

T³ VLAANDEREN

www.t3vlaanderen.be

20-21 augustus 2012
KHBO Campus Oostende



15^{de} T³ Europe Symposium

Wiskunde en wetenschappen ondersteunen met ICT

T³

Numeriek, grafisch, symbolisch

15

J

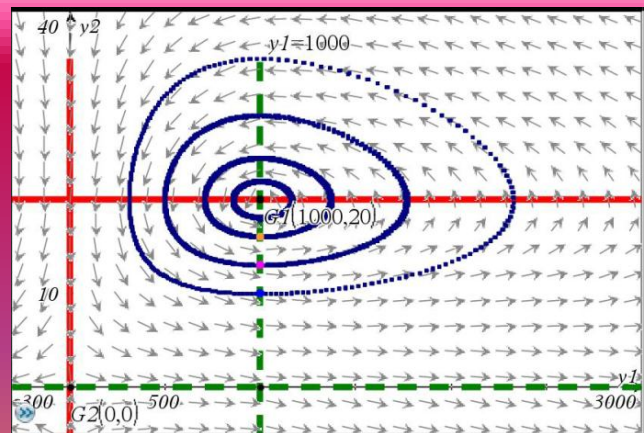
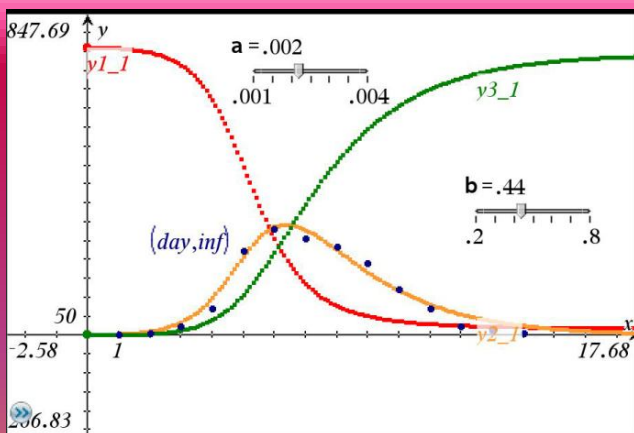
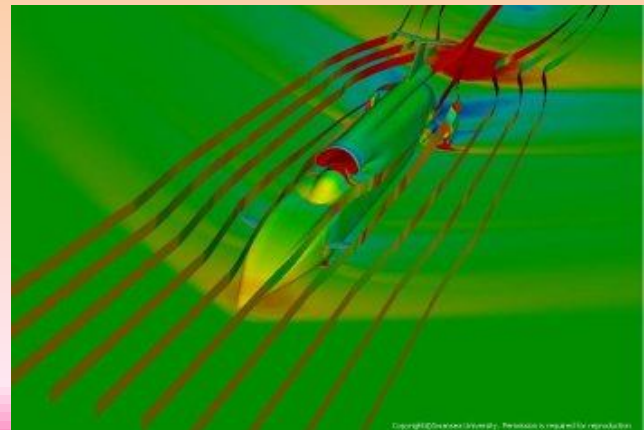
A

A

R

•

•



15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

***Wiskunde en wetenschappen
ondersteunen met ICT
Numeriek, grafisch, symbolisch***



www.t3vlaanderen.be



Inhoud

Tijdschema en abstracts

Tijdschema	1
Abstracts	3

Plenaire lezingen

1. An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS.....9
Robert Märki
2. Mathematical and Scientific Modelling:
do we tend to neglect one in favour of the other?.....29
Ian Galloway
3. T³ in de wereld..... zie www.t3vlaanderen.be
Gerhard Declair

Werkgroepen

1. BLOODHOUND SSC: the challenge of air resistance.....37
Ian Galloway
2. An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS45
Robert Märki
3. Lineaire functies en vergelijkingen zie *Lineare Funktionen und Gleichungen*
René Hugelshofer

4.	Animaties met TI-Nspire	47
	<i>René Hugelshofer</i>	
5.	Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen.....	53
	<i>Luc Blomme</i>	
6.	Leren modelleren.....	79
	<i>Johan Deprez</i>	
7.	Voorbeelden met de TI-84 Plus uit de analyse van de 3de graad ASO.....	zie cahier nr. 14
	<i>Didier Deses</i>	
8.	Voorbeelden met TI-Nspire CAS uit de analyse van de 3de graad ASO..	zie cahier nr. 33
	<i>Didier Deses</i>	
9.	De ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad.....	zie cahier nr. 32
	<i>Annelies Droessaert</i>	
10.	Basisvaardigheden van de TI-84 nu met de TI-Nspire	zie cahier nr. 34
	<i>Etienne Goemaere</i>	
11.	De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform.....	85
	<i>Lieve Lemmens en Andy Snoecx</i>	
12.	Zelfstandige opdrachten ontwikkelen voor leerlingen met TI-Nspire PublishView	zie cahier nr. 30
	<i>Wendy Luyckx en Mark Verbelen</i>	
13.	Aan de slag met TI-Nspire, concreet toegepast	103
	<i>Dominiek Ramboer</i>	
14.	Aan de slag met sensoren en DataQuest	117
	<i>Jürgen Schepers</i>	

15^{de} T³ Europe symposium



Programma Maandag 20 augustus 2012

8.15 – 9.15	Ontvangst en registratie in gebouw C, conferentielokaal
9.15 – 10.30 lokaal A01	Opening en Plenaire lezing: An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS <i>Robert Märki</i>
10.45 - 12.15 lokaal B54A D205 D206 D202	Werkgroepen – maak een keuze uit: 4) Animaties met TI-Nspire – <i>René Hugelshofer</i> 9) De ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad <i>Annelies Droessaert</i> 10) Basisvaardigheden van de TI-84 nu met TI-Nspire – <i>Etienne Goemaere</i> 14) Aan de slag met sensoren en DataQuest – <i>Jürgen Schepers</i>
12.15 – 13.45	Middagmaal & Strandwandeling of bezoek infostand. Infostand van 13.15 tot 13.45 in lokaal D201
13.45 – 15.15 lokaal B406 D203 D205 D206 B54A	Werkgroepen – maak een keuze uit: 1) BLOODHOUND SSC: the challenge of air resistance – <i>Ian Galloway</i> 5) Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen <i>Luc Blomme</i> 9) De ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad <i>Annelies Droessaert</i> 10) Basisvaardigheden van de TI-84 nu met TI-Nspire – <i>Etienne Goemaere</i> 12) Zelfstandige opdrachten ontwikkelen voor leerlingen met TI-Nspire Publishview – <i>Wendy Luyckx en Mark Verbelen</i>
15.15 – 16.00 lokaal D201	Koffie & Infostand
16.00 –17.30 lokaal B54A D205 D203 D206	Werkgroepen – maak een keuze uit: 2) An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS <i>Robert Märki</i> 6) Leren modelleren – <i>Johan Deprez</i> 11) De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform <i>Lieve Lemmens en Andy Snoecx</i> 13) Aan de slag met TI-Nspire, concreet toegepast – <i>Dominiek Ramboer</i>
17.30-18.30	Receptie 15 jaar T ³ Vlaanderen in gebouw A, eetzaal
18.30	Avondmaal

15^{de} T³ Europe symposium



Programma Dinsdag 21 augustus 2012

9.00 - 10.15 lokaal A01	Plenaire lezing: Mathematical and Scientific Modelling: do we tend to neglect one in favor of the other? – <i>Ian Galloway</i>
10.15 - 10.45 lokaal D201	Koffie & Infostand
10.45 - 12.15 lokaal B54A D203 D205 D206 D202	Werkgroepen – maak een keuze uit: 2) An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS <i>Robert Märki</i> 5) Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen <i>Luc Blomme</i> 6) Leren modelleren – <i>Johan Deprez</i> 7) Voorbeelden met de TI-84 Plus uit de analyse van de 3 ^{de} graad ASO <i>Didier Deses</i> 14) Aan de slag met sensoren en DataQuest – <i>Jürgen Schepers</i>
12.15 – 13.45	Middagmaal & Strandwandeling of bezoek infostand. Infostand van 13.15 tot 13.45 in lokaal D201
13.45 – 15.15 lokaal B54A B406 D206 D203 D205	Werkgroepen – maak een keuze uit: 3) Lineaire functies en vergelijkingen – <i>René Hugelshofer</i> 1) BLOODHOUND SSC: the challenge of air resistance – <i>Ian Galloway</i> 8) Voorbeelden met TI-Nspire CAS uit de analyse van de 3 ^{de} graad ASO <i>Didier Deses</i> 11) De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform <i>Lieve Lemmens en Andy Snoecx</i> 13) Aan de slag met TI-Nspire, concreet toegepast – <i>Dominiek Ramboer</i>
15.15 – 16.00 lokaal D201	Koffie & Infostand
16.00 – 16.45 lokaal A01	Plenaire lezing: T3 in de wereld – <i>Gerhard Declair</i> Evaluatie en Sluiting

Abstracts 15^{de} T³ Europe Symposium
Maandag 20 en dinsdag 21 augustus 2012
KHBO Campus Oostende
www.t3vlaanderen.be

Plenaire lezingen

An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire CAS (Robert Märki, T³ Zwitserland)

A wide majority of applications of calculus in different sciences consists of models with systems of differential equations e.g. dynamical systems, as any perusal of the current literature will indicate. In addition, as Henri Poincaré showed, the fundamental laws of nature are, from a mathematical point of view, differential equations. Therefore, in our opinion, differential equations and dynamical systems belong at the center of calculus. Thanks to new technologies like TI-Nspire CAS it is possible to solve differential equations numerically and graphically, so they can take their rightful place in an introductory course. The development of conceptual understanding, not algebraic technique is important.

We designed an introductory calculus course based on these guidelines. We will show, how this course is structured. It begins with a simple model (Newton's law of cooling) which leads –at first more intuitively- to the fundamental concepts of derivative (rate of change), differential equation, Euler's Method and model. The central chapters are dedicated to differential equations and dynamical systems, introducing the graphical method of state plane analysis. With the TI-Nspire technology it is possible to represent direction fields and trajectories and thanks to the sliders it is even possible to experimentally investigate the influence of the variation of the parameters of the systems. This can enhance a deep understanding of the systems under consideration. The last chapter discusses some basic algebraic methods of solving differential equations. The equation of the first chapter can eventually be solved exactly in a closed form. The usual topics of a classical calculus course are also discussed, but less extensively. With the focus on dynamical systems the great significance of calculus can be far better demonstrated than with the classical approach.

Mathematical and Scientific Modelling: do we tend to neglect one in favour of the other? (Ian Galloway, T³ Engeland)

Accepting that the difference between the two forms of modelling, scientific and mathematical, is understood, why is it that time and time again school teachers are observed ignoring scientific modelling in maths classes and ignoring mathematical modelling in science classes? Indeed in the UK the assessment system positively mitigates against aligning both forms of modelling. Historically the path to reason is littered with those who have “lost out” through not being able to relate one model to the other. Kepler with his mathematical models of the solar system failed to ask the question “why do these models fit?” and so it was left to Newton to formulate the Law of Universal Gravitation. Faraday's scientific model of lines of force to represent magnetism eventually yielded to Maxwell who described the *reality of the field* in the form of Maxwell's Equations, so giving us television and radio. Planck more recently in 1900 devised a mathematical model which fitted the behaviour of radiating bodies,

the Planck Black Body Radiation Law. This was widely regarded as a purely formal way of accommodating the experimental evidence, but the mathematical model eventually took shape as a scientific model in the form of Quantum Mechanics. This presentation seeks to establish what might be meant by the two forms of modelling and how student learning might be improved through explicitly bringing the two models together.

T³ in de wereld (Gerhard Declair, Texas Instruments)

Werkgroepen

1. *BLOODHOUND SSC: the challenge of air resistance* (Ian Galloway, T³ Engeland)

Ian Galloway is Director of Professional Development for the Bloodhound supersonic car (SSC) project. Here he describes a school classroom activity that will help students understand the challenge that engineers face to reduce air resistance on the car. TI-Nspire is used to investigate the way air resistance changes with speed. First a scientific model is developed and the resulting mathematical model is derived and tested. Students generally encounter only the mathematical model in text books, that is that air resistance varies as the square of the velocity. It is important to ask of any mathematical model, “why does this model fit the experimental data?”. In doing this one is explicitly demanding what the scientific model is. Further testing will reveal when and if the scientific model needs revising as the mathematical model eventually fails to fit the data. In the case of BLOODHOUND SSC it is easy to verify the mathematical model at low speeds and then show how this model breaks down for streamlined configurations.

2. *An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire-CAS* (Robert Märki)

TI-Nspire offers three different ways to represent dynamical systems.

- With the application „lists&spreadsheet“ using Euler’s Method
- With the application „graphs“, using the graph type „differential equations“
- With the document „dyn_sys_2d“

Each way has its advantages and disadvantages, and in different circumstances it may make sense to use all of them. The three methods are presented and the participants learn to apply this methods in various examples of dynamical systems.

3. *Lineaire functies en vergelijkingen* (René Hugelshofer, T³ Zwitserland)

Hoe kan men lineaire functies en lineaire vergelijkingen invoeren, gebruik makend van een CAS handheld maar zonder de traditionele vaardigheden te verwaarlozen?

Dit hebben we geprobeerd met onze publicatie „*Frei, Märki, Hugelshofer: Lineare Funktionen und Gleichungen*“, waarvan het concept in de workshop wordt toegelicht aan de hand van voorbeelden. Men kan de publicatie gratis downloaden. Ter plaatse worden er enkele gedrukte exemplaren uitgedeeld.

Eerst worden de lineaire functies (hoofdstuk 1) systematisch behandeld als een klasse van functies, volledig beschreven door parameters. Hierbij zijn schuifregelaars een waardevol instrument om de dynamische effecten bij wijzigende parameterwaarden te visualiseren.

Bij de stelsels van lineaire vergelijkingen (hoofdstuk 2) komt de handheld vaak aan bod. Hierbij kunnen context gebonden opgaven, ook met meerdere variabelen, zonder veel moeite worden opgelost. Er komen veel dergelijke opgaven aan bod, ter bevordering van de motivatie van de studenten.

Ten slotte komen stelsels van ongelijkheden met twee variabelen en lineair programmeren aan bod. Deze kunnen grafisch zeer goed worden voorgesteld met de handheld, in het bijzonder kan de doelfunctie goed worden gevisualiseerd m.b.v. schuifregelaars.

De workshop wordt gepresenteerd in het Engels.

PS: Van dezelfde auteurs is tevens cahier nr 27 verschenen: “Functies en vergelijkingen van de tweede graad”, ter beschikking op www.t3vlaanderen.be

4. *Animaties met TI-Nspire* (René Hugelshofer)

De deelnemers leren de verschillende mogelijkheden van animaties met TI-Nspire kennen, via voorbeelden die zij zelf onder begeleiding construeren met de computer.

De versie 3.2 levert nieuwe attractieve mogelijkheden voor animaties in combinatie met schuifregelaars, voorwaarden en opvulkleuren. Deze komen aan bod in het eerste voorbeeld “De geest van Oostende”.

In een tweede voorbeeld “De landing van een vliegtuig” wordt de animatie van een basispunt geïllustreerd (dat aan een grafiek of een meetkundig object gebonden is), en hiermee de animatie van objecten (bv. een vliegtuig), die afhankelijk zijn van dat basispunt.

Uitdagender zijn de animaties met verschillende stappen, waarbij men objecten kan laten bewegen, transformeren, verschijnen en verdwijnen. Hiermee wordt de workshop afgesloten. De verschillende mogelijkheden van animaties worden ook geïllustreerd met afgewerkte voorbeelden.

De workshop wordt gepresenteerd in het Engels.

5. *Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen* (Luc Blomme)

In 2010 is op de Europese Scholen het nieuwe wiskunde programma gestart. Een van de grote innovaties betreft het invoeren van de TI-Nspire CAS voor alle leerlingen van de laatste 4 studiejaar van de middelbare school, in alle taalafdelingen en alle studierichtingen.

In deze workshop bespreken we ervaringen, bijscholing, ontgoochelingen en valkuilen evenals enthousiaste reacties van leerlingen en collega's.

We gaan ook aan de slag met type-opgaven en examenopgaven van het Europees Baccalaureaat wiskunde “nieuwe stijl”.

6. *Leren modelleren* (Johan Deprez)

Wiskundige objecten zoals functies, matrices, ... spelen niet alleen een rol in de wiskunde zelf, maar worden ook gebruikt om tal van fenomenen in andere disciplines te beschrijven. Ze doen dan dienst als wiskundig model. Met wiskundige modellen kan je voorspellingen maken, diverse scenario's onderzoeken, ... en natuurlijk ook gewoon de realiteit beter begrijpen. In ons onderwijs gebruiken we ondertussen wel kant-en-klare wiskundige modellen. In deze sessie laten we zien hoe je leerlingen ook kunt betrekken bij het vereenvoudigen van de realiteit en vertalen naar een wiskundig model, bij het interpreteren van de resultaten en het

kritisch evalueren van het model. We voorzien een stuk voor de tweede graad en een stuk voor de derde graad. We maken voornamelijk gebruik van de TI-84.

7. *Voorbeelden met de TI-84 Plus uit de analyse van de 3^{de} graad ASO (Didier Deses)*

In deze sessie wordt, met een aantal voorbeelden uit de analyse van de 3de graad ASO, getoond hoe de TI-84 Plus in de praktijk gebruikt kan worden. Er zal nadruk gelegd worden op de meerwaarde die de TI-84 Plus kan bieden in de lessen, maar er zal ook aandacht besteed worden aan de beperkingen van het gebruik van zo'n toestel.

8. *Voorbeelden met TI-Nspire CAS uit de analyse van de 3^{de} graad ASO (Didier Deses)*

In deze sessie worden de voorbeelden uit de sessie "*Voorbeelden met de TI-84+ uit de analyse van de 3de graad ASO*" opnieuw bekeken maar nu met de TI-Nspire. Het gebruik van beide toestellen zal worden vergeleken. Het volgen van de sessie "*Voorbeelden met de TI-84+ uit de analyse van de 3de graad ASO*" is aangeraden maar niet noodzakelijk. Er zal worden aangegeven hoe de TI-Nspire in de praktijk gebruikt kan worden. Er zal nadruk gelegd worden op de meerwaarde die de TI-Nspire kan bieden in de lessen, maar er zal ook aandacht besteed worden aan de beperkingen van het gebruik van zo'n toestel.

9. *De ontwikkeling van het functiebegrip in de tweede graad (Annelies Droessaert)*

In de lessen over functies kunnen we ICT niet meer wegdenken. Samen met statistiek is dit het onderdeel bij uitstek waarvoor we in de tweede graad van een grafisch rekentoeistel gebruik maken. In deze workshop wordt getoond hoe zowel de TI-84 als TI-Nspire (software en handheld) op een kritische en vooral didactische manier kan geïmplementeerd worden. Ook andere zaken die een meerwaarde kunnen betekenen, komen aan bod (bv. TI-84 Smartview, TI Connect, ...). Verwacht hier zeker niet de meest technische zaken, de bruikbaarheid in de klas staat centraal.

10. *Basisvaardigheden van de TI-84 nu met de TI-Nspire (Etienne Goemaere)*

De gebruikelijke basisvaardigheden met de TI-84 worden uitgevoerd met TI-Nspire en de verschillen worden besproken.

Enkele voorbeelden zijn het definiëren van functies, grafieken maken van functies, vensterinstellingen aanpassen en tabellen van functiewaarden maken, stuksgewijs gedefinieerde functies definiëren, nulpunten en lokale extreme waarden van een functie bepalen, een regressie uitvoeren en grafisch voorstellen, ...

11. *De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform (Lieve Lemmens en Andy Snoecx)*

In deze workshop kan je kennis maken met de manier waarop de TI-Nspire CX CAS wordt ingezet tijdens de lessen analyse van het eerste jaar academische bachelor van de opleiding industriële wetenschappen (industriële ingenieur).

Als voorbeeld bestuderen we de opvallende kenmerken van een vlakke kromme die gegeven wordt in parameterform.

Na het maken van de grafiek doen we de klassieke analyse van de kromme. We bepalen het domein en berekenen de snijpunten van de kromme met de coördinaatassen, de asymptoten, horizontale en verticale raaklijnen alsook de raaklijn en normaal in een willekeurig punt. De kromtecirkel komt aan bod.

12. *Zelfstandige opdrachten ontwikkelen voor leerlingen met TI-Nspire PublishView* (Wendy Luyckx en Mark Verbelen)

Zelfstandige opdrachten ontwikkelen voor leerlingen met TI-Nspire PublishView

In cahier 30 worden 2 invalshoeken beschreven die een pedagogisch didactische meerwaarde zijn van het inschakelen van TI-Nspire in de wiskundelessen: inspelen op leertypes en differentiëren. In deze workshop zullen we concreet aan de slag gaan om deze ideeën te vertalen in leerlingenmateriaal en uit te werken met TI-Nspire PublishView.

13. *Aan de slag met TI-Nspire, concreet toegepast* (Dominiek Ramboer)

Aan de hand van oefeningen voor de 2^{de} en 3^{de} graad komen de verschillende applicaties van TI-Nspire aan bod. Er wordt gewerkt met de handheld en er wordt getoond hoe men snel data kan uitwisselen tussen de PC en de handheld(s). Er is geen voorkennis vereist.

14. *Aan de slag met sensoren en DataQuest* (Jürgen Schepers)

Deze workshop is een kennismaking met de Vernier DataQuest applicatie van TI-Nspire. De deelnemers meten data met verschillende sensoren en verwerken ze verder met de TI-Nspire handheld. Een aanrader voor zowel leerkrachten wetenschappen als leerkrachten wiskunde.

A series of horizontal dotted lines spanning the width of the page, intended for writing or drawing.

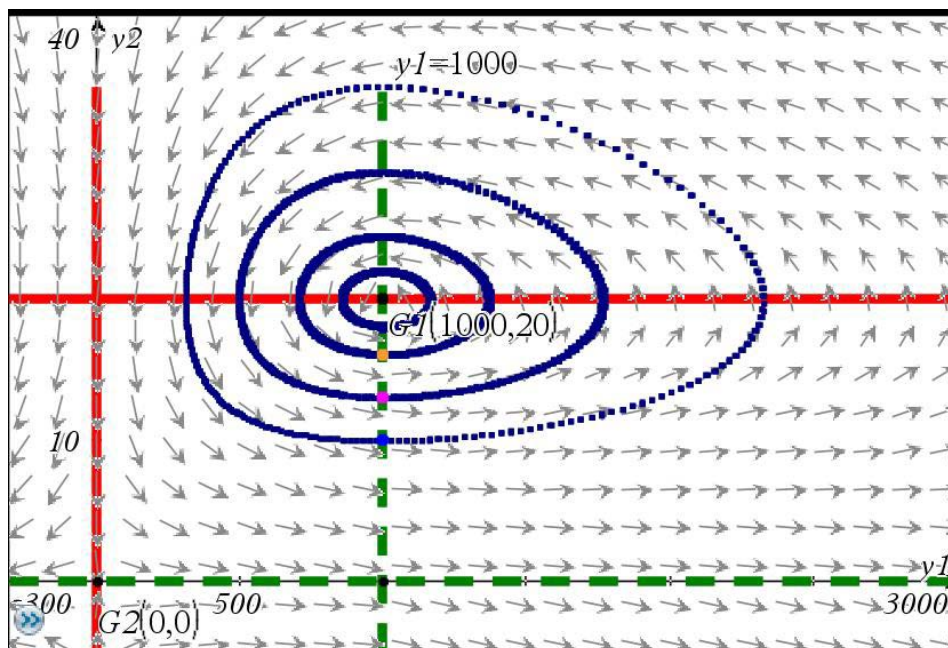


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

**An introductory calculus course with
differential equations and dynamical
systems at its center, a dynamic
approach with TI-Nspire CAS**

Robert Märki



An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at its center, a dynamic approach with TI-Nspire-CAS

Robert Märki, Gymnasium Thun-Schadau, Switzerland

Abstract

A large majority of applications of calculus in different sciences consists of models with systems of differential equations e.g. dynamical systems, as any perusal of the current literature will indicate. In addition, as Henri Poincaré showed, the fundamental laws of nature are, from a mathematical point of view, differential equations [1]. Therefore, in our opinion, differential equations and dynamical systems belong at the center of calculus. Thanks to new technologies like TI-Nspire-CAS it is possible to solve differential equations numerically and graphically, so they can take their rightful place in an introductory course. The development of conceptual understanding, not algebraic technique is important. We designed an introductory calculus course based on these guidelines [2]. We will show, how this course is structured. It begins with a simple model (Newton's law of cooling) which leads -at first more intuitively- to the fundamental concepts of derivative (rate of change), differential equation, Euler's Method and model. The central chapters are dedicated to differential equations and dynamical systems, introducing the graphical method of state plane analysis. With the TI-Nspire technology it is possible to represent direction fields and trajectories and thanks to the sliders it is even possible to experimentally investigate the influence of the variation of the parameters of the systems. This can enhance a deep understanding of the systems under consideration. The last chapter discusses some basic algebraic methods of solving differential equations. The equation of the first chapter can eventually be solved exactly in a closed form. The usual topics of a classical calculus course are also discussed, but less extensively. With the focus on dynamical systems the great significance of calculus can be far better demonstrated than with the classical approach.

1 Introduction: Why do Differential Equations and Dynamical Systems belong at the center of a calculus course?

Why do we teach calculus in schools of higher general education? Calculus is one of the most important mathematical theories ever developed and it plays an important role in

many scientific and technological contexts. Physics and engineering without calculus are simply impossible, nearly every scientist and every engineer uses methods and results from calculus in his work. From a utilitarian perspective it is very important that students of a lot of diverse disciplines have a basic knowledge of and basic competences in calculus. Moreover, calculus is one of the greatest achievements of the human mind and it is a language and a tool of modern science. It is impossible to understand the laws of physics without knowledge and comprehension of calculus and if one does not understand physics, one cannot understand nature. As Galileo Galilei told us: *Philosophy is written in that great book which ever lies before our eyes - I mean the universe - but we cannot understand it if we do not first learn the language and grasp the symbols in which it is written. This book is written in the mathematical language, and the symbols are triangles, circles and other geometrical figures, without whose help it is impossible to comprehend a single word of it; without which one wanders in vain through a dark labyrinth.* At the time of Galilei calculus was not yet invented. If calculus had been known by Galilei, he surely would have said “*derivatives, integrals, differential equations, phase planes and trajectories etc.*” instead of “*triangles, circles and other geometrical figures*”. But let us have a closer look at the way calculus is used by considering some important examples:

- **Public Health:** Every couple of years we have an epidemic like avian flu, swine flu etc. and an ordinary influenza occurs every winter. For a public health office it is very important to understand the way a disease spreads through the population and to predict what fraction falls ill and when. Furthermore, it is important to investigate the effect of different possible measures (vaccination, quarantine, drugs etc.). To this purpose, a model will be created. The model which is generally used is the S-I-R-model or a modification thereof. This model consists of a system of coupled nonlinear differential equations as we will see in more detail later in section 4.
- **Climate, Weather report:** Our daily weather report as well as the predictions concerning the climate are based on huge systems of differential equations. The most powerful computers of the world are permanently solving these equations with changing initial conditions.
- **Biology, population dynamics:** Predator-prey, symbiosis, and competition are just three different fundamental modes of interaction between populations in biology. Differential equations allow the modelling of these basic forms of interaction as well as more complicated systems with more than two species involved.
As an example a political implication: Should we completely forbid the hunting of whales? Only a careful investigation of an appropriate model could provide sufficient data for evaluating the impact of whale hunting on the ecological system of the oceans. Thus calculus, and especially differential equations, are a necessary tool for assuming responsibility and making informed decisions.
- **Economics** All kinds of dynamical systems are used to investigate and predict economical systems.

- **Physics** Physics and calculus are strongly related. Physics prompted the development of calculus and calculus enabled the development of physics. Henri Poincaré formulated this very important connection in his famous paper “the value of science” as follows: **Newton has shown us that a law is only a necessary relation between the present state of the world and its immediately subsequent state. All the other laws since discovered are nothing else; they are in sum, differential equations** [1].

These applications differ fundamentally from the applications of calculus in an ordinary introductory course. The traditional highlight of application usually consists of the determination of optimal shapes, for instance the optimal shape of a box or of a beer can.

Usually, differential equations have no place or only a very small place at the introductory level. Traditionally, differential equations is a more advanced topic, requiring one or two years of calculus as a prerequisite. It is divided into a number of cases and subcases, and an array of different techniques is developed to deal with different cases. Some of these techniques are very elegant and clever, others are very sophisticated. With these techniques mathematicians learn the intricate reasoning and analysis which is fundamental for mathematics at a higher level, but this is in most cases too sophisticated and demanding for beginners of calculus. Technology is now providing the possibility to treat differential equations and systems of differential equations with a simple and intuitively clear numerical approach. The underlying concepts are comprehensible at this level. So it is possible, at an elementary level, to address problems and concepts which the overwhelming majority of learners would never get to see in a traditional curriculum. Problems with a much larger scope and importance than the traditional problems.

2 The design of the course, guidelines

- Calculus is a language as well as a tool for exploring dynamical processes in science. Students should be able to read and write this language. The techniques of calculus, the manipulative skills, must be subordinate to an overall view of the central concepts.
- The study of modeling inevitably leads to differential equations. Differential equations should therefore be fundamental objects of study.
- The concept of a dynamical system is central to science. Technology makes it possible to explore dynamical systems at the introductory level, using a simple intuitively clear numerical approach: Euler’s Method.
- Processes of successive approximation are key tools of calculus. These processes are more important than the output -the limit- which often cannot be given in a closed form.
- Technological tools tremendously enlarge the range of questions and problems we can explore and the ways we can treat them. The appropriate use of these tools is therefore a central topic in a contemporary calculus course.

- Multiple representations: whenever possible, each topic will be represented and discussed from a numerical, a graphical and an algebraical point of view. The transition between these different modes of representation is of great importance and a software which enables these transitions is of great value.
- Euler's method plays the role of an universal mathematical and didactical tool in this course [3]. It makes it possible to solve differential equations numerically, but moreover it also provides the insight that an initial value problem has a unique solution, enables the definition of the number e and last but not least, can be used for an elegant proof of the fundamental theorem of calculus.

This course will result in substantial shifts in emphasis in comparison with a traditional course. Here are the most striking:

Increase	Decrease
concepts	manipulative skills
numerical solutions	algebraical closed-form solutions
graphs and graphical solutions	formulas
approximations	exact solutions

3 A context-orientated introduction to calculus

Nearly every introduction to calculus starts with the investigation of a tangent line, commonly a tangent line at a point of a quadratic parabola. The derivative is then defined as the slope of this tangent line. In our opinion, this is the wrong approach. The first impression is important, the first impressions lasts, so the way our students think about the derivative depends on the introduction. The slope of a tangent line is a statical concept, but the derivative should be a dynamical concept. Calculus is the mathematics of change, and the most important meaning of the derivative is that it is a measure of change: the rate of change. From a semantic and didactic point of view, there is a big difference whether, in the mind of the students, the word derivative conjures up first the rate of change rather than the slope of a tangent line. Furthermore, our starting point is, that every concept should be developed in the context of a scientific question. Our introduction starts with an experiment, the cooling of hot coffee. The process of cooling will be measured, and the data can be analyzed. Thus we start with a very fundamental question: How can I find a way from data to functions, how can I find and construct models which represent the measured data and provide an insight into the underlying processes. There are many modelling approaches. The most basic approach is an empirical. The idea is to fit a curve through the given set of data and then use this curve to predict outcomes where there are no data. The mathematical method of this approach is regression. The disadvantage of this approach is that we cannot be confident that the found function applies outside the range of the available data and that the parameters have no meaning. A much more

substantial and elaborate modelling process is at work with differential equations. With this approach we formulate mathematical equations, which describe the basic fundamental relationships between the variables of the problem and their rates of change. In other words we formulate differential equations. We will show how we can introduce with this approach not only the notion of derivative but also the concept of a differential equation and a numerical method to solve this equation. When we analyze the data, it is important to focus on the rate of change of the considered physical variable, in our introduction the temperature of the coffee. Here is an example of how the graphic and numerical representation of the measured temperature looks like

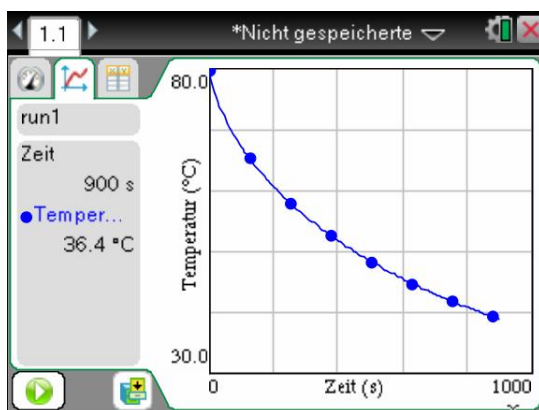


Figure 1: cooling of the coffee

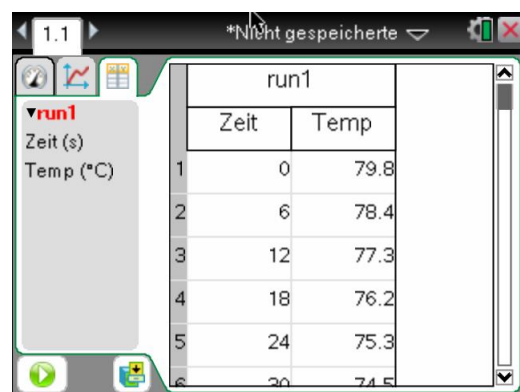


Figure 2: numerical data

If we focus on the rate of change of the temperature of the coffee, the discussion and investigation of the measured data lead more or less directly to the first model, namely *Newton's law of cooling*: The coffee cools off, and it cools off faster at the beginning, when the difference between the temperature of the coffee and the temperature of the room is greater. The simplest assumption we can make is that the rate of cooling is proportional to the temperature difference between the coffee and the room. We get the differential equation

$$T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_u),$$

$T(t)$ is the temperature as a function of the elapsed time t since the start of the measurement, T_u denotes the room temperature. $T'(t)$ will be introduced as the rate of change of the temperature and this is nothing other than the expression of how fast the temperature decreases. This is easily understood and needs no deep comprehension of tangent lines or limits although the very important concept of limit must be considered later for refining the concept of derivative and making it more precise. From the given data we can in fact just calculate *average rates of change* in very small intervals, depending on the setting of the measurement (samples/second), and we take this as an approximation of the *instantaneous rates of change* which can intuitively easily be seen and understood. It is possible to discuss at this point the difference between discrete and continuous and the transition

which consists in the process of making the time intervals smaller and smaller. The starting point of Calculus is now given in form of a simple, intuitively clear model with a differential equation. From the beginning the students deal with the core concepts of modeling, rate of change (derivative) and differential equation, concepts which will successively be refined and developed in the subsequent chapters. This happens in the clear and easily understandable context of the process of cooling of a cup of coffee. To solve this differential equation we use a simple numerical method, namely Euler's Method.

4 Euler's Method, a fundamental tool

Euler's Method is known as a simple numerical method for finding a solution of an initial value problem. An initial value problem consists of a differential equation and an initial value or a set of differential equations together with initial values. Because we have now more elaborate and more efficient methods like Runge-Kutta, Euler's Method has fallen somewhat into oblivion. However Euler's Method is of great didactic value and is a fundamental tool for teaching important concepts of calculus. Its simplicity allows us to direct the attention to the central aspects instead of struggling with technical difficulties. Let us see how Euler's Method works in the previous example, using TI-Nspire. There are several possibilities, each one with its own didactic and mathematical value.

Example: $T'(t) = -k \cdot (T(t) - T_u)$, $k = -0.1$, $T_u = 20^\circ\text{C}$, initial value $T(0) = 80^\circ\text{C}$.

Lists & Spreadsheet

- If we choose $\Delta t = 0.1$ min and a period of 20 min we define in the first column the time t as a sequence: $(=\text{seq}(0.1*n,n,0,200))$.
- In the first cell of the second column (B1) we write the initial value (80).
- In the second cell (B2) we calculate this value with Euler's Method: $(=\text{b1}-0.1*(\text{b1}-20)*0.1)$ using the fundamental recursion $T(t + \Delta t) = T(t) + T'(t) \cdot \Delta t$.
- With the command "fill" we copy the formula of B2 to the whole column.
- We denote the columns A and B with "time" and "temp" respectively and in a Graphs & Geometry-page we can plot the graph as a scatter-plot.

A	time	B	temp	C	D
◆ =seq(0.1*n,n,0,200)					
1		0.	80		
2		0.1	79.4		
3		0.2	78.806		
4		0.3	78.2179		
5		0.4	77.6358		
6		0.5	77.0594		
7		0.6	76.4888		
8		0.7	75.9239		
B2	=bI-0.1*(bI-20)*0.1				

Figure 3: Euler's Method

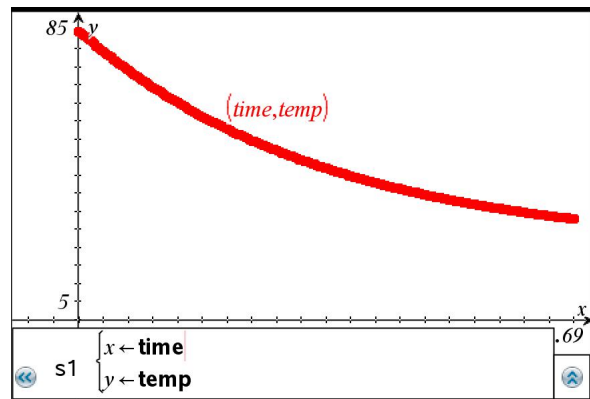


Figure 4: scatter-plot

With sliders it is possible to change the parameters $T(0)$, T_u and k dynamically.

Calculator, user-defined function

With TI-Nspire™ CAS it is possible to define a function. This function can then be used in all applications.

- In the application “Calculator” choose [menu], 9: Functions&Programs, 1:Program Editor, 1:New]
- Choose a name, e.g. “cooling” and choose the type: Function
- The function can now be defined as follows. In this example $dt = \Delta t$

cooling(5,0.1)	56.3004	cooling	177
cooling(5,0.01)	56.3827	Define cooling (t,dt)=	
cooling(5,0.001)	56.3909	Func	
cooling(5,1.E-4)	56.3917	Local t,dt,time,temp	
cooling(5,1.E-5)	56.3918	time:=0	
solve(cooling(x,0.01)=40,x)		temp:=80	
	x=10.98	While time<t	
		time:=time+dt	
		temp:=temp-0.1*(temp-20)*dt	
		EndWhile	
		EndFunc	

Figure 5: Userdefined function

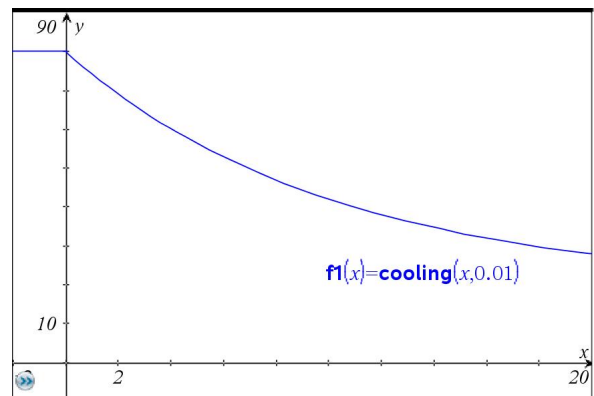


Figure 6: plot

Graphs, Graph-Type: Differential Equations

Since the version 3.0 it is possible to graph the solutions of differential equations directly with TI-Nspire™.

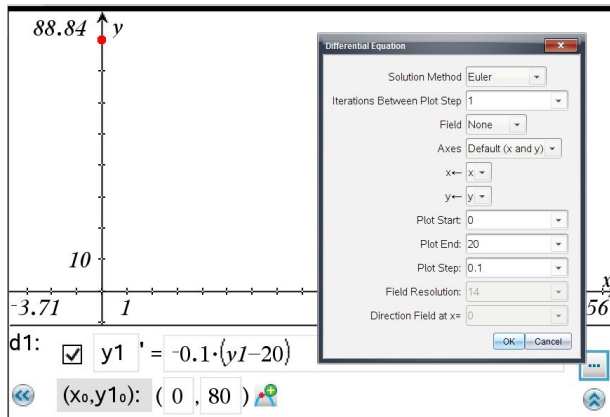


Figure 7: Graph Type:DE

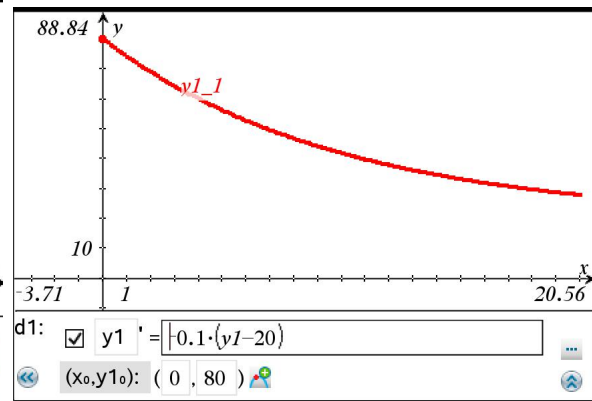


Figure 8: plot

Euler's Method makes it possible to construct the function $t \mapsto T(t)$ and it provides the insight that an initial-value-problem has a unique solution, a very important theorem, the theorem of Picard-Lindelöf.

Defining Euler's Number e

The solution of the initial-value-problem $y' = y$, $y(0) = 1$ is the exponential-function $y = \exp(x) = e^x$. If you solve this problem with Euler's Method for $y(1) = e$ you get the definition

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

:

x	y	y'	$y' \cdot \Delta x$
0	1	1	$1 \cdot \frac{1}{n}$
$\frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$1 + \frac{1}{n}$	$(1 + \frac{1}{n}) \cdot \frac{1}{n}$
$\frac{2}{n}$	$(1 + \frac{1}{n})^2$	$(1 + \frac{1}{n})^2$	$(1 + \frac{1}{n})^2 \cdot \frac{1}{n}$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$\frac{n}{n} = 1$	$(1 + \frac{1}{n})^n$		

Fundamental Theorem of Calculus

Euler's Method also makes it possible to prove the Fundamental Theorem of Calculus by solving the initial-value-problem $y' = f(x)$, $y(a) = 0$. The exact solution is, of course, $y = F(x) - F(a)$, particularly $y(b) = F(b) - F(a)$. If you solve this initial-value-problem

with Euler's Method you get a Riemann sum of f over the Interval $[a; b]$ and therefore for $\Delta x \rightarrow 0$ the integral $\int_b^a f(x)dx$ and hence

$$\int_b^a f(x)dx = F(b) - F(a),$$

details are shown in [2]

5 Mathematical modelling with differential equations

In our everyday lives, models have become an important part. They range from local personal decisions -do I bring along my raingear for tomorrow's hike- to global decisions which have a profound impact on our future. The main strengths and objectives of models are on the one hand the provision of a deeper understanding of the involved processes and systems, and on the other hand the predictive power which helps much in decision-making. Mathematical models are used extensively in ecology and biology to examine e.g. population fluctuations, the spread of a disease, erosion, the spread of pollutants etc. In fluid mechanics, models are used to design racing yachts or to understand and predict the formation and development of tsunamis. There are many different modelling approaches such as empirical models, simulation models, stochastic models, deterministic models. The last approach is widely used, and this is the one which works with differential equations. We use this approach which contains two fundamental ideas: The first is that we can write down equations for the rates of change of the relevant variables of the model. These differential equations reflect the important features of the process we seek to model. The second idea is, that these equations determine the variables as functions of time which enables us to make predictions.

In sum: **differential equations define functions.**

We begin with four simple and fundamental models of a single population: linear, exponential, limited and logistic. The new point of view is that these growing processes are now defined with differential equations. Thus we define the linear function with the equation $y' = m$, (m constant), and the exponential function with the equation $y' = k \cdot y$. These functions are growing without any limit with the time. For this reason we introduce the concept of *saturation* or *carrying capacity* S and limiting respectively braking factor. When the dependent variable $y = f(t)$ of the function approaches S then their rate of change will be successively slowed down and reach zero when $y = S$. This can be done with the factor $b = (1 - \frac{y}{S})$ (braking factor). This factor is $b \approx 1$ when $y \ll S$ and $b \approx 0$ when y is near S . Thus we define the limited growth and the logistic growth with the differential equations $y' = (1 - \frac{y}{S})m$ resp. $y' = (1 - \frac{y}{S})ky$.

After the single population models we continue with interacting population models. These models are relevant where two or more populations depend on each other. The most important examples are predator-prey interaction, competing species interaction and symbiosis. We will have a closer look at some of these systems in the next section.

We also study a model with three populations, the famous S-I-R-model. Let us have a

closer look at this model (a more detailed description can be found in [2] and [5]).

The S-I-R-model is used to describe the spread of a contagious disease. The population is divided into three groups:

- **Susceptible:** those who have never had the illness and can catch it;
- **Infected:** those who currently have the illness and are contagious;
- **Recovered:** those who have already had the illness and are now immune.

Model Assumptions:

- Random differences between individuals can be neglected.
- The disease is mild, so anyone who falls ill eventually recovers.
- All those who recover from the disease are then immune.
- We neglect the latent period for the disease, setting it equal to zero.

Compartment or flow diagram

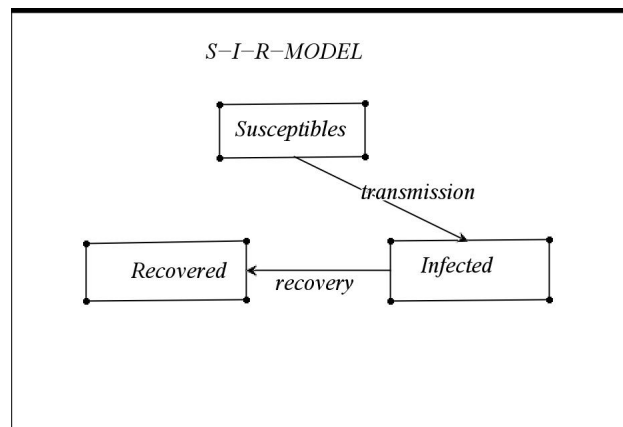


Figure 9: input-output diagram for the S-I-R-model

- **The rate of transmission:** Consider a single susceptible individual during a small interval Δt . Let's p denote the probability that this person will be infected when he meets an infected person. The probability that this person meets an infected person during an interval of length Δt proportional to the number I of infected and to the length of the considered interval, thus $q \cdot I \cdot \Delta t$. Therefore during the interval Δt , each susceptible individual will be infected with the probability $p \cdot q \cdot I \cdot \Delta t = a \cdot I \cdot \Delta t$. The

parameter $a = p \cdot q$ is called *transmission coefficient*. The number of newly infected individuals during Δt is therefore $a \cdot S \cdot I \cdot \Delta t$ and the rate equation for S is:

$$S' = -aSI$$

The value of a depends on the level of contagiousness of the disease, but also on the general health of the population and the level of social interaction between its members. One strategy for dealing with an epidemic is to alter the value of a . Quarantine, for instance, will do this.

- **The rate of recovery:** Assuming that the rate of infected individuals who recover is directly proportional to the number I we write

$$R' = b \cdot I$$

The parameter b is called *recovery rate*, its reciprocal b^{-1} can be identified with the residence time in the compartment I , in other words b^{-1} is the average duration of the illness.

The complete model now has the form

$$\begin{aligned} S' &= -aSI \\ I' &= aSI - bI \\ R' &= bI \end{aligned}$$

Combines with initial values these equations define three functions $S = S(t)$, $I = I(t)$ and $R = R(t)$. We can solve these equations with a numerical method (Euler's method or Runge-Kutta methods). With TI-Nspire it is possible to investigate the influence of the parameters a and b on the behavior of the system.

Example

This example was given by Murray, based on data compiled by the British Communicable Disease Surveillance Centre (British Medical Journal, March 4 1978, p. 587)[4]. The event was a flu epidemic in a boys boarding school in the north of England. There were 763 resident boys, including one initial infective. The data for the two-week epidemic are given in the list below, which was constructed by reading values from the graph in the original publication. The values of the transmission rate and the recovery rate can be found with sliders. The data appear to agree well with the model's predictions for $a = 0.00218$ and $b = 0.44$

day	inf
0	1
1	3
2	7
3	25
4	72
5	222
6	282
7	256
8	233
9	189
10	123
11	70
12	25
13	11
14	4

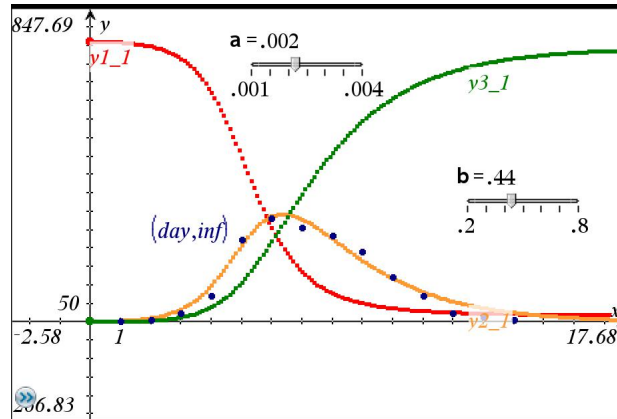


Figure 10: Numerical solution of the differential equations for an influenza epidemic in an English boarding school in 1978. The black dots correspond to the original data.

There are a number of extensions of the basic S-I-R-model, for instance with the incorporation of a latent period or continuous vaccination. More complicated models involve populations structured into several groups, such as age groups or social groups.

6 Dynamical Systems

The modelling of the behavior of physical systems as they evolve over time often takes the following form: We have two (or more) variable quantities y_1 and y_2 that are functions of time, and we want to find the nature of these functions. Empirical knowledge and assumptions (e.g. physical chemical or biological laws) enable us to formulate how these functions $y_1(t)$ and $y_2(t)$ are changing with time. Therefore we can calculate $y_1'(t)$ and $y_2'(t)$ whenever we know the values of y_1 and y_2 and possibly t .

In other words, we have a system of differential equations. Such a set of differential equations is called a **dynamical system**. Dynamical systems play important roles in all branches of science.

In many instances, the rules determining $y_1'(t)$ and $y_2'(t)$ depend only on the current values of y_1 and y_2 , but not on the value of t . In this case, the knowledge of the current state of the system is sufficient for determining the future and past states of the system. This kind of deterministic systems are called **autonomous systems**.

Thus an autonomous dynamical system consists of an abstract phase space or state space, whose coordinates describe the state at any instant, and a dynamical rule that specifies the immediate future of all state variables, given only the present values of those same state variables.

Dynamical systems are deterministic if there is a unique consequent to every state, or stochastic or random if there is a probability distribution of possible consequents (the idealized coin toss has two consequents with equal probability for each initial state). We

do not consider stochastic systems here.

One of the most important techniques for studying the behavior of autonomous systems is the **Phase Space Analysis** or **Phase Plane Analysis** in the two dimensional case. This is especially important for nonlinear systems, since there is usually no analytical solution for a nonlinear system. In the previous chapters we solved these differential equations numerically:

From a given starting point we used a numerical method like Euler's method to get values for y_1 and y_2 , this means solving an initial value problem. Each starting point generally leads to a different solution. In autonomous systems there is another very powerful way of visualizing the solutions. This way enables an overview over the entire system, over all possible solutions and the long time behavior. Moreover, the effect of different parameters on the behavior of the system can be investigated.

A short description of the method of Phase Plane Analysis

Phase plane analysis is much easier to explain with an example than in any other way. We will consider the Lotka-Volterra -model, which is the basic model for predator-prey interactions. This was one of the first mathematical population models (1924/25), proposed as a way of understanding why the harvest of certain species of fish in the Adriatic Sea exhibited cyclical behavior over the years.

Let us consider two species, rabbits and foxes in an environment. Let y_1 denote the number of rabbits and y_2 the number of foxes, the time t will be measured in months. The most basic model as proposed independently by Lotka and Volterra looks as follows:

The model is based on the following assumptions:

- In the absence of foxes, the rabbit population grows exponentially.
- The population of rabbits declines at a rate proportional to the number of encounters between rabbits and foxes and this number is proportional to the product $y_1 \cdot y_2$.
- The birth rate of the fox population is proportional to the number of foxes and to the number of rabbits.
- The foxes die off at a rate proportional to the number of foxes present.

These assumptions translate into these differential equations:

$$\begin{aligned}y_1' &= a \cdot y_1 - b \cdot y_1 \cdot y_2 \\y_2' &= c \cdot y_1 \cdot y_2 - d \cdot y_2\end{aligned}$$

For the sake of illustration we take for example: $a = 0.1$, $b = 0.005$, $c = 0.00004$, $d = 0.04$

- **State, phase space**

Instead of plotting the values of y_1 and y_2 against the time t we take these values as coordinates of a point in the y_1 - y_2 -plane. As the system changes, the point (y_1, y_2) will trace out a curve in this plane. The ordered pair of numbers (y_1, y_2) is called a *state* and the portion of the plane corresponding to physically possible states is called *phase space* or *phase plane* respectively.

- **trajectories** The curve that an arbitrary starting or initial point y_{i1}, y_{i2} traces out as time is going on is called *trajectory*

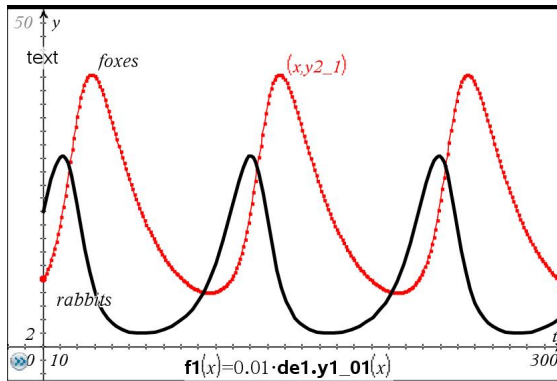


Figure 11: time-graph of $0.01y_1$ and y_2

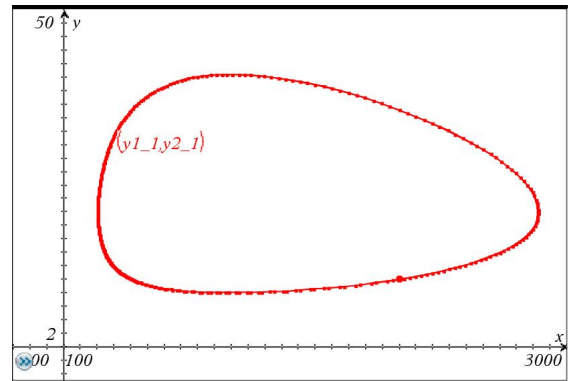


Figure 12: trajectory

- **nullclines**

$y_1' = 0$ implies that either $y_1=0$ or $y_2 = \frac{a}{b} = 20$ and

$y_2' = 0$ implies that either $y_2=0$ or $y_1 = \frac{d}{c} = 1000$

The set of points in the phase plane for which $y_1' = 0$ resp. $y_2' = 0$ are called *nullclines*, more precisely y_1 -nullclines resp. y_2 -nullclines.

- **steady state or equilibrium point**

Each intersection-point between a y_1' -nullcline and a y_2' -nullcline is a steady state or equilibrium point. These equilibrium points can be stable, unstable or neutral.

- **vector field**

We can assign to each point in the state space a *vector* $\vec{v} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$. This vector

points in the direction of the trajectory through this point therefore all trajectories are at every point tangential to the vector at this point.

- **isosectors**

The spaces in the phase plane that are bordered by the nullclines are called *isosectors*. In each isosector y_1' is always positive or always negative, the same is true for y_2' .

Therefore in each isosector there is a qualitative direction of the trajectory, namely to the right ($y_1' > 0$) or to the left ($y_1' < 0$) and up ($y_2' > 0$) or down ($y_2' < 0$).

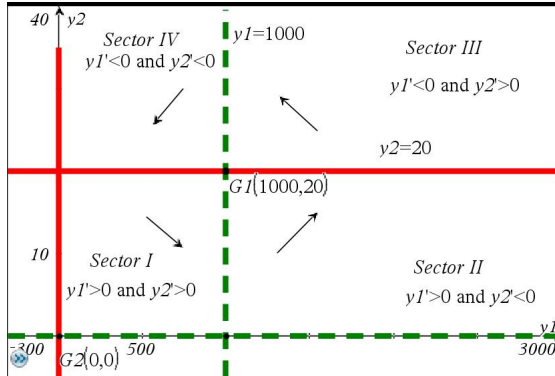


Figure 13: nullclines and isectors

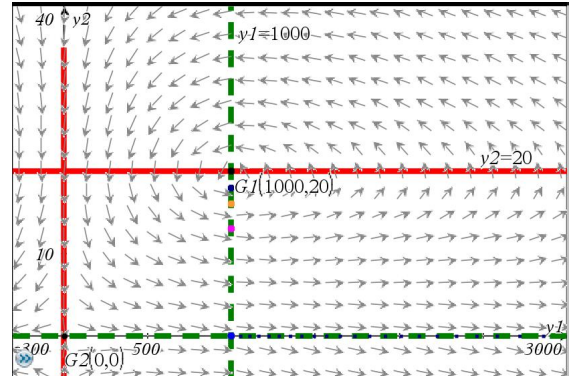


Figure 14: direction field

For the classical Lotka-Volterra model it can be proven that all trajectories are closed, so the system behaves periodically for all values of the parameters [a]. In the workshop you will meet other predator-prey models.

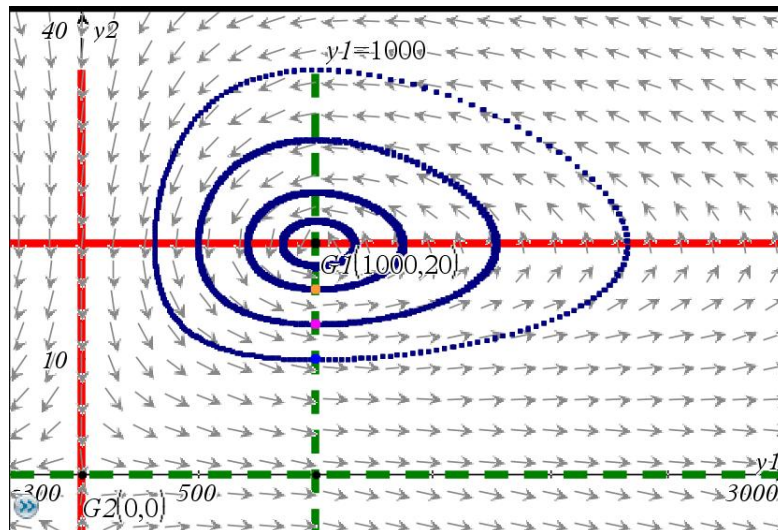


Figure 15: phase portrait

Let us consider another system. This system plays a role in the investigation of neurons and is called *FitzHugh-Nagumo model* [6]. A neuron can be stimulated with an input, such as an electrical current I . After the stimulus, the neuron is excited. The state of this excitation is described by the variable y_1 , which represents the voltage in the neuron as a function of time. When a neuron is excited, physiological processes in the neuron will cause the neuron to recover from the excitation. The variable y_2 represents this recovery.

The model can be described with the following equations:

$$y1' = y1 - \frac{1}{3}y1^3 - y2 + I$$

$$y2' = 0.1 \cdot (b + c \cdot y1 - y2)$$

The $y1$ -nullcline is $y2 = -\frac{1}{3}y1^3 + y1 + a$. The maximal slope of the $y2$ -nullcline is $\frac{dy2}{dy1} = 1$ at $y1=0$. The influence of the stimulus I is just a vertical shift.

The $y2$ -nullcline is the straight line $y2 = c \cdot y1 + b$.

For $c > 1$ there is always exactly one intersection regardless of the value of b .

With no stimulus $I = 0$ there is a stable equilibrium and thus a constant voltage, the same is true if the stimulus is weak.

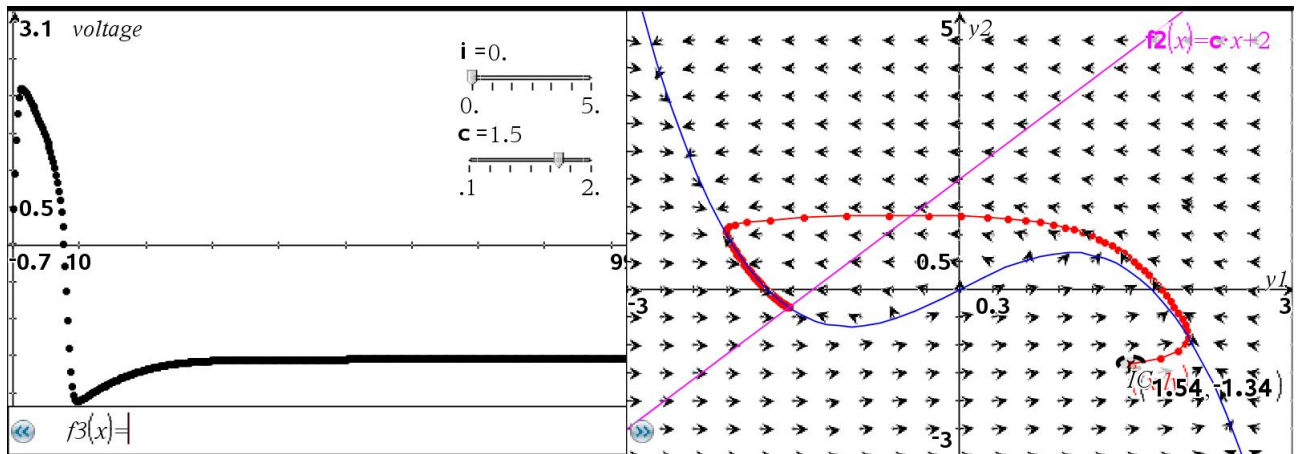


Figure 16: Stimulus $I = 0$

Figure 17: stable equilibrium

A greater stimulus leads to a so called *limit cycle*, the voltage is oscillating, we have a firing neuron.

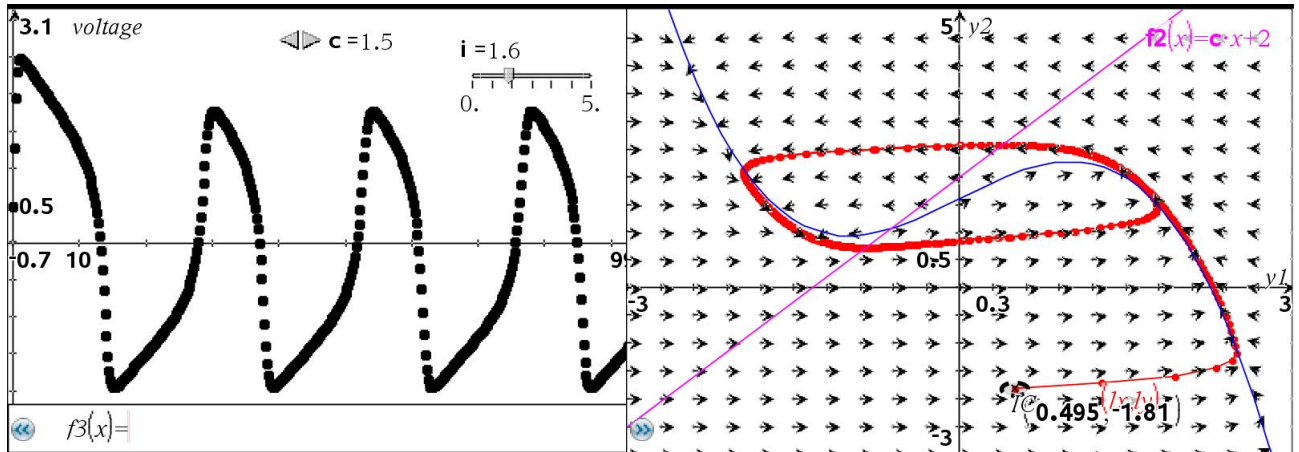
Figure 18: Stimulus $I = 1.6$

Figure 19: limit cycle

If the stimulus is beyond a certain level, again a stable equilibrium exists and the voltage is no more oscillating.

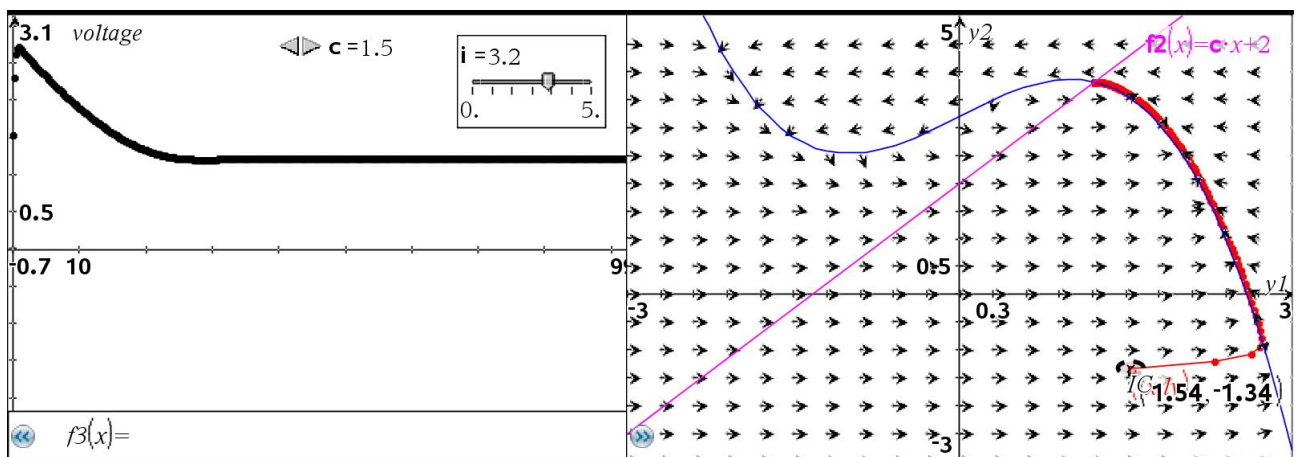
Figure 20: Stimulus $I = 3.2$

Figure 21: stable equilibrium

This example shows how the change of a parameter can dramatically change the behavior of the system.

7 Numerical graphical and algebraic methods

Numerical methods have been for a long time the last recourse to be used when no clever techniques for producing a closed form solution to the problem could be found. Students traditionally expected that most problems would be tractable with appropriate analytical techniques, and most of the books contained almost exclusively this kind of problems. With the broad availability of technology the position is now reversed. Students can be taught to approach every differential equation or every problem of integration, for instance,

knowing in advance that it will be solvable by numerical methods at least, and in some lucky cases, an analytical solution is possible.

The algebraic viewpoint is central in a traditional calculus course. But this kind of course is isolated from the disciplines it serves. Technical, contextfree algebraic manipulations do not occur in biology, chemistry, economics and even physics. Algebra was widely used in calculus for the last three hundred years because numerical and a lot of graphical methods were practically inaccessible before the invention of the computer. Technology now allows direct numerical and graphical solutions to real problems. Therefore, nonalgebraic methods must play a central role in a contemporary calculus course. This shift in attitude is very important as it enables us to use the universal concepts of calculus much more effectively and these concepts are seen in a more universal light.

8 Conclusion

We have tried in this paper to show how important differential equations and dynamical systems are and that these topics are central in most of the applications of calculus. Thanks to the technology and with the emphasis on numerical and graphical methods it is possible to approach these topics at an introductory level. The ideas and concepts of calculus continue to be in the center, rather than the numerical and graphical methods. These methods merely serve as tools for dealing with these ideas and concepts.

Our course requires about 160 lessons which is about the same as a traditional course. With the help of a TI-Nspire-CAS the students are able to solve the usual examination problems of a traditional calculus course because TI-Nspire-CAS is also good and easy to use for symbolic algebraic manipulations. But beyond that the students will know how to solve the much more important real problems of modelling, differential equations and dynamical systems.

9 Bibliography

- [1] Poincaré H., 1958, *The Value of Science*, Dover Publications
- [2] Märki R., 2010, *Differential- und Integralrechnung: Eine anwendungsbezogene Einführung mit TI-Nspire CAS*, Texas Instruments.
- [3] Märki R., 2007, *Die Euler-Methode, ein universelles didaktisches Konzept*, VSMP-Bulletin Nr.103, 24-25.
- [4] Murray J., 1990, *Mathematical Biology*, Springer.
- [5] Barnes B. and Fulford G.R., 2009, *Mathematical modelling with case studies*, Chapman & Hall.
- [6] Gerstner W. and Kistler W.M., 2002, *Spiking Neuron Models*, Cambridge University Press.

A series of horizontal dotted lines spanning the width of the page, providing a guide for handwriting practice.

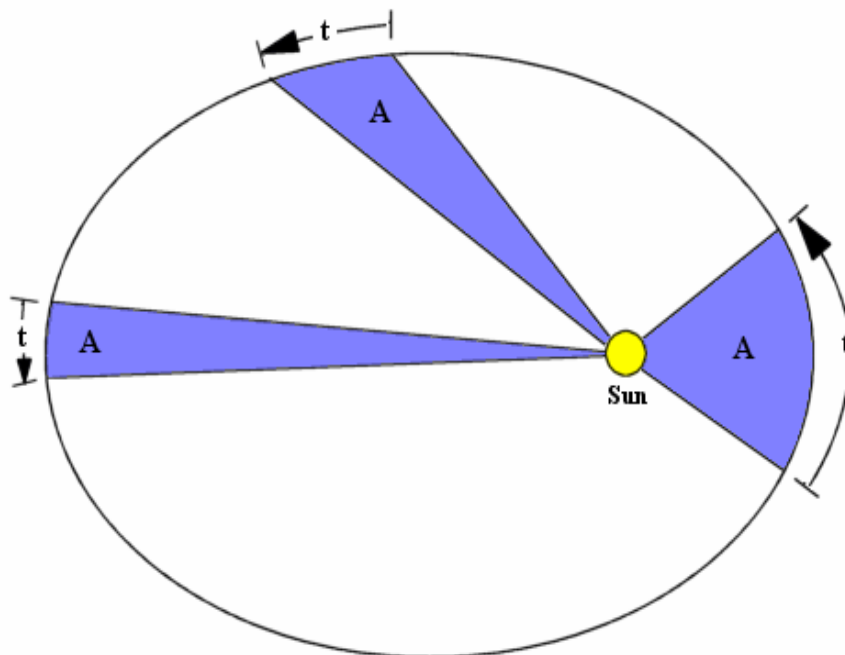


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Mathematical and Scientific Modelling: do we tend to neglect one in favour of the other?

Ian Galloway



Mathematical and Scientific Modelling: do we tend to neglect one in favour of the other?

Ian Galloway, Director Copernican Revolutions and Visiting Fellow at the University of Southampton.

Abstract

Accepting that the difference between the two forms of modelling, scientific and mathematical, is understood, why is it that time and time again school teachers are observed ignoring scientific modelling in maths classes and ignoring mathematical modelling in science classes? Indeed in the UK the assessment system positively mitigates against aligning both forms of modelling.

Historically the path to reason is littered with those who have “lost out” through not being able to relate one model to the other. Kepler with his mathematical models of the solar system failed to ask the question “why do these models fit?” and so it was left to Newton to formulate the Law of Universal Gravitation. Faraday’s scientific model of lines of force to represent magnetism eventually yielded to Maxwell who described the *reality of the field* in the form of Maxwell’s Equations, so giving us television and radio. Planck more recently in 1900 devised a mathematical model which fitted the behaviour of radiating bodies, the Planck Black Body Radiation Law. This was widely regarded as a purely formal way of accommodating the experimental evidence, but the mathematical model eventually took shape as a scientific model in the form of Quantum Mechanics. This presentation seeks to establish what might be meant by the two forms of modelling and how student learning might be improved through explicitly bringing the two models together.

1.0 Can we come to an understanding of a difference between mathematical and scientific modelling?

The universe cannot be read until we have learnt the language and become familiar with the characters in which it is written. It is written in mathematical language, and the letters are triangles, circles and other geometrical figures, without which means it is humanly impossible to comprehend a single word.

Galileo Galilei. 1564-1642.

Opere Il Saggiatore

When one considers the nature of scientific knowledge vis a vis mathematical knowledge it may be possible to arrive at the beginnings of a philosophical difference between a scientific model and a mathematical model. Scientific knowledge is empirical and is based upon the collection and analysis of data from experiments. Mathematical knowledge is logical and is concerned with the relationships between abstract entities. Scientific knowledge is inherently uncertain while mathematical knowledge is exact.

The power of science (principally physics) lies in its ability to explain phenomena. Hypotheses are set up such that further experiments support or refute predictions and so scientific knowledge is furthered. These hypotheses are based on previous knowledge and models. The models themselves are conceptual constructions and may or may not be linked to mathematical models. For example Newton proposed that the mass of the earth behaved as though it was concentrated at the

centre based on his observations that objects fall vertically to the centre of the earth. This was his scientific model which he linked to a mathematical inverse square law. When asked how the mechanism for the gravitational model worked he famously stated “Hypotheses non fingo” *I frame no hypotheses*. We see in this example two quite distinct models, one which I call the scientific model and the other which is the mathematical one.

1.1 Three Questions to Consider

- What is modelling?
- What is mathematical modelling?
- What is scientific modelling?

Taking the first question it is probable that ten people would give ten different answers. A model can be of very many types. Frigg et al, 2012, list twenty two different types of model, of which the mathematical model is but one! They suggest this proliferation can be brought under control by noting that models pertain to four areas. Semantics (what it is they represent), ontology (types of model), epistemology (how do models support learning?) and philosophy (how does the model relate to theory?). Without being too specific therefore , a broad approach to a definition of modelling using these areas might be as follows:

A model is an attempt to describe a physical phenomenon. It should make sense at the recipient’s cognitive level. The model should allow prediction and will have limitations.

Moving onto the second question, “what is mathematical modelling?”, Carrejo and Marshall (2007) cite Pollak (2003) and simply note that “a mathematical model describes or represents a real world situation with a mathematical construct (or constructs) involving mathematical concepts and tools.” It is convenient for the purpose of this thesis to adopt a similar understanding. Some of the tools are listed in the table below.

In response to the third question, “what is scientific modelling?”, Pease and Bull (1996) in their University of Texas course notes state “Every attempt at a scientific study involves countless models”. It could be asserted that this would be a general view of scientific modeling, that the subject draws from many streams of intellectual study to construct models in many and various forms. As has been already mentioned, mathematical models are just one of these forms, albeit a very important one. In the table below, computer simulations and mathematical modeling are italicized where they appear under scientific modeling.

Mathematical modelling	Scientific modelling
<ul style="list-style-type: none"> • Algebraic; Equations of motion • Vectorial; force diagrams • Geometric; optics • Graphical; Damped oscillations • Numeric; areas, volumes, CFD 	<ul style="list-style-type: none"> • Diagrams; schematic, Sankey • Metaphors; “delivery van circuit” • In vivo, in vitro; lab rats, tissue culture • Physical objects; “water circuit” • Fictional objects; Bohr model • Analogical; Faraday’s field lines • <i>Computer simulations; nuclear reactors</i> • <i>Mathematical; equations etc.</i>

It is possible to approach science using non-mathematical models only. It is arguable however that unless mathematics is brought to bear on these non-mathematical models it is doubtful that

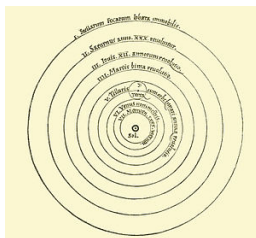
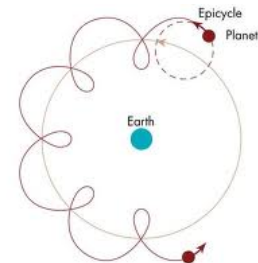
scientific knowledge or theory can be advanced. We have therefore in science two distinct types of model, one which attempts to make the abstract more concrete in introducing visualisations. The other is formal and attempts to quantify models, whatever they may be, and allows predictions in a way not possible with concrete models. Mathematical modelling is a subset of scientific modelling and would probably include computer simulations which rely on mathematical algorithms.

It is now a semantic argument to suggest that scientific modelling may focus on either the mathematical model or the more concrete (scientific) model to the neglect of the other. That is to say one could attempt to “do science” using only concrete scientific models or one could attempt to “do science” using only mathematical modelling. To do either of these is to fail to grasp how science works with the possibility of missing a great deal. From here on in this paper, a scientific model will be considered as a non-mathematical model of the phenomenon in question. A few examples will help to illustrate the problem.

2 Ptolemy and Copernicus



Ptolemy in the second century devised a mathematical model of the universe using epicycles. This geocentric model ignored much evidence which was available and focused only on providing a mathematical model which allowed planetary positions to be predicted.



Through considering all the evidence then available Copernicus showed in the sixteenth century that an alternative, simpler, heliocentric model would allow planetary positions to be predicted. He successfully combined the concrete and the abstract and added to scientific theory.

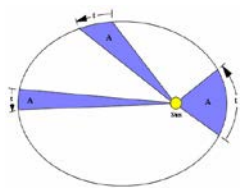


Kepler and Newton

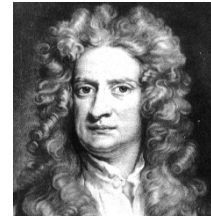


Kepler constructed an amazing mathematical model for the universe based on the Platonic solids nested within crystalline spheres. There was no attempt to construct a scientific model. This was imagination based upon mysticism. Kepler's three laws were also entirely mathematical.

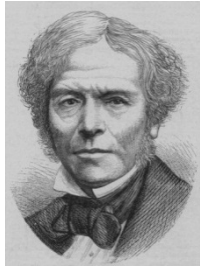




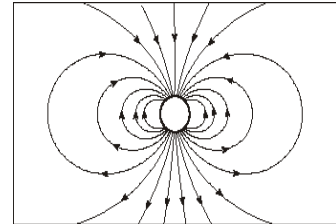
Newton succeeded in deriving Kepler's three laws from a scientific model based on reducing the mass of the planets and sun to a single point at their centre then modelling the gravitational force on an inverse square variation.



Faraday and Maxwell



Faraday imagined elastic lines under tension to explain magnetic interactions and the motor effect. This was a purely scientific model which Faraday did not succeed in quantifying, so limiting its usefulness.



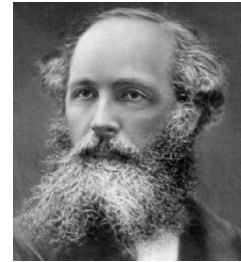
$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = q / \epsilon_0$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -d\Phi_B / dt$$

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 d\Phi_E / dt$$

Maxwell used Faraday's lines of force model in a brilliant synthesis of electrical and magnetic theory and created the equations which provide a complete description of the behaviour of electric and magnetic fields.

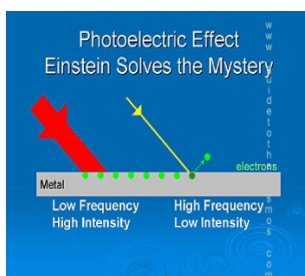


Planck and Einstein

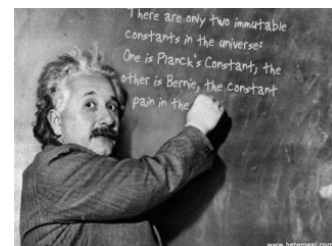


Planck resolved the most difficult problem of the day, the Rayleigh-Jeans ultraviolet catastrophe, by imposing a restriction on the oscillators of a hot body. This ensured that the energy contribution from the higher frequency oscillators would tend to zero, as observed, rather than infinity! Planck himself regarded this as a mathematical trick with no relevance to reality.

h



Einstein took Planck's idea and built a sound scientific model around it, declaring that energy itself was quantised and could only be emitted or absorbed in discrete amounts, quanta. This developed into quantum mechanics and won Einstein a Nobel Prize for his explanation of the photoelectric effect.



3 The School Curriculum in England

In schools it has long been accepted that there is a need for the study of the discrete subjects of mathematics and science as they contribute to the realms of logical and empirical knowledge. This of course leads naturally to a division of the two subjects. Looking through the entire national curriculum (ages 11-16) for science in England and Wales, Department for Education, 2011(1), it is possible to find only scant reference to the use of mathematics and indeed not one specific reference to using a mathematical model:

...using scientific ideas and models to explain phenomena and developing them creatively to generate and test theories.

They record data in graphs, using lines of best fit.

They analyse data and begin to explain, and allow for, anomalies. They carry out multi-step calculations and use compound measures, such as speed, appropriately.

They analyse findings to interpret trends and patterns and draw conclusions from their evidence. They make effective use of a range of quantitative relationships between variables in calculations or when using data to support evidence.

There are very many references to models of the non-mathematical kind, and a great deal of work around making measurements and displaying them. Nothing specifically requires students to construct a mathematical model let alone use it to support a scientific model. The expression 'mathematical model' simply does not appear.

Again, looking through the entire national curriculum for mathematics, Department for Education, 2011(2), there are only scant references to science:

Compound measures: This includes making sense of information involving compound measures, for example fuel consumption, speed and acceleration.

They appreciate the difference between mathematical explanation and experimental evidence.

They choose and use appropriate units and tools, interpreting, with appropriate accuracy, numbers on a range of measuring instruments.

They appreciate the imprecision of measurement and recognise that a measurement given to the nearest whole number may be inaccurate by up to one half in either direction. They understand and use compound measures, such as speed.

As with the science curriculum there are many references to mathematical models and although there is a statement that "*Mathematics equips pupils with the tools to model and understand the world around them*", this world does not include science as there is not one specific reference to scientific modelling or real world data beyond the statistics of probability. The word "scientific" simply does not appear.

4 Conclusion

It appears that the National Curricula for science and mathematics in England make no attempt to find the common ground between the two subjects when it comes to modelling phenomena. That said, it should be noted here that the Department for Education, 2011(3) is undertaking a complete review of both subjects.

In the four historical juxtaposition examples given, had the first investigator embraced both the scientific and the mathematical model when attempting to model the physical phenomenon it is possible that greater progress would have been made. The contention here is that mathematical models lie in the domain of logical knowledge while scientific models lie in the domain of empirical knowledge. Mathematical models seek no a priori underpinnings, yet they may be drawn from scientific models. Scientific models on the other hand have a basis in reality but by their very nature lack the explanatory and predictive power offered by mathematics. In schools it is suggested that the connection between both models should be made more explicit so allowing students to access a deeper understanding of the nature of “how science works”. Students may then be better prepared and more motivated to undertake study in the STEM (science, mathematics, engineering, technology) subjects at a higher level.

When mathematicians fit a model to data, for example, the further consideration should always be “why do these data fit?” the particular mathematical model. Answering this question involves delving into the domain of empirical knowledge. Scientists on the other hand should always be seeking to fit mathematical models to their data or their scientific model. Only through a synthesis of the two approaches will scientific knowledge be increased.

www.cpd-physics.com

Bibliography

Carejo, D., Marsall, J., 2007. *What is Mathematical Modelling? Exploring Prospective Teachers' Use of Experiments to Connect Mathematics to the Study of Motion*. Mathematics Education Research Journal. 2007, Vol. 19, No. 1, 45–76.

Department for Education, 2011. The School Curriculum, Science.
<http://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/secondary/b00198831/science> accessed 1 August 2012.

Department for Education, 2011(2). The School Curriculum, Mathematics.
<http://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/secondary/b00199003/mathematics> accessed 1 August 2012.

Department for Education, 2011(3). Remit for the Review of the National Curriculum in England
<http://www.education.gov.uk/schools/teachingandlearning/curriculum/nationalcurriculum/b0073043/remit-for-review-of-the-national-curriculum-in-england> accessed 1 August 2012.

Frigg, Roman and Hartmann, Stephan,[sic] 2012 "Models in Science", *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2012 Edition), Edward N. Zalta (ed.), forthcoming URL = <http://plato.stanford.edu/archives/fall2012/entries/models-science/> .
<http://plato.stanford.edu/entries/models-science/> accessed 1 August 2012.

Pease, C., Bull, J., 1996. <http://www.utexas.edu/courses/bio301d/Topics/Models/Text.html> accessed 30 July 2012.

Pollak, H. O., 2003. A history of the teaching of modelling. In G. M. A. Stanic & J. Kilpatrick (Eds.), *A history of school mathematics* (Vol. 1, pp. 647-672). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

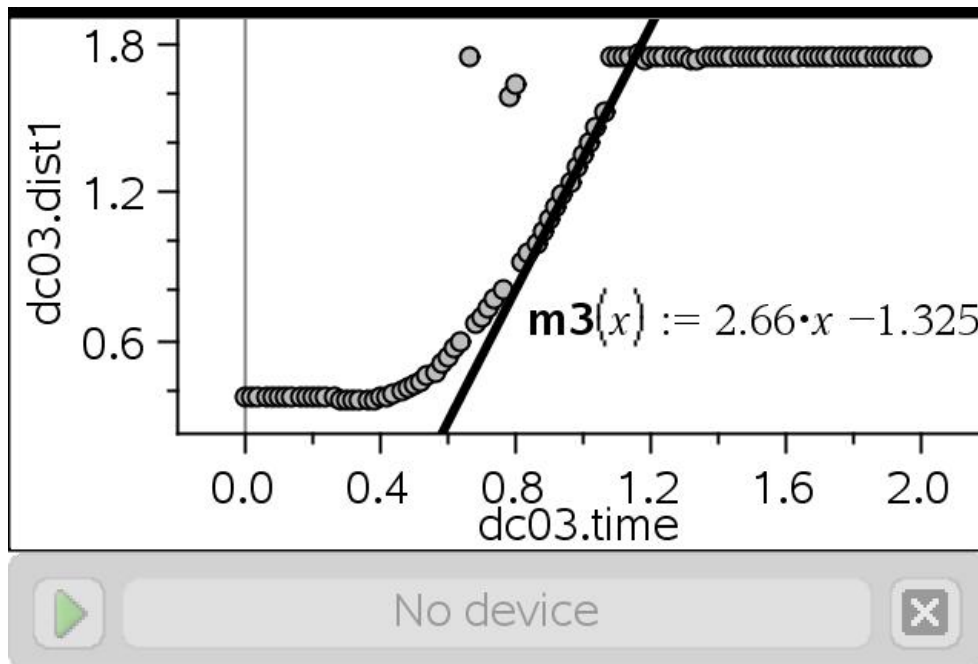


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

BLOODHOUND SCC: the challenge of air resistance

Ian Galloway





BLOODHOUND SSC: the challenge of air resistance

Ian Galloway is Director of Professional Development for the Bloodhound Supersonic Car (SSC) project. Here he describes a classroom activity that will help students understand the challenge that engineers face to reduce air resistance on the car. TI-Nspire is used to investigate the way air resistance changes with speed.

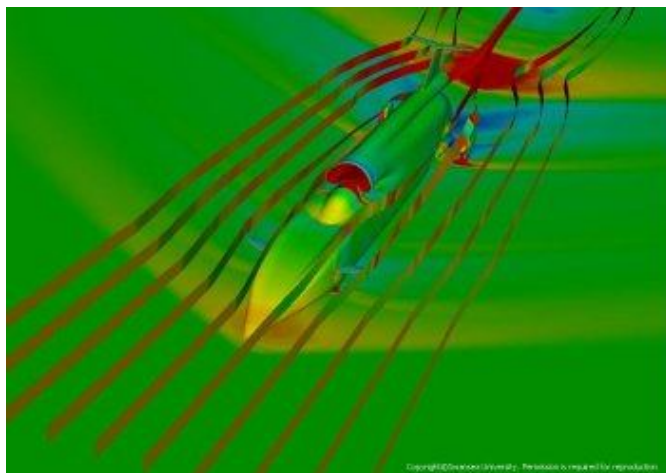
In October 2008 the engineering and education project known as BLOODHOUND super sonic car (SSC) was launched at the Science Museum London. Lord Drayson, then Minister of State for Science and Innovation, had suggested to Richard Noble that building and driving a car to take the World Land Speed record to 1000 mph (miles per hour) might have a similar effect as the Apollo programme, stimulating young people to take up studies in the STEM (science, technology, engineering and mathematics) subjects. Currently the record stands at 764 mph set by Andy Green in Thrust SSC back in 1997. Pushing the land-speed record up to the headline figure of 1000 mph, exceeding even the current low-level air-speed record represents considerable engineering challenges.



designed by curvanto

In the four years since the start of the project the design has changed shape from the image above to the one on the next page. Using an advanced mathematical tool, computational fluid dynamics (CFD), engineers have removed the need for wind tunnel testing.

The picture to the right shows computed pressure contours around BLOODHOUND at mach 1.3.



Copyright © Curvanto 2012. Permission is required for reproduction.



BLOODHOUND SSC modelled in NX

SIEMENS

The latest configuration for BLOODHOUND SSC



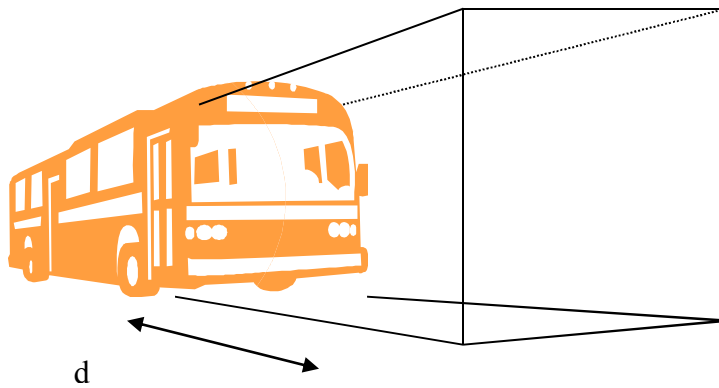
The picture to the left shows Thrust SSC just as it broke the sound barrier. The shock wave, the line at right angles to the car's motion, is clearly visible, the first, and only, such picture ever taken.

Air Resistance

Without air, the task of reaching 1000 mph would be simple, just keep on accelerating! The pictures above show that the air has to be pushed out of the way and this gets increasingly difficult the faster you go. Try walking fast through a swimming pool at the shallow end. In order to carry out the computational fluid dynamics above, mathematicians must have some knowledge of how air resistance changes when different variables are altered. In this exercise we will investigate how the air resistance on an object changes with speed. We will rely on the fact that a blunt paper cone will reach terminal velocity as it falls a short distance, but first some modelling.

Imagine a slab fronted vehicle like the bus shown here.

Suppose its cross sectional area is A and it is pushing air ahead of itself for a distance d .



At steady velocity, v , the horizontal forces are balanced so that push, F , equals air resistance. But the push has to give the air in front kinetic energy. So the work done by the push is the work done on the air,

Work done = Energy transformed

$$F d = \frac{1}{2} A d \rho v^2$$

where ρ is the density of the air.

The distance d cancels, A and ρ are constants, so very approximately,

$$F \propto v^2$$

i.e the air resistance should be proportional to the square of the velocity.

Making a nose cone

You will need scissors, card or stiff paper, cello tape, plasticine and a balance.

Firstly you will need to make a cone. This can simply be done by cutting a circle, removing a small sector, or simply cutting a slot to the middle of the circle, and forming the remaining sector into a conical shape.



Testing the cone

You should find that the paper cone will fall to the floor in a reasonably straight line. At this stage we can assume that the cone reaches terminal velocity quickly and travels to the floor at constant speed towards the end of its fall. If that is true, the forces acting on the cone are balanced so for this

falling object the weight must equal the air resistance. Note that at maximum speed the thrust on BLOODHOUND will equal the air resistance.

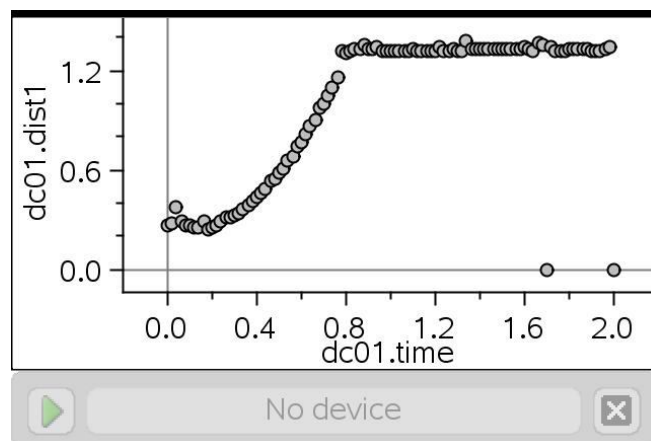
So, is air resistance proportional to the square of the speed?

Since air resistance equals the weight at terminal speed we can carry out an experiment to measure the terminal speed of a cone for a number of different weights simply by adding plasticene. In the example used here the cone weighed 15g and five balls of plasticene were prepared weighing 5g each.

Measuring terminal speed.

Switch on Nspire and then plug in a CBR. Open a new document and Select Data & Statistics. The CBR can be placed on the floor or mounted from a shelf or retort stand pointing downwards. The latter may be preferable as the distances then increase rather than decrease making the visualisation more intuitive to the student, the gradients of the graphs will all be positive. The TI-Nspire page will be divided into two parts: Data & Statistics above and the control console for the CBR below. Press ctrl and tab to toggle between windows.

The shortest time interval that the CBR can record is 0.02 seconds. Move to the control console and press *menu*, select *experiment* then *set up collection* and finally *time graph*. A window appears asking for time between samples and experiment length. Insert 0.02 and 2 into the appropriate boxes using the tab button and then select OK. Now toggle back to the control console for the next part.



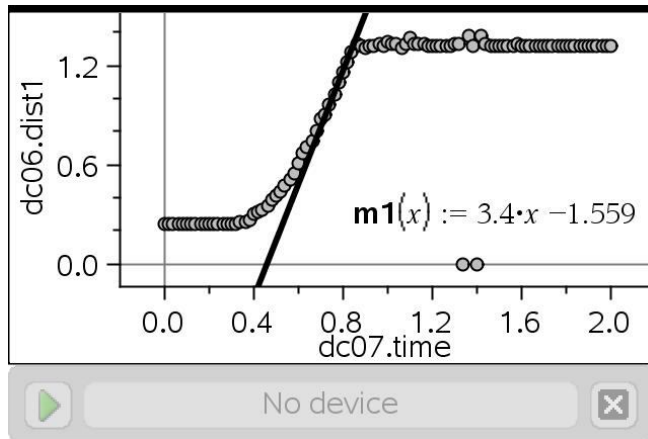
The CBR minimum range is about 30 cm, so hold the cone about 30 cm underneath the CBR and press *enter*. This will start the CBR recording, you will hear rapid clicking, release the cone. Data will be stored as dc01.dist and dc01.time.

This is the beauty of Nspire, because at this stage it is so easy to repeat the process and over-write the previous data or to repeat and collect another data sample. Press *enter* again and you will be asked to save or discard the data just collected. If you are not happy with the data set for some reason, tab to discard and press enter. Be prepared however as data collection will begin immediately! If you want to save the data, press *save* and another window

will tell you how the data is to be stored, simply press enter to select OK, as before data collection will begin immediately.

Add movable line to measure terminal speed

Return to the data and statistics window, press menu and select analyze. Scroll down to *Add Movable Line*. Moving the cursor over the line it will change to a rotate symbol at each end of the line and a simple translation symbol in the middle. Pressing the nav-pad key down and holding it down will change the symbol to a clenched hand which will



allow the line to be moved with the cursor keys. (Pressing and holding down the nav-pad again will release the clenched hand). Rotate and move the line until it lines up with the points at the end of the cone's flight where it has certainly reached terminal velocity. It is easy to see why a good distance of at least 2 m is preferable to the distance chosen above. It is now easy to read off the gradient of the line which is the speed of the cone.

Collect six sets of data using the plasticene balls to weight the cone and so provide the different values of air resistance and terminal speed. It is easy to select each data sample in turn by moving the cursor to the left hand edge and select any one of the data sets, dc03.dist for example. The time axis is the same for all the data sets so does not need to be changed.

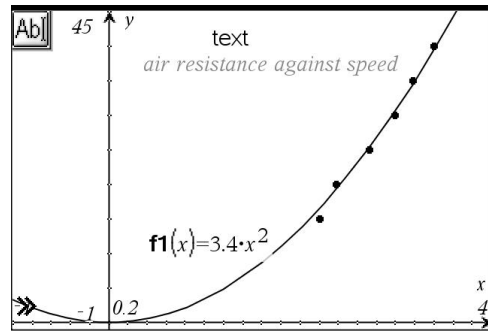
Using the spreadsheet

Press home and create a spreadsheet page. Hold down ctrl and press the right or left arrow on the nav-pad to toggle between pages (applications). Enter the weight of the cone plus plasticene in the first column. Remember that for terminal velocity this weight is equal to the air resistance. Enter the corresponding terminal speeds in the second column.

A	airre...	B	speed	C	D	E
1	15	2.2				
2	20	2.38				
3	25	2.73				
4	30	3.				
5	35	3.19				
6	40	3.4				

Graphing

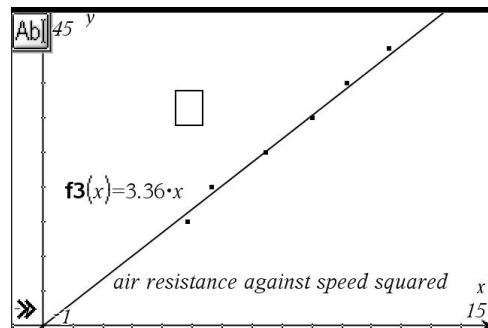
The final part is simply to graph air resistance against speed. Press home and insert a graphs and geometry page. Press menu to select graph type and then scatter plot. Two boxes will open up for selecting which variable to enter on the x and y axes. Simply press enter and scroll down to select. Use tab to toggle between boxes. Plot air resistance (y-axis) against speed. A straight line will fit the data but will not pass through the origin indicating that air resistance is not proportional to the speed. A parabola is a reasonable fit suggesting that air resistance might be proportional to speed squared!



So, toggle back to the spreadsheet and enter a third column, *squarespeed* and fill down the column with values of the speed squared.

A	B	C	D	E
airre...	speed	squa...		
1	15	2.2	4.84	
2	20	2.38	5.6644	
3	25	2.73	7.4529	
4	30	3.	9.	
5	35	3.19	10.1761	
6	40	2.4	11.56	
		squarespeed		

Insert another graphing and geometry page and plot air resistance against speed squared. A straight line through the origin is now a reasonable fit supporting the physical model which suggests that air resistance increases as the square of the speed and so presents a formidable challenge to the designers of BLOODHOUND SSC.



Scaling up to the real BLOODHOUND SSC

The nose cone of **BLOODHOUND SSC** is very long for streamlining. It is possible to investigate the effects of streamlining by constructing cones of different cone angle but same swept out area (keep the base of the cone the same area) and weighted to be equal weights. This is a little more difficult but does show that streamlining works.

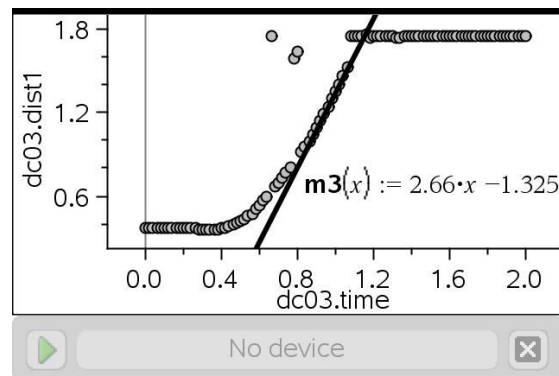
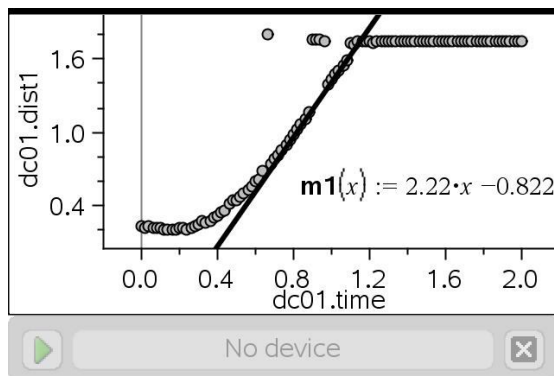
The cone described above reaches about 2m/s and has a diameter of approximately 10 cm. Air resistance is 15 g weight or 0.15 N.

We have shown that air resistance increases as the square of the speed. This means that doubling the speed results in four times the air resistance. So increasing the speed from 2m/s to 450 m/s (BLOODHOUND's top speed) would increase air resistance 225^2 or roughly 50 000 times. This suggests a resistance of 7 500 N for my cone of 10 cm radius or about 300 sq cm area at a speed of 450 m/s!

Streamlining

The swept area of BLOODHOUND SSC is about 1.77 m^2 so if my cone were 1.77 m^2 the air resistance would be $(1.77/0.03) \times 7\,500$ or 442 500 N. However the air resistance at top speed equals the maximum thrust, 212 000 N, which is less than half of 442 500 N. This shows why streamlining is so important, BLOODHOUND SSC is a long narrow very streamlined shape, nothing like my blunt paper cone!

Two cones of equal swept area and equal weights but different cone angle can now be compared to see how streamlining can reduce air resistance, but the simple physical model described above will no longer apply!



The picture on the left is the blunt cone which is clearly moving at a smaller terminal speed (2.2 m/s) than the sharper cone shown on the right (2.7 m/s). The more streamlined one is clearly moving faster and the designers of BLOODHOUND SSC have set out to achieve this with the long narrow nose cone.

www.cpd-physics.com

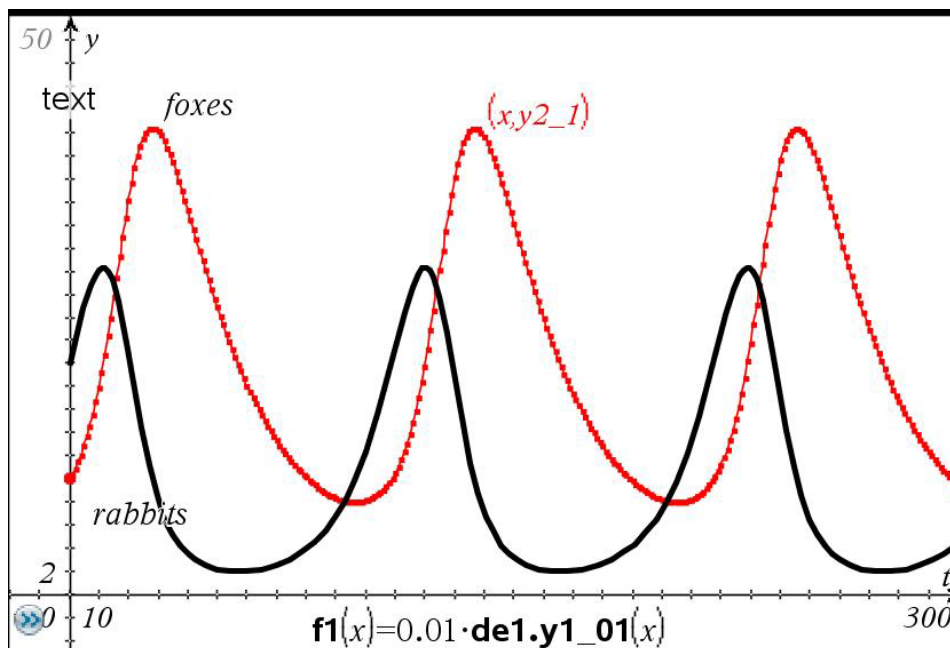


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

**An introductory calculus course with
differential equations and dynamical
systems at its center, a dynamic
approach with TI-Nspire CAS**

Robert Märki



Workshop: An introductory calculus course with differential equations and dynamical systems at the center, a dynamic approach with TI-Nspire-CAS

Robert Maerki

TI-Nspire offers three different ways to represent dynamical systems.

- With the application „lists&spreadsheet“ using Euler’s Method
- With the application „graphs“, using the graph type „differential equations“
- With the document „dyn_sys_2d“

Each way has its advantages and disadvantages, and in different circumstances it may make sense to use all of them. The three methods are presented and the participants learn to apply this methods in various examples of dynamical systems.

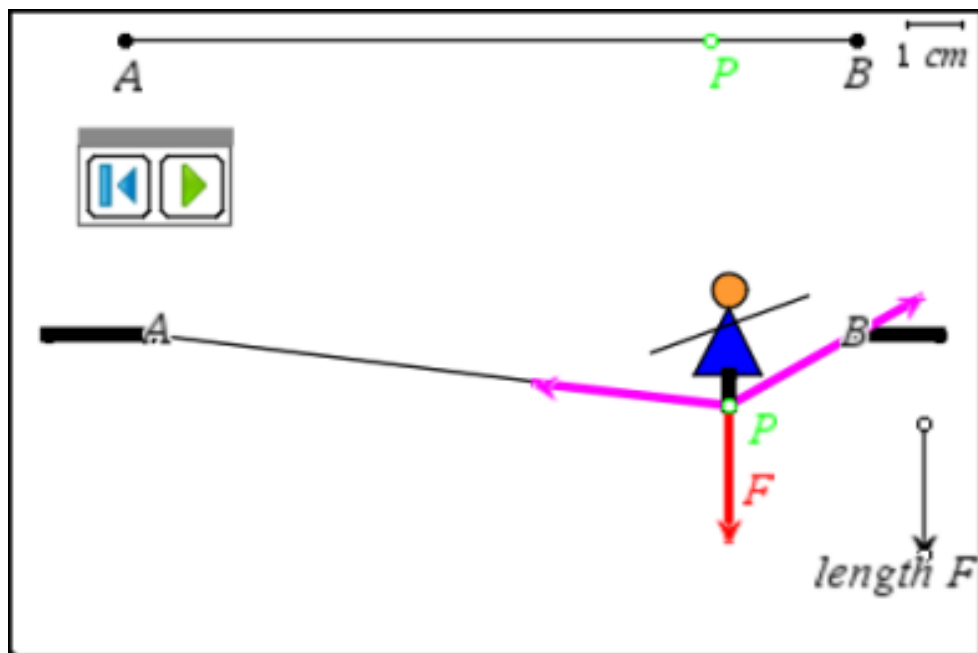


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Animaties met TI-Nspire

René Hugelshofer



Workshop

Animations with TI-nspire (CAS) 3.2

René Hugelshofer, CH

The possibilities of animations in TI-nspire are not well known by teachers. Moreover TI-nspire offers in version 3.2 new possibilities of animations in combination with sliders, conditions and shading. We will focus on these new features in the first part. In the 2nd part possibilities of animations with points on graphs or geometric curves and dependent objects will be shown. In the 3rd part we show the technics of multiple animations.

1. New Possibilities with TI-Nspire 3.2 and sliders

Open the file "1 ghost final". This is the first animation we will construct together. There are 3 elements: The cloak of the ghost (a graph, shaded above with changing colours), the text (which is shown only during a part of the animation) and the eyes which appear in a second animation, but not all the time. By the way: Have any of you ever been to the castle Miranda, also known as chateau de Noisy? It's in Belgium, at the village Celles near Dinant.



1. Step: Cloak of the ghost

Start TI-Nspire, choose the application "graph", choose PC-Mode and choose the maximum 200% for the font.

Insert the image "T1 Miranda" (insert-image in the upper menu bar). If necessary adapt the image to the window (right mouse 3-2 to choose the image).

Draw the contour of the ghost as graph of the function $f1(x) = a * x^2 * (x - 7) * (x + 7)$ (let students find an individual curve for the ghost). Move the function text to the bottom.

Insert a slider for a (menu 1-B). With right mouse click on the slider put the settings for a ($1 \leq a \leq 10$). The polynomial doesn't fit well into the window. Insert another factor 0.001 into $f1(x)$ to smoothen the graph.

With right mouse click make the graph fat (attributes) and red (colour).

With a right mouse click on the slider choose animate and the same to stop the animation.

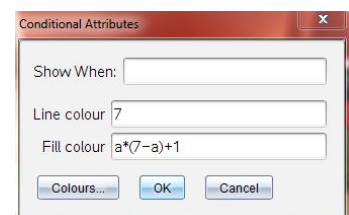
In the function text choose " $f1(x)=$ " and replace it with " $y>=$ ". The area above the graph is automatically shaded. Have a look at the function description (Ctrl + G). Perhaps you have to enter the function $f1(x)$ again (ctrl+G).

Animate the graph and stop the animation again.

If you couldn't follow, open the file "2 ghost part 1" and continue.

With a right mouse click on the graph choose "conditions" and insert 7 (red) for "line colour" and for "fill colour" a condition e.g.

$a * (7 - a) + 1$.



Now you can animate the graph again.

Move the axis more to the top.

With menu 1-3 "Hide/Show" hide the unneeded objects (Esc at the end).

Hide the axis with menu 2-5

2. Step: Text animation

Write a text (menu 1-7) "Ik ben de geest van Oostende". Enter and Esc.

Right click the text and choose "9: conditions" and in the box "show when" insert $a \geq 7$ and in the box "line colour" choose 7 for "red".

Animate (right click on the slider for a)

If you couldn't follow, open file "3 ghost part 2".

3. Step: Eyes

Draw 2 circles (menu 8-2-1)

Fill with red colour (right mouse click on the circle)

Insert a slider for a variable k (menu 1-B, the range is automatically from 0 to 10)

Right click on the left circle and put in the box "show when" the condition " $k \geq 2$ and $k \leq 8$ ".

That means: The left eye is only shown, when the parameter k is between 2 and 8.

Right click on the right circle and put the condition " $k \geq 4$ ".

Animate a and k and enjoy the effect.

2. Landing of an airplane

With the 2nd example "Landing of an airplane" we learn other animations like animation of a point on a graph or moving connected objects by animation of a point on a segment.

Open the file "4 airplane final" and start the animation.

We show in a first step how you can animate a point (and the dependent objects) on a graph or a geometric object directly and in a second step how we can map an animated point on a segment (or a circle) to another object.



1. step: Direct animation of a point

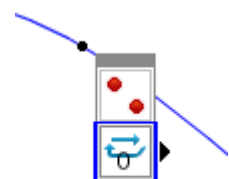
Open a new file (ctrl+n) and choose the application graph.

Draw a graph, e.g. a logistic curve $f_1(x) = \frac{5}{1+2^x}$ and choose a point (basic point) on this curve (menu 8-1-2).

Delete the coordinates.

Note: We could store the x- or y-coordinate in a variable and animate it as in the first example with a slider.

With right mouse click on the basic point choose "2: attributes" and go to the 2nd item. Type a number for the speed of the animation, e.g. 2, and start the animation with "enter" (negative numbers move the point in the opposite direction). A control panel will appear that lets you easily stop and start the animation.



Now we construct a very simple airplane dependent on the point. Students will spend hours constructing a nice airplane.

We want to be able to change the size of the airplane afterwards, therefore we write a number 2 for the size anywhere (Text, menu 1-7).

Construct the tangent at the point (menu 8-1-7).

Draw a circle (menu 8-2-1) with the given number 2 and intersect the circle with the tangent (menu 8-1-3).

Take the left intersection point as midpoint for another circle with the same radius 2.

Intersect the two circles (menu 8-1-3).

Draw a polygon as shown in the image (menu 8-2-4) and fill it with colour, e.g. red (right mouse click on the polygon, B-2).

Now hide the unused objects (menu 1-3) and the axis (menu 2-5).

Don't hide the basic point.

Start the animation and stop it again

If you couldn't follow, open file 5 airplane part 1".

2. Step: Connecting a point on a segment with an object

In the above animation the airplane goes beyond the window. We want to control the animation so that it is dependent on a point on a segment.

First we stop the animation (right mouse click on the basic point, 2nd item and type 0).

Draw a segment (menu 8-1-5) at the top of the window and choose a (new) basic point on it (menu 8-1-2).

Show the graph again (menu 1-3).

Draw a line vertical (menu 8-4-1) to the segment through the basic point and intersect it with the graph (menu 8-1-3).

Redefine the old basic point of the airplane with this intersection point (menu 1-A).

Animate the airplane with the basic point on the segment (3: Attributes, type 1).

If you couldn't follow, open file 6 airplane part 2".

3. Step: Landing at a given airport

Insert the background image "I2 Airport" (insert image in the upper menu bar).

Now let the students change the graph to adapt the landing curve to the runway. You can also change the length and position of the coordinate system and the segment.

As an example take the function $f_1(x) = 8 - 2 * 2^{0.2x}$.

Finally hide the unused objects including the graph.

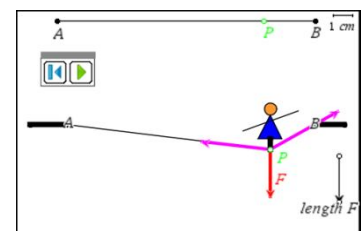
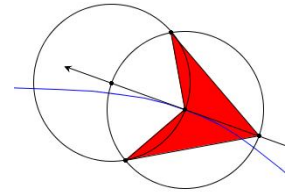
In the next section we will also learn, how you can stop the airplane at the end of the runway.

3. Sequence of animations and other tricks

Often we want to have a sequence of different movements. This can be done by extending the technics learned in section 2.

Open the file "7 examples animations". The 1st Animation shows a tight rope dancer.

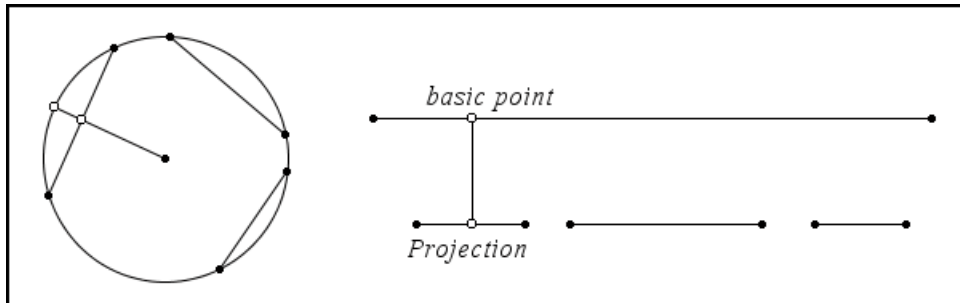
The second animation simulates a pulley driven by a piston engine. Both are examples for the technics with an animated point



on a segment as shown in section 2.

The 3rd example shows a sequence of animations with a stop at the end of every animation. We will show now how this is done.

The principle is: Animate a point on a geometric object (e.g. a circle or a segment, see picture) and project the point on different segments.



While the point moves on the circle (or segment), the projected point “lives” only during the passage through the specific segments and with these points you can construct different animations (the projection has to be constructed for every segment separately).

Open the file “8: sequence of animations part 1”, where we have just constructed the first step of the proof of the Pythagorean Theorem with the needed elements for the first step.

The three segments are AB, BC, CD. P1 is the projection of the basic point P on the segment AB. Move the point P to observe that P1 only exists on the segment AB. Move also the blue parallelogram with the point Q1.

We want to animate the point Q1 (and the whole parallelogram) with the point P1 (resp. P).

This can be done with dilation (enlargement) of the point Q2 with centre Q and factor k, where k has to be determined.

For k we could take the ratio AP1:AB, but since we want the parallelogram to stop a moment at the end, we take the ratio AP1:AS (S the stopping point) with the condition

$$\text{when} \left(\frac{AP1}{AS} < 1, \frac{AP1}{AS}, 1 \right).$$

And now the construction:

Measure AP1 and AS (menu 6-1).

Write the above condition as a text (menu 1-7).

Calculate this condition (menu 1-8) using the measures for AP1 and AS. Put the result beside the when-condition. This is the factor k.

With this factor make the dilation of Q2 with centre Q and factor k (menu 8-5)

Redefine the point Q1 with this point (menu 1-9).

Now you can animate point P (right mouse click on point P).

This first step of the Pythagorean Theorem you will find in 9: sequence of animations part 2

With animations you have a lot of possibilities, especially for demonstrations. Students like to make their own animations and they develop a great creativity. And in order to do it you need a lot of mathematical thinking.

A series of horizontal dotted lines spanning the width of the page, providing a template for handwriting practice.

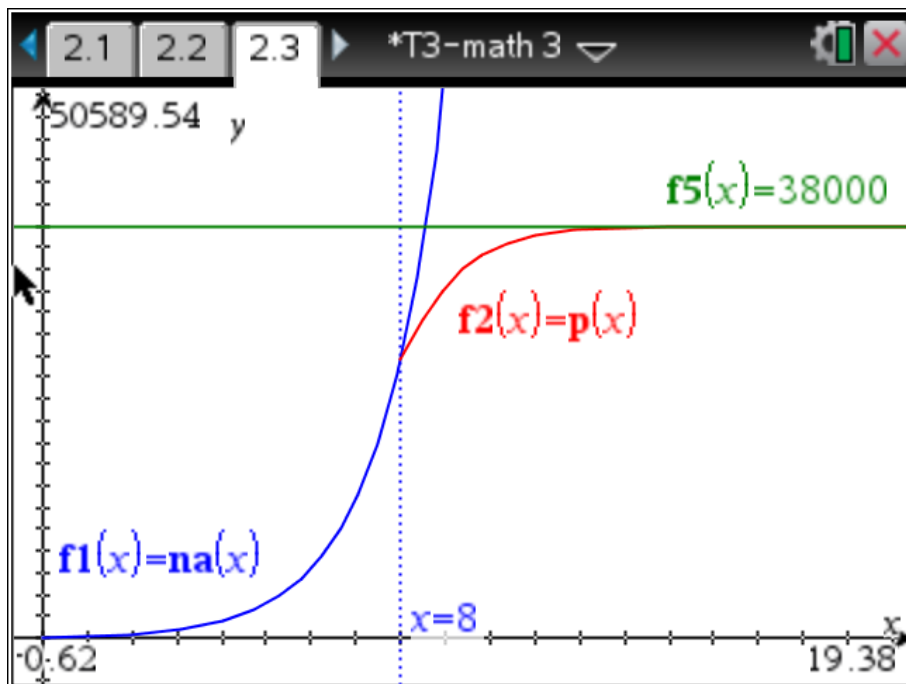


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen

Luc Blomme



Reflecties bij de invoering van TI-Nspire CAS op de Europese Scholen – L.A.A. Blomme

In 2010 is op de Europese Scholen het nieuwe wiskunde programma gestart. Een van de grote innovaties betreft het invoeren van hetzelfde technologisch hulpmiddel voor alle leerlingen van de laatste 4 studiejaren van de middelbare school, in alle taalafdelingen en alle studierichtingen. De keuze is daarbij op de TI-Nspire CAS gevallen. In 2012 is het eerste eindexamen gemaakt op basis van dit nieuwe programma.

In het eerste deel van de workshop stellen we aan u voor (presentatie beschikbaar op T3-Vlaanderen website):

- de Europese Scholen in het algemeen.
Meer info is beschikbaar op de site:

<http://www.eursc.eu/>



- het vernieuwde wiskundeprogramma van de Europese Scholen.

Alle programma's zijn beschikbaar in het Engels, Frans en Duits op de website:

<http://www.eursc.eu/>

- Studies and certificates	Organisation of studies	Nursery cycle	
- Enrolments	Syllabuses	Syllabuses - Introduction	
- School year calendar	Pedagogical issues	Nursery cycle	
- Legal basis of the European Schools	The European Baccalaureate	Primary cycle	
- The administrative organs of the European Schools	Distance Learning	Secondary cycle	Secondary - Languages
	"SEN" pupils and Learning Support		Secondary - Literary subjects
			Secondary - Scientific subjects

- het vernieuwde eindexamen (Europees Baccalaureaat wiskunde 3 / 5):
 - deel A: zonder rekenmachine (1 uur)
 - deel B: met rekenmachine (2 / 3 uur)
- ervaringen en commentaar bij het eerste eindexamen 'nieuwe stijl' 2012.
- ervaringen en commentaar bij de invoering van de TI-Nspire CAS: bijscholing en vorming, test-modus, pc en handheld, etc.

In het tweede deel gaan we aan de slag met de examenopgaven 2012 van het eerste Europees Baccalaureaat wiskunde 3 of 5 "nieuwe stijl". De examenvragen evenals de volledige uitwerking ervan (deel B, met rekenmachine) staat op de volgende pagina's.

MATH 3 - VRAAG B1 – ANALYSE

a. Gegeven

- de functie f gedefinieerd door $f(x) = a \cdot e^{bx}$ waarbij a en b reële getallen zijn.
- $f(0) = 4$ en $f'(0) = -2$

Gevraagd: toon aan dat $f(x) = 4 \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

b. Geef de formule van de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de grafiek van f , de coördinaatassen en de lijn $x=2$.

Bereken deze oppervlakte.

c. De booglengte L van de grafiek van f tussen x_1 en x_2 wordt gegeven door

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Gebruik de rekenmachine om L te bepalen als gegeven is dat $x_1 = 0$ en $x_2 = 2$.

Rond het antwoord af op twee decimalen.

MATH 3 - VRAAG B2 – ANALYSE

Bij een lange-termijnonderzoek wordt de groei van twee insectenkolonies A en B bestudeerd. Kolonie A bestaat bij het begin van het onderzoek uit 100 insecten en verdubbelt elke dag in aantal.

Kolonie B bestaat bij het begin van het onderzoek uit 20 insecten en dit aantal wordt elke dag vermenigvuldigd met 2.5.

- Geef voor beide kolonies het aantal insecten $N_A(t)$ en $N_B(t)$ als functie van t , waarbij t het aantal dagen is dat verlopen is sinds het onderzoek begon.
- Gebruik de rekenmachine om de volgende vragen te beantwoorden:
 - Voor welke waarde van t hebben kolonies A en B een gelijk aantal insecten?
 - Uit hoeveel insecten bestaat elke kolonie op dat moment?

Op $t = 8$ verandert de groei van kolonie A. Het aantal insecten $P(t)$ in kolonie A wordt dan gegeven door de formule $P(t) = \frac{38000}{1 + 1444e^{-t}}$, $t \geq 8$

c. Bereken met de rekenmachine $N_A(9)$ en $P(9)$.

Vergelijk deze aantallen en geef een verklaring.

d. Uit hoeveel insecten bestaat kolonie A aan het einde van dit lange-termijnonderzoek?

MATH 3 - VRAAG B3 – KANSREKENING

Gebruik de rekenmachine voor de berekeningen in onderdeel a), b) en c).

5% van de golfballen die het bedrijf Golflygreen produceert zijn ongeschikt voor gebruik.

- a. Uit de geproduceerde ballen worden aselekt 12 golfballen gekozen.
Geef aan welke kansverdeling gebruikt wordt en bereken de kans dat precies 2 van deze ballen ongeschikt zijn. Rond het antwoord af op 3 decimalen.
- b. Bereken de kans dat er bij een aselechte steekproef van 250 ballen geen enkele bal ongeschikt is. Rond het antwoord af op 6 decimalen.
- c. Bereken de kans dat er bij een aselechte steekproef van 250 ballen meer dan 10 ongeschikte ballen zijn. Rond het antwoord af op 3 decimalen.
- Golfygreen gebruikt een machine om de ballen te testen.
Deze machine beoordeelt 99% van de ongeschikte ballen inderdaad als ongeschikt voor gebruik, maar beoordeelt 2% van de goede ballen foutief als ongeschikt voor gebruik.
- d. Teken een boomdiagram waarin alle relevante informatie wordt weergegeven.
- e. Golfygreen beschouwt de machine als betrouwbaar als het percentage foutief beoordeelde ballen niet groter is dan 2%.
Is deze machine betrouwbaar ?

MATH 3 - VRAAG B4 – STATISTIEK

Gebruik de rekenmachine voor alle berekeningen in deze vraag.

De tabel hieronder geeft een overzicht van de aardbeienproductie en de marktprijs in een bepaald gebied gedurende de laatste 8 jaar:

x (ton)	500	700	850	1100	1300	1620	1950	2300
y (€/kg)	3.00	2.75	2.58	2.42	2.30	2.20	2.12	2.05

- a. Verwerk de gegevens van de tabel in een spreidingsdiagram.
- b. Bepaal een vergelijking van de regressielijn van y op x .
- c. Bepaal de correlatiecoëfficiënt van x en y .
- d. Bepaal een vergelijking van de lijn van Mayer door de gegevens te verdelen in een groep bestaande uit de eerste 4 jaar en een groep bestaande uit de laatste 4 jaar.
- e. Het spreidingsdiagram geeft aan dat een exponentieel model wellicht beter geschikt is dan een lineair model. We onderzoeken daarom de variabele $z = \ln(y)$
Bepaal een vergelijking van de regressielijn van z op x .
Bepaal de correlatiecoëfficiënt van x en z .
- f. Geef gebruik makend van de drie modellen die afgeleid zijn in de vragen b), d) en e) een schatting van de prijs per kg aardbeien als de productie 3000 ton bedraagt.
Geef een kort commentaar op de uitkomsten.

MATH 3 - VRAAG B1 – ANALYSE

1.1 1.2 *T3-math 3

a) functie definiëren: $f(x) := a \cdot e^{b \cdot x}$ ▶ Gereed

solve $\left\{ \begin{array}{l} f(0) = 4 \\ \left(\frac{d}{dx}(f(x)) \right) |_{x=0} = -2 \cdot a, b \end{array} \right.$

▶ $a = 4$ and $b = -\frac{1}{2}$

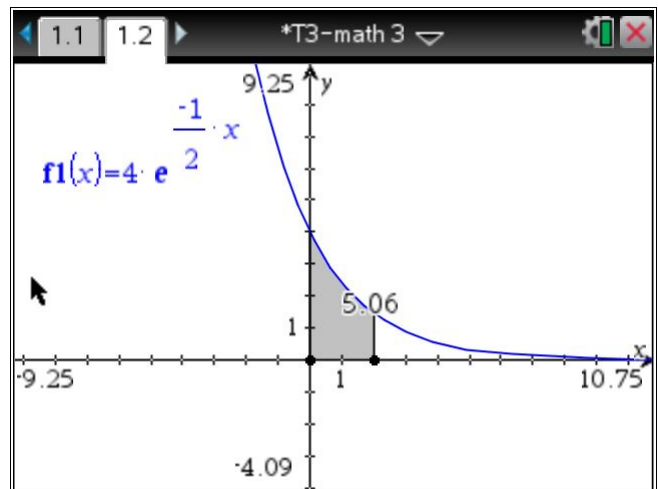
$f(x) |_{a=4 \text{ and } b=-\frac{1}{2}} \rightarrow 4 \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

1.1 1.2 *T3-math 3

$f(x) := a \cdot e^{b \cdot x} |_{a=4 \text{ and } b=-\frac{1}{2}}$ ▶ Gereed

b) oppervlakte (zie ook grafiekpagina)

oppte = $\int_0^2 f(x) dx \rightarrow 5.05696$



1.1 1.2 *T3-math 3

c) booglengte

$L = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}(f(x)) \right)^2} dx \rightarrow 3.2547$

MATH 3 - VRAAG B2 – ANALYSE

2.1 2.2 2.3 ▶ *T3-math 3

B2-ANALYSE

a) functies definiëren

$na(t) := 100 \cdot 2^t | t \geq 0$ ▶ Gereed

$nb(t) := 20 \cdot (2.5)^t | t \geq 0$ ▶ Gereed

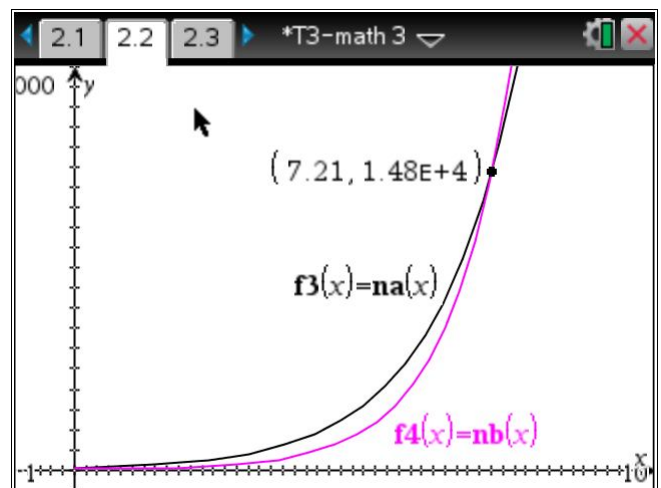
2.1 2.2 2.3 ▶ *T3-math 3

b) gelijk aantal insecten

$solve(na(t)=nb(t), t)$ ▶ $t=7.21257$ ⚠

aantal insecten = $na(7.21257)$ ▶ 14832.

[zie ook grafiekpagina]



2.1 2.2 2.3 ▶ *T3-math 3

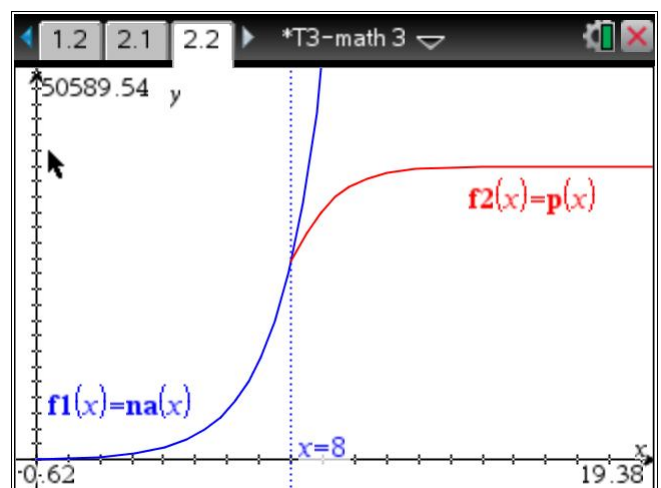
c) functie definiëren:

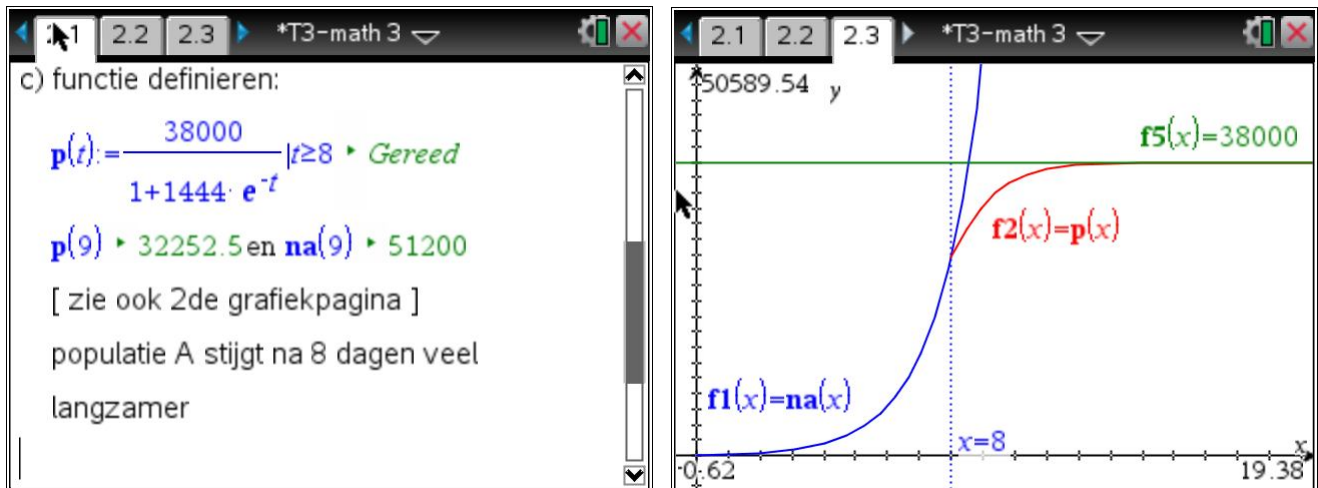
$p(t) := \frac{38000}{1+1444 \cdot e^{-t}} | t \geq 8$ ▶ Gereed

$p(9)$ ▶ 32252.5 en $na(9)$ ▶ 51200

[zie ook 2de grafiekpagina]

populatie A stijgt na 8 dagen veel langzamer





MATH 3 - VRAAG B3 – KANSREKENING



2.2 2.3 3.1 *T3-math 3

d) boomdiagram

{	goede bal: 0.95,	{	ongeschikt: 0.02
		geschikt: 0.98	
{	slechte bal: 0.05,	{	ongeschikt: 0.99
		geschikt: 0.01	

2.2 2.3 3.1 *T3-math 3

e) $P(\text{foutief beoordeeld}) =$
 $P(\text{goede bal en ongeschikt of slechte bal en geschikt})$
 $P(\text{foutief}) = 0.95 \cdot 0.02 + 0.05 \cdot 0.01 = 0.0195$
 $< 2\%$ dus betrouwbaar

}

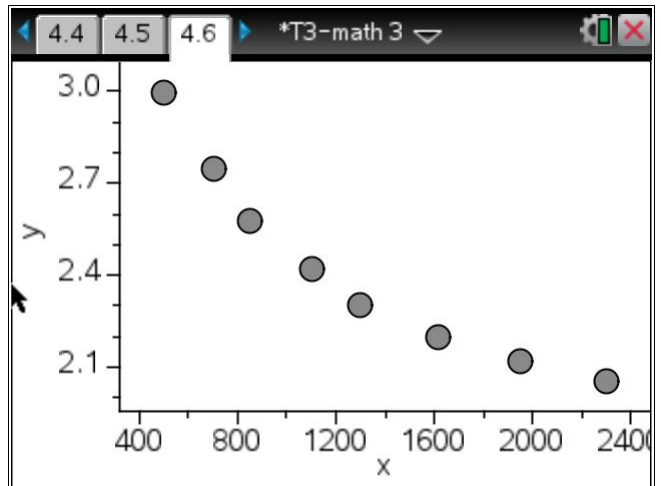
MATH 3 - VRAAG B4 – STATISTIEK

3.1 4.1 4.2 *T3-math 3

B4-STATISTIEK

a) gegevens invoeren
 [zie spreadsheetpagina]
 spreidingsdiagram
 [zie statistiekpagina]

	x	y		
1	500	3.		
2	700	2.75		
3	850	2.58		
4	1100	2.42		
5	1300	2.3		
6	1620	2.2		



Lineaire regressie (mx+b)

X-lijst: x

Y-lijst: y

RegVgl opslaan naar: f1

Frequentielijst: 1

Categorieelijst:

Categorieën opnemen:

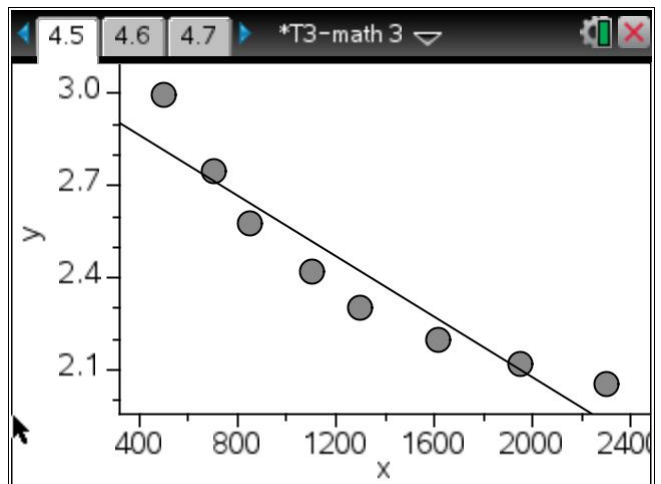
OK Annuleer

x	y			E
				=LinRegMx(x
1	500	3.	Titel	Lineaire regr...
2	700	2.75	RegEqn	m*x+b
3	850	2.58	m	-0.000495
4	100	2.42	b	3.06574
5	300	2.3	r ²	0.890911
6	620	2.2	r	-0.943881

E = "Lineaire regressie (mx+b)"

b) regressielijn van y op x: $y=mx+b$
 $f_1(x) = -0.000495x + 3.06574$
 [zie spreadsheetpagina
 en statistiekpagina]

c) correlatiecoëfficiënt van x en y
 $r = -0.943881$
 [zie spreadsheetpagina]



	x	y		
				=LinRegMx(x
3	850	2.58	m	-0.000495
4	100	2.42	b	3.06574
5	300	2.3	r ²	0.890911
6	620	2.2	r	-0.943881
7	950	2.12	Resid	{0.18164046...
8	1200	2.05		
E6				=-0.94388081816042

d) lijn van Mayer

berekening van gemiddelden van de twee groepen [zie spreadsheetpagina]

$$\bar{y} = \frac{2.1675 - 2.6875}{1792.5 - 787.5} \cdot (xx - 787.5) + 2.6875$$

$$= 3.09496 - 0.000517 \cdot xx$$

lijn van Mayer: $y = -0.000517x + 3.09496$

A	x	B	y	C	D
1	500.	3.	787.5	Titel	
2	700	2.75	2.6875	RegEqn	
3	850	2.58		m	
4	1100	2.42		b	
5	1300	2.3	1792.5	r ²	
6	1620	2.2	2.1675	r	
C1				=mean(a1:a4)	

e) kolom $z = \ln(y)$ toevoegen aan spreadsheet

regressielijn van z op x

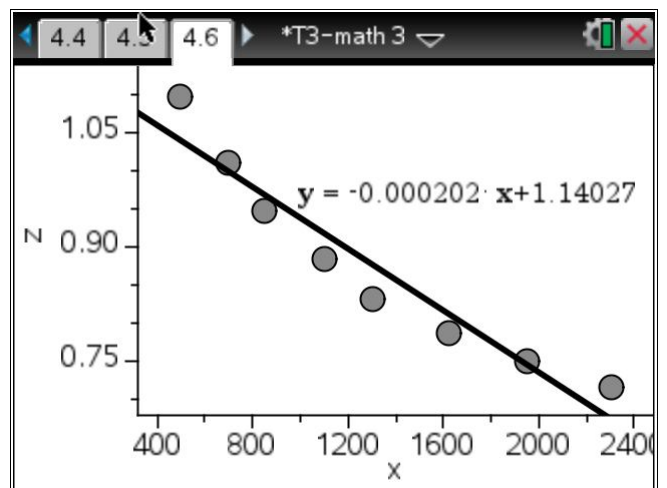
$$f_2(x) = -0.000202x + 1.14027$$

[zie spreadsheetpagina
en statistiekpagina]

correlatiecoefficient $r = -0.959809$

A	x	B	y	C	z
					=ln(y)
1	500.	3.		1.09861	
2	700	2.75		1.0116	
3	850	2.58		0.947789	
4	1100	2.42		0.883768	
5	1300	2.3		0.832909	
6	1620	2.2		0.798457	
C				z = ln(y)	

	y	z		
		=ln(y)		=LinRegMx
2	700	2.75	1.0116	RegEq... m*x+b
3	850	2.58	0.947...	m -0.000202
4	1000	2.42	0.883...	b 1.14027
5	1300	2.3	0.832...	r ² 0.921234
6	1620	2.2	0.788...	r -0.959809
F6 =-0.95980941308422				



f) schatting van de prijs per kg aardbeien

- lineaire regressie van y op x:
 $f_1(3000) \rightarrow 1.58146$
- lijn van Mayer:
 $3.09496 - 5.17E-4 \cdot x | x=3000 \rightarrow 1.54396$

- lineaire regressie van z op x:
 $z = f_2(3000) \rightarrow 0.532785 = \ln(y)$
 dus $y = e^{0.532785} \rightarrow 1.70367$

er zijn niet genoeg gegevens om het gepaste model te bepalen

MATH 5 - VRAAG B1 – ANALYSE

Gegeven is de familie van functies g_n gedefinieerd door

$$g_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^x} \text{ voor alle gehele getallen } n \geq 0$$

- d. Schets de grafiek van g_0
- e. Toon aan dat $g_0(x) = g_{-1}(-x)$ voor alle reële getallen x .
Geef de meetkundige betekenis van deze betrekking en schets de grafiek van g_1 in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van g_0 .
- f. Toon aan dat de krommen $y = g_n(x)$ een gemeenschappelijk punt hebben en geef de coördinaten van dat punt.
- g. Onderzoek, voor $n \geq 2$, het verloop van de functie $g_n(x)$ als $x \rightarrow -\infty$ en als $x \rightarrow +\infty$ en geef de vergelijking van de asymptoot.
- h. Bereken, voor $n \geq 2$, de afgeleide $g_n'(x)$ en geef aan of g_n stijgend of dalend is.
- i. In het punt met $x=0$ heeft de grafiek van g_n een raaklijn die parallel is met de lijn $9x - 4y - 1 = 0$.
Bereken n en geef een vergelijking van deze raaklijn.
- j. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van g_0 en g_1 tussen de lijnen met vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$.
- k. Voor de gehele getallen $n \geq 0$ is gegeven de rij I_n gedefinieerd door $I_n = \int_{-1}^0 g_n(x) dx$
Bereken de kleinste waarde n waarvoor $I_n \leq 0.11$.

MATH 5 - VRAAG B2 – MEETKUNDE

In een 3-dimensionale ruimte zijn gegeven de lijnen gedefinieerd door:

$$d_1 : \begin{cases} x = 2\lambda - 7 \\ y = 3\lambda - 14 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \text{ en } d_2 : \begin{cases} x = 3\mu - 10 \\ y = 2\mu - 6 \\ z = \mu \end{cases} ; \mu \in \mathbb{R}$$

- e. Toon aan dat de lijnen d_1 en d_2 kruisen.
- f. De lijn p staat loodrecht op de lijnen d_1 en d_2 en snijdt beide lijnen.
Bepaal een stelsel vergelijkingen van de lijn p .
- g. Bereken de kortste afstand tussen de lijnen d_1 en d_2 .
- h. De lijn l gaat door het punt $M(1, 2, 0)$ en snijdt de lijnen d_1 en d_2 .
Bepaal parametervergelijkingen van lijn l .
- i. Bestaat er een bol met middelpunt M die de lijnen d_1 en d_2 raakt?
Verklaar je antwoord.
- j. Bepaal een vergelijking van de bol met middelpunt M die raakt aan lijn d_2 .

MATH 5 - VRAAG B3 – KANSREKENING

De diameters van eieren geproduceerd op een kippenboerderij, zijn normaal verdeeld met gemiddelde 60 mm en standaardafwijking 5 mm.

- f. 98% van de eieren in de productie heeft diameters in het interval $[60 - k, 60 + k]$.

Bereken de waarde van k in mm, afgerond op 2 decimalen.

Eieren met een diameter van 70mm of meer behoren bij de klasse XL.

- g. Laat zien dat de XL-eieren ongeveer 2.275% van de productie vormen.

De boerderij produceert 4000 eieren per dag.

- h. Bereken de kans dat het totale aantal XL-eieren in de productie van 7 dagen in het interval $[600, 650]$ ligt.

Sommige eieren hebben meer dan één dooier.

Gemiddeld hebben 30% van de XL-eieren meer dan één dooier daar waar slechts 0.5% van alle andere eieren meer dan één dooier heeft

- i. Bereken de kans dat een aselect gekozen ei, afkomstig van deze boerderij, meer dan één dooier heeft.
- j. Bereken de kans dat een aselect gekozen ei met meer dan één dooier geen XL-ei is.

MATH 5 - VRAAG B4 – RIJEN

Gegeven is de rij (u_n) gedefinieerd door
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{4}u_{n-1}^2 + 1; n \geq 2 \end{cases}$$

- g. Bereken de exacte waarde van u_2 en u_3 .

Bereken u_{20} en rond het antwoord af op 4 decimalen.

- h. Gegeven is dat $u_n < 2$ voor elk natuurlijk getal n .

Toon aan dat de rij (u_n) stijgend is.

Leid hieruit af dat (u_n) convergeert

en bereken de limiet van deze rij.

MATH 5 - VRAAG B5 – COMPLEXE GETALLEN

Gegeven is het complexe getal $w = \frac{1+iz}{z+2}$ waarbij $z = x + iy$ een complex getal is en $z \neq -2$.

- a. Bepaal het reële deel en het imaginaire deel van w uitgedrukt in x en y .

- b. Als w zuiver imaginair is liggen de punten die z representeren in het complexe vlak, op een rechte lijn.

Toon dit aan en bepaal een vergelijking van deze lijn.

MATH5 - VRAAG B1 – ANALYSE

1.1 1.2 *T3-math 5

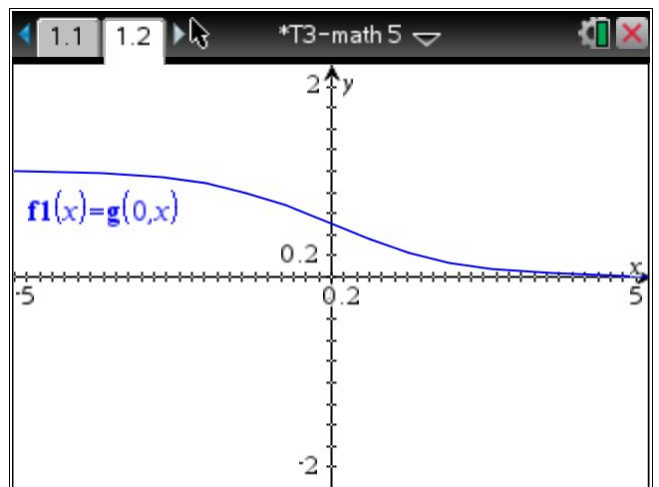
B1 – ANALYSE

de functies $g_n(x) = g(n, x)$ definiëren:

$$g(n, x) = \frac{e^{n \cdot x}}{1 + e^x} \quad \text{▶ Gereed}$$

a) grafiek van $g_0(x) = g(0, x)$

- zie grafiekpagina met $f_1(x) = g(0, x)$ |
- aangepaste instellingen



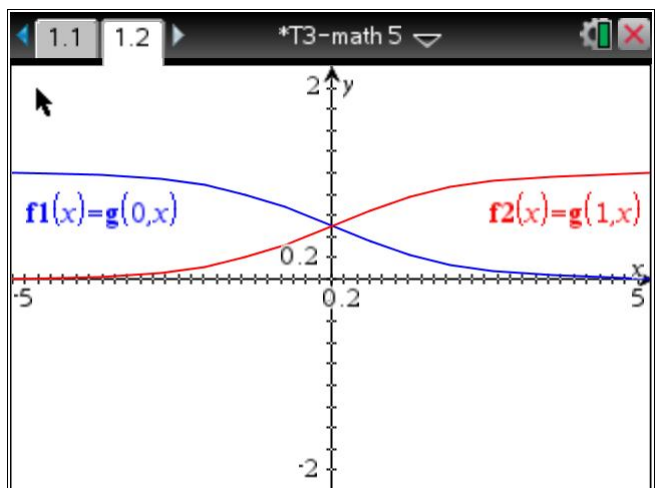
1.1 1.2 *T3-math 5

b) $g(0, x) \text{ ▶ } \frac{1}{e^x + 1}$ en $g(1, -x) \text{ ▶ } \frac{1}{e^{-x} + 1}$ zijn hetzelfde voor alle x .

ofwel $g(0, x) = g(1, -x) \text{ ▶ true}$

- zie grafiekpagina met $f_2(x) = g(1, x)$

De grafieken zijn gespiegeld tov de Y-as.



1.1 1.2 *T3-math 5

c) snijpunt van g_0 en g_1 :

$$\text{solve}(g(0, x) = g(1, x), x) \text{ ▶ } x = 0$$

het enige mogelijke punt op alle grafieken g_n heeft x -coördinaat = 0:

$$g(n, 0) \text{ ▶ } \frac{1}{2}$$

snijpunt $S(0, \frac{1}{2})$

1.1 1.2 *T3-math 5

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(n,x)) | n \geq 2 \rightarrow 0$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} (g(n,x)) | n \geq 2 \rightarrow \infty$

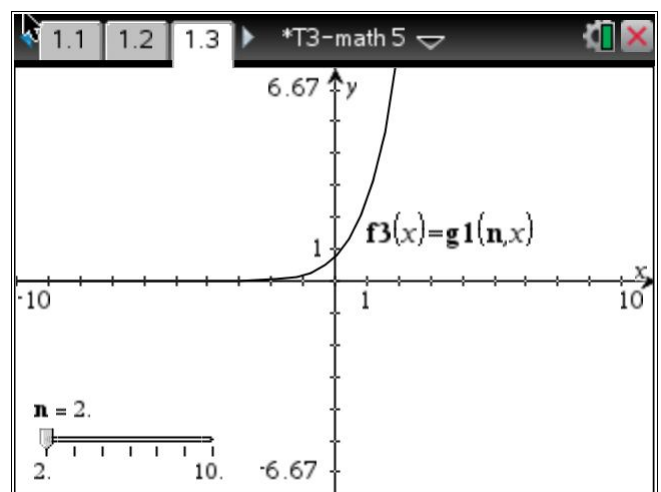
Als $n \geq 2$ dan is $y=0$ een horizontale asymptoot van $g_n(x)$

1.1 1.2 *T3-math 5

e) $g1(n,x) = \frac{d}{dx} (g(n,x)) \rightarrow$ Gereed

$$g1(n,x) = \frac{((n-1) \cdot e^x + n) \cdot e^{n \cdot x}}{(e^x + 1)^2}$$

Als $n \geq 2$ dan is $g1(n,x) > 0$
 dus $g_n(x)$ is een stijgende functie
 - tekenonderzoek van afgeleide kan ook grafisch (zie grafiekvenster)



1.1 1.2 1.3 *T3-math 5

(f) vergelijking van de lijn

$$\text{solve}(9 \cdot x - 4 \cdot y - 1 = 0, y) \rightarrow y = \frac{9 \cdot x - 1}{4}$$

rico = $\frac{9}{4}$ in $x = 0$

$$\text{solve}\left(g1(n,0) = \frac{9}{4}, n\right) \rightarrow n = 5$$

$$y = \text{tangentline}(g(5,x), x, 0) \rightarrow y = \frac{9 \cdot x}{4} + \frac{1}{2}$$

g) gebruik de symmetrie tov Y-as

$$\text{oppte} = 2 \cdot \int_0^1 (g(1,x) - g(0,x)) dx$$

$$2 \cdot (2 \cdot \ln(e+1) - 2 \cdot \ln(2) - 1)$$

$$2 \cdot (2 \cdot \ln(e+1) - 2 \cdot \ln(2) - 1) \rightarrow 0.480458$$

h) definieer de rij I(n)

$$i(n) = \int_{-1}^0 g(n,x) dx \rightarrow \text{Gereed}$$

gebruik lijsten en spreadsheet om de kleinste waarde van n te bepalen met $I(n) \leq 0.11$

antwoord: $n = 5$ (zie spreadsheet pagina)

A	B	C
n_waarde	i_waarde	
=seq(a,a,0,12)	=i(n_waarde)*1.	
1	0	0.620115
2	1	0.379885
3	2	0.252235
4	3	0.180097
5	4	0.13664
6	5	0.108781

B1 =0.62011450695825

A	B	C
n_waarde	i_waarde	
=seq(a,a,0,12)	=i(n_waarde)*1.	
3	2	0.180097
5	4	0.13664
6	5	0.108781
7	6	0.089872
8	7	0.076382
9	8	0.066345

B1 =0.62011450695825

MATH5 - VRAAG B2 – MEETKUNDE

B2-MEETKUNDE

a) $\mathbf{r1} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbf{r2} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

richtvectoren zijn geen veelvouden dus
zijn de lijnen niet evenwijdig.

gemeenschappelijke punten ?

$$\text{solve} \left(\begin{cases} 2 \cdot \lambda - 7 = 3 \cdot \mu - 10 \\ 3 \cdot \lambda - 14 = 2 \cdot \mu - 6 \\ \lambda = \mu \end{cases}, \lambda, \mu \right) \rightarrow \text{false}$$

bijgevolg zijn de lijnen kruisend.

b) gemeenschappelijke normaalvector

van d_1 en d_2 : $\mathbf{n} := \text{crossP}(\mathbf{r1}, \mathbf{r2}) \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$

stelsel cartesiaanse vergelijkingen:

- de lijn p is de doorsnede van het vlak α door de lijn d_1 en evenwijdig met \mathbf{n} en het vlak β door d_2 en evenwijdig met \mathbf{n} .
- We zoeken eerst normaalvectoren van α en β

$$\mathbf{n}\alpha := \text{crossP}(\mathbf{n}, \mathbf{r1}) \rightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ -11 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n}\beta := \text{crossP}(\mathbf{n}, \mathbf{r2}) \rightarrow \begin{bmatrix} 11 \\ -16 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- vergelijking van α en β

$$\text{dotP} \left(\mathbf{n}\alpha, \begin{bmatrix} x+7 \\ y+14 \\ z \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow 16 \cdot x - 11 \cdot y + z - 42 = 0$$

$$\text{dotP} \left(\mathbf{n}\beta, \begin{bmatrix} x+10 \\ y+6 \\ z \end{bmatrix} \right) = 0 \rightarrow 11 \cdot x - 16 \cdot y - z + 14 = 0$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

- vergelijking van α en β

$$\text{dotP}\left(\mathbf{n}_\alpha, \begin{bmatrix} x+7 \\ y+14 \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow 16 \cdot x - 11 \cdot y + z - 42 = 0$$

$$\text{dotP}\left(\mathbf{n}_\beta, \begin{bmatrix} x+10 \\ y+6 \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \rightarrow 11 \cdot x - 16 \cdot y - z + 14 = 0$$

dus p:
$$\begin{cases} 16 \cdot x - 11 \cdot y + z - 42 = 0 \\ 11 \cdot x - 16 \cdot y - z + 14 = 0 \end{cases}$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

stelsel parametervergelijkingen:

- Neem 2 punten P_1 op d_1 en P_2 op d_2

$$\mathbf{p1} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda - 7 \\ 3 \cdot \lambda - 14 \\ \lambda \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda - 7 \\ 3 \cdot \lambda - 14 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p2} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \mu - 10 \\ 2 \cdot \mu - 6 \\ \mu \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 \cdot \mu - 10 \\ 2 \cdot \mu - 6 \\ \mu \end{bmatrix}$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

- de vector $P_1P_2 = \mathbf{p2} - \mathbf{p1}$ is loodrecht op d_1 en d_2 als het scalair product = 0 is

$$\text{solve}\left(\begin{cases} \text{dotP}(\mathbf{p2} - \mathbf{p1}, \mathbf{r1}) = 0 \\ \text{dotP}(\mathbf{p2} - \mathbf{p1}, \mathbf{r2}) = 0 \end{cases}, \lambda, \mu\right)$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{161}{27} \text{ and } \mu = \frac{136}{27}$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

- punt P_1 of P_2 bepalen:

$$\mathbf{p2} \Big|_{\mu = \frac{136}{27}} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{46}{9} \\ \frac{110}{27} \\ \frac{136}{27} \end{bmatrix}$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

$\left[\frac{136}{27} \right]$

- gemeenschappelijke loodlijn:

$$p: \begin{cases} x = \frac{46}{9} + t \\ y = \frac{110}{27} + t \\ z = \frac{136}{27} - 5t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

c) Neem 2 punten A op d_1 en B op d_2

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -7 \\ -14 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -10 \\ -6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

afstand(d_1, d_2) = $\frac{|\text{dotP}(\mathbf{n}, \mathbf{b}-\mathbf{a})|}{\text{norm}(\mathbf{n})} = \frac{5 \cdot \sqrt{3}}{9}$

1.4 2.1 2.2 T3-math 5

d) definieer M: $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

- de lijn l is de doorsnede van het vlak θ_1 door d_1 en M en het vlak θ_2 door d_2 en M
- normaalvectoren bepalen

$$\mathbf{n}\theta_1 = \text{crossP}(\mathbf{r}_1, \mathbf{m}-\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} -16 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

1.4 2.1 2.2 *T3-math 5

$$\mathbf{n}\theta_2 = \text{crossP}(\mathbf{r}_2, \mathbf{m}-\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} -8 \\ 11 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- richtvector van l = $\text{crossP}(\mathbf{n}\theta_1, \mathbf{n}\theta_2) = \begin{bmatrix} -72 \\ -32 \\ -112 \end{bmatrix}$

- parametervgl van l: $\begin{cases} x=1-72t \\ y=2-32t \\ z=-112t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$

1.4 2.1 2.2 *T3-math 5

d) *alternatieve oplossing:*

de lijn $MP_1 = \text{lijn } MP_2$ met 2 punten P_1 op d_1 en P_2 op d_2 (zie hoger)

solve($\rho \cdot (\mathbf{m}-\mathbf{p}_1) + \mathbf{m} = \sigma \cdot (\mathbf{m}-\mathbf{p}_2) + \mathbf{m}, \lambda, \mu, \rho, \sigma$)

$\lambda = \mathbf{c198}$ and $\mu = \mathbf{c197}$ and $\rho = 0$ and $\sigma = 0$ or

$\lambda = \frac{112}{19}$ and $\mu = \frac{14}{3}$ and $\rho = \frac{19 \cdot \mathbf{c196}}{24}$

and $\sigma = \mathbf{c196}$

1.4 2.1 2.2 *T3-math 5

- Punt T f: $\mathbf{p}_2 + \mu = \frac{14}{3} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 3 \\ 14 \\ 3 \end{bmatrix}$

- lijn $MP_2 = MP_1 = MF: t \cdot (\mathbf{m}-\mathbf{f}) + \mathbf{m} \rightarrow \begin{bmatrix} 1-3 \cdot t \\ 2-\frac{4 \cdot t}{3} \\ -14 \cdot t \end{bmatrix}$

1.4 2.1 2.2 *T3-math 5

$\left[\frac{-14 \cdot t}{3} \right]$

- parametervgln van l:

$$\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-\frac{4}{3}t \\ z=-\frac{14}{3}t \end{cases}; t \in \mathbb{R}$$

(zelfde oplossing als met andere methode)

1.4 2.1 2.2 *T3-math 5

e) afstand van M tot de beide lijnen bepalen:

$$d(d_1, M) = \frac{\text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{r1}, \mathbf{a-m}))}{\text{norm}(\mathbf{r1})} \rightarrow \frac{8 \cdot \sqrt{21}}{7}$$

$$d(d_2, M) = \frac{\text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{r2}, \mathbf{b-m}))}{\text{norm}(\mathbf{r2})} \rightarrow \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{8 \cdot \sqrt{21}}{7} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} \rightarrow \text{false}$$

dus geen bol mogelijk.

1.3 1.4 2.1 *T3-math 5

f) Bol met middelpunt M rakend aan d_2

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + z^2 = \left(\frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} \right)^2$$

$$\rightarrow x^2 - 2 \cdot x + y^2 - 4 \cdot y + z^2 + 5 = \frac{27}{2}$$

MATH5 - VRAAG B3 – KANSREKENING

B3 - KANSREKENING

a) gemiddelde = 60; standaarddeviatie = 5
 $P(60-k \leq X \leq 60+k) = 0.98$
 solve(normcdf(60-k,60+k,60,5)=0.98,k=10)
 ▶ $k=11.6317$ ⚠

98% van de eieren hebben een diameter in het interval $[60-11.6317, 60+11.6317]$
 ▶ $[48.3683 \quad 71.6317]$

a) *alternatieve oplossing*
 mbv een spreadsheet
 ↳ stapsgewijze benaderen door de stapgrootte te wijzigen (zie spreadsheet)
 $k=11.6317$

A	B	C	D
k_waarde	van	tot	
=seq(5.+n/2=60-k_wa=60+k_wa=normcdf(
1	5.	55.	65. 0.682689
2	5.5	54.5	65.5 0.728668
3	6.	54.	66. 0.769861
4	6.5	53.5	66.5 0.806399
5	7.	53.	67. 0.838487
6	7.5	52.5	67.5 0.866286

D =normcdf(van,tot,60,5)

A	B	C	D
k_waarde	van	tot	
=seq(5.+n/2=60-k_wa=60+k_wa=normcdf(
10.	50.	70.	0.954
12	10.5	49.5	70.5 0.96427
13	11.	49.	71. 0.97219
14	11.5	48.5	71.5 0.97855
15	12.	48.	72. 0.98360
16	12.5	47.5	72.5 0.98758

A14:D15 =11.5

A	B	C	D
k_waarde	van	tot	
=seq(11.5+=60-k_wa=60+k_wa=normcdf(
2	11.55	48.45	71.55 0.979112
3	11.6	48.4	71.6 0.979659
4	11.65	48.35	71.65 0.980194
5	11.7	48.3	71.7 0.980716
6	11.75	48.25	71.75 0.981227

A k_waarde:=seq(11.5+ $\frac{n}{20}$,n,0,20)

A	k_waarde	B	van	C	tot	D
	=seq(11.6+	=60-k_wa	=60+k_wa	=normcdf		
	11.61	48.39	71.61	0.979767		
3	11.62	48.38	71.62	0.979875		
4	11.63	48.37	71.63	0.979981		
5	11.64	48.36	71.64	0.980088		
6	11.65	48.35	71.65	0.980194		

A k_waarde: =seq(11.6 + $\frac{n}{100}, n, 0, 50$)

A	k_waarde	B	van	C	tot	D
	=seq(11.63	=60-k_wa	=60+k_wa	=normcdf		
	11.6314	48.3686	71.6314	0.97999		
16	11.6315	48.3685	71.6315	0.97999		
17	11.6316	48.3684	71.6316	0.97999		
18	11.6317	48.3683	71.6317	0.97999		
19	11.6318	48.3682	71.6318	0.98000		
20	11.6319	48.3681	71.6319	0.98000		

A18:D18 =11.6317

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5

b) $P(X \geq 70) = \text{normCdf}(70, \infty, 60, 5) \rightarrow 0.02275$
 2.275% van de eieren zijn XL.

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5

c) Y heeft binomiale verdeling met
 $p = 0.02275$ en $n = 7 \cdot 4000 \rightarrow 28000$
 $P(600 \leq Y \leq 650) =$
 $\text{binomCdf}(28000, 0.02275, 600, 650)$
 $\rightarrow 0.641971$
 64.2% van de eieren hebben een diameter in
 het interval [600,650]

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5

d) Z = ei heeft meer dan 1 dooier
 XL = ei behoort tot de XL klasse

$$P(Z) = P(XL) \cdot P(Z|XL) + P(XL^c) \cdot P(Z|XL^c)$$

$$0.02275 \cdot 0.3 + (1 - 0.02275) \cdot 0.005 \rightarrow 0.011711$$

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5

e) $P(XL^c|Z) = \frac{P(XL^c \cap Z)}{P(Z)}$

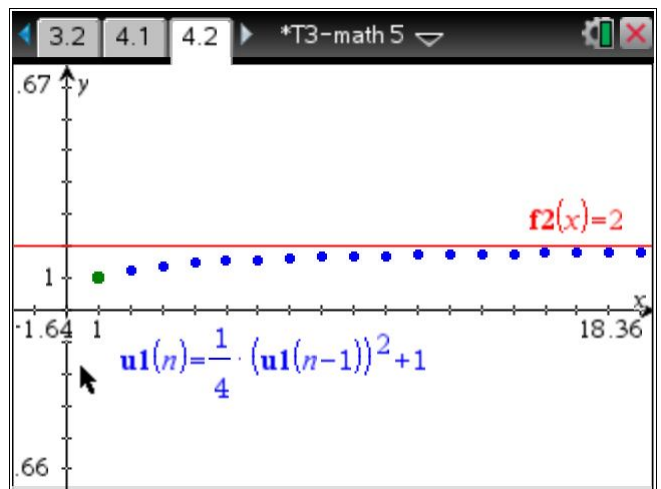
$$\frac{0.97725 \cdot 0.005}{0.0117} \rightarrow 0.417628$$

MATH5 - VRAAG B4 – RIJEN

3.2 4.1 4.2 *T3-math 5

B4-RIJEN

definieer de rij:

$$u(n) := \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{4} \cdot (u(n-1))^2 + 1, & n \geq 2 \end{cases} \rightarrow \text{Gereed}$$


3.2 4.1 4.2 *T3-math 5

a) $u(2) \rightarrow \frac{5}{4}$

$u(3) \rightarrow \frac{89}{64}$

$u(20) \rightarrow 1.83977$ dus $u(20) \approx 1.8398$

3.2 4.1 4.2 *T3-math 5

b) stel $x = u(n-1)$; dan is $u(n) = \frac{1}{4}x^2 + 1$

$$u(n) - u(n-1) = \frac{1}{4}x^2 + 1 - x$$

$$\text{factor}\left(\frac{1}{4}x^2 + 1 - x\right) \rightarrow \frac{(x-2)^2}{4}$$

$u(n) - u(n-1) > 0$ dus stijgende rij
en omdat $u(n) < 2$ (gegeven) is $u(n)$ een

3.2 4.1 4.2 *T3-math 5

convergerende rij met limiet v .
Deze limiet is de oplossing van

$$\text{solve}\left(v = \frac{1}{4} \cdot v^2 + 1, v\right) \rightarrow v = 2$$

dus: $\lim_{n \rightarrow \infty} (u(n)) = 2$

(zie ook grafiekpagina)

MATH5 - VRAAG B5 – COMPLEXE GETALLEN

4.1 4.2 5.1 *T3-math 5

B5-COMPLEXE GETALLEN

definieer: $z = x + i \cdot y \rightarrow x + y \cdot i$

en $w = \frac{1+i \cdot z}{z+2} \mid z \neq -2$

$$\rightarrow \frac{x-2 \cdot (y-1)}{x^2+4 \cdot x+y^2+4} + \frac{x^2+2 \cdot x+y \cdot (y-1)}{x^2+4 \cdot x+y^2+4} \cdot i$$

ofwel

4.1 4.2 5.1 *T3-math 5

ofwel

$$\Re(\mathbf{w}) \rightarrow \frac{x-2 \cdot (y-1)}{x^2+4 \cdot x+y^2+4}$$

$$\Im(\mathbf{w}) \rightarrow \frac{x^2+2 \cdot x+y \cdot (y-1)}{x^2+4 \cdot x+y^2+4}$$

4.1 4.2 5.1 *T3-math 5

b) w is zuiver imaginair als $\text{real}(w)=0$

$$\text{solve}(\text{real}(w)=0, y) \rightarrow y = \frac{x+2}{2}$$

De punten die z voorstellen liggen op

de lijn $y = \frac{1}{2}x + 1$

A series of horizontal dotted lines spanning the width of the page, providing a guide for handwriting practice.

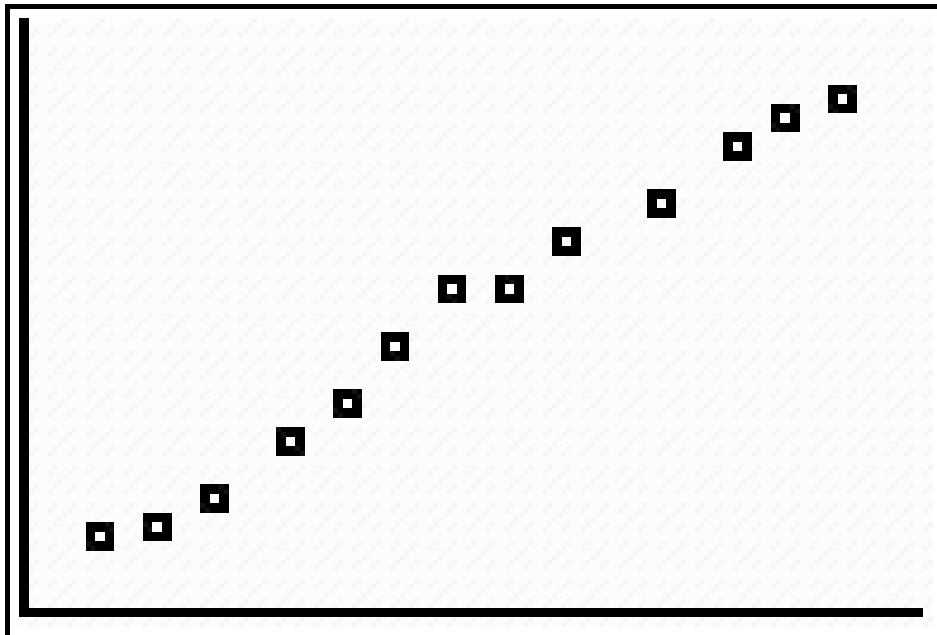


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Leren modelleren

Johan Deprez



Leren modelleren

Johan Deprez

HU Brussel – Universiteit Antwerpen – KU Leuven

De workshop is gebaseerd op het artikel

Deprez, J., Op de Beeck, R., & Van den Broeck, L. (2011). Leren modelleren. *Uitwisseling*, 27 (3), 15 – 51.

Je vindt de volledige tekst van dit artikel op www.ua.ac.be/johan.deprez bij Documenten. Je vindt daar ook de digitale presentatie en de TI84-lijsten met de gegevens.

Flyers drukken

Onze school bestaat 150 jaar en dat mag natuurlijk niet onopgemerkt voorbijgaan. Het schoolbestuur en de directie organiseren allerlei activiteiten, maar ook de leerlingen krijgen een budget om hun duit in het zakje te doen. Voor de fuif die ze houden, willen ze een flyer verspreiden in de omliggende gemeenten. Hoeveel flyers ze zullen bestellen, laten ze afhangen van de prijs. Op het internet (<http://flyer.eu/drukwerk/Flyers>) vinden ze de volgende prijzen voor een Light Budget flyer in A4-formaat:

aantal exemplaren	1000	2000	3000	4000	5000
prijs (in EUR)	125	146	167	188	209

Wat onmiddellijk opvalt, is het volgende: hoewel je voor 5000 exemplaren natuurlijk meer betaalt dan voor 1000, is de prijs per exemplaar wel beduidend lager.

1. Hoe komt dat? Welke systematiek zit er achter de prijzen in de tabel? Stel de gegevens uit de tabel grafisch voor. Kun je een formule vinden die bij de tabel past? Stel hierbij de prijs (in EUR) voor door p en de hoeveelheid door x . Wat is een faire prijs voor 4300 flyers?

Er is nog een ander ontwerp voor de flyer in de running. Daardoor ligt het formaat nog niet vast. Misschien kiezen de leerlingen wel voor Carre L. De prijzen voor het drukken van flyers in dat formaat vind je in de onderstaande tabel:

aantal exemplaren	1000	2000	3000	4000	5000
prijs (in EUR)	99	120	142	163	183

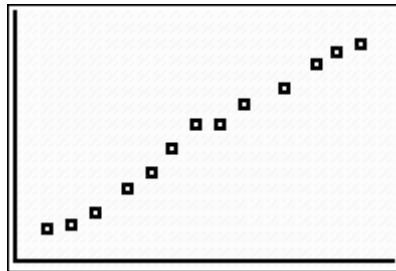
2. Zoek ook nu naar de systematiek achter de prijzen in de tabel en naar een formule die de tabel goed (maar daarom niet perfect) samenvat.



De Belgen door de jaren heen

Sinds het ontstaan van ons land en tot in de jaren tachtig van de vorige eeuw heeft men ongeveer om de 10 jaar een volkstelling gehouden. Hieronder zie je een tabel met de gegevens over het aantal inwoners van ons land van 1847 (toen de eerste volkstelling plaatshad) tot 1981. De lijsten zitten in het geheugen van je rekenmachine. In de figuur daaronder zijn dezelfde gegevens in een grafiek uitgezet.

jaar	aantal jaar na 1830 (lijst BEL01)	aantal inwoners (lijst BEL02)
1847	17	4 337 196
1857	27	4 529 560
1867	37	4 827 833
1881	51	5 520 009
1891	61	6 069 321
1901	71	6 693 548
1911	81	7 423 784
1921	91	7 401 353
1931	101	8 092 004
1948	118	8 512 195
1962	132	9 189 741
1971	141	9 650 944
1981	151	9 848 647

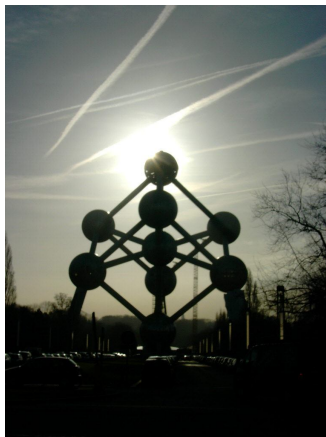


Je ziet op de grafiek dat de bevolking in de onderzochte periode zeker niet perfect gelijkmatig gegroeid is, maar dat de punten toch redelijk goed aansluiten bij een rechte. Eén mogelijkheid voor zo'n rechte is de rechte door de uiterste twee punten.

1. Teken deze rechte in de figuur. Stel ook de vergelijking van deze rechte op. Rond eindresultaten af tot gehele getallen. Wat is de betekenis van de richtingscoëfficiënt? En van de constante term?

De bijbehorende eerstegraadsfunctie is een aanvaardbaar wiskundig model voor de groei van de bevolking in de onderzochte periode, maar toch zie je ook duidelijke afwijkingen: enkele punten liggen wat verder van de rechte en er zijn enkele periodes waarin de groei sneller of trager verloopt dan de rechte aangeeft.

2. Overloop de hele periode systematisch en beschrijf enkele verschillen tussen de werkelijke bevolkingsaantallen en het wiskundig model. Kun je een verklaring geven voor deze verschillen? In welk jaar is het verschil tussen het model en de gegevens het grootst?
3. Hoeveel inwoners voorspelt dit model voor 2011? Maak ook een voorspelling voor 2020.



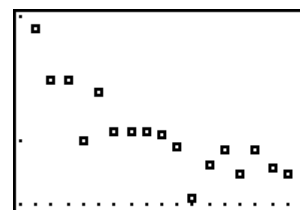
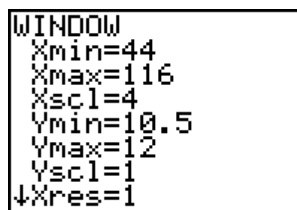
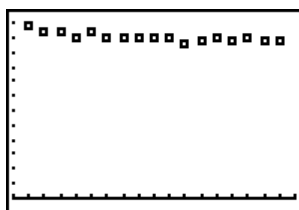
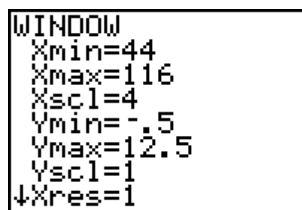


Olympische Spelen

De tabel hieronder toont de tijden van de winnaars van de 100-meterloop op de naoorlogse Olympische Spelen (tot en met augustus 2012!).

jaar	stad	winnaar vrouwen	tijd (in s, OSV)	winnaar mannen	tijd (in s, OSM)
1948	London	Blankers-Koen Francina	11,9	Dillard Harrison	10,3
1952	Helsinki	Jackson Marjorie	11,5	Remigino Lindy	10,4
1956	Melbourne	Cuthbert Elizabeth	11,5	Morrow Bobby Joe	10,5
1960	Rome	Rudolph Wilma	11,0	Hary Armin	10,2
1964	Tokyo	Tyus Wyomia	11,4	Hayes Robert	10,0
1968	Mexico City	Tyus Wyomia	11,08	Hines James	9,95
1972	Munich	Stecher Renate	11,07	Borzov Valery	10,14
1976	Montreal	Richter Annegret	11,08	Crawford Hasely	10,06
1980	Moscow	Kondratyeva Lyudmila	11,06	Wells Allan	10,25
1984	Los Angeles	Ashford Evelyn	10,97	Lewis F. Carlton	9,99
1988	Seoul	Griffith Joyner D. Florence	10,54	Lewis F. Carlton	9,92
1992	Barcelona	Devers Gail	10,82	Christie Linford	9,96
1996	Atlanta	Devers Gail	10,94	Bailey Donovan	9,84
2000	Sydney	Jones Marian	10,75	Greene Maurice	9,87
2004	Athens	Nesterenko Yuliya	10,93	Gatlin Justin	9,85
2008	Beijing	Fraser Shelly-Ann	10,78	Bolt Usain	9,69
2012	London	Fraser Shelly-Ann	10,75	Bolt Usain	9,63

Hieronder zie je twee grafieken met de tijden van de vrouwelijke winnaars, met een verschillend tekenvenster. Op de horizontale as hebben we de tijd in jaar sinds 1900 uitgezet (lijst OSJ).



Op de vraag of deze punten ongeveer op een rechte gelegen zijn, antwoord je wellicht ja als je naar de linkse grafiek kijkt en wellicht neen als je je baseert op de rechtse. Wat er ook van zij, men kan in situaties als deze toch nog een eerstegraadsmodel gebruiken om een zekere *trend* uit te drukken die in de cijfers aanwezig is.

1. Teken de rechte door de uiterste twee punten. Levert dit een goed wiskundig model op voor de gegevens? Geef een vergelijking als dat inderdaad het geval is. Rond eindresultaten af op drie decimalen.
2. Teken de rechte door de punten die bepaald worden door de gegevens van 1952 en 2000. Levert dit een goed wiskundig model op voor de gegevens? Geef een vergelijking als dat inderdaad het geval is. Rond eindresultaten af op drie decimalen.
3. Wat betekent de richtingscoëfficiënt in deze context? En de constante term?
4. Waag je eens aan een voorspelling van de tijd van de vrouwelijke winnaar op de Olympische Spelen van 2016 en 2020. Mag je binnenkort een winnares verwachten met een tijd onder de 10 seconden?

Voor de tijden van de mannelijke winnaars gebruiken we het volgende eerstegraadsmodel:

- de richtingscoëfficiënt bepalen we m.b.v. de uiterste twee punten;
 - de rechte gaat door het punt dat correspondeert met het jaar 1976.
5. Stel de vergelijking van dat eerstegraadsmodel op en maak een grafische voorstelling. Wat kun je afleiden uit het feit dat de richtingscoëfficiënt in het mannenmodel in absolute waarde kleiner is dan die in het vrouwenmodel?
 6. Komt er een tijd dat de winnaar bij de vrouwen sneller de 100 meter loopt dan de winnaar bij de mannen? Wanneer zal dat het geval zijn? Wat denk je van je voorspelling?

Bierhoogte

Een glas bier wordt nogal onhandig ingeschonken. Vlak na het inschenken is de bierhoogte iets meer dan 9 cm en de schuimhoogte iets meer dan 6 cm. De eerste slok kan best nog even op zich laten wachten.

Hieronder zie je meetwaarden, genomen door een programma voor videometing dat elke 10 seconden een meting doet. We vermelden enkel de hoogte van het bier zonder kraag, uitgedrukt in cm. Na deze observatie van vijf minuten is het proces nog niet helemaal ten einde. De bierhoogte zal nadien nog lichtjes stijgen tot 13,20 cm. De gegevens zijn in je rekenmachine aanwezig in de lijsten met naam BIERX en BIERY.

t	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$h(t)$	9,58	10,6	11,3	11,77	12,11	12,25	12,51	12,63	12,73	12,8
t	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
$h(t)$	12,85	12,9	12,94	12,96	12,99	13,01	13,03	13,05	13,06	13,08
t	210	220	230	240	250	260	270	280	290	300
$h(t)$	13,09	13,1	13,11	13,12	13,13	13,13	13,14	13,15	13,15	13,16

1. Maak een statistische plot met de tijd op de horizontale as en de hoogte op de verticale as. Probeer een geschikte regressie te vinden bij de regressiemodellen die op de rekenmachine voorhanden zijn. Teken daarna de grafiek van de gevonden functie doorheen het scatterdiagram. Beoordeel het resultaat.
2. Probeer een beter resultaat te krijgen door gebruik te maken van het gegeven dat de bierhoogte op de lange duur gelijk is aan 13,20 cm. Ben je nu tevreden met het resultaat?



A series of horizontal dotted lines spanning the width of the page, providing a template for handwriting practice.

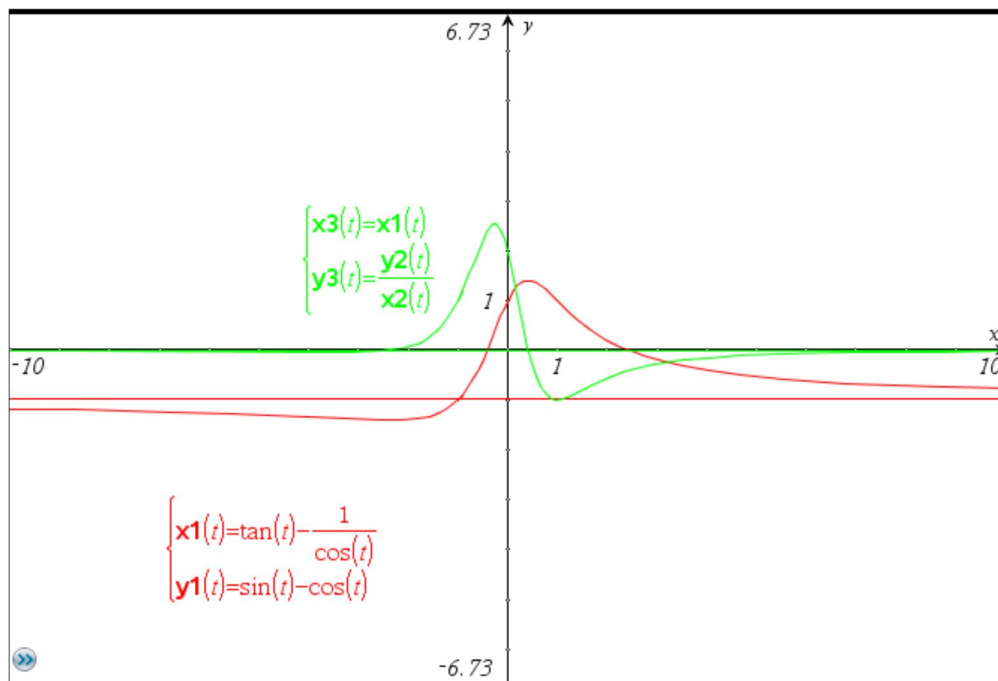


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform

Lieve Lemmens en Andy Snoecx



De studie van vlakke krommen gegeven in parameterform

Lieve Lemmens en Andy Snoecx

Doelstellingen

Deze tekst stelt een voorbeeld van de analyse van een kromme met de Texas TI-Nspire (en/of computersoftware) indien de kromme gegeven wordt in parametervoorstelling. Als de kromme gegeven wordt in poolcoördinaten, is het onderzoek naar het verloop van de kromme in een cartesisch assenstelsel analoog nadat $x(\theta) = r(\theta) \cdot \cos(\theta)$ en $y(\theta) = r(\theta) \cdot \sin(\theta)$.

Het onderzoek naar het verloop van de kromme in een cartesisch assenstelsel verloopt op dezelfde manier als zou y in functie van x gegeven zijn (zie secundair), bijkomend is dat alle belangrijke punten gebeuren via de parameter (t in dit voorbeeld). Het hoofddoel is dan ook “werken met een parameter”. Daarnaast is het belangrijk om het technisch hulpmiddel (Texas TI-Nspire CX CAS) zo efficiënt mogelijk te gebruiken.

Alle items die in het onderzoek aan bod komen, vind je terug in de inhoudstafel.

Van een student(e) wordt verwacht dat hij (zij) zo'n onderzoek naar het verloop van een kromme zelfstandig kan uitvoeren. In een oefenzitting krijgt hij (zij) dan ook een (andere) opgave die autonoom dient opgelost te worden. Uiteraard kan hij (zij) steeds terecht bij de begeleider(ster) om hulp te vragen bij eventuele problemen.

Inhoudstafel

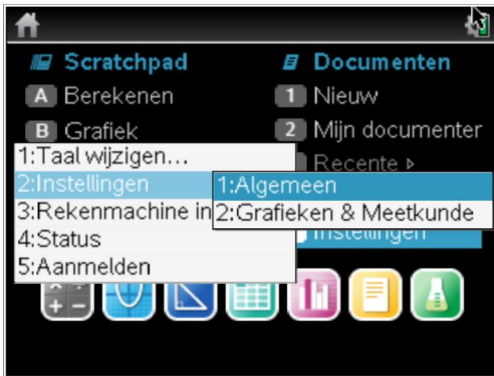
DOELSTELLINGEN	1
INLEIDING.....	3
SNIJPUNTEN VAN DE KROMME MET DE X-AS	6
SNIJPUNTEN VAN DE KROMME MET DE Y-AS	7
ASYMPTOTEN.....	7
Horizontale asymptoten	7
Verticale asymptoten.....	8
RAAKLIJNEN.....	8
Horizontale raaklijnen	9

Verticale raaklijnen.....	9
Raaklijn in het punt $x = 1$	10
BUIGPUNTEN	11
VERGELIJKING VAN DE KROMTECIRKEL IN $x = 2$	13
BIJLAGE 1: FUNCTIEDEFINITIES OM MOOIERE GRAFIEKEN TE BEKOMEN.....	14
BIJLAGE 2: GRAFIEK VAN EEN KROMME MET EEN VERGELIJKING DIE IMPLICIET CARTESISCH IS	16

Analyse van de kromme:
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t - \frac{1}{\cos t} \\ y = \sin t - \cos t \end{cases}$$

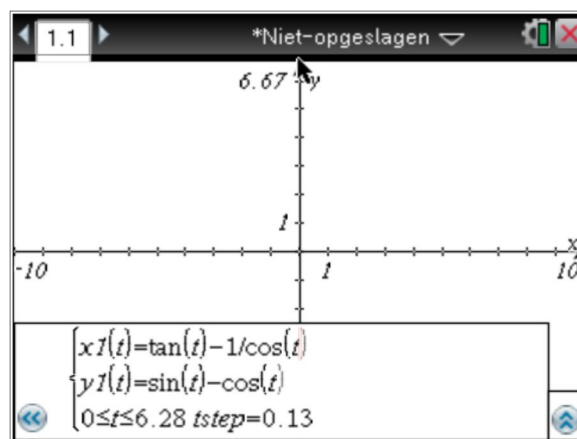
Inleiding

Om het domein te onderzoeken gaat men eerst de grafiek van deze kromme tekenen. Voor een parametervergelijking dient men de volgende instellingen te controleren:



Men kan dan de parametervergelijking ingeven.

$$x1(t) = \operatorname{tg} t - \frac{1}{\cos t} ; y1(t) = \sin t - \cos t$$



Dit kan ook via de rekenpagina, maar = wordt vervangen door :=

Omdat de kromme uit goniometrische functies met periode 2π bestaat, verwacht men dat de periodiciteit van deze kromme het ook is. Daarvoor schakelt men terug naar grafiektype functie en onderzoekt men eerst de periodiciteit van $f1(x) = x1(x)$ en daarna van $f2(x) = y1(x)$.

Vervolgens bepaalt men de snijpunten van de kromme met de x - en y -as.

Dan bepaalt men de asymptoten (horizontale en verticale), als die er tenminste zijn. Mogelijke schuine asymptoten zullen we buiten beschouwing laten.

Naast de (horizontale en/of verticale) raaklijnen aan de kromme, kan men ook de raaklijn in een willekeurig punt van de kromme berekenen.

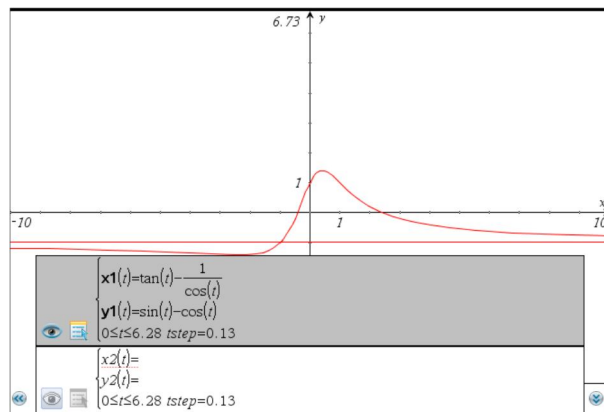
De buigpunten haalt men uit de tweede afgeleide.

Als laatste berekent en tekent men de kromtecirkel in een willekeurig punt.

Domein en periode

$$x1(t) = \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}$$

$$y1(t) = \sin(t) - \cos(t)$$



Om het grafiekvenster in te stellen, is het zinvol eerst te weten welke t -waarden interessant zijn.

Zowel $x1(t)$ als $y1(t)$ zijn periodieke functies, beide met periode 2π . Dit komt uit de goniometrie, maar ook grafisch kan dit duidelijk gemaakt worden.

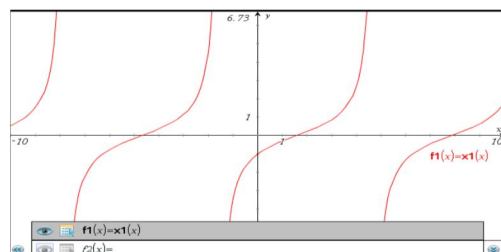
Hiertoe wordt een grafiekblad toegevoegd (control i): grafiektype functie

Ingave:

$$f1(x) = x1(x) \text{ en } f2(x) = y1(x)$$

Eerst $f1(x) = x1(x)$ activeren:

Default wordt $x \in [-10, 10]$ getekend.

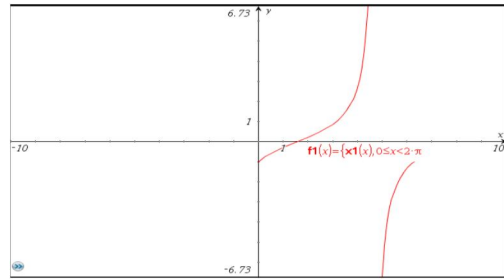


Het is duidelijk dat de functie zichzelf herhaalt; de periode is dus 2π .

Instellen x : $f1(x) = x1(x)$ $0 \leq x < 2\pi$

(verticale streep betekent met (with))

Op deze grafiek is te zien dat $x1(t)$ oneindig wordt.



Uit de goniometrie is geweten dat de $\cos(t) = 0$ voor $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$.

Dit betekent dat $x1(t)$ binnen $[0, 2\pi)$ enkel bestaat voor $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

Op analoge wijze wordt de periode van $f2(x) = y1(x)$ bepaald. Ook deze is 2π .

Het kleinste gemeenveelvoud (KGV) van de periode van $x1(t)$ en $y1(t)$ is 2π ; derhalve is de periode van de kromme 2π en worden alle t -waarden berekend in $[0, 2\pi)$.

Ondertussen werd ook iets over het domein van de kromme genoteerd.

$x1(t)$ bestaat enkel als $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$; $y1(t)$ bestaat overal.

Het **domein van deze kromme** binnen $[0, 2\pi)$ is $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$.

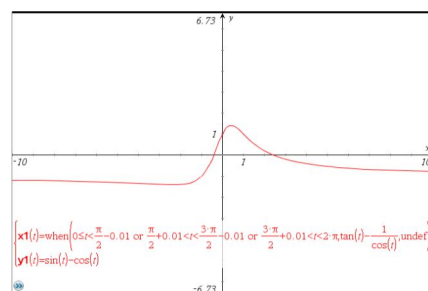
Om de grafiek van de kromme behoorlijk te construeren, ga je best opnieuw naar het rekenscherf (calculator) en definieer je:

$$x1(t) = \text{when} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{\pi}{2} + 0.01 < t < \frac{3\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3\pi}{2} + 0.01 < t < 2\pi, \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}, \text{undef} \right)$$

De t -waarden $\frac{\pi}{2}$ en $\frac{3\pi}{2}$ werden verwijderd.

$$x1(t) = \text{when} \left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{\pi}{2} + 0.01 < t < \frac{3\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3\pi}{2} + 0.01 < t < 2\pi, \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}, \text{undef} \right)$$

Grafiek van de kromme:



Snijpunten van de kromme met de x-as

Grafisch kan men in het item “grafieken en meetkunde” het grafisch spoor kiezen: verplaats het kruisje met de cursortoetsen, zodat het kruisje op een snijpunt met de x -as komt. Voor het meest linkse snijpunt van de kromme met de x -as verschijnen er op het scherm de t -, de x - en y -waarden

Beide snijpunten zijn bij benadering juist.

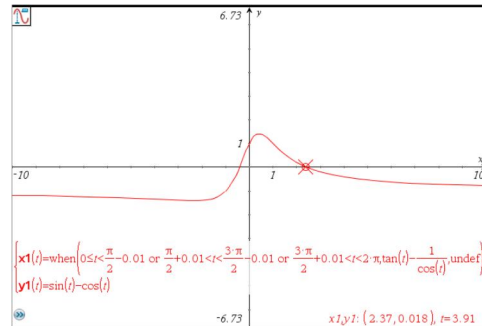
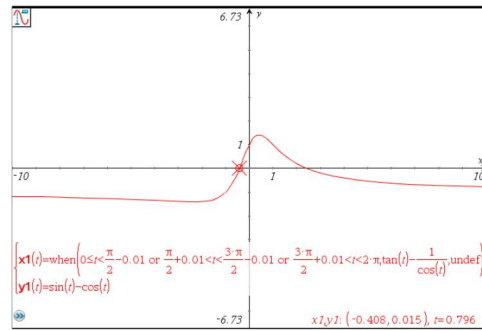
Deze snijpunten kunnen ook numeriek gevonden worden:

In het REKEN –scherm het volgende commando:

$$\text{Solve}(y1(t) = 0, t) \mid 0 \leq t < 2\pi$$

$$\text{Dit resulteert in: } t = \frac{\pi}{4} \text{ en } t = \frac{5\pi}{4}$$

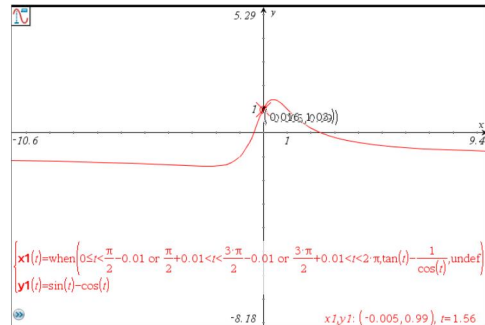
Deze oplossingen geven de juiste x -waarden! $x1\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - \sqrt{2}$ en $x1\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 1 + \sqrt{2}$



$x1(t) = \text{when}\left(0 \leq t < \frac{\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{\pi}{2} + 0.01 < t < \frac{3\pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3\pi}{2} + 0.01 < t < 2\pi, \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}, \text{undef}\right)$	
$\text{solve}(y1(t)=0, t) \mid 0 \leq t < 2\pi$	Done $t = \frac{\pi}{4}$ or $t = \frac{5\pi}{4}$
$x1\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$1 - \sqrt{2}$
$x1\left(\frac{5\pi}{4}\right)$	$1 + \sqrt{2}$

Snijpunten van de kromme met de y-as

Grafisch: idem als hoger



In het REKEN-scherm:

$$\text{Solve}(x1(t) = 0, t) \quad 0 \leq t < 2\pi$$

Dit geeft “false”! Maar er werden ook t -waarden uitgesloten!

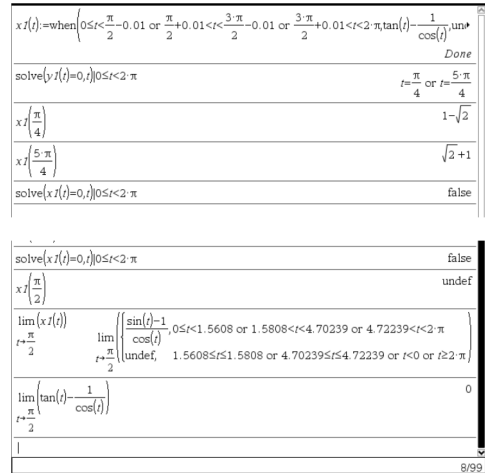
Even proberen: $x1\left(\frac{\pi}{2}\right)$ invullen, geeft undef.

Inderdaad $t = \frac{\pi}{2}$ hoort immers niet tot het domein van de

kromme en werd bij de definitie reeds uitgesloten.

Het domein van de kromme kan uitgebreid worden in $\pi/2$ omdat de limiet in dit punt niet oneindig is en wordt om een continu verloop te kennen, gedefinieerd als nul.

Geldt dat ook voor $t = \frac{3\pi}{2}$? Neen! (Ga dit na.)



Asymptoten

Horizontale asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = ?$$

Gezien de kromme in parametervorm is gegeven, zal men via t deze waarden proberen uit te rekenen: Voor welke t is $\lim_{t \rightarrow ?} x(t) = \infty$?

Hierboven werd nog berekend dat $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} x1(t) = 0$ en $t = \frac{\pi}{2}$ bijgevolg geen asymptoot levert.

Nu geeft $\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}} x1(t) = \text{undef}$. Is er dan een linker- en/of rechterlimiet?

Ja! $x(t)$ wordt ∞ indien t langs links $\frac{3\pi}{2}$ nadert en

wordt $-\infty$ indien t langs rechts $\frac{3\pi}{2}$ nadert.

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^-} \left(\tan(t) - \frac{1}{\cos(t)} \right) = \infty$$

$$\lim_{t \rightarrow \frac{3\pi}{2}^+} \left(\tan(t) - \frac{1}{\cos(t)} \right) = -\infty$$

Dus voor $t = \frac{3\pi}{2}$ is er een horizontale asymptoot nl. $y = y_1\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$.

Verticale asymptoten

$$\lim_{x \rightarrow ?} y(t) = \pm\infty$$

$y_1(t) = \sin t - \cos t$ is een begrensde functie en zal nooit oneindig worden, er is dus geen verticale asymptoot.

Raaklijnen

Vanaf hier houden we grafisch geen rekening meer met de beperkingen van het domein, omdat de definities te lang worden, bij elke grafiek moeten de waarden uitgesloten worden. Het nadeel is dat telkens een horizontale lijn verschijnt (de horizontale asymptoot). In bijlage staan de grafieken opnieuw, maar met het juiste domein.

Om raaklijnen te berekenen heeft men de afgeleiden nodig.

De richtingscoëfficiënt van de raaklijn in een punt P van

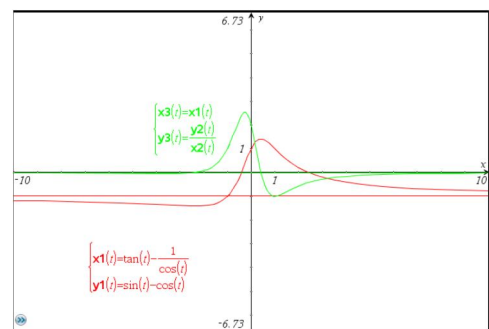
de kromme is $\frac{dy}{dx}\bigg|_P = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}\bigg|_P$

$x_2(t) = \frac{d}{dt}(x_1(t))$	Done
$y_2(t) = \frac{d}{dt}(y_1(t))$	Done
$x_3(t) = x_1(t)$	Done
$y_3(t) = \frac{y_2(t)}{x_2(t)}$	Done

Het is daarom handig om de afgeleiden algemeen te definiëren:

$$x_2(t) := \frac{dx_1(t)}{dt}; \quad y_2(t) := \frac{dy_1(t)}{dt} \quad \text{en} \quad \frac{y_2(t)}{x_2(t)}\bigg|_P = y_3(t)$$

Grafiek van de eerste afgeleide:



Horizontale raaklijnen

Er zijn twee voorwaarden om een horizontale raaklijn te vinden:

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = 0 \text{ en } \frac{dx}{dt} \neq 0 \\ \frac{dx}{dt} = \pm\infty \text{ en } \frac{dy}{dt} \neq \pm\infty \end{cases}$$

Men onderzoekt de **eerste** mogelijkheid: $\frac{dy}{dt} = y_2(t) = 0$ en $\frac{dx}{dt} = x_2(t) \neq 0$

Dit kan opnieuw grafisch of met berekeningen in het REKEN-scherm:

$y_2(t) = \frac{d}{dt}(y_1(t))$	Done
$x_2(t) = \frac{d}{dt}(x_1(t))$	Done
$\text{solve}(y_2(t)=0, t) 0 \leq t < 2\pi$	$t = \frac{3\pi}{4}$ or $t = \frac{7\pi}{4}$
$x_2\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}-2$
$x_2\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}+2$
$y_1\left(\frac{3\pi}{4}\right)$	$\sqrt{2}$
$y_1\left(\frac{7\pi}{4}\right)$	$-\sqrt{2}$

In beide gevallen is $x_2(t) = \frac{dx}{dt} \neq 0$ voor de gevonden t - waarden.

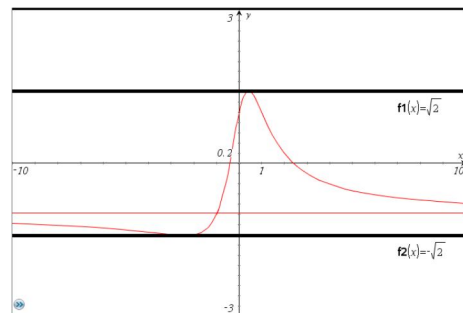
We zien dat we alle oplossingen gevonden hebben; de tweede mogelijkheid

$\frac{dx}{dt} = x_2(t) = \pm\infty$ en $\frac{dy}{dt} = y_2(t) \neq \pm\infty$ moet dus niet meer onderzocht worden.

Er zijn bijgevolg 2 horizontale raaklijnen: voor $t = \frac{3\pi}{4}$ met $y = \sqrt{2}$ en voor $t = \frac{7\pi}{4}$ met

$$y = -\sqrt{2}$$

In de grafiek:



Verticale raaklijnen

Er zijn twee voorwaarden om een verticale raaklijn te vinden:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\infty \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \pm\infty \text{ en } \frac{dx}{dt} \neq \pm\infty \\ \frac{dx}{dt} = 0 \text{ en } \frac{dy}{dt} \neq 0 \end{cases}$$

Men onderzoekt de **eerste** mogelijkheid: $\frac{dy}{dt} = \pm\infty$ en $\frac{dx}{dt} \neq \pm\infty$. Dit doet zich nooit voor want

$$\frac{dy}{dt} = \cos(t) + \sin(t) \text{ en dit is steeds eindig.}$$

De **tweede** mogelijkheid: $x^2(t) = \frac{dx}{dt} = 0$ en $y^2(t) = \frac{dy}{dt} \neq 0$

Oplossing: solve $(x^2(t) = 0, t) | 0 \leq t < 2\pi$ heeft geen oplossing.

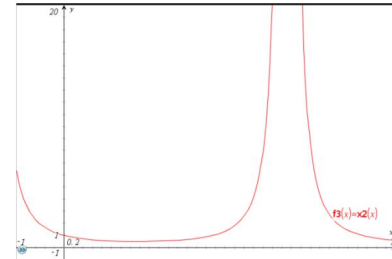
De grafiek van $\frac{dx}{dt}$ leert ons dat $\frac{dx}{dt}$ geen nulpunten heeft.

$$f_3(x) = x^2(x) \text{ (grafiektype: functie)}$$

```

solve(x^2(t)=0,t)|0<=t<2*pi
lim(x^2(t))
t->pi/2
false
1/2

```



Er is dus geen verticale raaklijn aan de kromme.

Raaklijn in het punt $x = 1$

De vergelijking van de raaklijn: $y = y(x=1) + \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=1} (x-1)$

De t -waarde die overeenstemt met $x = 1$: $t = \pi$

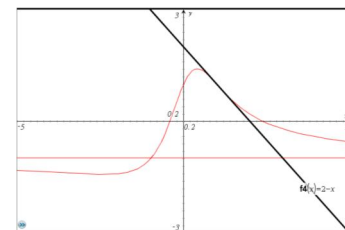
De vergelijking van de raaklijn wordt dan:

$$f_4(x) = y_1(\pi) + y_3(\pi) \cdot (x-1) \text{ of } y = 2 - x$$

```

solve(x(t)=1,t)|0<=t<2*pi
t=3.14159

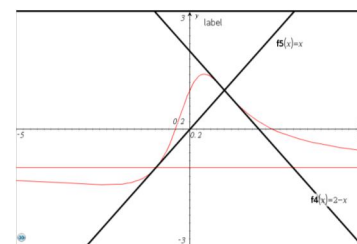
```



De vergelijking van de normaal in het zelfde punt:

$$y = y(\pi) - \frac{(x-1)}{\frac{dy}{dx}(\pi)} \text{ of } f_4(x) = y_1(\pi) - \frac{1}{y_3(\pi)} \cdot (x-1) \text{ of}$$

$$y = x$$



De raaklijn en de normaal lijken niet loodrecht op elkaar te staan omdat de lengte-eenheid in de x - en y -richting niet even lang is. De raaklijn en de normaal staan wel degelijk loodrecht op elkaar!

Buigpunten

$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ en een tekenverandering in de nulpunten van deze tweede afgeleide.

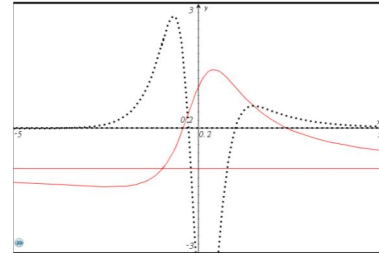
Men definieert: $x4(t) = \frac{d^2x1(t)}{dt^2}$ en $y4(t) = \frac{d^2y1(t)}{dt^2}$

$x4(t) = \frac{d^2}{dt^2}(x1(t))$	Done
$y4(t) = \frac{d^2}{dt^2}(y1(t))$	Done
$y5(t) = \frac{y4(t) \cdot x2(t) - x4(t) \cdot y2(t)}{(x2(t))^3}$	Done

Grafiek:

$$x5(t) = x1(t)$$

$$y5(t) = \frac{y4(t) \cdot x2(t) - x4(t) \cdot y2(t)}{x2(t)^3} = \frac{\frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3}$$

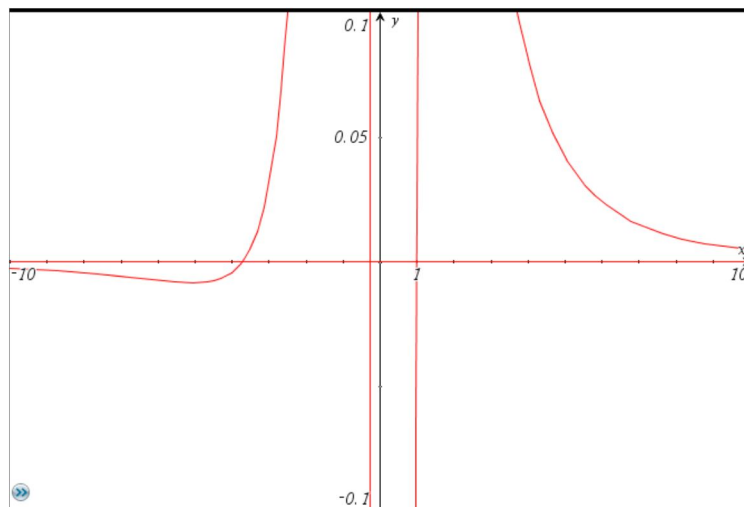


In het rekenscherm:

solve(y5(t)=0, t) 0 ≤ t < 2π	
*sin(t) (sin(t)-1) = ∞ or (cos(t))^2 + sin(t) (sin(t)-1) = -∞ or t=3.14159 or t=3π/2 or t=5.23599	
x1(π)	1
y1(π)	1
x1(5.23599)	-3.73203
y1(5.23599)	-1.36603

Raar, numeriek 2 resultaten: nl. het punt (1, 1) met $t = \pi$ en het punt (-3,73 ; -1,37) met $t = 5,24$ ($t = 3\pi/2$ behoort niet tot het domein). Grafisch ook 2 resultaten: opnieuw het punt (1, 1) met $t = \pi$, maar dan een punt links van de x -as maar dichterbij nul dan -3,73!!!

De grafiek van de tweede afgeleide bekijken we opnieuw, maar de y -grenzen van het venster dichterbij de x -as; laat y gaan van -0,1 tot 0,1:



Er zijn 3 nulpunten voor de tweede afgeleide!

Het derde kan bekomen worden door numeriek een nulpunt van de tweede afgeleide te laten berekenen:

$\text{nSolve}(y5(t)=0,t) 0\leq t < 2\cdot\pi$	1.0472
$x1(1.0471975511966)$	-0.267949
$y1(1.0471975511966)$	0.366025

Om na te gaan of al de nulpunten werden berekend construeren we best de "tableset":

Voeg een nieuw blad nl. lijsten in. Ga naar TABLE (functietabel) en maak 4 kolommen: de t -, de x -, de y -waarden en de waarden van de tweede afgeleide; begin bij $t = 0$ en doe t stijgen met 0,05 tot 2π (via tabel weergeven en tabelinstellingen bewerken):

t	x1(t):= $\tan(t)-1/(\sin(t)-\cos(t))$	y1(t):= $\sin(t)-\cos(t)$	y5(t):= $d^2(y3(t),t)/dt^2$
0.7	-0.465171	-0.120625	2.09809
0.75	-0.435105	-0.05005	1.88055
0.8	-0.405686	0.020649	1.63102
0.85	-0.376857	0.091297	1.35115
0.9	-0.348568	0.161717	1.04312
0.95	-0.320767	0.231732	0.70955
1.	-0.293408	0.301169	0.353529
1.05	-0.266448	0.369852	-0.021455
1.1	-0.239845	0.437611	-0.411557
1.15	-0.213559	0.504276	-0.812633
1.2	-0.187552	0.569681	-1.2203
1.25	-0.161788	0.633662	-1.63
1.3	-0.136232	0.696059	-2.03709
1.35	-0.110849	0.756717	-2.43687
-0.1108488626334			

Daar zie je dat de tweede afgeleide nul wordt tussen $t = 1$ en $t = 1,05$. Door verder naar beneden te scrollen, vind je de 2 andere buigpunten.

Vergelijking van de kromtecirkel in $x = 2$

Dit komt overeen met $t = 3,785093762$. Om niet telkens dit getal te moeten intikken, stockeert men dit onder tt . Het punt noemt men $P(2; 0,2)$

$$\text{De kromming: } K(tt) = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}(tt)}{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}(tt)\right)^2\right)^{3/2}} = 0,276311284 > 0.$$

De kromme is dus hol in $x = 2$.

$$\text{De kromtestraal } R = \frac{1}{|K|} = 3,619106631$$

Het kromtemiddelpunt $M(aa, bb)$ ligt op de normaal in het punt P op een afstand R van P :

$$\begin{cases} y = y(tt) - \frac{(x-2)}{\frac{dy}{dx}(tt)} \\ (x-2)^2 + (y - y(tt))^2 = R^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} bb = y1(tt) - \frac{(aa-2)}{y3(tt)} \\ (aa-2)^2 + (bb - y1(tt))^2 = y6(tt)^2 \end{cases}$$

Oplossingen:

$$\begin{cases} aa = 0,23169230777 \text{ en } bb = -2,957692308 \\ aa = 3,768307692 \text{ en } bb = 3,357692308 \end{cases}$$

The screenshot shows the following steps in a CAS environment:

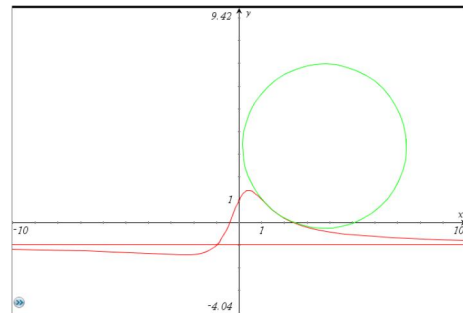
- Definition of $x6(t) = \frac{y5(t)}{(1+y3(t)^2)^{3/2}}$
- Definition of $y6(t) = \frac{1}{|x6(t)|}$
- Solving for t in the interval $0 \leq t < 2\pi$, resulting in $tt = 3.78509$.
- Solving the system of equations for the center coordinates aa and bb , resulting in two solutions: $aa=0.231685$ and $bb=-2.95768$, or $aa=3.76831$ and $bb=3.35768$.

De kromme is hol in P , het kromtemiddelpunt moet boven P liggen. Dit kan alleen als

$$aa = 3,768307692 \text{ en } bb = 3,357692308$$

Om de cirkel te tekenen:

$$\begin{aligned} x6(t) &= \frac{y5(t)}{(1+y3(t)^2)^{3/2}} \text{ en } y6(t) = \text{abs}\left(\frac{1}{x6(t)}\right) \\ x7(t) &= aa + y6(tt) \cdot \cos(t) \text{ en } y7(t) = bb + y6(tt) \cdot \sin(t) \end{aligned}$$



Bijlage 1: functiedefinities om mooiere grafieken te bekomen:

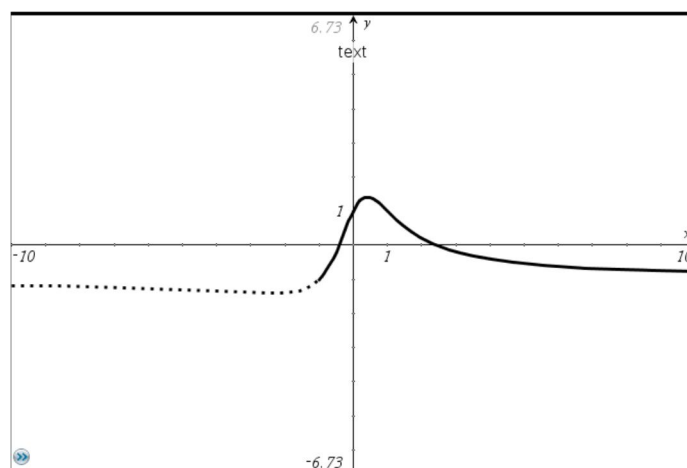
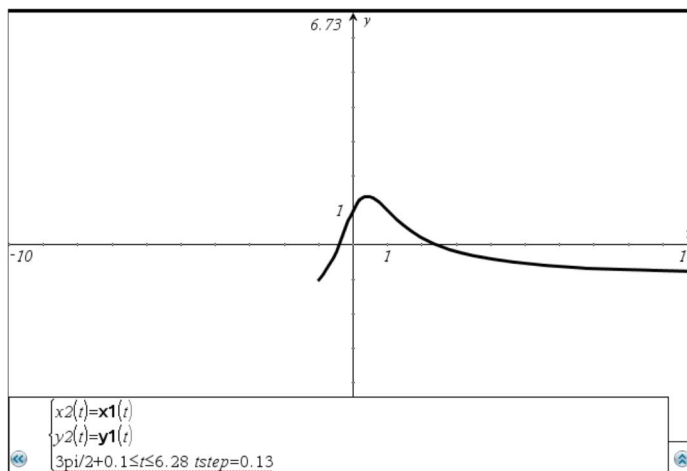
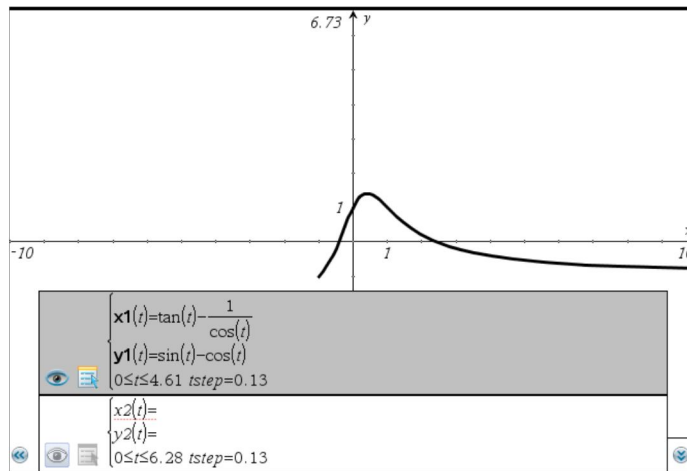
Opgelet:

Voor $x(t)$ wordt $t = \frac{3\pi}{2}$ uitgesloten binnen $[0, 2\pi)$ omdat in $t = \frac{\pi}{2}$ de limiet bestaat (nl. 0).

Methode 1:

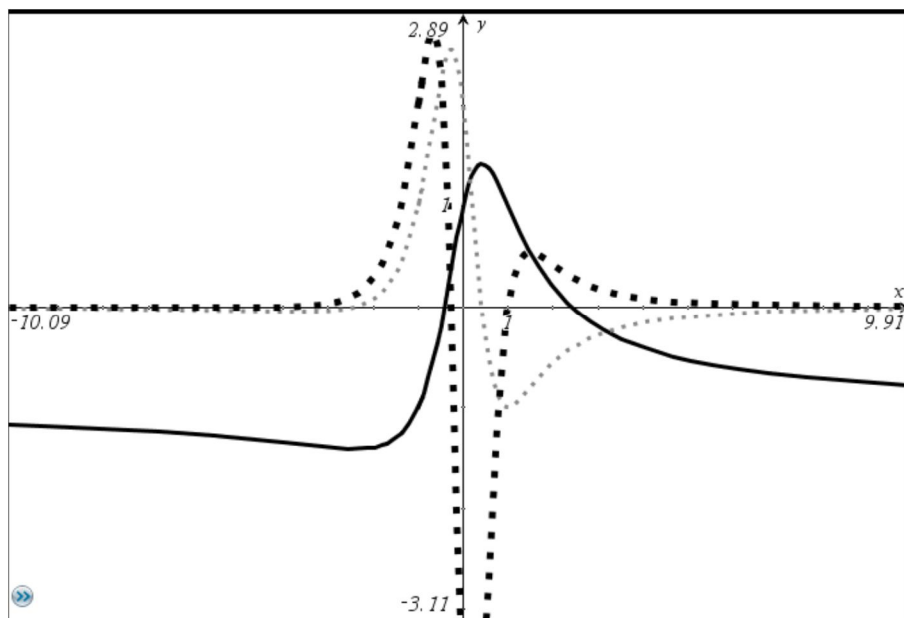
2 stukken van de krommen aan elkaar plakken via het 2 keer definiëren van de kromme over

verschillende intervallen van de parameter: $t: 0 \rightarrow \frac{3\pi}{2} - 0,1$ en $t: \frac{3\pi}{2} + 0,1 \rightarrow 2\pi$



Methode 2:

$h1(t) := \text{when}\left(0 \leq t < \frac{3 \cdot \pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3 \cdot \pi}{2} + 0.01 < t < 2 \cdot \pi, \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}, \text{undef}\right)$	Done
$g1(t) := \sin(t) - \cos(t)$	Done
$hh1(t) := \tan(t) - \frac{1}{\cos(t)}$	Done
$hh2(t) := \frac{d}{dt}(hh1(t))$	Done
$h2(t) := \text{when}\left(0 \leq t < \frac{3 \cdot \pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3 \cdot \pi}{2} + 0.01 < t < 2 \cdot \pi, hh2(t), \text{undef}\right)$	Done
$g2(t) := \frac{d}{dt}(g1(t))$	Done
$g3(t) := \text{when}\left(0 \leq t < \frac{3 \cdot \pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3 \cdot \pi}{2} + 0.01 < t < 2 \cdot \pi, \frac{g2(t)}{hh2(t)}, \text{undef}\right)$	Done
$gg4(t) := \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{g2(t)}{hh2(t)}\right)}{hh2(t)}$	Done
$g4(t) := \text{when}\left(0 \leq t < \frac{3 \cdot \pi}{2} - 0.01 \text{ or } \frac{3 \cdot \pi}{2} + 0.01 < t < 2 \cdot \pi, gg4(t), \text{undef}\right)$	Done
	9/99



Legende:

- volle lijn: de kromme
- dun gestipte lijn: de eerste afgeleide van y naar x
- dik gestipte lijn: de tweede afgeleide van y naar x

Bijlage 2: grafiek van een kromme met een vergelijking die impliciet cartesisch is

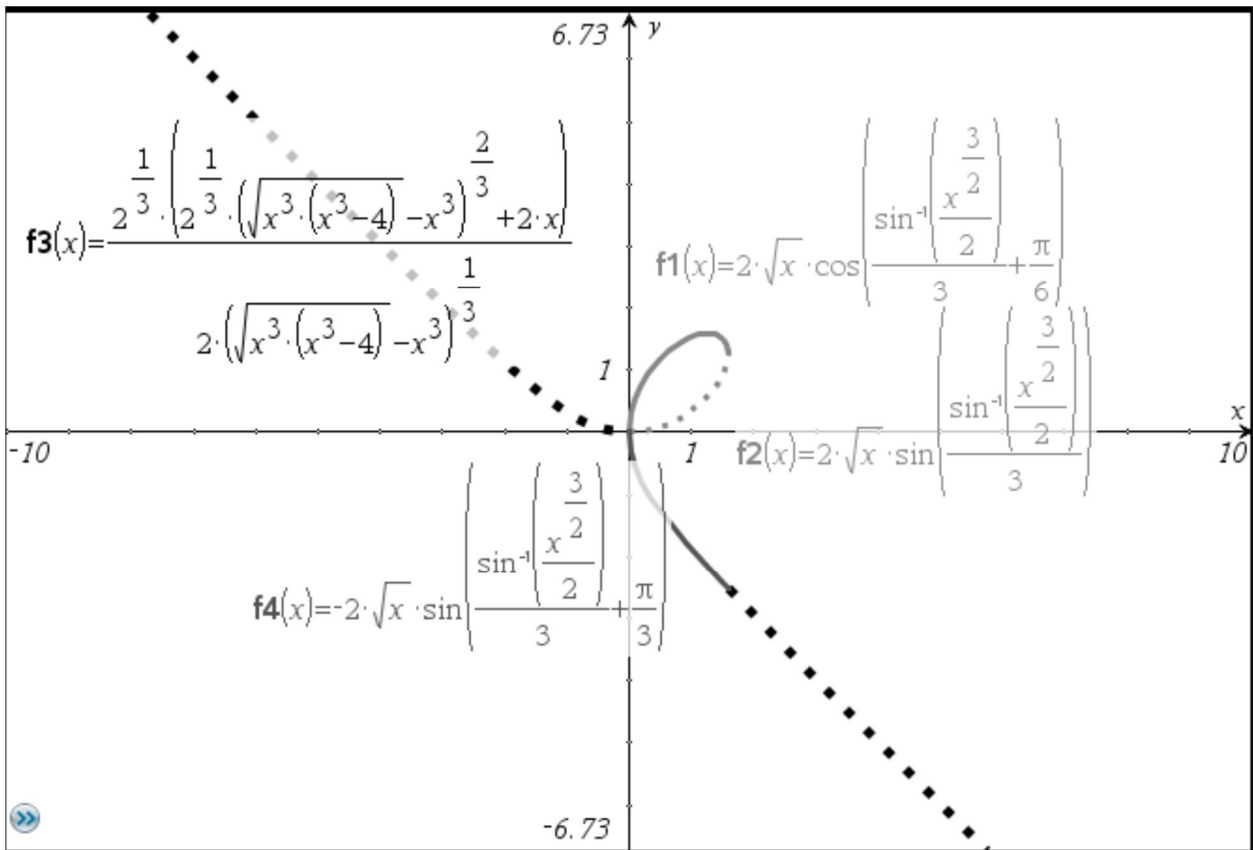
Gegeven het folium van Descartes: $x^3 + y^3 = 3xy$

Werkwijze in het rekenblad:

$$\text{Solve}(x^3 + y^3 = 3xy, y) | x > 0 \text{ and } y > 0$$

Dit herhaal je voor $x > 0$ and $y < 0$; $x < 0$ and $y > 0$; $x < 0$ and $y < 0$

$\text{solve}(x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y, y) x > 0 \text{ and } y > 0$ $y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + \frac{\pi}{6}}{3}\right) \text{ or } y = -2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}}{3}\right) \text{ or } y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{3}\right)$
$\text{solve}(x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y, y) x > 0 \text{ and } y < 0$ $y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + \frac{\pi}{6}}{3}\right) \text{ or } y = -2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right) + \frac{\pi}{3}}{3}\right) \text{ or } y = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(\frac{\sin^{-1}\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2}\right)}{3}\right)$
$\text{solve}(x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y, y) x < 0 \text{ and } y > 0$ $y = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\sqrt{x^3 \cdot (x^3 - 4)} - x^3 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot x \right)}{2 \cdot \left(\sqrt{x^3 \cdot (x^3 - 4)} - x^3 \right)^{\frac{1}{3}}}$
4/99
$\text{solve}(x^3 + y^3 = 3 \cdot x \cdot y, y) x < 0 \text{ and } y < 0$ $y = \frac{\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\frac{1}{2^{\frac{1}{3}}} \cdot \left(\sqrt{x^3 \cdot (x^3 - 4)} - x^3 \right)^{\frac{2}{3}} + 2 \cdot x \right)}{2 \cdot \left(\sqrt{x^3 \cdot (x^3 - 4)} - x^3 \right)^{\frac{1}{3}}}$
4/99



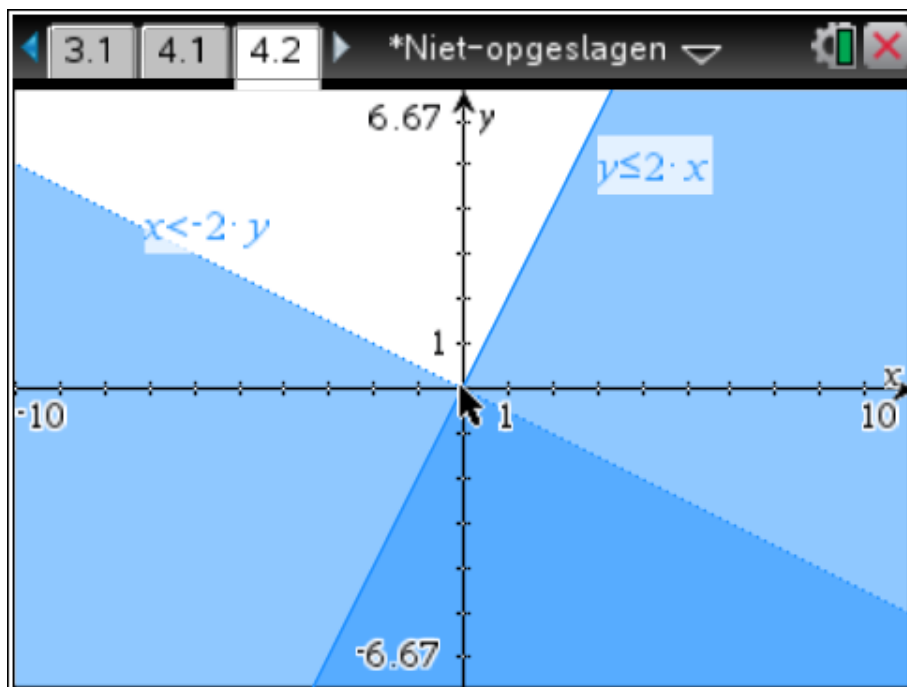


15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Aan de slag met TI-Nspire concreet toegepast

Dominiek Ramboer



Aan de slag met TI-Nspire, concreet toegepast

Dominiek Ramboer

1 Inleiding

In deze tekst beperk ik mij tot een overzicht van de aanvullingen en veranderingen in de nieuwe versie 3.2 van TI-Nspire, die belangrijk zijn bij het gebruik van de handheld.

Voor de basistekst over de TI-Nspire en de verschillende mogelijkheden, verwijs ik graag naar cahier 29, “Inleiding tot TI-Nspire” dat te vinden is op de website van T³ Vlaanderen, www.t3vlaanderen.be. Dit cahier is het resultaat van het verwerken van een reeks concrete en praktische vragen, gesteld door leerkrachten, over de mogelijkheden van TI-Nspire in vergelijking met TI84 Plus.

De bestanden van de voorbeelden in deze workshop kunnen worden gedownload via dezelfde website.

2 Nieuwigheden bij de versie 3.2

2.1 Het gebruik van indices bij variabelen

Er is een indexsjabloon voorzien, waardoor het mogelijk wordt om variabelenamen met indices te gebruiken.

Voorbeeld:

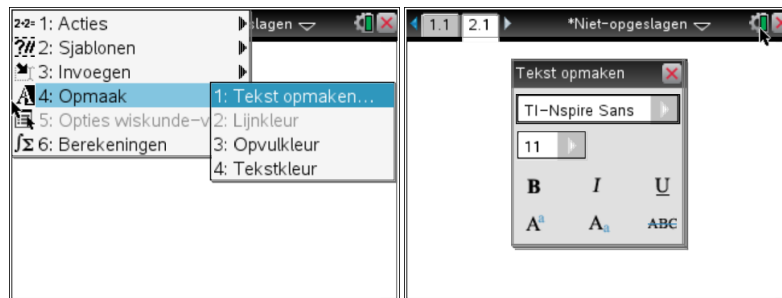


2.2 Uitbreiding van de tekstbewerkingsmogelijkheden

Deze zijn uitgebreid. Zo kan het lettertype gekozen worden en ook de lettergrootte aangepast worden.

Vetjes, cursief en onderstreept zijn ook mogelijk geworden, zelfs de tekst doorstrepen is mogelijk.

Ook de tekstkleur kan aangepast worden.

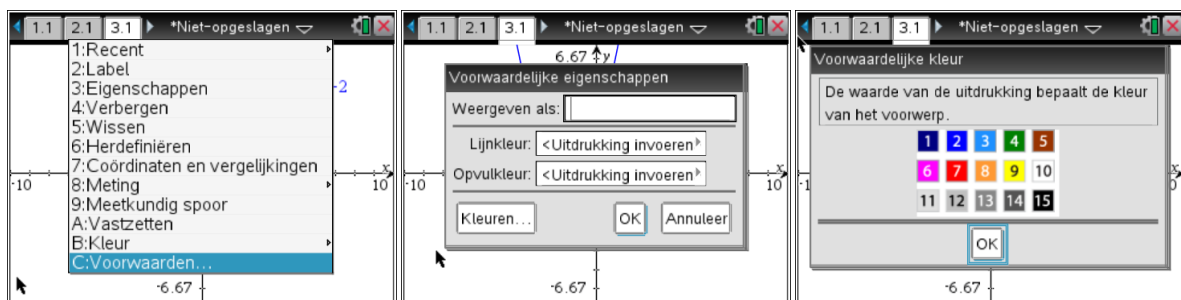


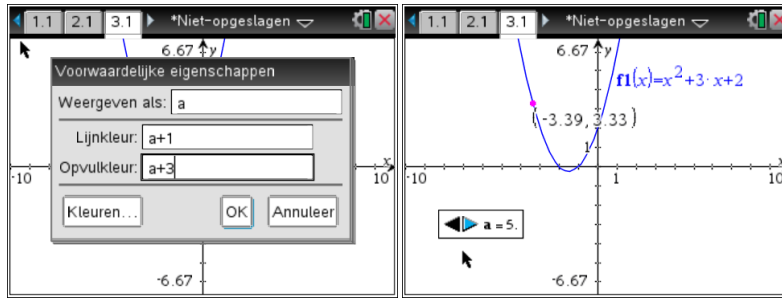
2.3 Voorwaardelijke opmaak

Het is mogelijk om in de applicaties Grafieken en Meetkunde, de kleur van objecten (punten, rechten, ...) en de opvulkleur van vormen te laten variëren aan de hand van gestelde voorwaarden.

In het voorbeeld verandert de kleur van het punt als de waarde van de variabele a wordt veranderd door een schuifbalk.

- Selecteer het desbetreffende punt,
- Kies Ctrl Menu, C: Voorwaarden,
- In het invulvenster komt bovenaan de variabele waarvan de waarde verandert. Daaronder komt dan een uitdrukking die de lijnkleur bepaalt en daaronder de uitdrukking die de opvulkleur bepaalt. Elke beschikbare kleur heeft een nummer tussen 1 en 15.

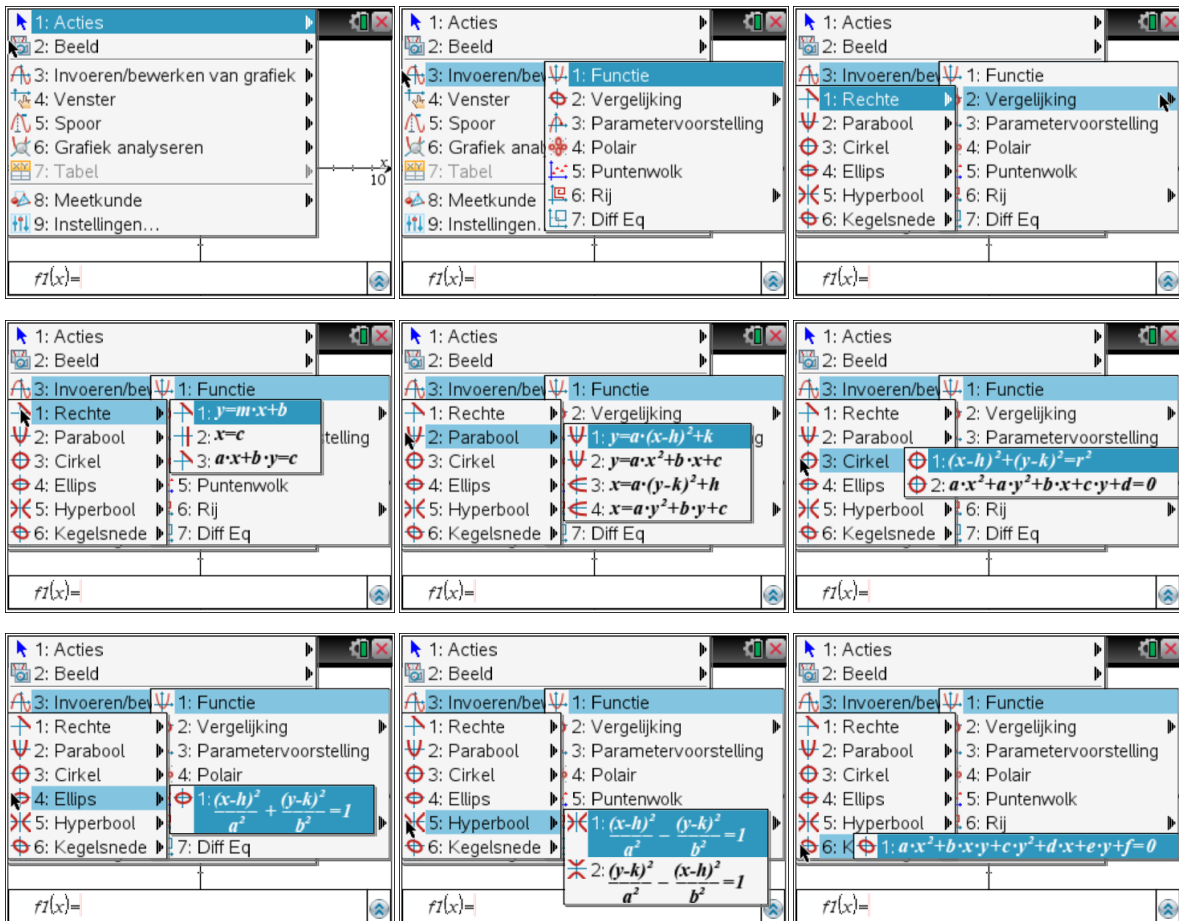


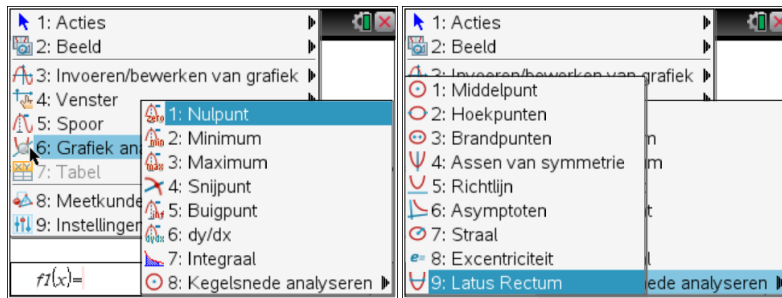


2.4 Grafieken in 2D

De meeste vernieuwingen zijn terug te vinden bij tweedimensionale grafieken. Het aantal types waarvan een grafiek kan gemaakt worden is sterk uitgebreid. Zo kunnen van een aantal impliciete vormen, rechten en kegelsneden in het bijzonder, grafieken geconstrueerd worden. Ook de analyse van de grafieken is uitgebreid met het bepalen van middelpunt, brandpunten, richtlijn, excentriciteit, asymptoten, ... van een kegelsnede.

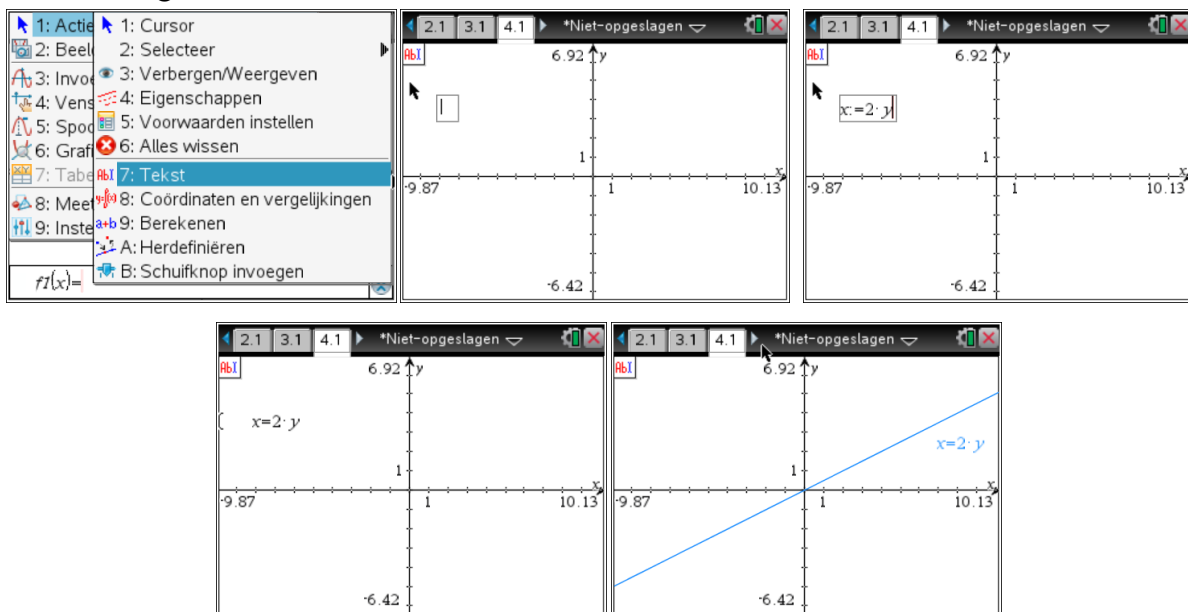
Hieronder volgt een overzicht:





Ook functies met voorschrift van de vorm $x := g(y)$ kunnen worden geplott.

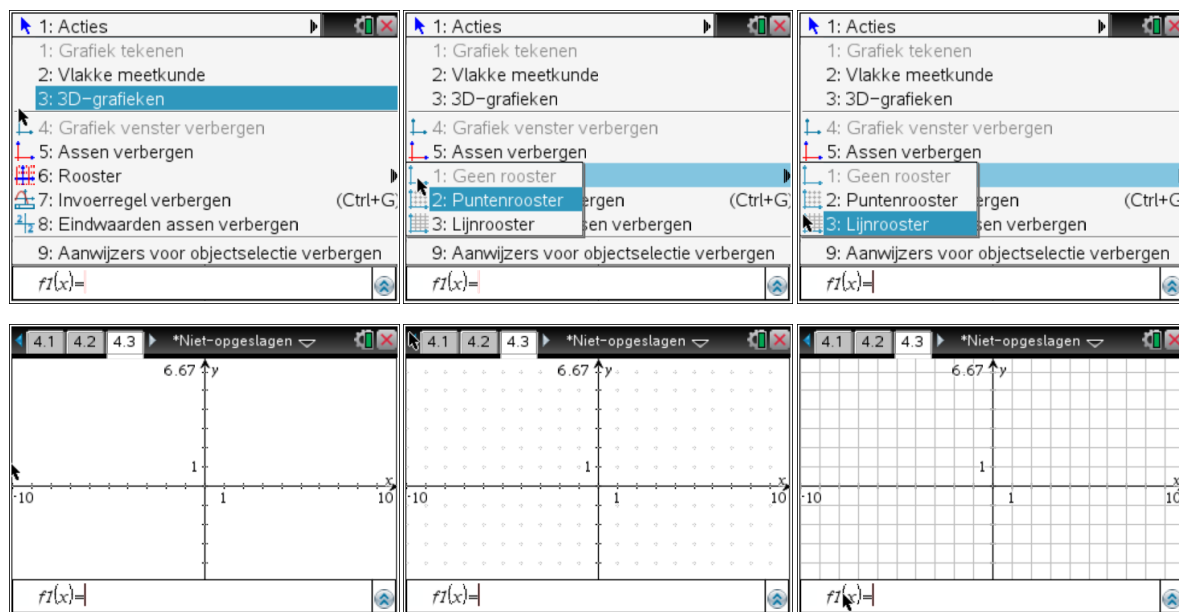
- Open de Grafieken applicatie
- Maak een tekstvak aan in het grafisch venster
- Vul daarin de formule in waarvan de grafiek gewenst is. De uitdrukking moet van de vorm $x := g(y)$ (of $y := g(x)$) zijn.
- Sleep het tekstvak met de uitdrukking over één van de assen. De grafiek wordt dan getekend.



2.5 Roosterlijnen

Bij 2D-grafieken is er nieuwe mogelijkheid om roosterlijnen te laten verschijnen in plaats van roosterpunten.

Kies Menu, 2: Beeld, 6: Rooster en maak dan een keuze tussen de drie opties: geen rooster, puntenrooster en lijnrooster.



2.6 Werken met ongelijkheden

De ongelijkheden moeten van de vormen zijn $y > f(x)$ of $x > f(y)$. Dit kan op twee manieren.

De eerste manier maakt gebruik van de mogelijkheid om de inhoud van een tekstvak te laten construeren (zie grafieken in 2D): een tekstvak aanmaken in het grafisch venster en de uitdrukking invullen en daarna het tekstvak slepen naar één van de twee assen.

Een tweede manier maakt gebruik van de invoerregel van het grafisch venster:

- Druk op de DEL-toets om het gelijkheidsteken weg te werken
- Maak een keuze uit de lijst van relationele operatoren.
- Na het maken van de keuze verandert $f(x)$ in y . Eventueel de cursor verplaatsen om de y te vervangen door x .
- Vul de rest van de ongelijkheid aan en sluit af met ENTER.
- Het gebied van het vlak dat voldoet aan de ongelijkheid wordt getekend.

Merk op dat de grensrechte al dan niet wordt getekend afhankelijk van het soort ongelijkheid.



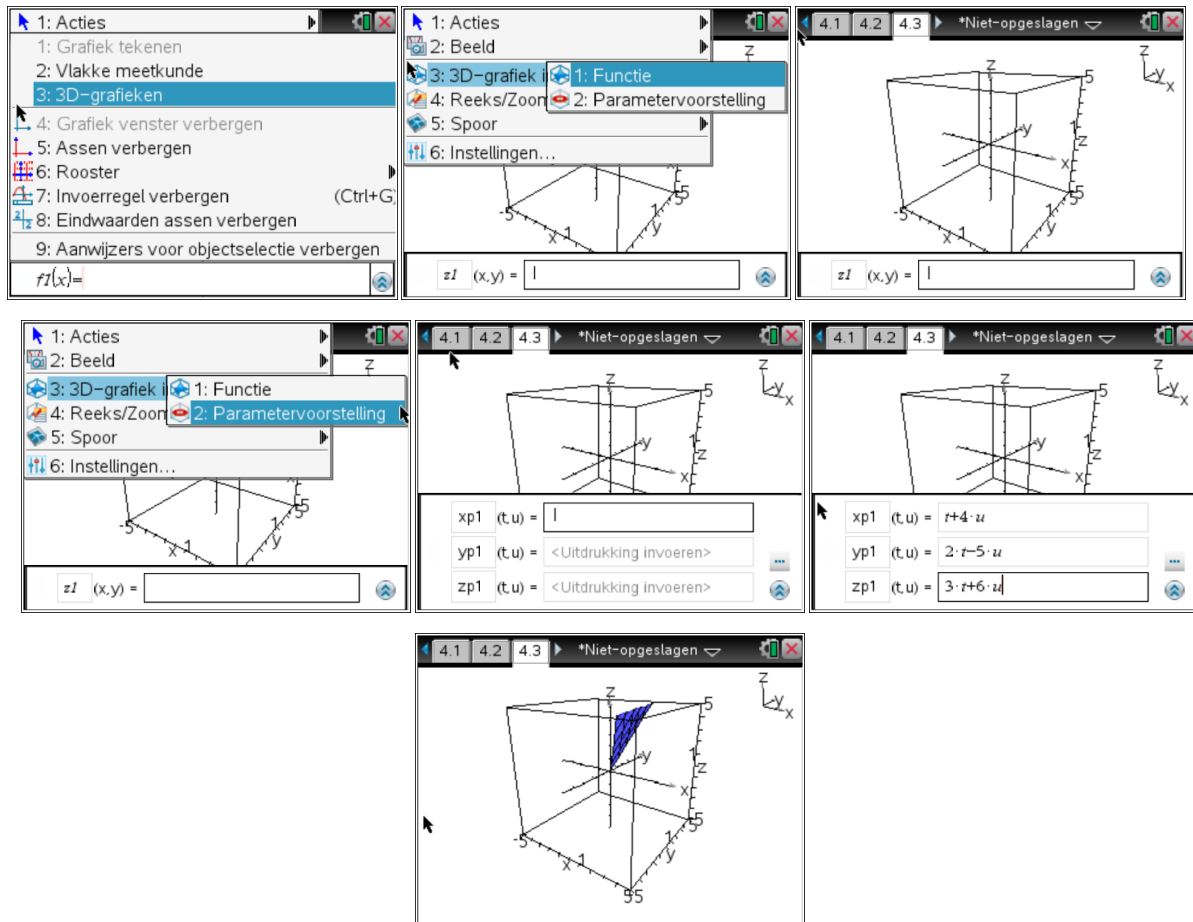
De opvulkleur van het gebied en de lijnkleur van de grensrechte kunnen individueel worden aangepast.

2.7 Parametervergelijkingen in 3D

Driedimensionaal zijn er naast uitdrukkingen van de vorm $z = f(x, y)$ ook

parametervergelijkingen van de vorm
$$\begin{cases} x = f(t, u) \\ y = g(t, u) \\ z = h(t, u) \end{cases}$$
 met t en u de (vaste) parameters.

- Open de grafieken applicatie
- Kies Menu, 2: Beeld, 3: 3D-grafieken en maak dan keuze tussen een functievoorschrift met twee variabelen of een parametervoorstelling.



2.8 Statistiek: histogrammen met verschillende klassenbreedte

Het is nu mogelijk om histogrammen te maken met verschillende klassenbreedte.

Daarvoor wordt er een tweede kolom voorzien naast de kolom met de gegevens, waarin de klassengrenzen aangegeven worden.

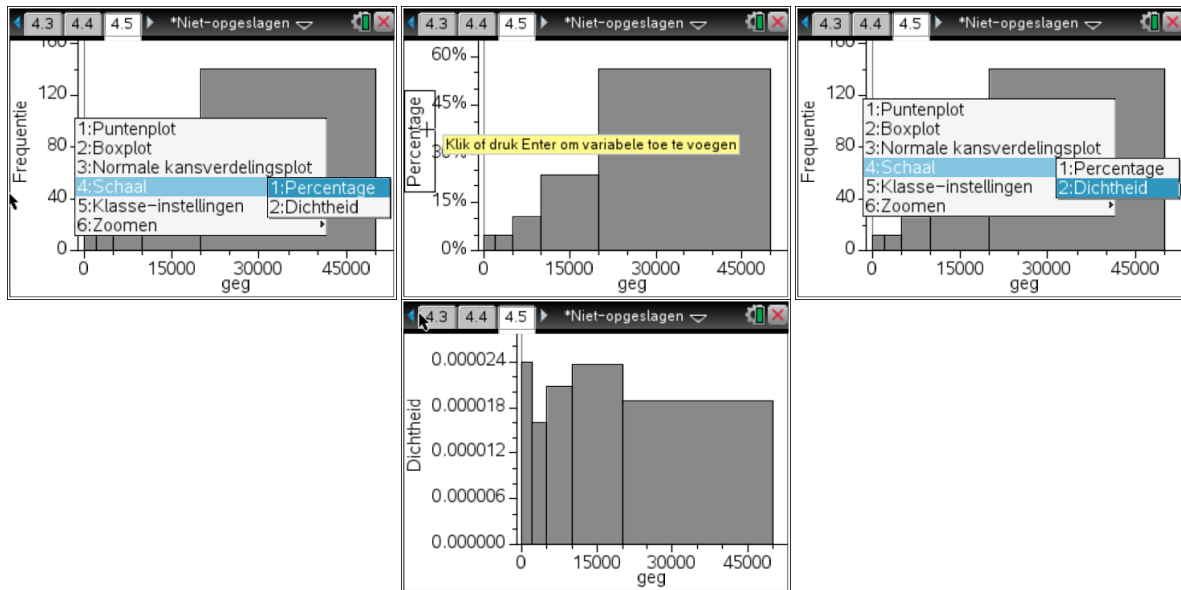
Voorbeeld:

We genereren 250 gehele getallen tussen 0 en 50000. In de tweede kolom worden de klassengrenzen ingevoerd: 0, 2000, 5000, 10000, 20000 en 50000. Zorg ervoor dat de klassengrenzen in opklimmende volgorde ingevoerd worden.

- Open de lijsten en spreadsheet applicatie
- In de eerste kolom (naam geven) komen de gegevens te staan
- In de tweede kolom (naam geven) komen dan de klassengrenzen in opklimmende volgorde (belangrijk).
- Open de gegevensverwerking en statistiek applicatie
- Kies de naam van de eerste kolom om onderaan in te vullen en druk ENTER.
- Druk CTRL+MENU, kies 2: histogram en druk ENTER

- Klik binnen het grafisch gebied van de voorstelling (links van de y-as en boven de x-as) en druk CTRL+MENU, kies 5: Klasse-instelling, 2: Variabele klassenbreedte.
- Er verschijnt een invulscherm waar de naam van de lijst met klassengrenzen kan ingevuld worden.
- Druk op ENTER
- Met CTRL+MENU, 6: Zoomen, 2: Zoom-gegevens wordt de schaal aangepast zodat de voorstelling volledig binnen het grafische venster valt.
- De schaal waarmee het histogram getekend wordt kan ook aangepast worden. Druk CTRL+MENU, 4: Schaal. De oorspronkelijk grootte die wordt uitgezet op de y-as is de frequentie maar ook het percentage en de dichtheid kan uitgezet worden. Dit levert niet altijd dezelfde vorm van histogram op.

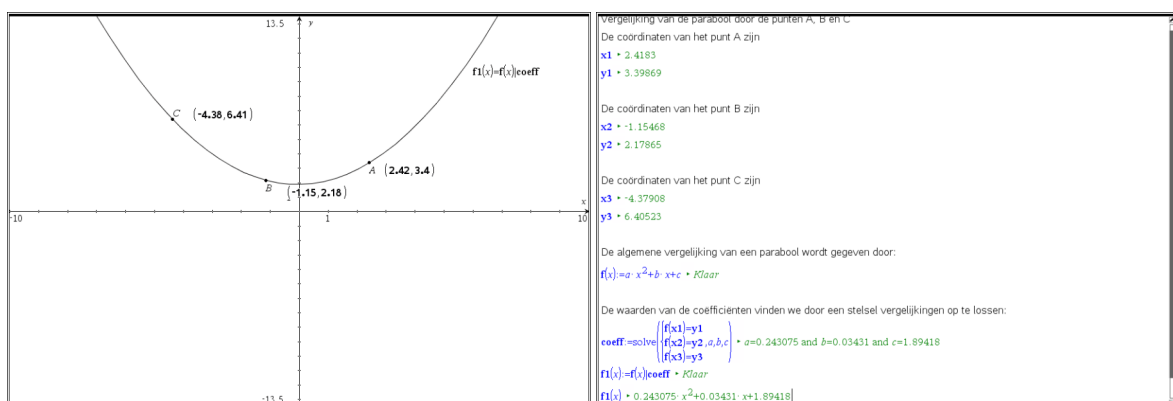




3 Voorbeelden

3.1 3 punten en een parabool

In dit voorbeeld worden drie willekeurige punten geconstrueerd. De coördinaten van de punten worden één voor één in aparte variabelen opgespaard. Aan de hand van deze coördinaten worden de paramaters van een tweedegraadsfunctie berekend. Daarna wordt dan ook de grafiek van deze functie geconstrueerd. Het is mogelijk om de ligging van de punten afzonderlijk te veranderen en de invloed op de grafiek onmiddellijk te bekijken.

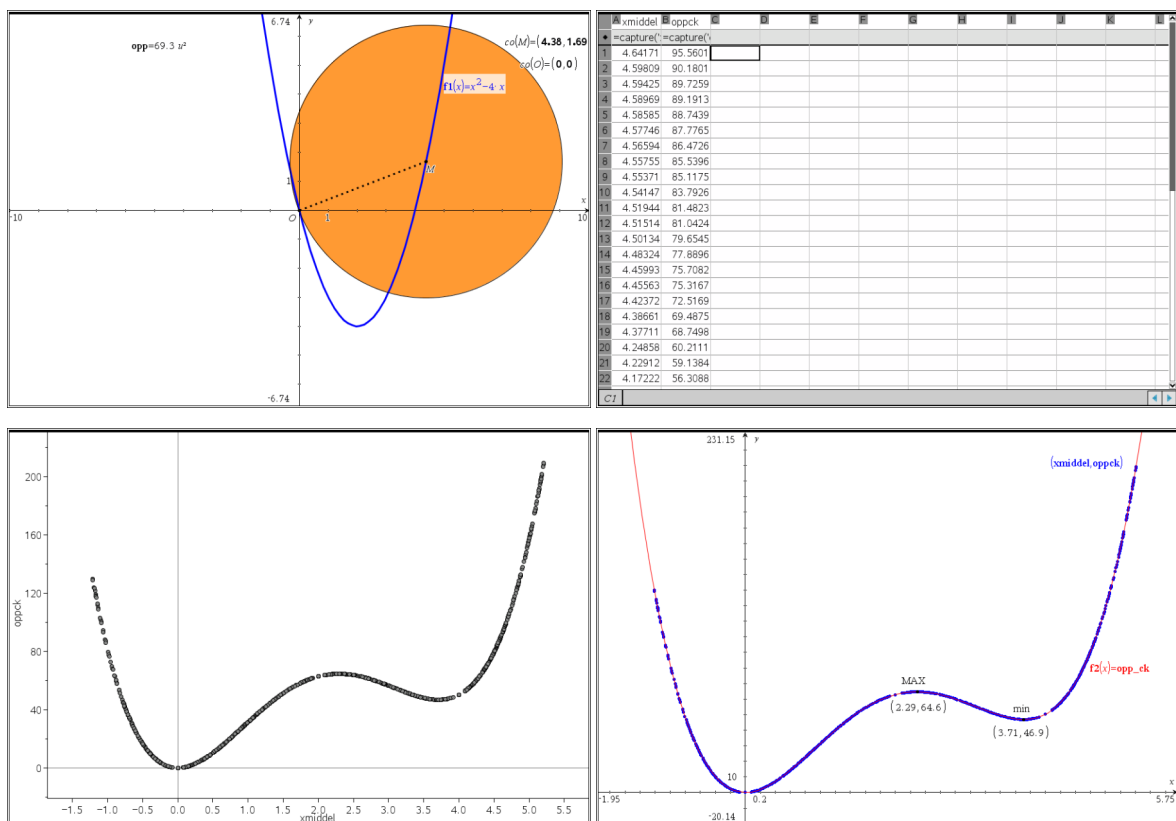


3.2 Cirkel en parabool

Dit is een vraagstuk waarin minima en maxima een rol spelen. Er wordt onderzocht hoe de oppervlakte van een cirkel verandert als de cirkel door de oorsprong gaat en het middelpunt beweegt op de parabool.

Vanuit de constructie van de cirkel en de parabool en het bepalen van de oppervlakte en de straal van de cirkel, worden data verzameld voor verschillende posities van het middelpunt. Hiervoor wordt de mogelijkheid datacapture gebruikt. Zo ontstaan twee lijsten waarin de verschillende waarden van de straal en de oppervlakte worden opgespaard. Daarna wordt een scatterplot getekend met de bekomen waarden.

Er wordt een wiskundig model opgesteld en afgebeeld op dezelfde grafiek. Met de geschikte keuze van de vensterinstellingen, kan verder ingegaan worden op globale en lokale minima en maxima. Dit kan zowel grafisch als analytisch.



Berekening van de straal r van de cirkel. De straal is de afstand van het punt $O(0,0)$ tot het punt $M(x,y)$

$$r := \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}$$

$$y := x^2 - 4 \cdot x \rightarrow x^2 - 4 \cdot x$$

$$\text{opp_ck} := \pi \cdot r^2 \rightarrow \pi \cdot x^2 \cdot (x^2 - 8 \cdot x + 17)$$

$$f2(x) := \text{opp_ck} \rightarrow \text{Klaar}$$

$$f\text{Max}(f2(x), x) \rightarrow x = -\infty \text{ or } x = \infty \quad (\text{globaal maximum})$$

$$x_{\text{max}} := f\text{Max}(f2(x), x, 0, 4) \rightarrow x = \frac{-(\sqrt{2}-6)}{2} \quad (\text{lokaal maximum})$$

$$f\text{Min}(f2(x), x) \rightarrow x = 0 \quad (\text{globaal minimum})$$

$$x_{\text{min}} := f\text{Min}(f2(x), x, 1.5, \infty) \rightarrow x = \frac{\sqrt{2}+6}{2} \quad (\text{lokaal minimum})$$

$$f2(x)|_{x_{\text{max}}} \rightarrow \frac{(8 \cdot \sqrt{2} + 71) \cdot \pi}{4}$$

$$f2(x)|_{x_{\text{min}}} \rightarrow \frac{-(8 \cdot \sqrt{2} - 71) \cdot \pi}{4}$$

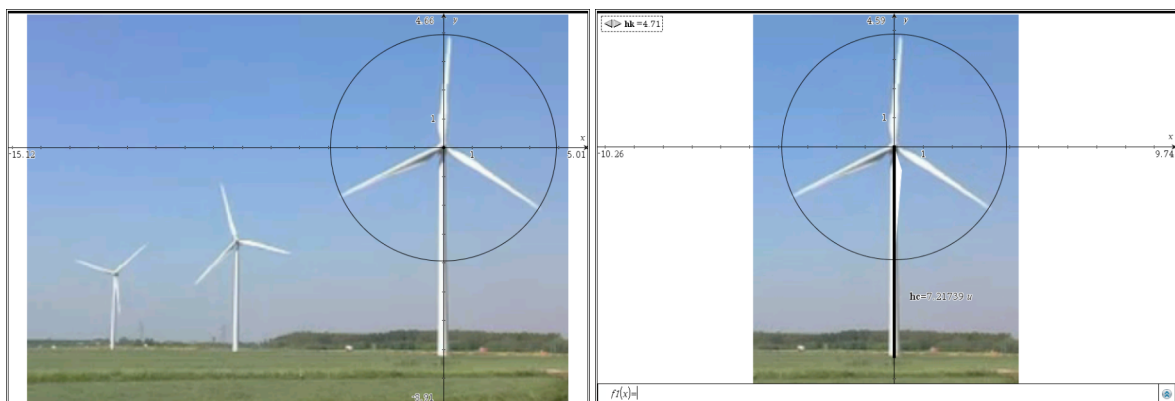
$$f2(x)|_{x_{\text{max}}} \rightarrow 64.649$$

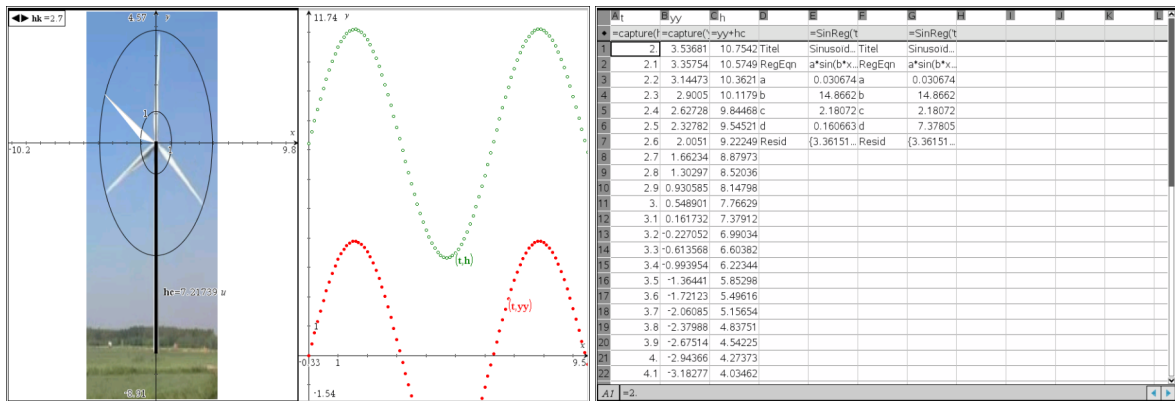
$$f2(x)|_{x_{\text{min}}} \rightarrow 46.8775$$

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dx} f2(x) = 0, x\right) \rightarrow x = 0 \text{ or } x = \frac{-(\sqrt{2}-6)}{2} \text{ or } x = \frac{\sqrt{2}+6}{2}$$

3.3 Windmolen

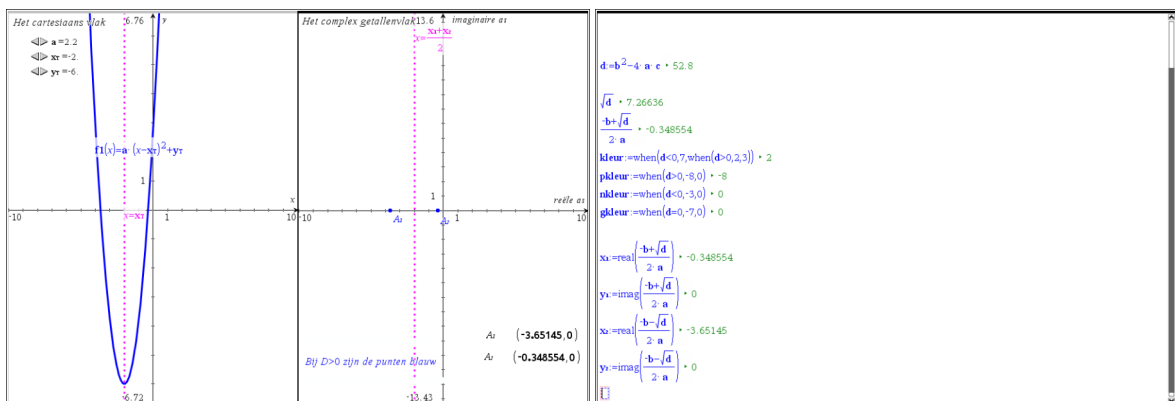
In dit probleem wordt een model gezocht om de beweging van de tip van een vleugel van een windmolen, te beschrijven als functie van de tijd. Hierbij wordt een afbeelding van een windmolen gebruikt als uitgangspunt. Daarop wordt een bewegende vleugeltip geconstrueerd. Met datacapture worden dan de tijd en de hoogte van de vleugeltip opgemeten en grafisch uitgezet. Na de simulatie zou men nog sinusregressie kunnen toepassen om het wiskundig model vast te leggen en te vergelijken met de scatterplot. Het invoegen van een achtergrond kan enkel bij de softwareversie van TI-Nspire. Het is slechts mogelijk om de grootte en de plaats aan te passen in het programma. Het bijsnijden van de afbeelding moet vooraf gebeuren met een ander programma. De achtergrond wordt wel weergegeven bij gebruik van de handheld.

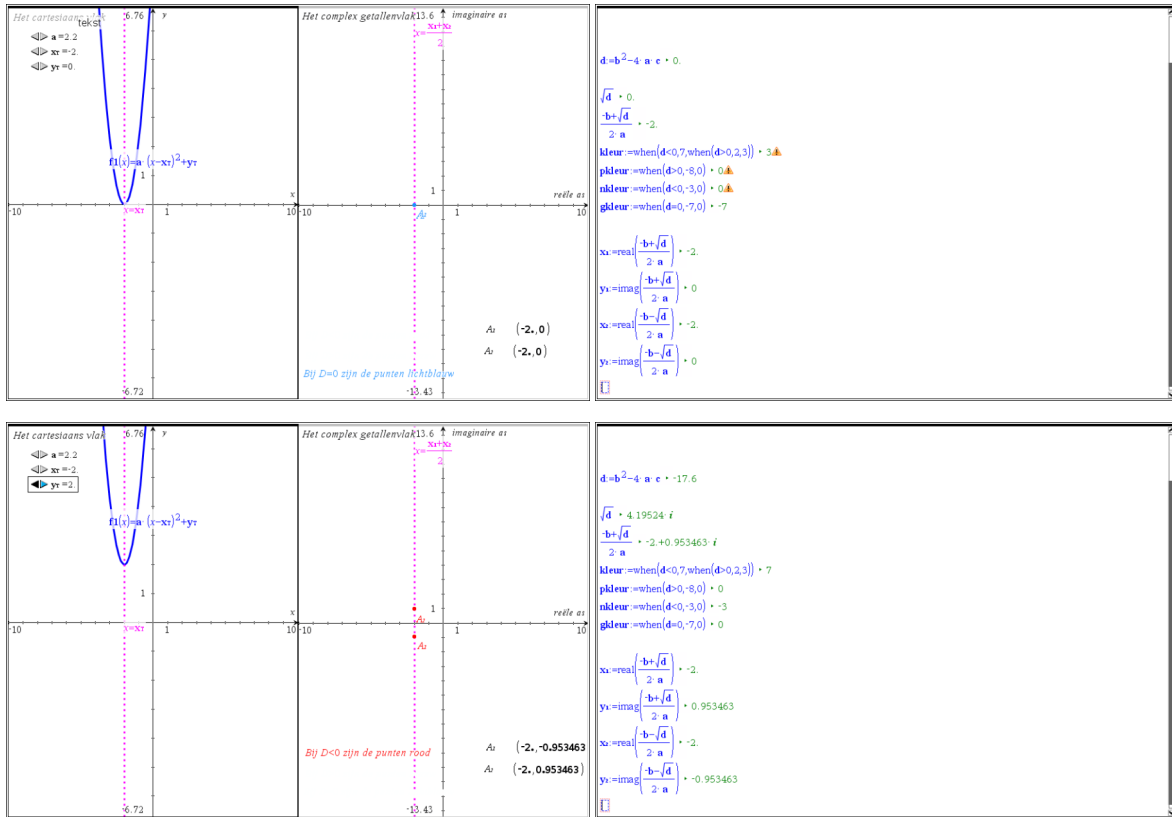




3.4 Ligging van de nulwaarden van een tweedegraadsfunctie

Dit is een voorbeeld waarmee de conditionele verandering van kleur wordt geïllustreerd. De parameters van een tweedegraadsfunctie (topvergelijking van de parabool) kunnen worden aangepast om de ligging van de parabool t.o.v. de x-as en y-as te veranderen. Daarvoor worden er drie schuifbalken voorzien. De nulwaarden worden berekend en weergegeven in het complexe getallenvlak. Hiervoor moeten de berekeningen gebeuren in \mathbb{C} . Dit kan ingesteld worden bij de documentinstellingen. Het is de bedoeling om de kleur waarin de nulpunten worden getekend te laten veranderen in functie van het geval dat zich voordoet. Daarbij verschijnt dan ook de passende begeleidende tekst in dezelfde kleur.







15^{de} T³ Europe Symposium Oostende

20 & 21 augustus 2012

Aan de slag met sensoren en DataQuest

Jürgen Schepers



Aan de slag met sensoren en DataQuest

Onderzoek naar de drinkbaarheid van water

Jürgen Schepers

Doelstellingen van deze workshop:

- 1) leren meten met sensoren
- 2) leren verzamelen van data
- 3) leren data wiskundig verwerken en analyseren
- 4) leren besluiten trekken uit de wiskundige analyse en de metingen

Benodigdheden voor deze workshop:

- TI-Nspire CX rekentoestel
- Lab Cradle
- pH-sensor
- Conductiviteit- of geleidbaarheidsensor
- Turbiditeit- of troebelheidsensor
- Verschillende soorten water (kraantjeswater uit Limburg, zeewater, ...)

Deze workshop kan gebruikt worden zowel in de lessen wetenschappen als de lessen wiskunde als een groepswerk.

Iedere groep krijgt een flesje water. Zij voeren hierop de volgende metingen uit: pH, geleidbaarheid en troebelheid. Aan de hand van deze gegevens beslissen ze in hoeverre het water drinkbaar is en doen ze een gok naar de aard van het water dat ze gekregen hebben. Hiervan wordt ook een verslag gemaakt.

Naderhand verzamelen we de gegevens van alle groepen en worden o.a. de statische getallen berekend, grafieken gemaakt,....

Hieronder vind je enkele EPA(1) normen voor drinkwater.

Variabele	Norm
pH	6.5 - 8.5
Totaal opgeloste stoffen	< 500 mg/L
Troebelheid	< 5 NTU
Chloride	< 250 mg/L
Nitraat	< 10 mg/L
Koper	< 1.3 mg/L
Lood	< 0.015 mg/L

- (1) Het Environmental Protection Agency (afgekort tot EPA of soms USEPA) is het federale agentschap van de Verenigde Staten dat belast is met de bescherming van de volksgezondheid en de bescherming van het milieu.

Inleiding: metingen doen met sensoren m.b.v. TI-Nspire CX

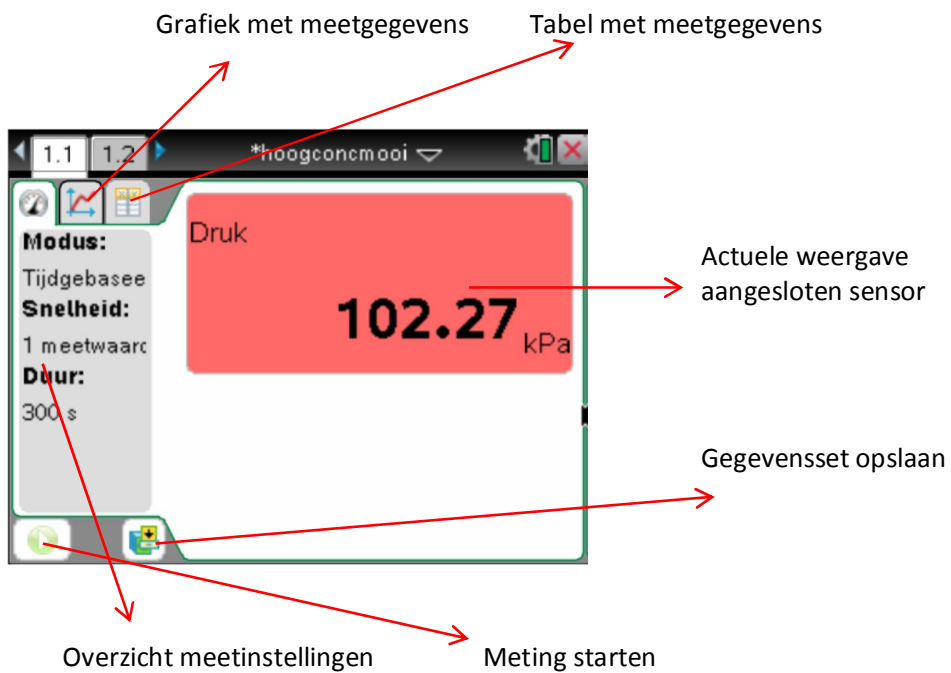
Stap 1 - Sluit de interface - TI-Nspire Lab Cradle - aan op de TI-Nspire CX.



Stap 2 - Sluit vervolgens één of meerdere sensoren aan op de interface.



Stap 3 - Ga direct aan de slag! Alle metingen gebeuren met behulp van de applicatie DataQuest. De DataQuest applicatie start automatisch op indien je een interface op het rekentoestel aansluit. Je kan echter de applicatie altijd vanuit het hoofdscherm van de TI-Nspire opstarten.



Verder kan er gebruik gemaakt worden van **Cahier 31: TI-Nspire in de lessen chemie**. Deze is te downloaden op de website www.t3vlaanderen.be.

