

Minder rekenen, meer wiskunde

plenaire lezing

Hilde Eggermont, Pedro Tytgat
Sint-Pieterscollege Leuven

T³ Symposium Oostende 2009

Achtergrond

- Pilotproject Texas Instruments
ervaring opdoen met een CAS en die delen met collega's in Vlaanderen, via workshops, klasteksten,...
- Project loopt sinds 2005-2006.
- Vorig schooljaar:
 - 6^e jaar 6u: TI-89 (alle klassen)
 - 6^e jaar 8u: TI-*inspire*

2

Doelstellingen van de lezing

- NIET
 - onvoorwaardelijke promotie voor CAS als
 - 'dé toekomst van het wiskundeonderwijs',
 - 'dé aanpak van de 21^e eeuw',
 - 'het meest fantastische wat ons sinds de uitvinding van kleurenkrijt is overkomen', ...
 - promotie voor welbepaalde CAS-technologie
 - technisch hoogstaande capriolen om jullie te verbazen met wat zo'n toestel kan
 - spitsvondigheden die de grenzen van het toestel verkennen

3

Doelstellingen van de lezing

- WEL
 - enkele ervaringen delen die de wisselwerking CAS-wiskunde illustreren
 - onze persoonlijke visie ("CAS is vaak een zeer nuttig hulpmiddel, dat het wiskundig redeneren niet in de weg staat") verduidelijken

4

Analyse: eenvoudig voorbeeld

□ Opgave

Bepaal het voorschrift van de derdegraadsveeltermfunctie die -2 als nulpunt heeft, in 5 een extreme waarde gelijk aan 49 bereikt en in het punt $P(3, f(3))$ een buigpunt heeft.

5

Analyse: eenvoudig voorbeeld

Functie:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Voorwaarden:

$$\begin{cases} f(-2) = 0 \\ f(5) = 49 \\ f'(5) = 0 \\ f''(3) = 0. \end{cases}$$

6

Analyse: eenvoudig voorbeeld

7

Analyse: eenvoudig voorbeeld

We kozen dit voorbeeld

- om te illustreren hoe het rekenwerk door een CAS-toestel naar de achtergrond kan verschuiven.

8

Analyse: lastiger voorbeeld

▣ *Opgave*

f heeft een voorschrift van de vorm

$$f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}+c}{\sqrt{x+d}}.$$

Verder is $\text{dom } f = [2, +\infty[$, bereikt f een extremum in het punt $P(4, 2)$ en is

$$f(2) = 4(\sqrt{2} - 1).$$

Bepaal dan a , b , c en d .

9

Analyse: lastiger voorbeeld

▣ De eenvoudige voorwaarden:

$$\begin{cases} f(4) = 2 \\ f'(4) = 0 \\ f(2) = 4 \cdot (\sqrt{2} - 1) \end{cases}$$

10

Analyse: lastiger voorbeeld

▣ De lastige voorwaarde: het domein van

$$f(x) = \frac{\sqrt{ax+b}+c}{\sqrt{x+d}} \text{ is } \text{dom } f = [2, +\infty[$$

▣ Voorwaarden domein:

$$ax+b \geq 0 \text{ en } x \geq 0 \text{ en } \sqrt{x+d} \neq 0$$

11

Analyse: lastiger voorbeeld

Dit geeft:

$$ax+b \geq 0 \text{ en } x \geq 0 \Leftrightarrow x \in [2, +\infty[$$

$$\text{impliceert: } 2a+b=0 \text{ en } a>0$$

en:

$$\sqrt{x+d} \neq 0 \text{ in } [2, +\infty[$$

$$\text{impliceert: } x < 2 \text{ indien } \sqrt{x+d} = 0$$

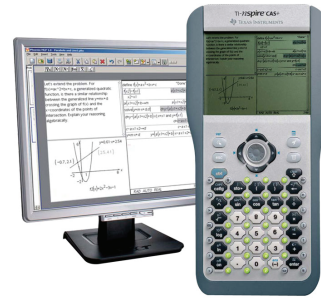
12

Analyse: lastiger voorbeeld

□ Alle voorwaarden:

$$\begin{cases} 2a + b = 0 & (1) \\ f(2) = 4 \cdot (\sqrt{2} - 1) & (2) \\ f(4) = 2 & (3) \\ f'(4) = 0 & (4) \\ a > 0 & (5) \\ x < 2 \text{ indien } \sqrt{x} + d = 0 & (6) \end{cases}$$

13

Analyse: lastiger voorbeeld

14

Analyse: lastiger voorbeeld

- Twee oplossingen? Nog voorwaarden (5) en (6) controleren!
- Voorwaarde (5): $a > 0$
OK!
- Voorwaarde (6): nulpunt noemer < 2
OK indien d positief
Niet OK indien $d = -2$:

$$\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4$$

15

Analyse: lastiger voorbeeld

Er is dus slechts één oplossing, nl.

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-4} + 4}{\sqrt{x} + 1}$$

16

Analyse: lastiger voorbeeld

We kozen dit voorbeeld omdat

- het duidelijk maakt dat CAS meer vraagt dan blindelings vergelijkingen intypen;
- het laat zien dat je zelf een doordachte keuze moet maken om de machine het stelsel toch te laten oplossen

17

Ruimte meetkunde & algebra

□ Gegeven

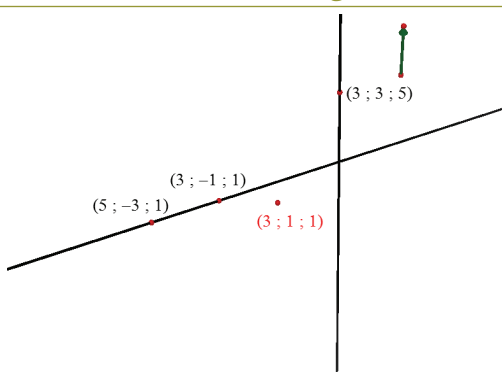
$A(3, -1, 1)$, $B(5, -3, 1)$, $C(3, 3, 5)$;
 m is de rechte door C met richtingsvector $\vec{d}(1, 0, 2)$

□ Gevraagd

Toon aan dat er door het punt $P(3, 1, 1)$ geen rechte mogelijk is die zowel AB als m snijdt.

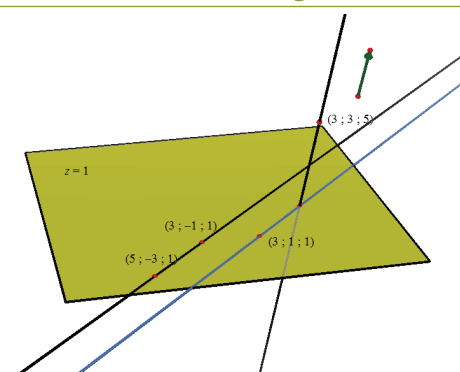
18

Ruimte meetkunde & algebra



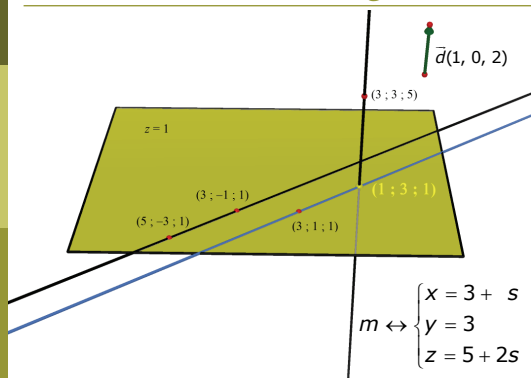
19

Ruimte meetkunde & algebra: klassiek



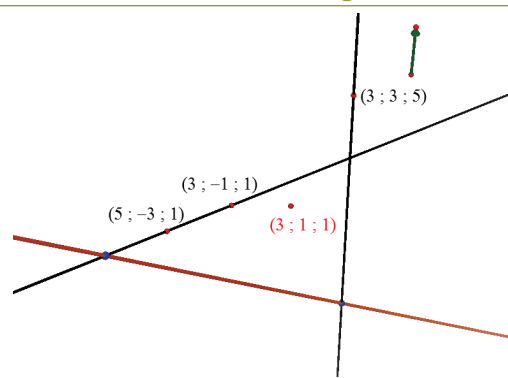
20

Ruimte meetkunde & algebra : klassiek



21

Ruimte meetkunde & algebra: anders



22

Ruimte meetkunde & algebra: anders



23

Ruimte meetkunde & algebra: evaluatie

- Voordeel aanpak leerkracht:
 - slechts 1 parameter wordt ingevoerd (3 bij leerling)
 - enkel lineaire vergelijking (3 niet-lineaire bij leerling)
- Waarom voordeel? Is dat nog zo?
 - aantal vergelijkingen niet langer relevant bij CAS
 - niet-lineariteit van de vergelijkingen ook niet relevant (of nauwelijks)
- Positieve aanpak leerling:
 - transfer van een redenering uit één soort oefening naar een andere
 - inzicht in de betekenis van de parameters vereist om aanpak tot een goed einde te brengen

24

Ruimte meetkunde & algebra: evaluatie

- Gevaren bij roekeloos invoeren van parameters of onbekenden in een vraagstuk
 - je moet meer voorwaarden zien te vinden
 - je moet verdraaid goed onthouden wat de betekenis van de verschillende parameters is
- Niet elke leerling kan dit. Een CAS maskeert die onkunde niet.
- Het pleiten voor zo weinig mogelijk parameters blijft zinvol.

25

Bespreken van stelsels: voorbeeld 1

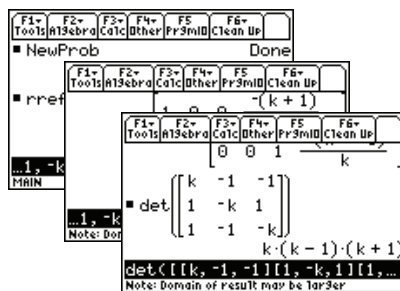
- Opgave:
Los op en bespreek het volgende stelsel met parameter k :

$$\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x - ky + z = k \\ x - y - kz = k^2 \end{cases}$$

26

Bespreken van stelsels: voorbeeld 1

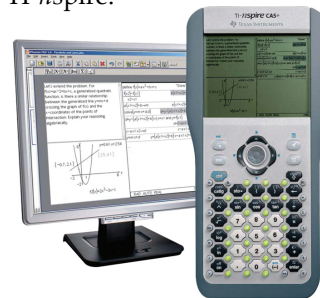
- Met de TI89:



27

Bespreken van stelsels: voorbeeld 1

- Met de TI-nspire:



28

Bespreken van stelsels: voorbeeld 1

Dit voorbeeld illustreert

- dat het type CAS-toestel de oplossingsstrategie beïnvloedt;
- dat afspraken met de leerlingen nodig zijn rond hoe antwoorden noteren;
- dat sommige oefeningen niet veel meer inhouden als je het rekenwerk wegneemt.

29

Toepassing: vergelijking van een vlak

- Gevraagd: vergelijking van het vlak door het punt $A(1,2,3)$ en met richtingsvectoren $\vec{u}(2,-1,4)$ en $\vec{v}(3,4,-2)$.

30

Toepassing: vergelijking van een vlak

- Parametervergelijkingen van α :

$$\alpha \leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2r + 3s \\ y = 2 - r + 4s \\ z = 3 + 4r - 2s \end{cases}$$

Vergelijking zoeken door parameters te elimineren.

31

Toepassing: vergelijking van een vlak

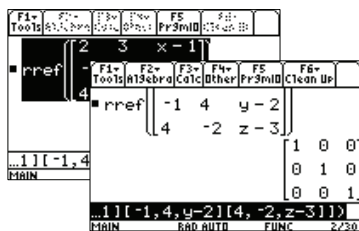
- Parametervergelijkingen van α herschrijven:

$$\begin{cases} 2r + 3s = x - 1 \\ -r + 4s = y - 2 \\ 4r - 2s = z - 3 \end{cases}$$

32

Toepassing: vergelijking van een vlak

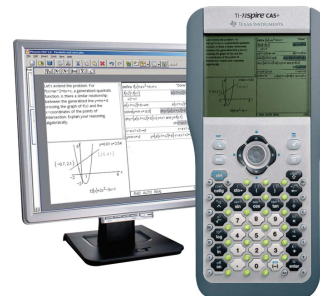
- Elimineren met TI89



33

Toepassing: vergelijking van een vlak

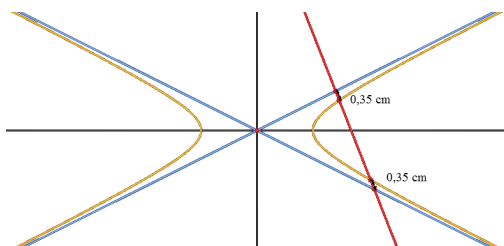
- Elimineren met TI-nspire



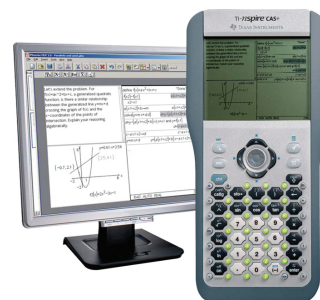
34

Beauty and the Beast

- Toon aan: wanneer een rechte r een hyperbool \mathcal{H} snijdt in de punten P en Q en de asymptoten van \mathcal{H} in C en D , dan is $\overline{CP} = \overline{QD}$.



35

Beauty and the Beast: the Beast

36

Beauty and the Beast: the Beast

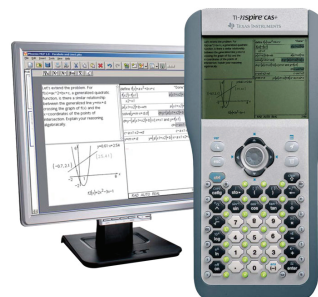
De coördinaten van de snijpunten P en Q van r en \mathcal{H} zijn:

$$x = \frac{-a^2mq \pm ab\sqrt{b^2 + q^2 - a^2m^2}}{a^2m^2 - b^2}$$

en

$$y = \frac{-b^2q \pm abm\sqrt{b^2 + q^2 - a^2m^2}}{a^2m^2 - b^2}$$

37

Beauty and the Beast: the Beast

38

Beauty and the Beast: the Beast

De coördinaten van de snijpunten C en D van r en de asymptoten van \mathcal{H} zijn:

$$\left(\frac{-aq}{am - b}, \frac{-bq}{am - b} \right)$$

en

$$\left(\frac{-aq}{am + b}, \frac{bq}{am + b} \right)$$

We controleren of $\overline{CP} = \overline{QD}$.

39

Beauty and the Beast: the Beast

40

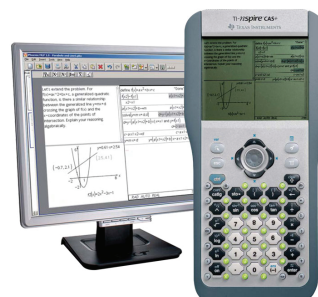
Beauty and the Beast: a Beauty

- De vergelijkingen van de asymptoten van een hyperbool kunnen eenvoudiger geschreven worden:

$$y = \pm \frac{b}{a}x \Leftrightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

- De gelijkenissen in de vergelijkingen, laten gelijkenissen tussen de snijpunten vermoeden (wat we net moeten aantonen).

41

Beauty and the Beast: a Beauty

42

Beauty and the Beast: a Beauty

- De snijpunten ontstaan uit de vergelijkingen

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2(b^2 + q^2) = 0$$

en

$$(a^2m^2 - b^2)x^2 + 2a^2mqx + a^2q^2 = 0$$

maar we lossen die nog niet op...

- $\overline{CP} = \overline{QD}$ a.s.a. het *midden* van $[PQ]$ gelijk is aan dat van $[CD]$.
We hebben dus $\frac{x_1 + x_2}{2}$ nodig en uit de vergelijkingen lezen we rechtstreeks af dat die voor beide stellen punten gelijk zijn, zonder enig verder rekenwerk!

43

Beauty and the Beast

Interessant bij dit voorbeeld is:

- Bruut rekenwerk is mogelijk, maar levert geen nieuwe inzichten op (niet enkel bij CAS...), enkel 'punten'.
- Voldoende aandacht voor 'schone' algebraïsche oplossingen levert wél nieuwe inzichten op:
 - door aandacht te hebben voor verbanden tussen de vergelijkingen, kan heel wat tijd gewonnen worden
 - je hoeft een vergelijking niet op te lossen om iets over haar nulpunten te zeggen
 - werken met *middens* is een handige 'truc'

44

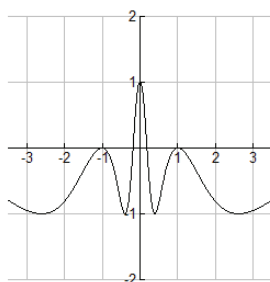
Extraatje

- De afgebeelde functie is van de vorm

$$f(x) = \cos\left(\frac{6\pi x}{2 + mx^2}\right)$$

- In het punt $x = 1$ heeft $f(x)$ een nulpunt en bereikt $f(x)$ ook een maximum.

Bepaal de parameter m .



45

Besluiten

CAS: soms een meerwaarde

- steriel rekenwerk kan aan toestel overgelaten worden
- nieuwe oplossingsmethodes worden mogelijk
- repetitieve, arme opgaven met veel rekenwerk, kunnen vervangen worden door rijkere redeneeropdrachten
- meer neiging tot experimenteren en exploreren, aangezien berekeningen sneller en juist gebeuren.
- Syntax van toestel dwingt leerlingen om bewuster met notaties om te gaan: bijv. "oplossen naar x ".

46

Besluiten

CAS: soms geen meerwaarde

- te technische afhandeling van berekeningen (niet enkel bij CAS een gevaar, trouwens)
- toestel geeft soms onverklaarbare oplossingen: heeft zeer negatief effect op vertrouwen leerlingen in het toestel of het programma
- manuele vaardigheden (eenvoudige afgeleiden berekenen, bijv.) kunnen onder overdaad aan CAS gaan lijden
- wie niet goed wiskundig kan redeneren, ondervindt zelden meerwaarde van een CAS bij redeneeropdrachten

47

Onze ideale CAS

- Evolveert mee met leerling: sommige functionaliteiten zijn pas beschikbaar als ze manueel en vooral mentaal voldoende worden beheerst.
- Is meer een LEER-instrument, dat feedback kan geven of keuzes kan voorstellen en evalueren, i.p.v. meteen alles op te lossen.
- ...

48