

Mogelijke oplossing voor de opdrachten uit de workshop

Bespreken van stelsels: opgave 1

Los op en bespreek het volgende stelsel met parameters k en m :

$$\begin{cases} 2x + 3ky - 4z = m \\ -2x - ky + 4z = m + 1 \end{cases}$$

Oplossing:

TI-84 Plus calculator screen showing the input of the system matrix and the use of the rref function. The matrix is:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\cdot k & -4 & m \\ -2 & -k & 4 & m+1 \end{bmatrix}$$

The rref function is applied to this matrix, resulting in:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3\cdot k}{2} & -2 & \frac{m}{2} \\ 0 & 2\cdot k & 0 & 2\cdot m+1 \end{bmatrix}$$

TI-84 Plus calculator screen showing the manual row operation $\text{mRow}\left(\frac{1}{2\cdot k}, 1, \frac{3\cdot k}{2}, -2, \frac{m}{2}, 2\right)$ and the resulting matrix:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3\cdot k}{2} & -2 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\cdot m+1}{2\cdot k} \end{bmatrix}$$

We voeren de matrix van het stelsel in en laten de machine de matrix zo ver mogelijk rijherleiden met de opdracht rref .

Om in de tweede rij een spilelement verschillend van nul te krijgen delen we deze rij door $2k$. Dit kan alleen als $k \neq 0$.

TI-84 Plus calculator screen showing the matrix after dividing the second row by $2k$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3\cdot k}{2} & -2 & \frac{m}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\cdot m+1}{2\cdot k} \end{bmatrix}$$

The rref function is applied again, resulting in:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & -m - \frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2\cdot m+1}{2\cdot k} \end{bmatrix}$$

TI-84 Plus calculator screen showing the matrix for the special case $k=0$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3\cdot k & -4 & m \\ -2 & -k & 4 & m+1 \end{bmatrix} \Big|_{k=0}$$

The rref function is applied, resulting in:

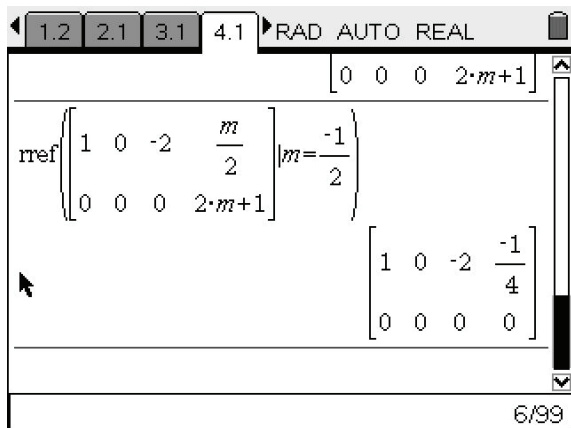
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & \frac{m}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2\cdot m+1 \end{bmatrix}$$

We kunnen nu verder herleiden naar rijcanonieke vorm. We gebruiken hiervoor opnieuw rref . Het resultaat is inderdaad een rijcanonieke vorm. Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen die we hier kunnen uit aflezen.

Het enige bijzondere geval dat we nog moeten bekijken is $k = 0$.

Indien $m = -\frac{1}{2}$ heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en indien $m \neq -\frac{1}{2}$ zijn er

geen oplossingen.



Door die waarde voor m in te vullen en te rijherleiden, kunnen we ook voor dit geval de oplossingen aflezen.

Samenvatting van de oplossing

	$k = 0$	$k \neq 0$
$m = -\frac{1}{2}$	$\text{Opl } S = \left\{ \left(-\frac{1}{4} + 2s, r, s \right) \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$	$\text{Opl } S = \left\{ \left(-m - \frac{3}{4} + 2r, \frac{2m+1}{2k}, r \right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}$
$m \neq -\frac{1}{2}$	geen oplossingen (vals stelsel)	

Opmerking: Een voordeel van de gevolgde strategie is dat het geen verschil maakt of het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden of niet. Dit probleem heb je wel indien je met determinanten werkt.

Bespreken van stelsels: opgave 2

Los op en bespreek het volgende stelsel met parameters a en b :

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x - aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Oplossing:

De matrix van het stelsel wordt ingevoerd en we laten de rekenmachine de matrix rijherleiden.

We hebben de keuze om ofwel de tweede rij te delen door a^2b+b ofwel de derde rij te delen door $ab+b$. We kiezen voor het eerste omdat a^2b+b slechts nul is indien $b = 0$. Voor de andere uitdrukking zijn er twee mogelijke gevallen.

Na nog eens rref toe te passen krijgen we dit resultaat.

We moeten nu de derde rij delen door het getal dat hier geselecteerd is. We onderzoeken wanneer deze uitdrukking nul wordt. Dit is zo als $a = 1$.

Domain of the result might be larger than the...

We delen rij 3 door die uitdrukking...

Domain of the result might be larger than the...

... met dit resultaat als gevolg.

Domain of the result might be larger than the...

Verder rijherleiden naar rijcanonieke vorm...

Domain of the result might be larger than the...

... geeft dit resultaat.

Indien $b \neq 0$ en $a \neq 1$, heeft het stelsel precies één oplossing die we hier kunnen aflezen.

Domain of the result might be larger than the...

Om het geval $b \neq 0$ af te werken moeten we nog onderzoeken hoe het zit indien $a = 1$. We vullen deze waarde voor a dus gewoon in de matrix in.

Domain of the result might be larger than the...

Zonder dat we nog verder moeten rijherleiden krijgen we de rijcanonieke vorm. Het stelsel heeft in dit geval oneindig veel oplossingen.

TI-84 Plus calculator screen showing a matrix $\begin{bmatrix} 1 & -a \cdot b & 1 & b \\ 0 & a^2 \cdot b + b & 1 - a & 1 - a \cdot b \\ 0 & a \cdot b + b & a - 1 & 1 - b \end{bmatrix}$ with $b=0$. The result shows the reduced row echelon form $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a & 1 \\ 0 & 0 & a - 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Vervolgens keren we terug naar voren om de matrix op te pikken waar we de opsplitsing maakten tussen b wel of niet gelijk aan nul en stellen in die matrix $b = 0$.

TI-84 Plus calculator screen showing the operation $\text{mRow}\left(\frac{1}{1-a}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - a & 1 \\ 0 & 0 & a - 1 & 1 \end{bmatrix}, 2\right)$. The result shows the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & a - 1 & 1 \end{bmatrix}$.

We delen rij 2 door $1 - a$. Dit veronderstelt dat we aannemen dat $a \neq 1$.

TI-84 Plus calculator screen showing the reduced row echelon form of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & a - 1 & 1 \end{bmatrix}$. The result shows the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Via rijherleiden vinden we dat het stelsel in dit geval vals is.

TI-84 Plus calculator screen showing the reduced row echelon form of the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{a-1} \\ 0 & 0 & a - 1 & 1 \end{bmatrix}$ for $a=1$. The result shows the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ook indien $a = 1$, is het stelsel vals.

Samenvatting van de oplossing

	$b \neq 0$	$b = 0$
$a \neq 1$	<p>één oplossing, nl.</p> $\left(\frac{a+b}{a^2+a+2}, \frac{-(ab+b-2)}{(a^2+a+2) \cdot b}, \frac{a+b}{a^2+a+2} \right)$	geen oplossingen (vals stelsel)
$a = 1$	$\text{Opl } S = \left\{ \left(\frac{b+1}{2} - r, \frac{-(b-1)}{2b}, r \right) \mid r \in \mathbb{R} \right\}$	

Parameters in de ruimtemeetkunde: opgave 3

Gegeven: $A(3, -1, 1), B(5, -3, 1), C(3, 3, 5);$

m is de rechte door C met $\vec{d}(1, 0, 2)$ als richtingsvector.

Gevraagd: toon aan dat er door het punt $P(3, 1, 1)$ geen rechte mogelijk is die zowel AB als m snijdt.

Een van mijn leerlingen voerde meteen een richtingsvector in, door te starten met de vergelijking

$$p \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + a \cdot t \\ y = 1 + b \cdot t, \\ z = 1 + c \cdot t \end{cases}$$

In de extra opgave wordt gevraagd om aan te tonen dat er geen a, b en c bestaan waarvoor p zowel AB als m snijdt.

De andere twee rechten hebben als vergelijking:

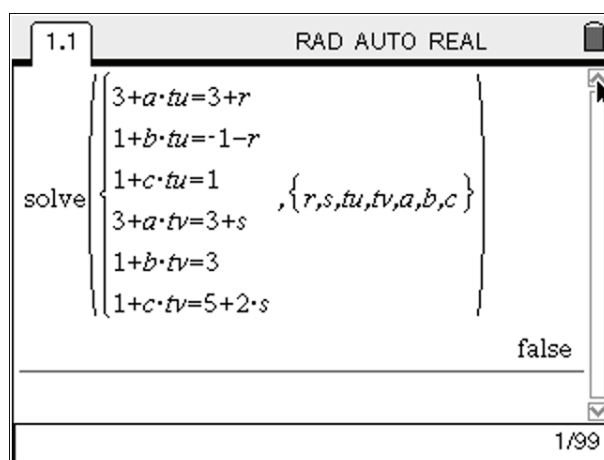
$$AB \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + r \\ y = -1 - r \\ z = 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad m \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 3 \\ z = 5 + 2s \end{cases}$$

Eerste aanpak: één groot stelsel

Tijdens de workshop merkte ik dat verschillende personen een aanpak volgden die verschilt van wat ik in gedachten had en minder CAS-complicaties oplevert.

Stel dat er een snijpunt U van p en AB is, dan is er een waarde voor r en t waarvoor de x, y en z uit beide vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn. Idem voor een snijpunt V tussen p en m , al is het belangrijk te beseffen dat de waarde voor t niet dezelfde zal zijn als voor het snijpunt van p en AB . Vandaar dat we twee t -waarden t_U en t_V moeten werken.

Met de TI-*nspire* vind je:

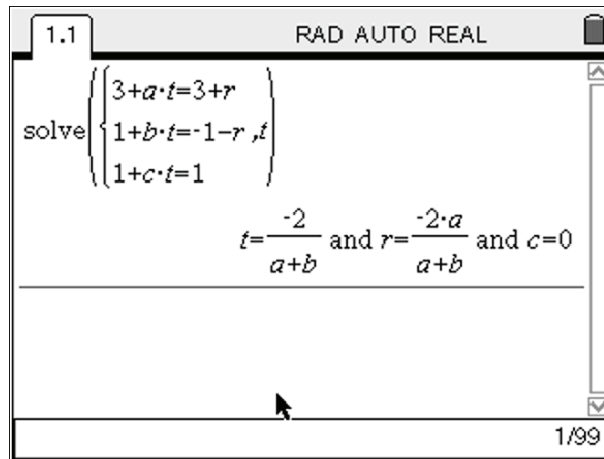


Het stelsel heeft geen oplossingen, er zijn dus geen waarden voor a, b en c die aan de gestelde eisen voldoen.

Tweede mogelijke aanpak: iets meer stap per stap werken

Zelf werk ik liever stap per stap, omdat ik zo het gevoel heb het overzicht en inzicht beter te kunnen bewaren.

Mijn eerste stap was daarom te kijken onder welke voorwaarde(n) p de rechte AB kan snijden. Ik zocht enkel de waarde van t :



Het correct lezen van deze machine-output is ook een vaardigheid die je je als gebruiker eigen moet maken. Om te beginnen, krijgen we meer dan we vroegen: we krijgen ook een uitdrukking voor de parameter r . Die eerste ‘and’ kun je dus gewoon lezen als ‘en’. Die laatste vergelijking is eerder een *bestaansvoorwaarde*, zodat je die tweede ‘and’ beter leest als ‘op voorwaarde dat’. Het toestel geeft ons, op een bepaalde manier, twee equivalente stelsels.

$$\begin{cases} 3 + at = 3 + r \\ 1 + bt = -1 - r \\ 1 + ct = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-2}{a+b} \\ r = \frac{-2a}{a+b} \\ c = 0 \end{cases}$$

Indien er dus een snijpunt is, zal t gelijk zijn aan $\frac{-2}{a+b}$, op voorwaarde dat $c = 0$. Impliciet is een tweede bestaansvoorwaarde gegeven: $a + b \neq 0$.

Analoog:

The screenshot shows a TI-84 Plus calculator screen with the following content:

- Top status bar: 1.1, RAD AUTO REAL
- Equation: $t = \frac{-2}{a+b}$ and $r = \frac{-2 \cdot a}{a+b}$ and $c=0$
- Solve command: $\text{solve} \left\{ \begin{array}{l} 3+a \cdot t=3+s \\ 1+b \cdot t=3 \\ 1+c \cdot t=5+2 \cdot s \end{array} \right. , t$
- Solution: $t = \frac{2}{b}$ and $s = \frac{-(2 \cdot b - c)}{b}$ and $a = \frac{-(2 \cdot b - c)}{2}$
- Bottom status bar: 2/99

Uit deze oplossing volgen niet alleen uitdrukkingen voor de twee parameters t en s in functie van de richtingsgetallen, maar ook nieuwe bestaansvoorwaarden:

$$b \neq 0 \quad \text{en} \quad a = \frac{-2b+c}{2} \stackrel{c=0}{\Leftrightarrow} a = -b \Leftrightarrow a+b=0.$$

Deze laatste bestaansvoorwaarde voor een snijpunt tussen p en m maakt een snijpunt tussen p en AB echter onmogelijk.

Het is dus niet mogelijk om een a , b en c te vinden zodat p tegelijkertijd AB en m snijdt.