftijdsverdeling ‘wiskundig’ bepalen bij voorbeeld 1

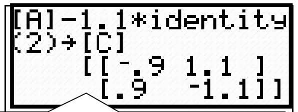
we zoeken $V=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.1\cdot V$ en $\boxed{u+v=1}$

$$L=\begin{bmatrix}0.2 & 1.1\\0.9 & 0\end{bmatrix}$$

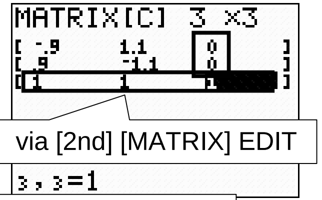
$$\begin{cases}0.2u + 1.1v = 1.1u\\0.9u = 1.1v\\u + v = 1\end{cases}$$

we krijgen onmiddellijk de éne goede oplossing als we de vergelijking u + v = 1 aan het stelsel toevoegen

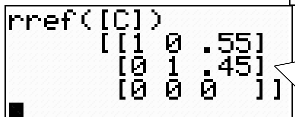
$$\begin{cases}-0.9u + 1.1v = 0\\0.9u - 1.1v = 0\\u + v = 1\end{cases}$$



identity via [2nd] [MATRIX] MATH



via [2nd] [MATRIX] EDIT



[C] is de uitgebreide matrix van het stelsel, rref (= row reduced echelon form) via [2nd] MATRIX MATH

De langetermijnleeftijdsverdeling ‘wiskundig’ bepalen als de langetermijngroeifactor gekend is

los het homogene stelsel LX=λX op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

OF

breid het stelsel LX=λX uit met de vergelijking die uitdrukt dat de som van de componenten van X gelijk moet zijn aan 1 en los dit stelsel op

Oefening 2

China is het land met de grootste bevolking ter wereld. Tussen 1950 en 1970 groeide de Chinese bevolking bovendien razendsnel aan: van 556 miljoen in 1950 tot 830 miljoen in 1970. Vanaf 1970 voerde China daarom een politiek van geboortebeperking. Als de bevolking ingedeeld wordt in 4 leeftijdsklassen van 25 jaar wordt de Lesliematrix (op basis van gegevens die in 1980 beschikbaar waren) gegeven door

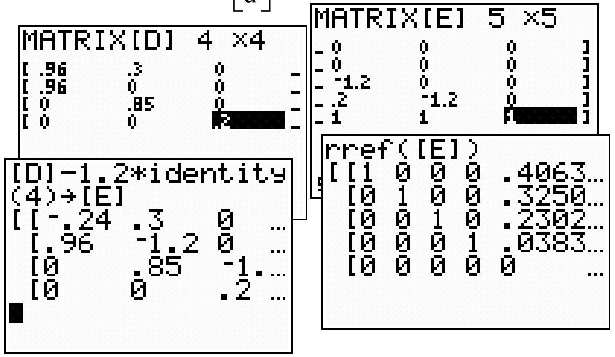
$$L=\begin{bmatrix}0.96 & 0.3 & 0 & 0\\0.96 & 0 & 0 & 0\\0 & 0.85 & 0 & 0\\0 & 0 & 0.2 & 0\end{bmatrix}$$

Deze geboortenbeperking remde de aangroei van de bevolking maar was toch niet voldoende streng. De langetermijngroeifactor bedraagt namelijk 1.2, d.w.z. dat de Chinese bevolking op lange termijn elke 25 jaar met 20% zou aangroeien als deze politiek verder gezet werd.

Bepaal de langetermijnleeftijdsverdeling.

Oplossing van oefening 2

we zoeken $V=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.2\cdot V$ en a + b + c + d = 1



jonge bevolking! elke generatie is groter dan de vorige

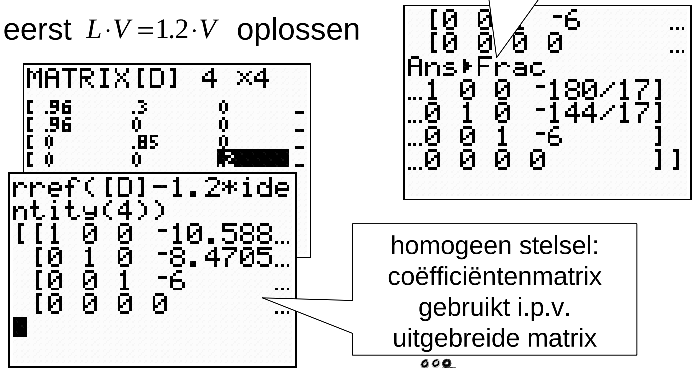
leeftijds-klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%

Oplossing van oefening 2

we zoeken $V=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.2\cdot V$ en a + b + c + d = 1

eerst $L\cdot V=1.2\cdot V$ oplossen

[MATH] MATH



homogeen stelsel: coëfficiëntenmatrix gebruikt i.p.v. uitgebreide matrix

$$\begin{cases} a=\dfrac{180}{17}k \\ b=\dfrac{144}{17}k \\ c=6k \\ d=k \end{cases}$$

Oplossing van oefening 2

we zoeken $V=\begin{bmatrix}a\\b\\c\\d\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.2\cdot V$ en a + b + c + d = 1

eerst $L\cdot V=1.2\cdot V$ oplossen

daarna uitdrukken dat a + b + c + d = 1

$$\begin{cases} a=\dfrac{180}{17}k \\ b=\dfrac{144}{17}k \\ c=6k \\ d=k \end{cases} \qquad k=\frac{17}{443} \qquad \begin{cases} a=\dfrac{180}{443} \\ b=\dfrac{144}{443} \\ c=\dfrac{102}{443} \\ d=\dfrac{17}{443} \end{cases}$$

leeftijds-klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%

De langetermijngroeifactor ‘wiskundig’ bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$ zo dat $L\cdot V=1.1\cdot V$ $\qquad L=\begin{bmatrix}0.2 & 1.1\\0.9 & 0\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}0.2 & 1.1\\0.9 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}=1.1\cdot\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}$$

als we 1.1 (in het RL) vervangen door een ander getal is u = 0, v = 0 de enige oplossing van het stelsel!

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases}$$

homogeen stelsel ...

$$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases}$$

... waarvan u = 0, v = 0 een oplossing is (waar we niets mee zijn)

... dat oneindig veel oplossingen heeft ... (namelijk u = 11k, v = 9k)

... waarvan er één diegene is die wij zoeken, nl. die met u + v = 1 (d.w.z. k = 1/20)

De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

determinant van de coëfficiëntenmatrix moet 0 zijn

coëfficiëntenmatrix is $L - \lambda E_2$

$$\det(L - \lambda E_2) = \det\begin{bmatrix} 0.2-\lambda & 1.1 \\ 0.9 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 0.2\lambda - 0.99 \overset{eis}{=} 0$$

geeft λ = 1.1 en λ = – 0.9

1.1 en – 0.9 zijn eigenwaarden van de matrix L

langetermijngroeifactor

alleen de positieve eigenwaarde heeft een concrete betekenis in de context

De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

Lesliematrix van de Belgische bevolking (2003, leeftijdsklassen van 20 jaar)

$$L = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal de langetermijngroeifactor.

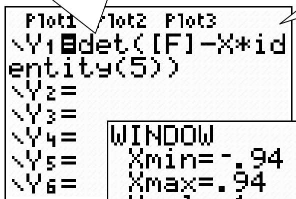
De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

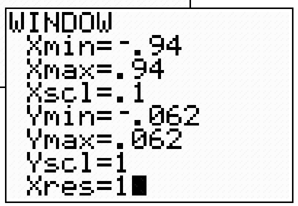
voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?

lukt niet handmatig

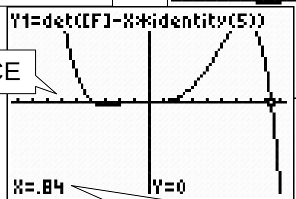
[2nd] [MATRIX] MATH

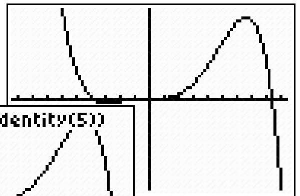


[MODE] FUNC



TRACE

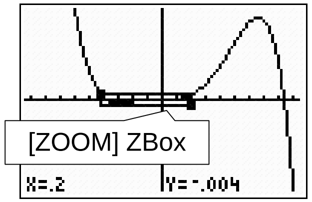




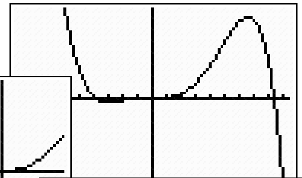
langetermijngroeifactor is 0.84

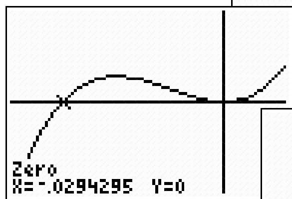
De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

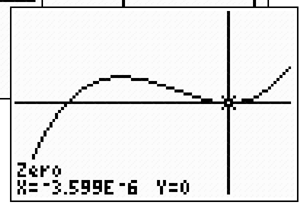
voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?



[ZOOM] ZBox

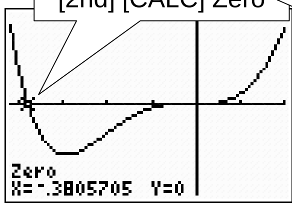






[2nd] [CALC] Zero

via numeriek algoritme!



De andere eigenwaarden zijn negatief of 0.

De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen

Een getal λ is een eigenwaarde van een $n \times n$-matrix A als en slechts als det $(A - \lambda E_n) = 0$ (d.w.z. dat het stelsel $AX = \lambda X$ oneindig veel oplossingen heeft).

De langetermijngroeifactor van een Lesliematrix is een eigenwaarde van de Lesliematrix.

Een Lesliematrix heeft juist één strikt positieve, rëele eigenwaarde (onder milde voorwaarden).

Het bepalen van de langetermijngroeifactor van een Lesliematrix komt dus neer op het bepalen van de strikt positieve, reële eigenwaarde van de Lesliematrix.

De langetermijngroeifactor 'wiskundig' bepalen

Het is niet altijd mogelijk om de vergelijking det $(A - \lambda E_n) = 0$ analytisch op te lossen.

De numerieke methode om de grootste positieve eigenwaarde van een matrix te vinden maakt in essentie gebruik van de methode die wij bij de 'vaststellingen' gebruikt hebben.

De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen (bis)

langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen: los het homogene stelsel $LX=\lambda X$ op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

Een kolommatrix X ($\neq 0$) is een eigenvector van een matrix A met eigenwaarde λ als en slechts als $AX = \lambda X$.

De langetermijnleeftijdsverdeling van een Lesliematrix L is een eigenvector van L met de langetermijngroeifactor als eigenwaarde.

Oefenen

Herhaal de voorbeelden en/of ...

Zoek de langetermijngroeifactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maak oefening 3 (volgende slide).

Oefening 3

In 1980 verstrengde de Chinese regering de geboortebeperking. Gezinnen met één kind werden de norm. Veronderstel dat de Lesliematrix hierdoor verandert in de linkse matrix hieronder. De beginpopulatie wordt gegeven door de rechtse matrix hieronder.

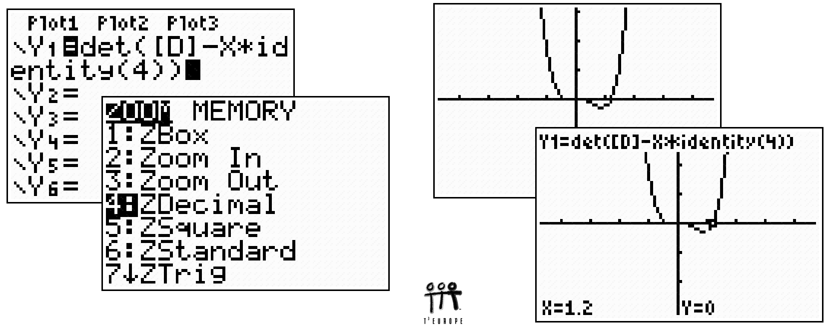
$$L = \begin{bmatrix} 0.416 & 0.084 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} 540 \\ 307 \\ 132 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- Bepaal de langetermijngroeifactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?
- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?
- Bereken de langetermijnleeftijdsverdeling.

Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroeifactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

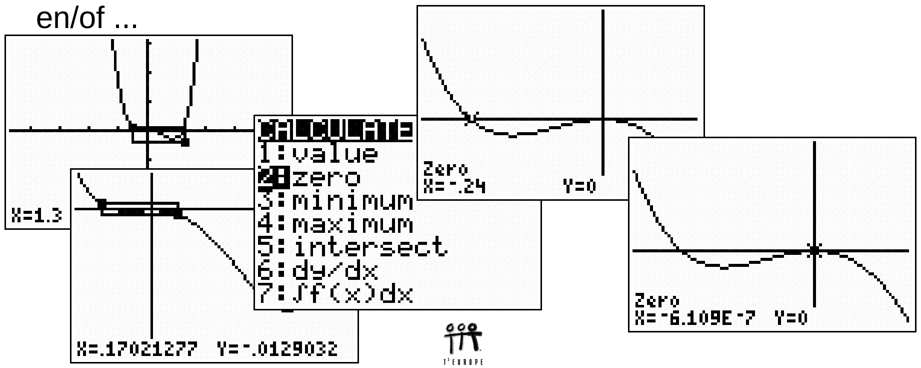
$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroeifactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

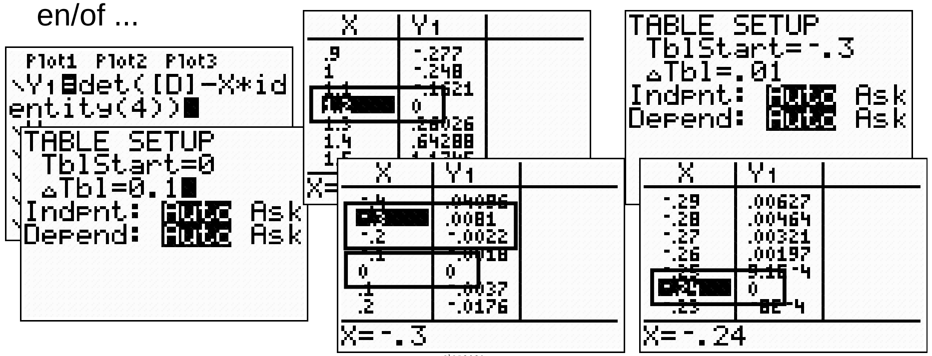
$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



Oplossing van oefening 2 (bis)

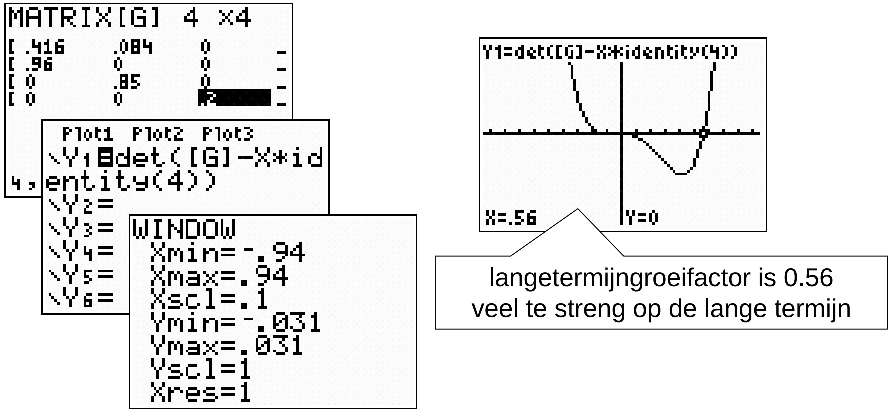
Zoek de langetermijngroeifactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



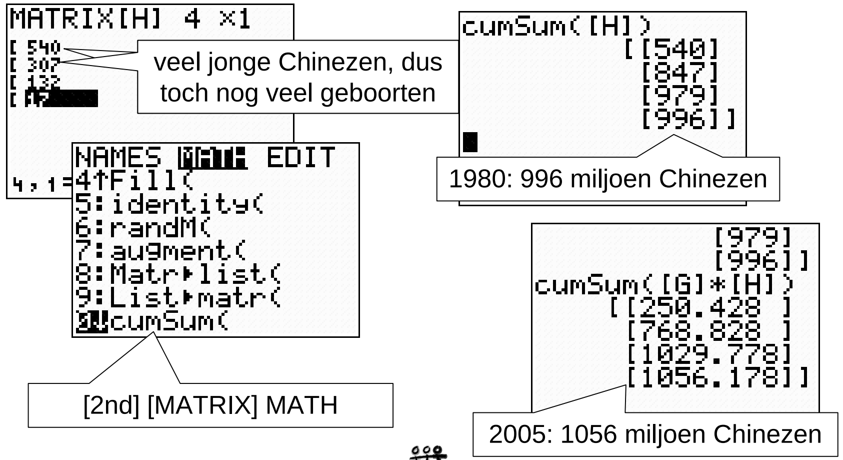
Oplossing van oefening 3

- Bepaal de langetermijngroeifactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?



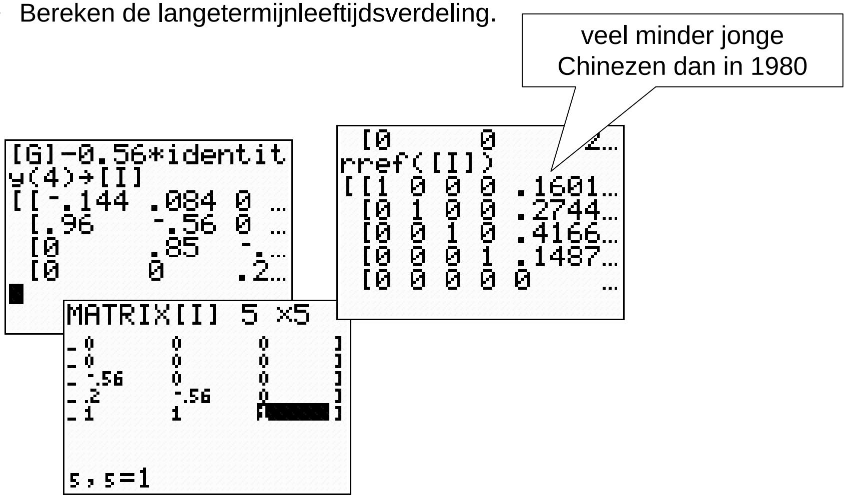
Oplossing van oefening 3

- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?



Oplossing van oefening 3

- Bereken de langetermijnleeftijdsverdeling.



T³ EUROPE

Bedankt voor uw aandacht!