



Lesliematrices en discrete dynamische systemen

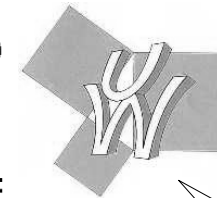
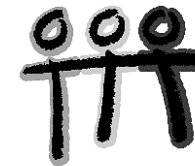
Johan Deprez
johan.deprez@wis.kuleuven.be

T3-symposium, Oostende aug. 2006
slides op www.ua.ac.be/johan.deprez

Kennismaking

economisch hoger onderwijs van 2 cycli,
wiskunde en statistiek in de
kandidaturen/Bachelor

academische lerarenopleiding
wiskunde



stuurgroep T³

redactie tijdschrift
Uitwiskeling



Overzicht

- Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel
- De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen
- De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen



Voorbeeld 1: Konijnen

twee leeftijdsklassen: 0 jaar oud (I), 1 jaar oud (II)

begin: 130 dieren in I, 470 dieren in II

in de loop van elk jaar:

- sterven 10% van de konijnen die in het begin van het jaar 0 jaar oud zijn
- zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 0 jaar oud was gemiddeld voor 0.2 nakomelingen
- zorgt een konijn dat in het begin van het jaar 1 jaar oud was gemiddeld voor 1.1 nakomelingen

$$X_0 = \begin{bmatrix} 130 \\ 470 \end{bmatrix}$$

van

	I	II	
I	0.2	1.1	I
II	0.9	0	II

naar

Lesliematrix



Evolutie van het aantal konijnen via matrices

[2nd] [MATRIX] EDIT

```
MATRIX[A] 2 x2
[ 2.  1. ]
[ 1.5 0. ]
```

op basisscherm
[2nd] [MATRIX] NAMES

```
[B]      [[130]
[A]*Ans  [470]]
```

```
[A]*Ans  [[543]
          [117]]
```

```
[[1331.352614]]
[[1804.753786]]
[[1531.196602]]
[[2045.267019]]
[[1624.278408]]
[[2195.759652]]
[[1840.740317]]
```

```
[[543]
 [117]]
 [[237.3]
 [488.7]]
 [[585.03]
 [213.57]]
```

2, 1=470

langetermijngedrag:
geen stabilisatie
(i.t.t. migratiematrix)

Evolutie van het aantal konijnen via matrices en rijen

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} = X_n = L \cdot X_{n-1} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{bmatrix}$$

gekoppelde recursievergelijkingen

$$\begin{cases} u_n = l_{11}u_{n-1} + l_{12}v_{n-1} \\ v_n = l_{21}u_{n-1} + l_{22}v_{n-1} \end{cases}$$

gebruik matrices om de rijen recursief te definiëren

[MODE]

```
NORMAL SCI ENG
FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
RADIAN DEGREE
FUNC PAR POL
CONNECTED DOT
SEQUENTIAL SIMUL
REAL a+bi re^*0i
GULL HORIZ G-T
SET CLOCK 01/20/201 01:43
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=[A](1,1)*u
(n-1)+[A](1,2)*v
(n-1)
u(nMin)=[130]
v(n)=[A](2,1)*u
(n-1)+[A](2,2)*v
```

[2nd] [u] en [2nd] [v]

Evolutie van het aantal konijnen: TIME-grafieken

[2nd] [FORMAT] TIME

```
TimeWeb uv vw uw
rectGC PolarGC
CoordOn CoordOff
GridOff GridOn
AxesOn AxesOff
LabelOff LabelOn
ExprOn ExprOff
```

```
WINDOW
nMin=0
nMax=25
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=25
Ymin=0
Ymax=3500
Xscl=10
```

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=25
Ymin=0
Ymax=3500
Yscl=500
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=[A](1,1)*u
(n-1)+[A](1,2)*v
(n-1)
u(nMin)=[130]
v(n)=[A](2,1)*u
(n-1)+[A](2,2)*v
```

alleen de grafiek van u(n)

grafiek van v(n) (zelfde vensterinstellingen)

Evolutie van het aantal konijnen: uv-grafiek

[2nd] [FORMAT] uv

```
TimeWeb uv vw uw
rectGC PolarGC
CoordOn CoordOff
GridOff GridOn
AxesOn AxesOff
LabelOff LabelOn
ExprOn ExprOff
```

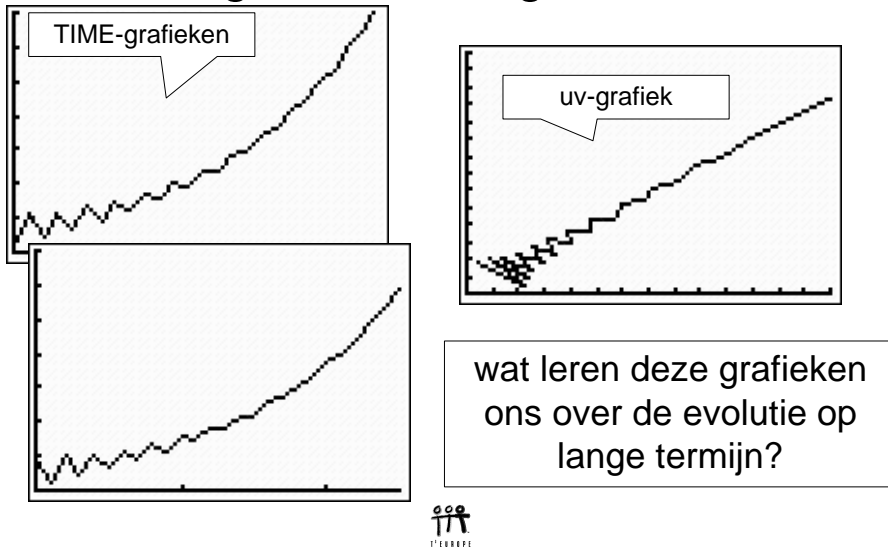
```
WINDOW
nMin=0
nMax=25
PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=3500
Ymin=0
Ymax=3500
Xscl=250
```

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=3500
Ymin=0
Ymax=3500
Yscl=250
```

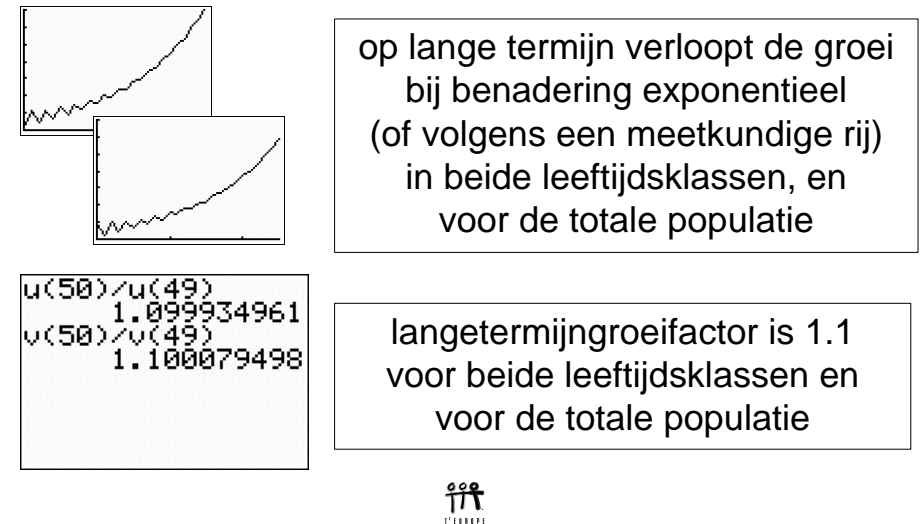
```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=[A](1,1)*u
(n-1)+[A](1,2)*v
(n-1)
u(nMin)=[130]
v(n)=[A](2,1)*u
(n-1)+[A](2,2)*v
```

koppels (u(n), v(n)) worden getekend en opeenvolgende punten worden verbonden

Evolutie van het aantal konijnen grafisch voorgesteld



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de TIME-grafieken?

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) in beide leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

langetermijngroefactor is 1.1 voor beide leeftijdsklassen en voor de totale populatie

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} \quad t_n = u_n + v_n$$

totale populatie niet eenvoudig met de rekenmachine te vinden (NIET $w(n)=u(n)+v(n)$)

als n groot is, geldt:

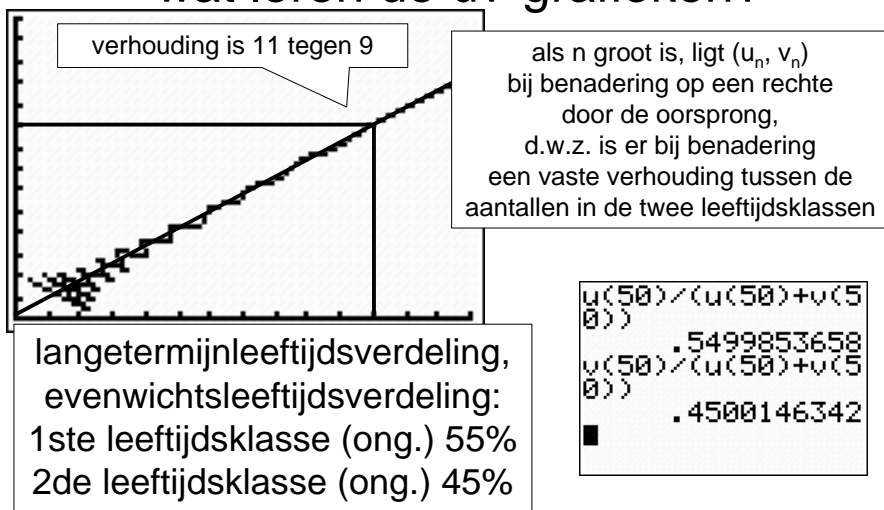
$$u_n \approx 1.1 \cdot u_{n-1} \quad v_n \approx 1.1 \cdot v_{n-1}$$

$$t_n \approx 1.1 \cdot t_{n-1} \quad X_n \approx 1.1 \cdot X_{n-1}$$

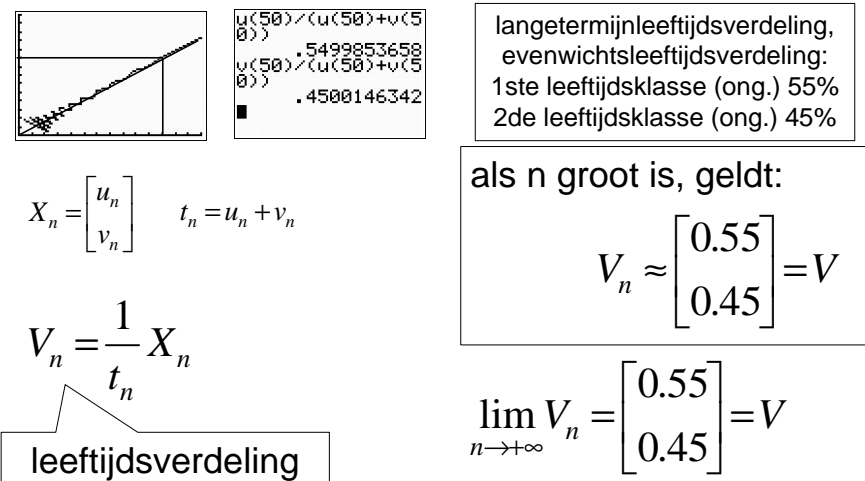
Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



Evolutie van het aantal konijnen: wat leren de uv-grafieken?



Vaststellingen i.v.m. het langetermijngedrag bij een Lesliemodel

op lange termijn verloopt de groei bij benadering exponentieel (of volgens een meetkundige rij) met een gemeenschappelijke langetermijngroefactor voor alle leeftijdsklassen, en voor de totale populatie

op lange termijn is er bij benadering een vaste verhouding tussen de aantallen in de leeftijdsklassen, weergegeven door de langetermijnleeftijdsverdeling

als n groot is, is $X_n \approx \lambda \cdot X_{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{t_n} X_n = V$$



Oefening 1

Herhaal het voorbeeld en/of maak de onderstaande oefening.

$$L = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 50 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroefactor
- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm



Oplossing van oefening 1

alleen de matrix A en de beginwaarden aanpassen

```
MATRIX[A] 2 x2
[.6  0]
[.9  0]
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
u(nMin)=50
v(n)= [A](2,1)*u
(n-1)+[A](2,2)*v
(n-1)
v(nMin)=(0)
w(n)=
w(nMin)=
```



Oplossing van oefening 1

- maak een TIME-grafiek van de evolutie van de aantallen in de twee leeftijdsklassen
- maak d.m.v. berekeningen op het basisscherm een schatting van de langetermijngroefactor

u(50)/u(49) 1.2
v(50)/v(49) 1.2

Oplossing van oefening 1

- maak een uv-grafiek
- maak een schatting van de langetermijnleeftijdsverdeling
- probeer je schatting te bevestigen d.m.v. berekeningen op het basisscherm

[MATH] MATH
u(50)/(u(50)+v(50))
Ans>Frac 4/7
v(50)/(u(50)+v(50))
Ans>Frac 3/7



De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

als n groot is, geldt: $X_n \approx 1.1 \cdot X_{n-1}$ of ook: $X_{n+1} \approx 1.1 \cdot X_n$

$$L \cdot X_n \approx 1.1 \cdot X_n$$

$$L \cdot (t_n \cdot V_n) \approx 1.1 \cdot (t_n \cdot V_n) \quad t_n \cdot L \cdot V_n \approx t_n \cdot 1.1 \cdot V_n$$

$$L \cdot V_n \approx 1.1 \cdot V_n$$

als n steeds groter wordt, wordt de benaderende gelijkheid steeds beter

bovendien: $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = V$

$$L \cdot V = 1.1 \cdot V$$

hiermee kunnen we de langetermijnleeftijdsverdeling vinden als we de langetermijngroefactor kennen



De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $v = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot v = 1.1 \cdot v$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1.1 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases} \quad \text{homogeen stelsel ...}$$

$$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases} \quad \text{... waarvan } u = 0, v = 0 \text{ een oplossing is (waar we niets mee zijn)}$$

$$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases} \quad \text{... dat oneindig veel oplossingen heeft ... (namelijk } u = 11k, v = 9k)$$

... waarvan er één diegene is die wij zoeken, nl. die met $u + v = 1$ (d.w.z. $k = 1/20$)



De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $v = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot v = 1.1 \cdot v$ en $u + v = 1$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0.2u + 1.1v = 1.1u \\ 0.9u = 1.1v \end{cases}$$

$$u + v = 1$$

$$\begin{cases} -0.9u + 1.1v = 0 \\ 0.9u - 1.1v = 0 \end{cases}$$

$$u + v = 1$$

we krijgen onmiddellijk de éne goede oplossing als we de vergelijking $u + v = 1$ aan het stelsel toevoegen

```
[A]-1.1*identity
[2]+[C]
```

```
MATRIX [C] 3 x 3
[ -0.9  1.1  0 ]
[ 0.9  -1.1  0 ]
[ 1  1  1 ]
```

identity via [2nd] [MATRIX] MATH

via [2nd] [MATRIX] EDIT

[3, 3]=1

```
rref([C])
[[1 0 .55]
 [0 1 .45]
 [0 0 0  1]]
```

[C] is de uitgebreide matrix van het stelsel, rref (= row reduced echelon form) via [2nd] MATRIX MATH



De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen als de langetermijngroefactor gekend is

los het homogene stelsel $LX = \lambda X$ op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

OF

breid het stelsel $LX = \lambda X$ uit met de vergelijking die uitdrukt dat de som van de componenten van X gelijk moet zijn aan 1 en los dit stelsel op



Oefening 2

China is het land met de grootste bevolking ter wereld. Tussen 1950 en 1970 groeide de Chinese bevolking bovendien razendsnel aan: van 556 miljoen in 1950 tot 830 miljoen in 1970. Vanaf 1970 voerde China daarom een politiek van geboortebepanking. Als de bevolking ingedeeld wordt in 4 leeftijdsklassen van 25 jaar wordt de Lesliematrix (op basis van gegevens die in 1980 beschikbaar waren) gegeven door

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Deze geboortebepanking remde de aangroei van de bevolking maar was toch niet voldoende streng. De langetermijngroefactor bedraagt namelijk 1.2, d.w.z. dat de Chinese bevolking op lange termijn elke 25 jaar met 20% zou aangroeien als deze politiek verder gezet werd.

Bepaal de langetermijnleeftijdsverdeling.



Oplossing van oefening 2

we zoeken $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

```
MATRIX[D] 4 x4
[.96  .3  0  -]
[.96  .05 0  -]
[0    .85 0  -]
[0    0   0  -]
```

```
MATRIX[E] 5 x5
[0  0  0  0  0]
[0  0  0  0  0]
[-1.2 0  0  0  0]
[-2  0  0  0  0]
[1  1.2 0  0  0]
```

jonge bevolking!
elke generatie is
groter dan de vorige

```
[D]-1.2*identity
(4)+[E]
[[-.24  .3  0  ...]
[.96  -1.2 0  ...]
[0    .85  -1.  ...]
[0    0   .2  ...]
```

```
rref([E])
[[1 0 0 0 .4063...
[0 1 0 0 .3250...
[0 0 1 0 .2302...
[0 0 0 1 .0383...]
```

leeftijds-klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%



Oplossing van oefening 2

we zoeken $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

eerst $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ oplossen

```
MATRIX[D] 4 x4
[.96  .3  0  -]
[.96  .05 0  -]
[0    .85 0  -]
[0    0   0  -]
```

```
[MATH] MATH
[0 0 -6 ...]
[0 0 0 ...]
Ans+Frac
...1 0 0 -180/17]
...0 1 0 -144/17]
...0 0 1 -6]
...0 0 0 0] 1]
```

$$\begin{cases} a = \frac{180}{17}k \\ b = \frac{144}{17}k \\ c = 6k \\ d = k \end{cases}$$

```
rref([D]-1.2*ide
ntity(4))
[[1 0 0 -10.588...
[0 1 0 -8.4705...
[0 0 1 -6]
[0 0 0 0]
```

homogeen stelsel:
coëfficiëntenmatrix
gebruikt i.p.v.
uitgebreide matrix



Oplossing van oefening 2

we zoeken $V = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ en $a + b + c + d = 1$

eerst $L \cdot V = 1.2 \cdot V$ oplossen

daarna uitdrukken dat $a + b + c + d = 1$

$$\begin{cases} a = \frac{180}{17}k \\ b = \frac{144}{17}k \\ c = 6k \\ d = k \end{cases}$$

$$k = \frac{17}{443}$$

leeftijds-klasse	percentage
1	40.6%
2	32.5%
3	23.0%
4	3.8%



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

we zoeken $V = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ zo dat $L \cdot V = 1.1 \cdot V$ $L = \begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix}$

als we 1.1 (in het RL) vervangen
door een ander getal is $u = 0, v = 0$
de enige oplossing van het stelsel!

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 1.1 \\ 0.9 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 1.1 \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

homogeen stelsel ...

... waarvan $u = 0, v = 0$ een oplossing is
(waar we niets mee zijn)

... dat oneindig veel oplossingen heeft ...
(namelijk $u = 11k, v = 9k$)

... waarvan er één diegene is die wij zoeken,
nl. die met $u + v = 1$ (d.w.z. $k = 1/20$)



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen bij voorbeeld 1

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

determinant van de coëfficiëntenmatrix moet 0 zijn

coëfficiëntenmatrix is $L - \lambda E_2$

$$\det(L - \lambda E_2) = \det \begin{bmatrix} 0.2 - \lambda & 1.1 \\ 0.9 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 0.2\lambda - 0.99 = 0$$

1.1 en -0.9 zijn eigenwaarden van de matrix L

geeft $\lambda = 1.1$ en $\lambda = -0.9$

langetermijngroefactor

alleen de positieve eigenwaarde heeft een concrete betekenis in de context



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

Lesliematrix van de Belgische bevolking (2003, leeftijdsklassen van 20 jaar)

$$L = \begin{bmatrix} 0.43 & 0.34 & 0.01 & 0 & 0 \\ 0.98 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.30 & 0 \end{bmatrix}$$

Bepaal de langetermijngroefactor.



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

voor welke getallen λ heeft het stelsel $L \cdot V = \lambda \cdot V$ niet-nul oplossingen?

lukt niet handmatig

voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?

[2nd] [MATRIX] MATH

```

P1ot1 /tot2 P1ot3
\Y1=det([F]-X*id
entity(5))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

[MODE] FUNC

TRACE

```

WINDOW
Xmin=-.94
Xmax=.94
Xscl=.1
Ymin=-.062
Ymax=.062
Yscl=1
Xres=1
    
```

Y1=det([F]-X*identity(5))

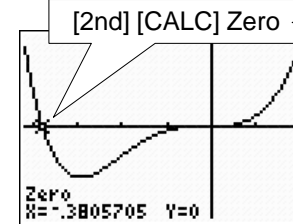
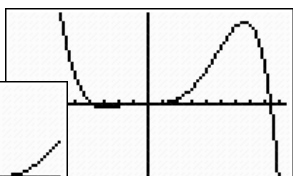
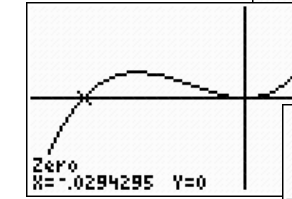
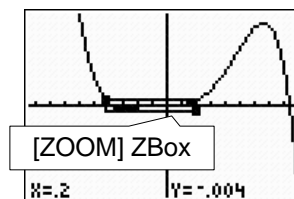
X=.84 Y=0

langetermijngroefactor is 0.84



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen, voorbeeld 2

voor welke getallen λ is $\det(L - \lambda E_5) = 0$?



via numeriek algoritme!

De andere eigenwaarden zijn negatief of 0.



De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen

Een getal λ is een eigenwaarde van een $n \times n$ -matrix A als en slechts als $\det(A - \lambda E_n) = 0$ (d.w.z. dat het stelsel $AX = \lambda X$ oneindig veel oplossingen heeft).

De langetermijngroefactor van een Lesliematrix is een eigenwaarde van de Lesliematrix.

Een Lesliematrix heeft juist één strikt positieve, reële eigenwaarde (onder milde voorwaarden).

Het bepalen van de langetermijngroefactor van een Lesliematrix komt dus neer op het bepalen van de strikt positieve, reële eigenwaarde van de Lesliematrix.

TU/e

De langetermijngroefactor 'wiskundig' bepalen

Het is niet altijd mogelijk om de vergelijking $\det(A - \lambda E_n) = 0$ analytisch op te lossen.

De numerieke methode om de grootste positieve eigenwaarde van een matrix te vinden maakt in essentie gebruik van de methode die wij bij de 'vaststellingen' gebruikt hebben.

TU/e

De langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen (bis)

langetermijnleeftijdsverdeling 'wiskundig' bepalen:
los het homogene stelsel $LX = \lambda X$ op (dat oneindig veel oplossingen heeft) en selecteer hieruit de oplossing waarvan de som van de componenten gelijk is aan 1

Een kolommatrix $X (\neq 0)$ is een eigenvector van een matrix A met eigenwaarde λ als en slechts als $AX = \lambda X$.

De langetermijnleeftijdsverdeling van een Lesliematrix L is een eigenvector van L met de langetermijngroefactor als eigenwaarde.

TU/e

Oefenen

Herhaal de voorbeelden en/of ...

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebeperving) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

Maak oefening 3 (volgende slide).

TU/e

Oefening 3

In 1980 verstregde de Chinese regering de geboortebepanking. Gezinnen met één kind werden de norm. Veronderstel dat de Lesliematrix hierdoor verandert in de linkse matrix hieronder. De beginpopulatie wordt gegeven door de rechtse matrix hieronder.

$$L = \begin{bmatrix} 0.416 & 0.084 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix} \quad X_0 = \begin{bmatrix} 540 \\ 307 \\ 132 \\ 17 \end{bmatrix}$$

- Bepaal de langetermijngroefactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?
- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?
- Bereken de langetermijnleeftijdsverdeling.



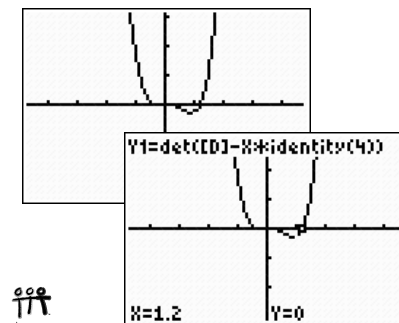
Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebepanking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=det([D]-X*id
entity(4))
```

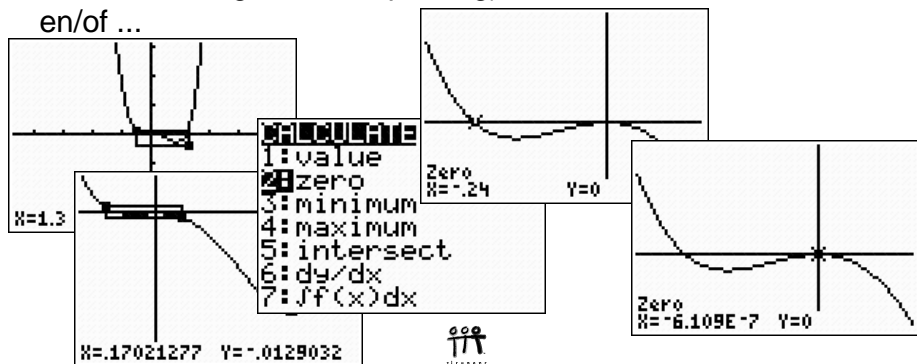
```
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
MEMORY
1:ZBox
2:Zoom In
3:Zoom Out
4:ZDecimal
5:ZSquare
6:ZStandard
7:ZTrig
```



Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebepanking) en/of ...

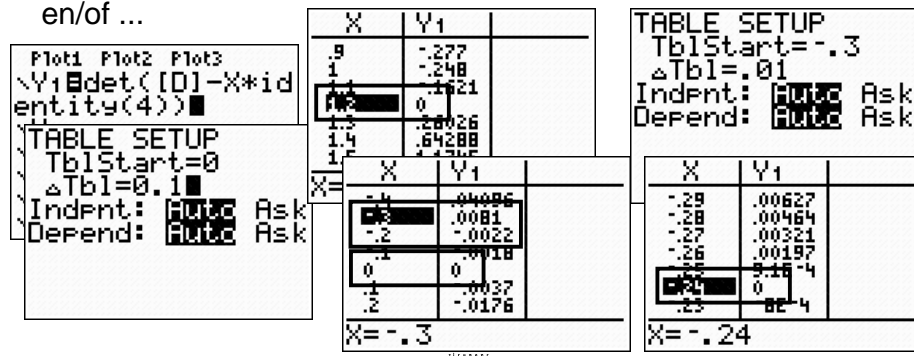
$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



Oplossing van oefening 2 (bis)

Zoek de langetermijngroefactor (en de andere eigenwaarden) uit oefening 2 (Chinese bevolking, 1980, leeftijdsklassen van 25 jaar, 1ste versie van de geboortebepanking) en/of ...

$$L = \begin{bmatrix} 0.96 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.96 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.85 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 \end{bmatrix}$$



Oplossing van oefening 3

- Bepaal de langetermijngroefactor. Is deze politiek op lange termijn voldoende streng?

```
MATRIX[G] 4 x4
[.416 .084 0 -
[.96 0 0 -
[0 .85 0 -
[0 0 0 -
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=det([G]-X*id
4,entity(4))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-.94
Xmax=.94
Xscl=.1
Ymin=-.031
Ymax=.031
Yscl=1
Xres=1
```

$Y1 = \det([G] - X * \text{identity}(4))$

X=.56 Y=0

langetermijngroefactor is 0.56
veel te streng op de lange termijn

Oplossing van oefening 3

- Bereken de totale populatie in 1980 en in 2005. Waarom is het aantal Chinezen *niet* gedaald?

```
MATRIX[H] 4 x1
[540
[307
[132
[17
```

veel jonge Chinezen, dus
toch nog veel geboorten

```
cumSum([H])
[[540]
[847]
[979]
[996]]
```

1980: 996 miljoen Chinezen

```
NAMES [G] EDIT
4,1=4↓Fill(
5:identity(
6:randM(
7:augment(
8:Matr→list(
9:List→matr(
10:cumSum(
```

[2nd] [MATRIX] MATH

```
cumSum([G]*[H])
[[250.428 ]
[768.828 ]
[1029.778]
[1056.178]]
```

2005: 1056 miljoen Chinezen

Oplossing van oefening 3

- Bereken de langetermijnleeftijdverdeling.

```
[G]-0.56*identit
y(4)→[I]
[[-.144 .084 0 ...
[.96 -.56 0 ...
[0 .85 - ...
[0 0 .2...
```

```
[0 0 0 0 ...
rref([I])
[[1 0 0 0 .1601...
[0 1 0 0 .2744...
[0 0 1 0 .4166...
[0 0 0 1 .1487...
[0 0 0 0 0 ...
```

veel minder jonge
Chinezen dan in 1980

```
MATRIX[I] 5 x5
-0 0 0 0 1
-0 0 0 0 1
-.56 0 0 0 1
-.2 0 0 0 1
-1 1 0 0 1
```

s, s=1



Bedankt voor uw aandacht!