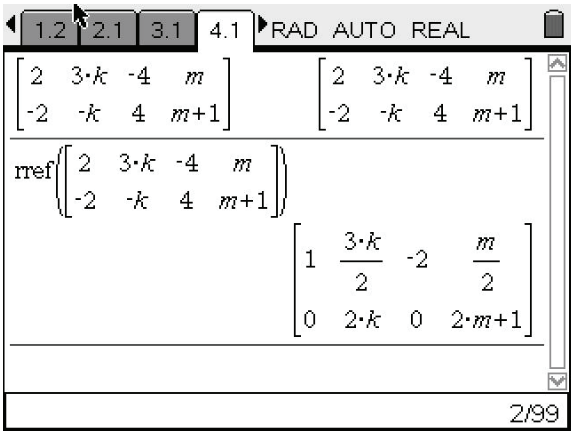
Mogelijke oplossing voor de opdrachten uit de workshop

Bespreken van stelsels: opgave 1

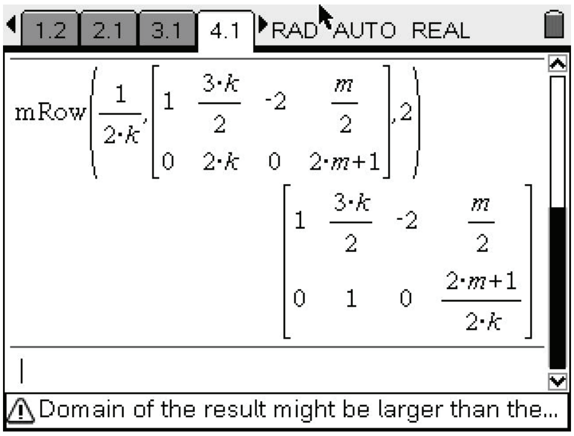
Los op en bespreek het volgende stelsel met parameters k en m:

$$\begin{cases} 2x+3ky-4z=m \\ -2x-ky+4z=m+1 \end{cases}$$

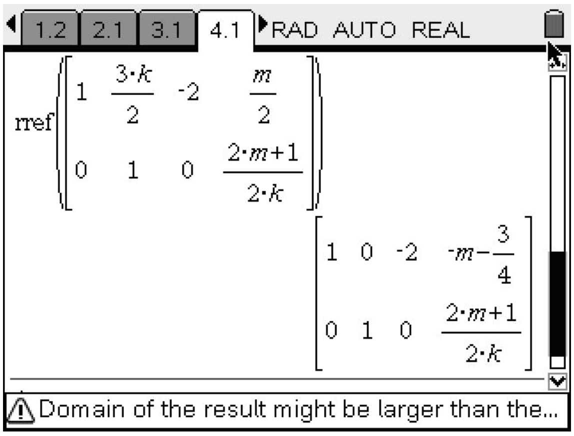
Oplossing:



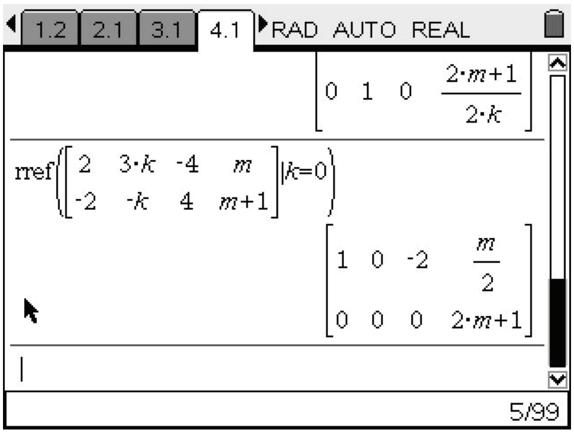
We voeren de matrix van het stelsel in en laten de machine de matrix zo ver mogelijk rijherleiden met de opdracht rref.



Om in de tweede rij een spilelement verschillend van nul te krijgen delen we deze rij door 2k. Dit kan alleen als $k \neq 0$.

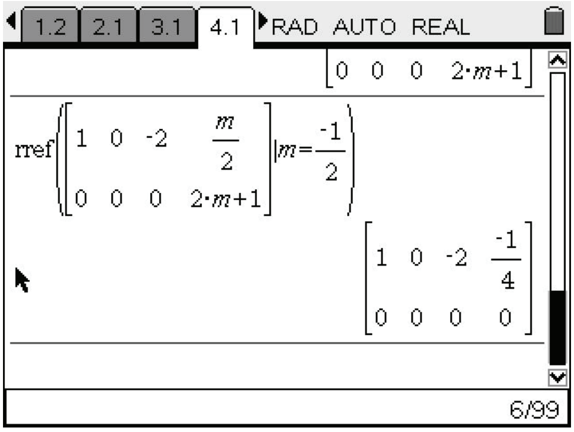


We kunnen nu verder herleiden naar rijcanonieke vorm. We gebruiken hiervoor opnieuw rref. Het resultaat is inderdaad een rijcanonieke vorm. Het stelsel heeft oneindig veel oplossingen die we hier kunnen uit aflezen.



Het enige bijzondere geval dat we nog moeten bekijken is k = 0.

Indien $m=-\dfrac{1}{2}$ heeft het stelsel oneindig veel oplossingen en indien $m \neq -\dfrac{1}{2}$ zijn er *geen oplossingen.*



Door die waarde voor m in te vullen en te rijherleiden, kunnen we ook voor dit geval de oplossingen aflezen.

Samenvatting van de oplossing

<table>
<tr><td></td><td>$k = 0$</td><td>$k \neq 0$</td></tr>
<tr><td>$m = -\frac{1}{2}$</td><td>Opl $S = \left\{ \left(-\frac{1}{4} + 2s, r, s \right) \middle| r, s \in \mathbb{R} \right\}$</td><td rowspan="2">Opl $S = \left\{ \left(-m - \frac{3}{4} + 2r, \frac{2m+1}{2k}, r \right) \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$</td></tr>
<tr><td>$m \neq -\frac{1}{2}$</td><td>geen oplossingen
(vals stelsel)</td></tr>
</table>

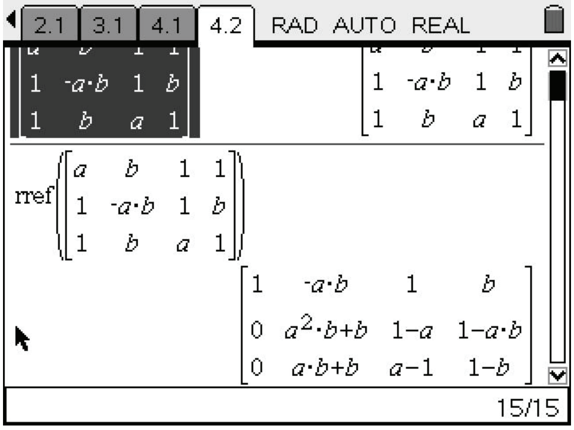
Opmerking: Een voordeel van de gevolgde strategie is dat het geen verschil maakt of het aantal vergelijkingen gelijk is aan het aantal onbekenden of niet. Dit probleem heb je wel indien je met determinanten werkt.

Bespreken van stelsels: opgave 2

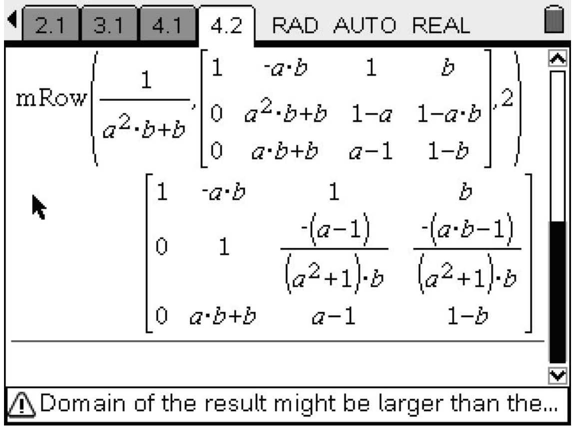
Los op en bespreek het volgende stelsel met parameters a en b:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x - aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

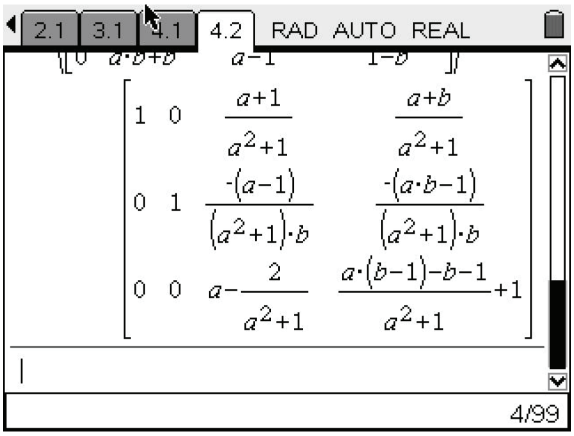
Oplossing:



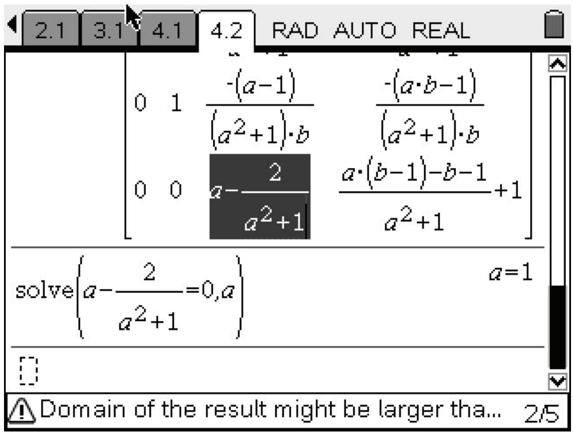
De matrix van het stelsel wordt ingevoerd en we laten de rekenmachine de matrix rijherleiden.



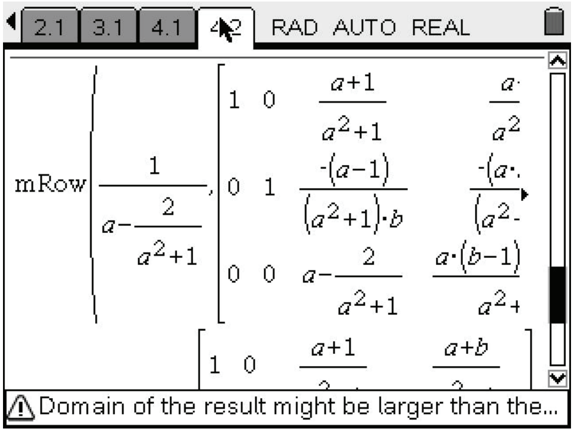
We hebben de keuze om ofwel de tweede rij te delen door a^2b+b ofwel de derde rij te delen door $ab+b$. We kiezen voor het eerste omdat a^2b+b slechts nul is indien $b = 0$. Voor de andere uitdrukking zijn er twee mogelijke gevallen.



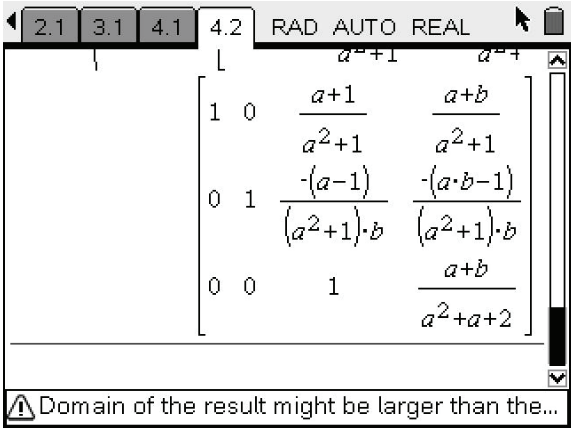
Na nog eens rref toe te passen krijgen we dit resultaat.



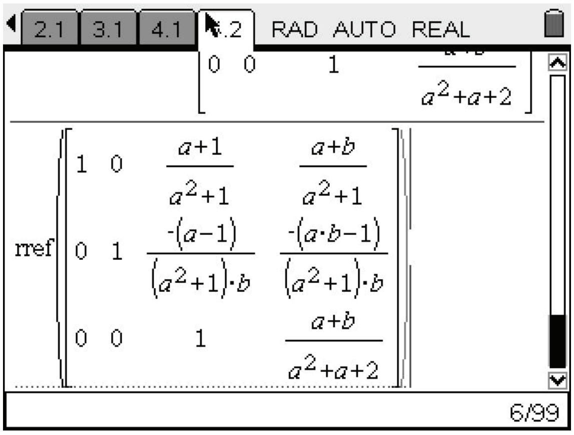
We moeten nu de derde rij delen door het getal dat hier geselecteerd is. We onderzoeken wanneer deze uitdrukking nul wordt. Dit is zo als $a = 1$.



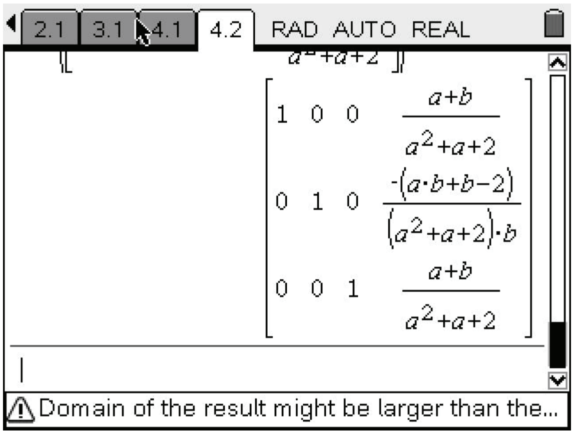
We delen rij 3 door die uitdrukking…



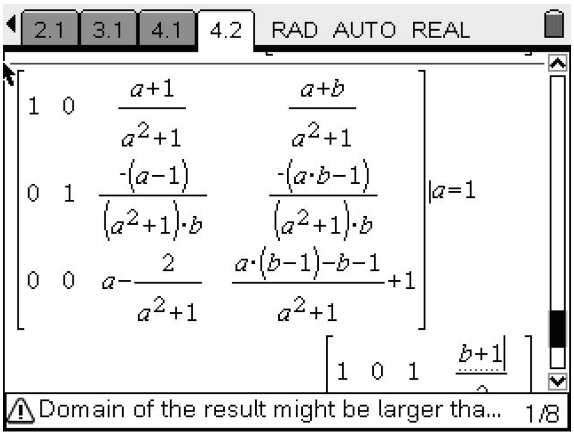
… met dit resultaat als gevolg.



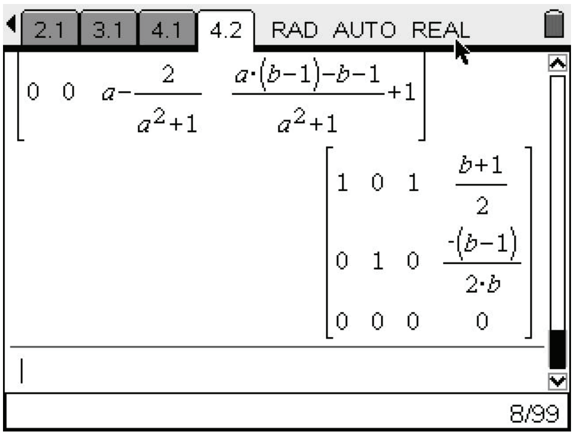
Verder rijherleiden naar rijcanonieke vorm…



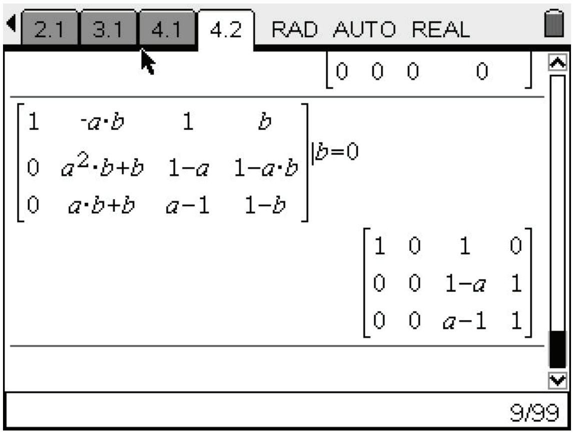
… geeft dit resultaat.
Indien $b \neq 0$ en $a \neq 1$, heeft het stelsel precies één oplossing die we hier kunnen aflezen.



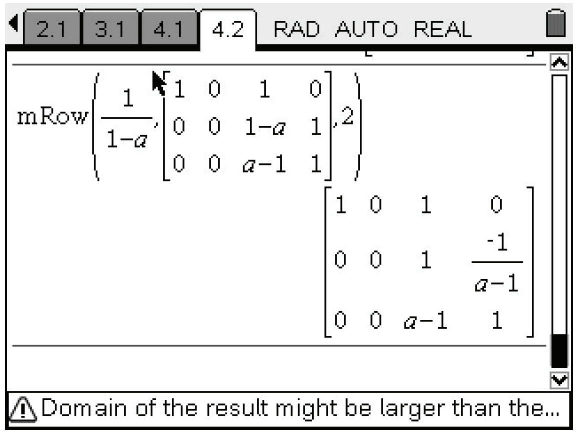
Om het geval $b \neq 0$ af te werken moeten we nog onderzoeken hoe het zit indien $a = 1$. We vullen deze waarde voor a dus gewoon in de matrix in.



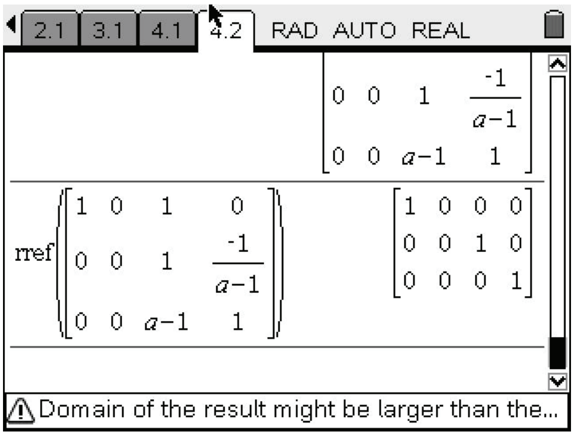
Zonder dat we nog verder moeten rijherleiden krijgen we de rijcanonieke vorm. Het stelsel heeft in dit geval oneindig veel oplossingen.



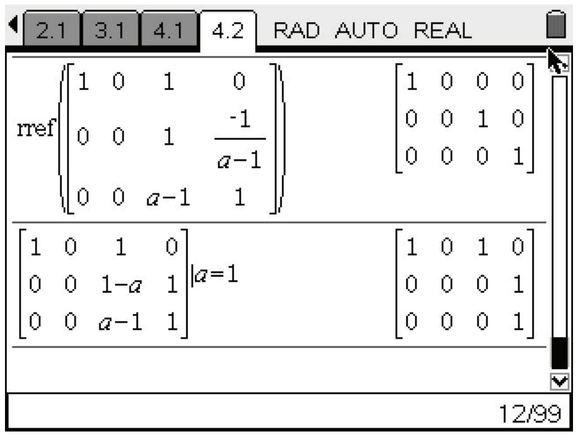
Vervolgens keren we terug naar voren om de matrix op te pikken waar we de opsplitsing maakten tussen b wel of niet gelijk aan nul en stellen in die matrix b = 0.



We delen rij 2 door $1 - a$*. Dit veronderstelt dat we aannemen dat* $a \neq 1$.



Via rijherleiden vinden we dat het stelsel in dit geval vals is.



Ook indien $a = 1$*, is het stelsel vals.*

Samenvatting van de oplossing

	$b \neq 0$	$b = 0$
$a \neq 1$	één oplossing, nl. $\left(\dfrac{a+b}{a^2+a+2}, \dfrac{-(ab+b-2)}{(a^2+a+2)\cdot b}, \dfrac{a+b}{a^2+a+2}\right)$	geen oplossingen (vals stelsel)
$a = 1$	Opl $S = \left\{\left(\dfrac{b+1}{2} - r, \dfrac{-(b-1)}{2b}, r\right) \middle| r \in \mathbb{R}\right\}$	

Parameters in de ruimtemeetkunde: opgave 3

Gegeven:	$A(3, -1, 1)$, $B(5, -3, 1)$, $C(3, 3, 5)$;
	m is de rechte door C met $\vec{d}(1, 0, 2)$ als richtingsvector.
Gevraagd:	toon aan dat er door het punt $P(3, 1, 1)$ geen rechte mogelijk is die zowel AB als m snijdt.

Een van mijn leerlingen voerde meteen een richtingsvector in, door te starten met de vergelijking

$$p \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + a \cdot t \\ y = 1 + b \cdot t \\ z = 1 + c \cdot t \end{cases},$$

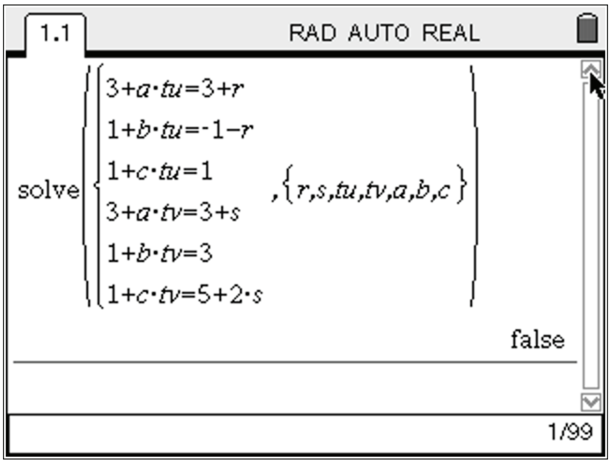
In de extra opgave wordt gevraagd om aan te tonen dat er geen a, b en c bestaan waarvoor p zowel AB als m snijdt.

De andere twee rechten hebben als vergelijking:

$$AB \leftrightarrow \begin{cases} x = \ \ 3 + r \\ y = -1 - r \\ z = \ \ 1 \end{cases} \quad \text{en} \quad m \leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + s \\ y = 3 \\ z = 5 + 2s \end{cases}$$

Eerste aanpak: één groot stelsel

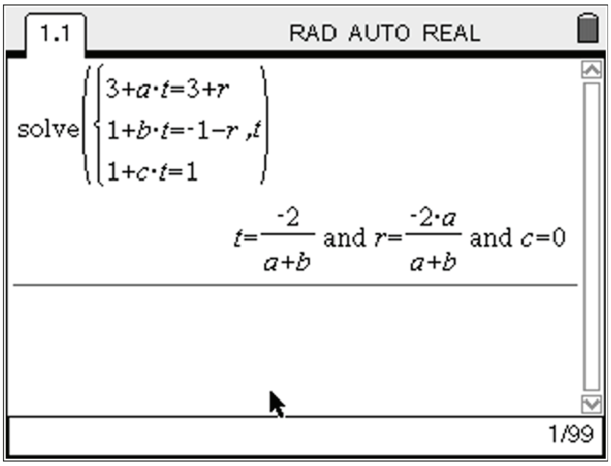
Tijdens de workshop merkte ik dat verschillende personen een aanpak volgden die verschilt van wat ik in gedachten had en minder CAS-complicaties oplevert.
Stel dat er een snijpunt U van p en AB is, dan is er een waarde voor r en t waarvoor de x, y en z uit beide vergelijkingen aan elkaar gelijk zijn. Idem voor een snijpunt V tussen p en m, al is het belangrijk te beseffen dat de waarde voor t niet dezelfde zal zijn als voor het snijpunt van p en AB. Vandaar dat we twee t-waarden t_U en t_V moeten werken.
Met de TI-*n*spire vind je:



Het stelsel heeft geen oplossingen, er zijn dus geen waarden voor a, b en c die aan de gestelde eisen voldoen.

Tweede mogelijke aanpak: iets meer stap per stap werken

Zelf werk ik liever stap per stap, omdat ik zo het gevoel heb het overzicht en inzicht beter te kunnen bewaren.
Mijn eerste stap was daarom te kijken onder welke voorwaarde(n) p de rechte AB kan snijden. Ik zocht enkel de waarde van t:

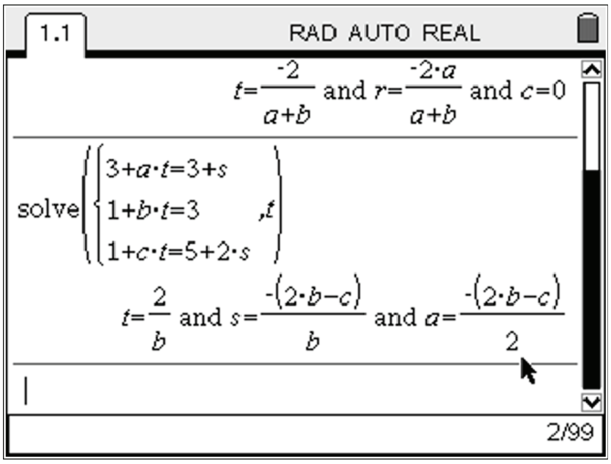


Het correct lezen van deze machine-output is ook een vaardigheid die je je als gebruiker eigen moet maken. Om te beginnen, krijgen we meer dan we vroegen: we krijgen ook een uitdrukking voor de parameter r. Die eerste '*and*' kun je dus gewoon lezen als 'en'. Die laatste vergelijking is eerder een *bestaansvoorwaarde*, zodat je die tweede '*and*' beter leest als 'op voorwaarde dat'. Het toestel geeft ons, op een bepaalde manier, twee equivalente stelsels.

$$\begin{cases} 3+at=3+r \\ 1+bt=-1-r \\ 1+ct=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\dfrac{-2}{a+b} \\ r=\dfrac{-2a}{a+b} \\ c=0 \end{cases}$$

Indien er dus een snijpunt is, zal t gelijk zijn aan $\dfrac{-2}{a+b}$, op voorwaarde dat $c = 0$. Impliciet is een tweede bestaansvoorwaarde gegeven: $a+b\neq 0$.

Analoog:



Uit deze oplossing volgen niet alleen uitdrukkingen voor de twee parameters t en s in functie van de richtingsgetallen, maar ook nieuwe bestaansvoorwaarden:

$$b \neq 0 \quad \text{en} \quad a = \frac{-2b+c}{2} \overset{c=0}{\Leftrightarrow} a = -b \Leftrightarrow a+b=0\,.$$

Deze laatste bestaansvoorwaarde voor een snijpunt tussen p en m maakt een snijpunt tussen p en AB echter onmogelijk.

Het is dus niet mogelijk om een a, b en c te vinden zodat p tegelijkertijd AB en m snijdt.