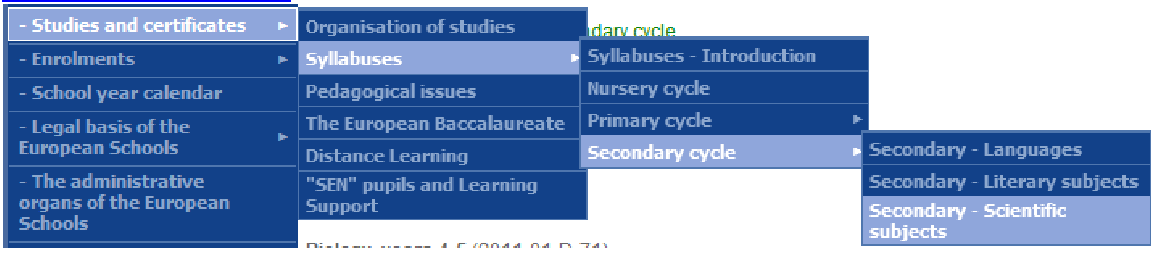
In 2010 is op de Europese Scholen het nieuwe wiskunde programma gestart. Een van de grote innovaties betreft het invoeren van hetzelfde technologisch hulpmiddel voor alle leerlingen van de laatste 4 studiejaren van de middelbare school, in alle taalafdelingen en alle studierichtingen. De keuze is daarbij op de TI-Nnspire CAS gevallen. In 2012 is het eerste eindexamen gemaakt op basis van dit nieuwe programma.

In het eerste deel van de workshop stellen we aan u voor (presentatie beschikbaar op T3-Vlaanderen website):

- de Europese Scholen in het algemeen.
  Meer info is beschikbaar op de site:
  http://www.eursc.eu/

- het vernieuwde wiskundeprogramma van de Europese Scholen.
  Alle programma's zijn beschikbaar in het Engels, Frans en Duits op de website:
  http://www.eursc.eu/



- het vernieuwde eindexamen (Europees Baccalaureaat wiskunde 3 / 5):
  - deel A: zonder rekenmachine (1 uur)
  - deel B: met rekenmachine (2 / 3 uur)
- ervaringen en commentaar bij het eerste eindexamen 'nieuwe stijl' 2012.
- ervaringen en commentaar bij de invoering van de TI-Nspire CAS: bijscholing en vorming, test-modus, pc en handheld, etc.

In het tweede deel gaan we aan de slag met de examenopgaven 2012 van het eerste Europees Baccalaureaat wiskunde 3 of 5 "nieuwe stijl". De examenvragen evenals de volledige uitwerking ervan (deel B, met rekenmachine) staat op de volgende pagina's.

MATH 3 - VRAAG B1 – ANALYSE

a. Gegeven
   - de functie f gedefinieerd door $f(x) = a.e^{bx}$ waarbij a en b reële getallen zijn.
   - $f(0) = 4$ en $f'(0) = -2$

   Gevraagd: toon aan dat $f(x) = 4.e^{-\frac{1}{2}x}$

b. Geef de formule van de oppervlakte van het vlakdeel dat begrensd wordt door de grafiek van *f*, de coördinaatassen en de lijn x=2.
   Bereken deze oppervlakte.

c. De booglengte L van de grafiek van *f* tussen x_1 en x_2 wordt gegeven door

   $$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

   Gebruik de rekenmachine om L te bepalen als gegeven is dat $x_1 = 0$ en $x_2 = 2$.

   Rond het antwoord af op twee decimalen.

MATH 3 - VRAAG B2 – ANALYSE

Bij een lange-termijnonderzoek wordt de groei van twee insectenkolonies A en B bestudeerd.
Kolonie A bestaat bij het begin van het onderzoek uit 100 insecten en verdubbelt elke dag in aantal.
Kolonie B bestaat bij het begin van het onderzoek uit 20 insecten en dit aantal wordt elke dag vermenigvuldigd met 2.5.

a. Geef voor beide kolonies het aantal insecten $N_A(t)$ en $N_B(t)$ als functie van t, waarbij t het aantal dagen is dat verlopen is sinds het onderzoek begon.

b. Gebruik de rekenmachine om de volgende vragen te beantwoorden:
   - Voor welke waarde van t hebben kolonies A en B een gelijk aantal insecten ?
   - Uit hoeveel insecten bestaat elke kolonie op dat moment ?

Op t = 8 verandert de groei van kolonie A. Het aantal insecten $P(t)$ in kolonie A wordt dan gegeven door de formule $P(t) = \dfrac{38000}{1 + 1444e^{-t}}$, $t \geq 8$

c. Bereken met de rekenmachine $N_A(9)$ en $P(9)$.
   Vergelijk deze aantallen en geef een verklaring.

d. Uit hoeveel insecten bestaat kolonie A aan het einde van dit lange-termijnonderzoek ?

MATH 3 - VRAAG B3 – KANSREKENING

Gebruik de rekenmachine voor de berekeningen in onderdeel a), b) en c).
5% van de golfballen die het bedrijf Goflfygreen produceert zijn ongeschikt voor gebruik.

a. Uit de geproduceerde ballen worden aselect 12 golfballen gekozen.
   Geef aan welke kansverdeling gebruikt wordt en bereken de kans dat precies 2 van deze ballen ongeschikt zijn. Rond het antwoord af op 3 decimalen.
b. Bereken de kans dat er bij een aselecte steekproef van 250 ballen geen enkele bal ongeschikt is. Rond het antwoord af op 6 decimalen.
c. Bereken de kans dat er bij een aselecte steekproef van 250 ballen meer dan 10 ongeschikte ballen zijn. Rond het antwoord af op 3 decimalen.

Golfygreen gebruikt een machine om de ballen te testen.
Deze machine beoordeelt 99% van de ongeschikte ballen inderdaad als ongeschikt voor gebruik, maar beoordeelt 2% van de goede ballen foutief als ongeschikt voor gebruik.

d. Teken een boomdiagram waarin alle relevante informatie wordt weergegeven.
e. Golfygreen beschouwt de machine als betrouwbaar als het percentage foutief beoordeelde ballen niet groter is dan 2%.
   Is deze machine betrouwbaar ?

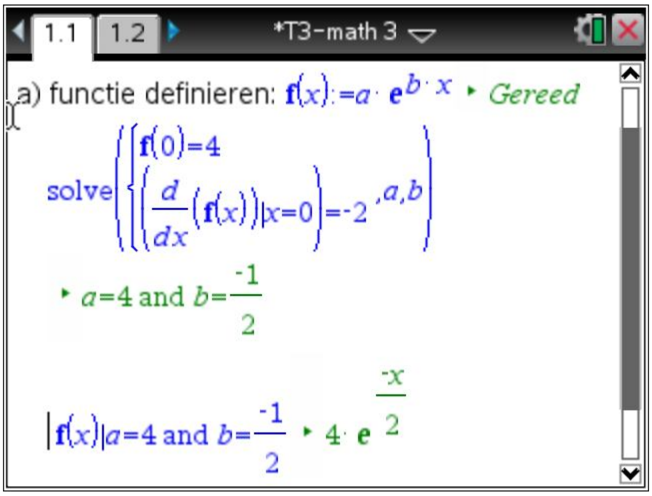
MATH 3 - VRAAG B4 – STATISTIEK

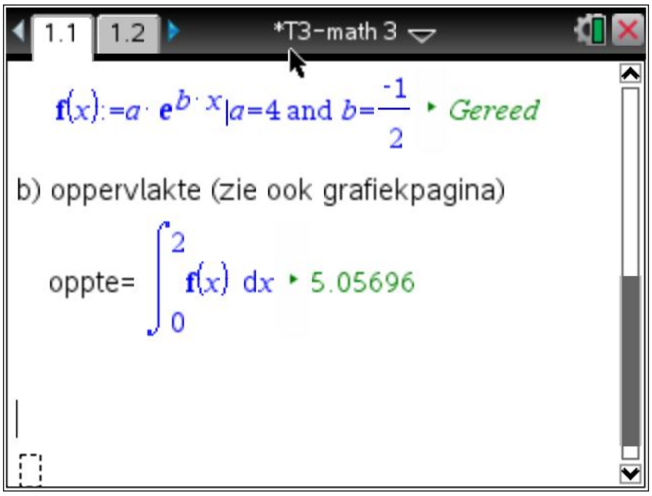
Gebruik de rekenmachine voor alle berekeningen in deze vraag.
De tabel hieronder geeft een overzicht van de aardbeienproductie en de marktprijs in een bepaald gebied gedurende de laatste 8 jaar:

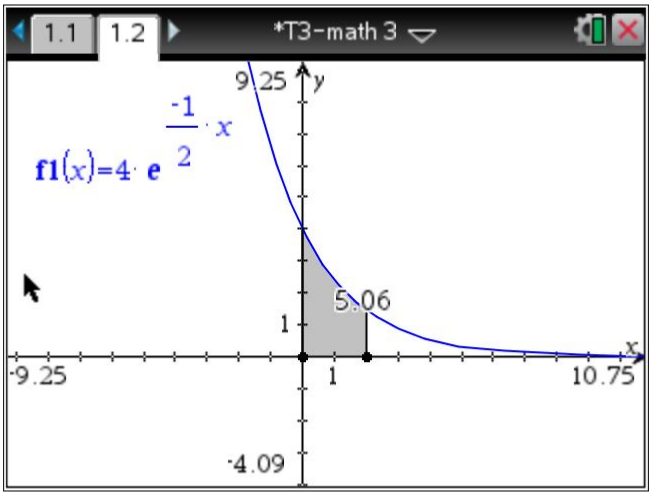
x (ton)	500	700	850	1100	1300	1620	1950	2300
y (€/kg)	3.00	2.75	2.58	2.42	2.30	2.20	2.12	2.05

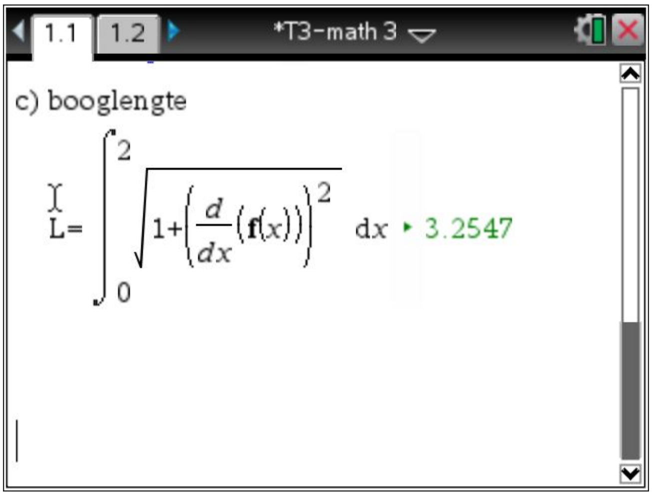
a. Verwerk de gegevens van de tabel in een spreidingsdiagram.
b. Bepaal een vergelijking van de regressielijn van y op x.
c. Bepaal de correlatiecoëfficiënt van x en y.
d. Bepaal een vergelijking van de lijn van Mayer door de gegevens te verdelen in een groep bestaande uit de eerste 4 jaar en een groep bestaande uit de laatste 4 jaar.
e. Het spreidingsdiagram geeft aan dat een exponentieel model wellicht beter geschikt is dan een lineair model. We onderzoeken daarom de variabele $z = \ln(y)$
   Bepaal een vergelijking van de regressielijn van z op x.
   Bepaal de correlatiecoëfficiënt van x en z.
f. Geef gebruik makend van de drie modellen die afgeleid zijn in de vragen b), d) en e) een schatting van de prijs per kg aardbeien als de productie 3000 ton bedraagt.
   Geef een kort commentaar op de uitkomsten.

MATH 3 - VRAAG B1 – ANALYSE

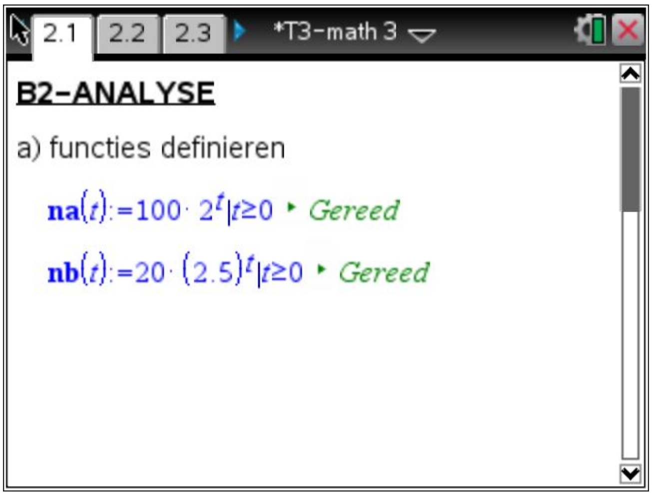


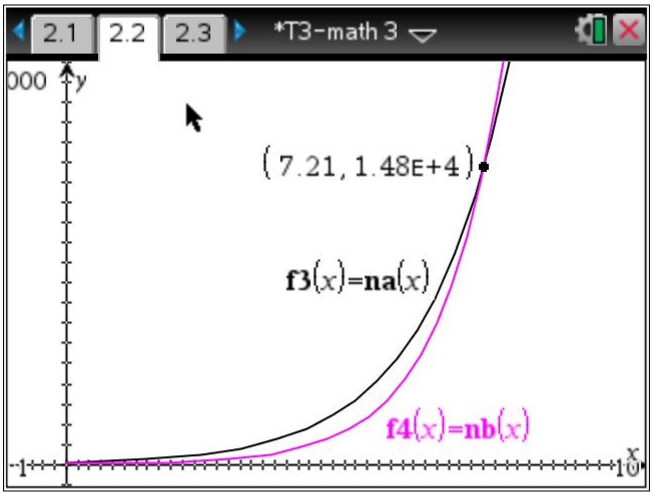


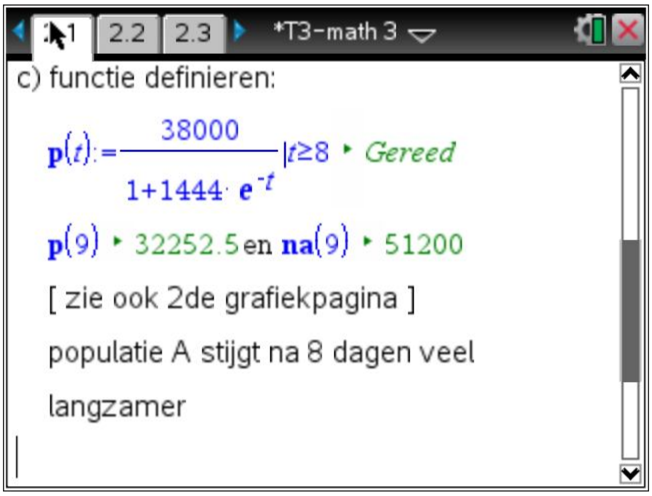


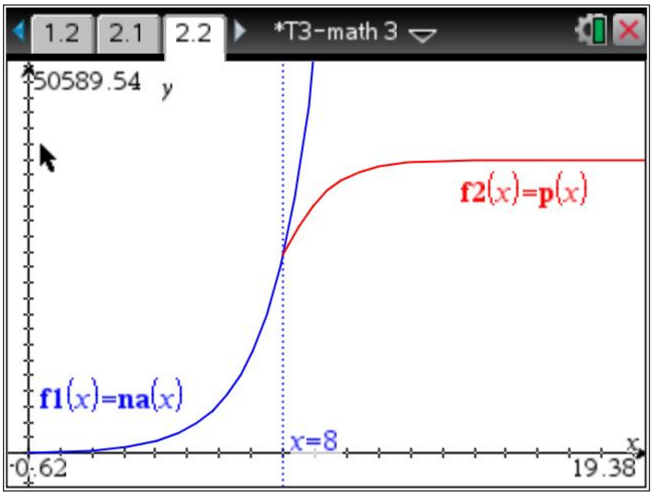


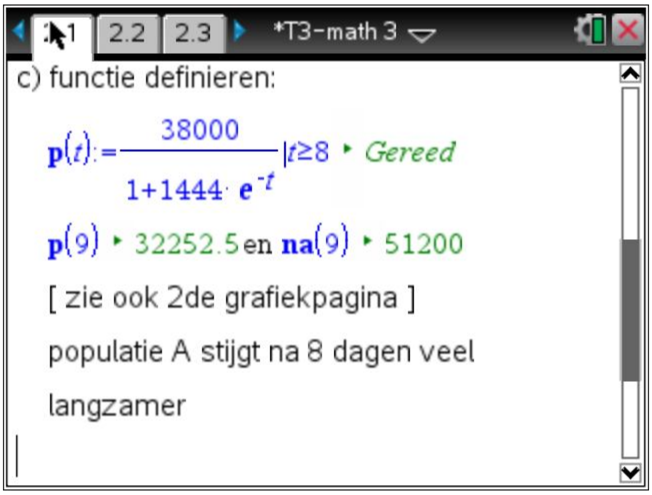
MATH 3 - VRAAG B2 – ANALYSE











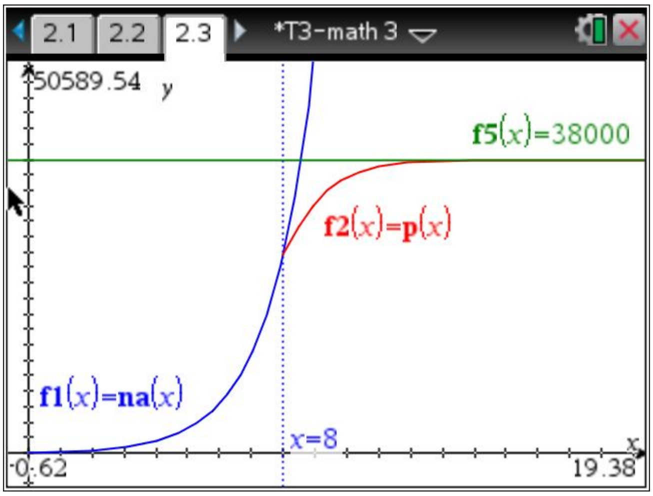
c) functie definieren:

$p(t):=\frac{38000}{1+1444\cdot e^{-t}}|t\geq 8$ ▸ *Gereed*

$p(9)$ ▸ 32252.5 en $na(9)$ ▸ 51200

[zie ook 2de grafiekpagina]

populatie A stijgt na 8 dagen veel langzamer



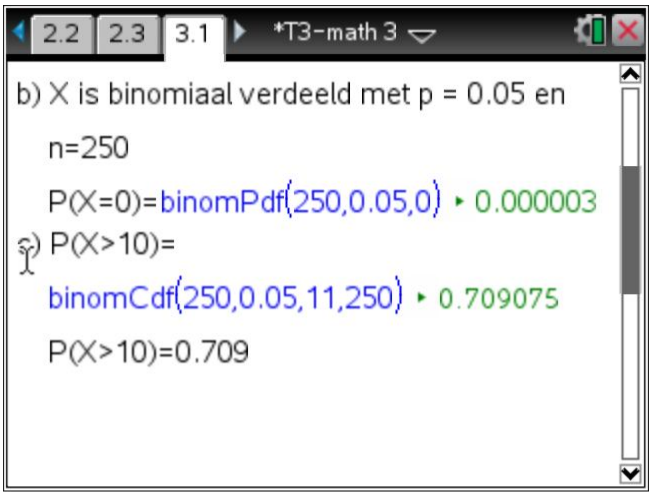
MATH 3 - VRAAG B3 – KANSREKENING

B3–KANSREKENING

a) X is binomiaal verdeeld met p = 0.05 en n=12

P(X=2)=binomPdf(12,0.05,2) ▸ 0.098792

P(X=2)=0.099



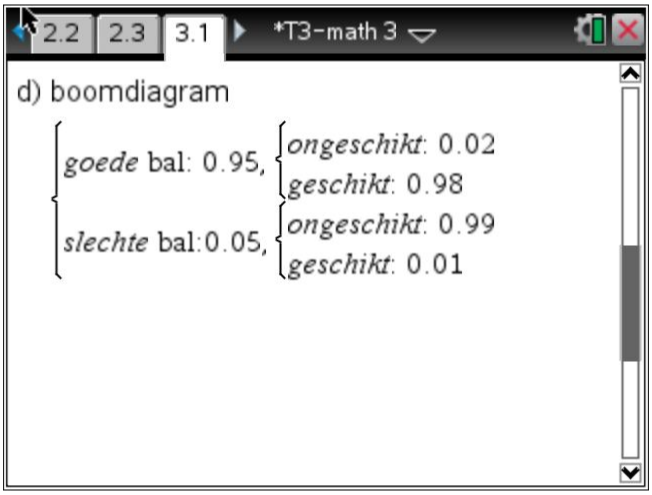
b) X is binomiaal verdeeld met p = 0.05 en n=250

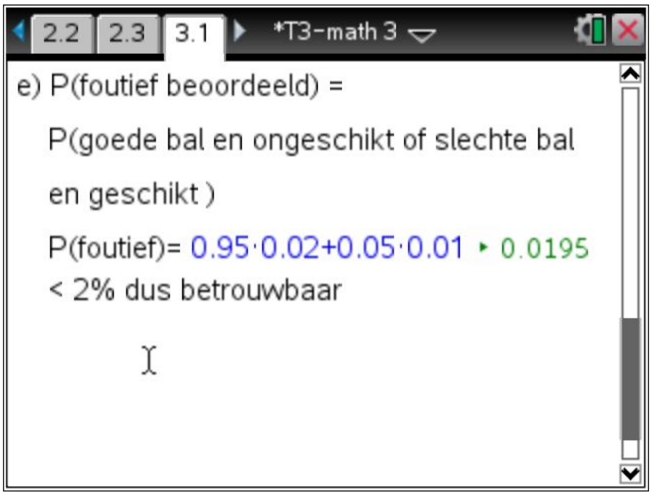
P(X=0)=binomPdf(250,0.05,0) ▸ 0.000003

c) P(X>10)=

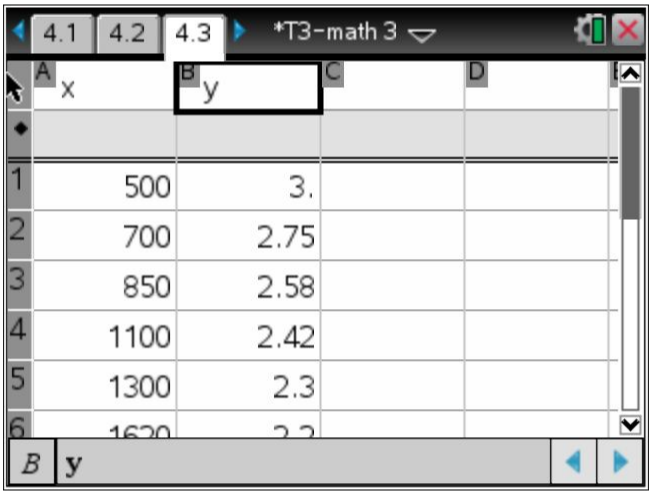
binomCdf(250,0.05,11,250) ▸ 0.709075

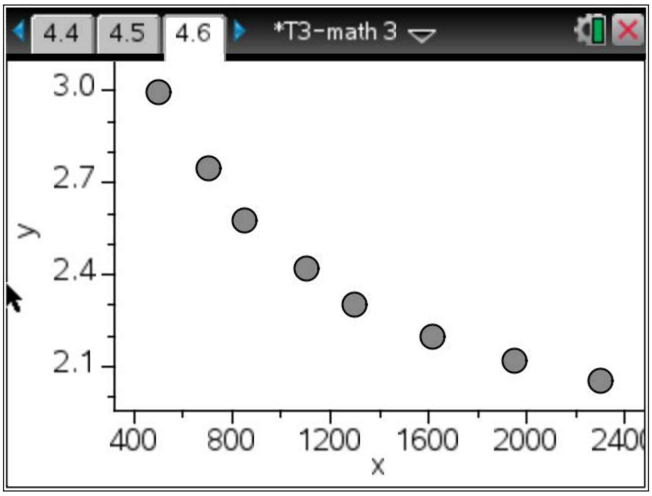
P(X>10)=0.709

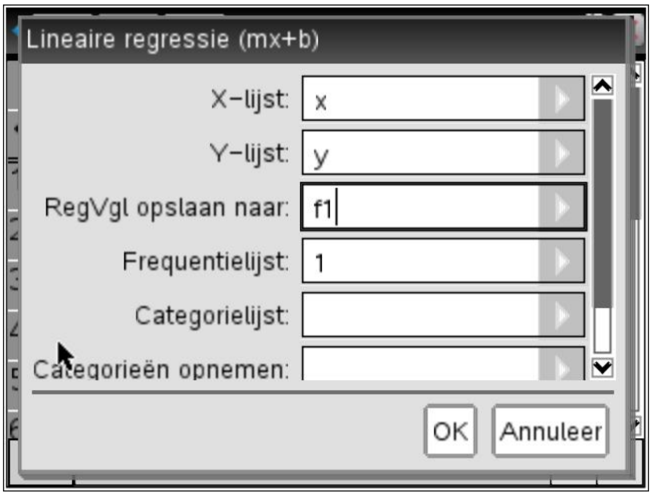


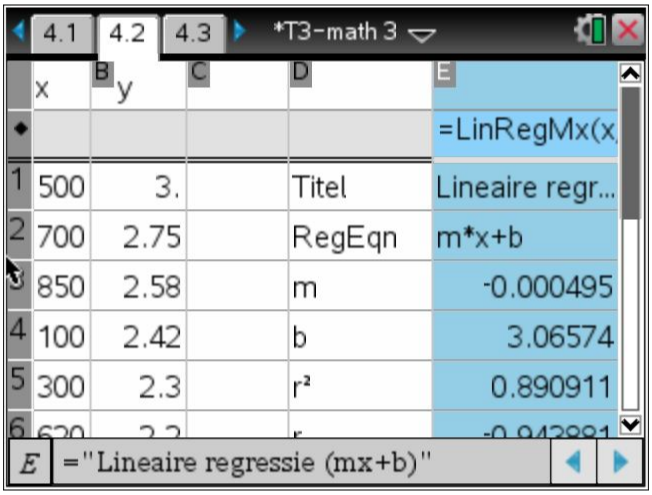


MATH 3 - VRAAG B4 – STATISTIEK

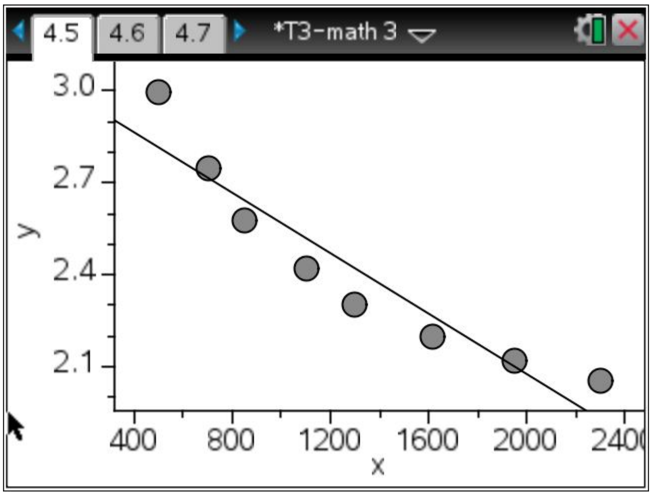

4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
A x
B y
C
D
1 500 3.
2 700 2.75
3 850 2.58
4 1100 2.42
5 1300 2.3
B y

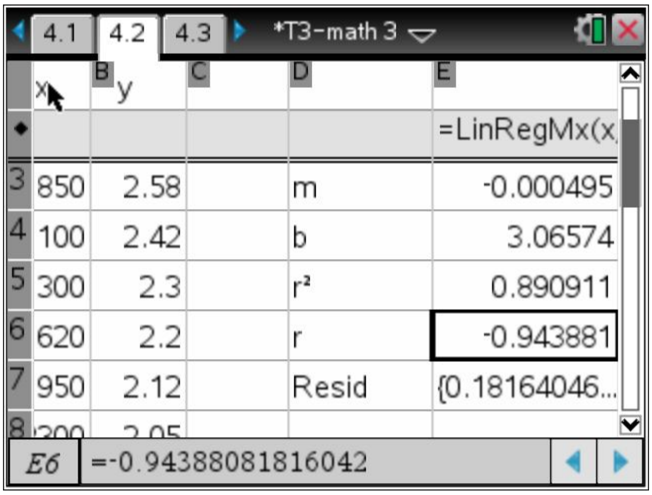

4.4 4.5 4.6 *T3-math 3
3.0
2.7
2.4
2.1
y
400 800 1200 1600 2000
x


Lineaire regressie (mx+b)
X-lijst: x
Y-lijst: y
RegVgl opslaan naar: f1
Frequentielijst: 1
Categorielijst:
Categorieën opnemen:
OK
Annuleer

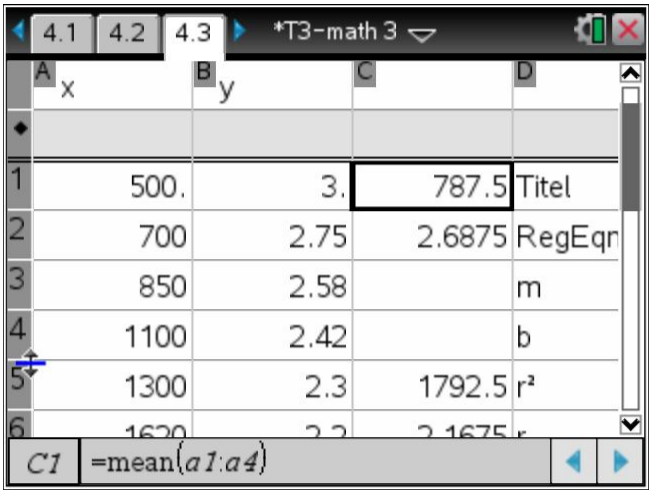

4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
x
B y
C
D
E
=LinRegMx(x,
1 500 3. Titel Lineaire regr...
2 700 2.75 RegEqn m*x+b
3 850 2.58 m -0.000495
4 100 2.42 b 3.06574
5 300 2.3 r² 0.890911
E ="Lineaire regressie (mx+b)"

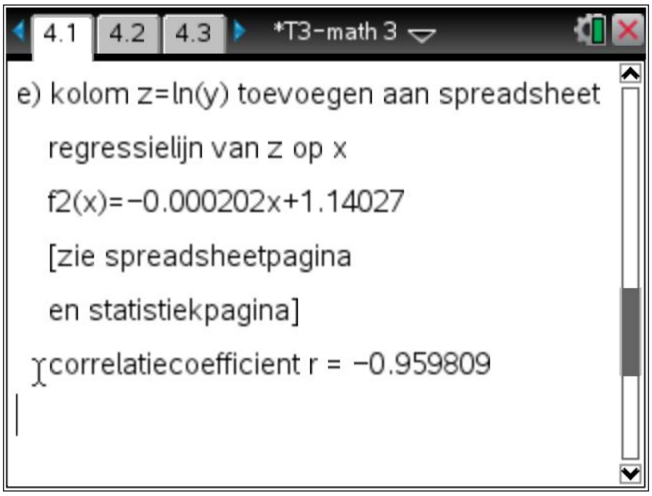

4.1 4.2 4.3 T3-math 3
b) regressielijn van y op x: y=mx+b
f1(x)=−0.000495x+3.06574
[zie spreadsheetpagina
en statistiekpagina]
c) correlatiecoefficient van x en y
r = −0.943881
[zie spreadsheetpagina]

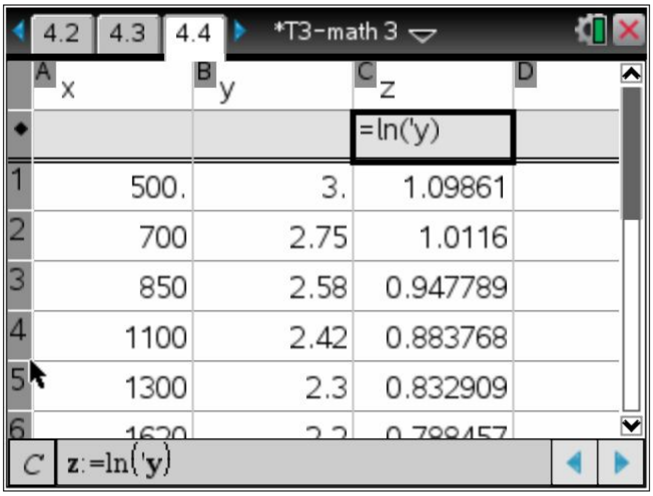

4.5 4.6 4.7 *T3-math 3
3.0
2.7
2.4
2.1
y
400 800 1200 1600 2000
x

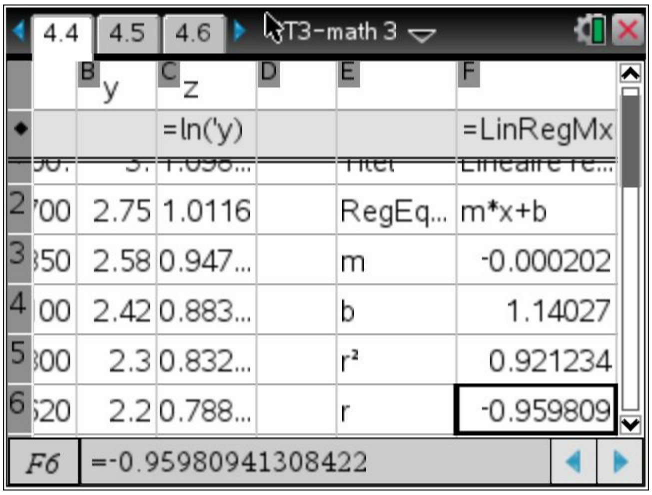

4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
x
B y
C
D
E
=LinRegMx(x
3 850 2.58 m -0.000495
4 100 2.42 b 3.06574
5 300 2.3 r² 0.890911
6 620 2.2 r -0.943881
7 950 2.12 Resid {0.18164046...
E6 =-0.94388081816042

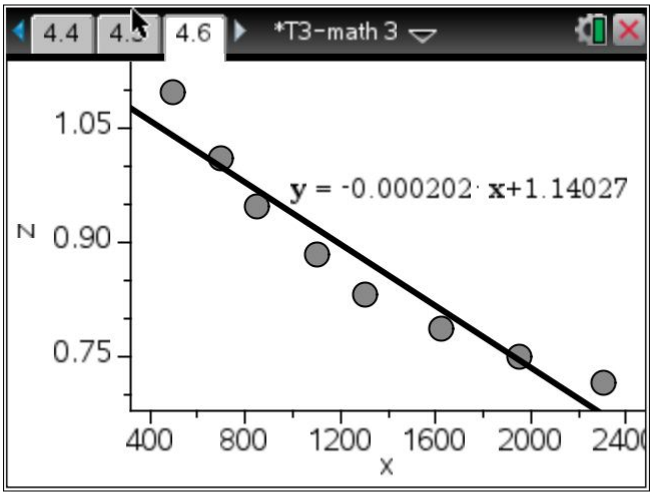

4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
d) lijn van Mayer
berekening van gemiddelden van de twee
groepen [zie spreadsheetpagina]
y= (2.1675−2.6875)/(1792.5−787.5) · (xx−787.5)+2.6875
▸ 3.09496−0.000517·xx
lijn van Mayer: y =−0.000517x+3.09496


4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
A x
B y
C
D
1 500. 3. 787.5 Titel
2 700 2.75 2.6875 RegEqn
3 850 2.58 m
4 1100 2.42 b
5 1300 2.3 1792.5 r²
C1 =mean(a1:a4)


4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
e) kolom z=ln(y) toevoegen aan spreadsheet
regressielijn van z op x
f2(x)=−0.000202x+1.14027
[zie spreadsheetpagina
en statistiekpagina]
correlatiecoefficient r = −0.959809


4.2 4.3 4.4 *T3-math 3
A x
B y
C z
D
=ln('y)
1 500. 3. 1.09861
2 700 2.75 1.0116
3 850 2.58 0.947789
4 1100 2.42 0.883768
5 1300 2.3 0.832909
C z:=ln('y)


4.4 4.5 4.6 T3-math 3
B y
C z
D
E
F
=ln('y)
=LinRegMx
2 700 2.75 1.0116 RegEq... m*x+b
3 850 2.58 0.947... m -0.000202
4 00 2.42 0.883... b 1.14027
5 300 2.3 0.832... r² 0.921234
6 520 2.2 0.788... r -0.959809
F6 =-0.95980941308422


4.4 4.5 4.6 *T3-math 3
1.05
0.90
0.75
z
y = -0.000202· x+1.14027
400 800 1200 1600 2000 2400
x


4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
f) schatting van de prijs per kg aardbeien
– lineaire regressie van y op x:
f1(3000) ▸ 1.58146
– lijn van Mayer:
3.09496−5.17E-4· x|x=3000 ▸ 1.54396


4.1 4.2 4.3 *T3-math 3
– lineaire regressie van z op x:
z=f2(3000) ▸ 0.532785 = ln(y)
dus y=e^0.532785 ▸ 1.70367
er zijn niet genoeg gevens om het gepaste
model te bepalen

MATH 5 - VRAAG B1 – ANALYSE

Gegeven is de familie van functies g_n gedefinieerd door

$g_n(x) = \dfrac{e^{nx}}{1+e^x}$ voor alle gehele getallen $n \geq 0$

d. Schets de grafiek van g_0

e. Toon aan dat $g_0(x) = g_{-1}(-x)$ voor alle reële getallen x.

Geef de meetkundige betekenis van deze betrekking
en schets de grafiek van g_1 in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van g_0.

f. Toon aan dat de krommen $y = g_n(x)$ een gemeenschappelijk punt hebben en geef de coördinaten van dat punt.

g. Onderzoek, voor $n \geq 2$, het verloop van de functie $g_n(x)$ als $x \to -\infty$ en als $x \to +\infty$ en geef de vergelijking van de asymptoot.

h. Bereken, voor $n \geq 2$, de afgeleide $g_n'(x)$ en geef aan of g_n stijgend of dalend is.

i. In het punt met $x = 0$ heeft de grafiek van g_n een raaklijn die parallel is met de lijn $9x - 4y - 1 = 0$.

Bereken n en geef een vergelijking van deze raaklijn.

j. Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van g_0 en g_1 tussen de lijnen met vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$.

k. Voor de gehele getallen $n \geq 0$ is gegeven de rij I_n gedefinieerd door $I_n = \int_{-1}^{0} g_n(x)dx$

Bereken de kleinste waarde n waarvoor $I_n \leq 0.11$.

MATH 5 - VRAAG B2 – MEETKUNDE

In een 3-dimensionale ruimte zijn gegeven de lijnen gedefinieerd door:

$$d_1: \begin{cases} x = 2\lambda - 7 \\ y = 3\lambda - 14 \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{en} \quad d_2: \begin{cases} x = 3\mu - 10 \\ y = 2\mu - 6 \\ z = \mu \end{cases} ; \mu \in \mathbb{R}$$

e. Toon aan dat de lijnen d_1 en d_2 kruisen.

f. De lijn p staat loodrecht op de lijnen d_1 en d_2 en snijdt beide lijnen.

Bepaal een stelsel vergelijkingen van de lijn p.

g. Bereken de kortste afstand tussen de lijnen d_1 en d_2.

h. De lijn l gaat door het punt $M(1,2,0)$ en snijdt de lijnen d_1 en d_2.

Bepaal parametervergelijkingen van lijn l.

i. Bestaat er een bol met middelpunt M die de lijnen d_1 en d_2 raakt ?

Verklaar je antwoord.

j. Bepaal een vergelijking van de bol met middelpunt M die raakt aan lijn d_2.

MATH 5 - VRAAG B3 – KANSREKENING

De diameters van eieren geproduceerd op een kippenboerderij, zijn normaal verdeeld met gemiddelde 60 mm en standaardafwijking 5 mm.

f. 98% van de eieren in de productie heeft diameters in het interval $[60-k, 60+k]$.
   Bereken de waarde van k in mm, afgerond op 2 decimalen.

Eieren met een diameter van 70mm of meer behoren bij de klasse XL.

g. Laat zien dat de XL-eieren ongeveer 2.275% van de productie vormen.

De boerderij produceert 4000 eieren per dag.

h. Bereken de kans dat het totale aantal XL-eieren in de productie van 7 dagen in het interval $[600, 650]$ ligt.

Sommige eieren hebben meer dan één dooier.
Gemiddeld hebben 30% van de XL-eieren meer dan één dooier daar waar slechts 0.5% van alle andere eieren meer dan één dooier heeft

i. Bereken de kans dat een aselect gekozen ei, afkomstig van deze boerderij, meer dan één dooier heeft.

j. Bereken de kans dat een aselect gekozen ei met meer dan één dooier geen XL-ei is.

MATH 5 - VRAAG B4 – RIJEN

Gegeven is de rij (u_n) gedefinieerd door $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = \frac{1}{4}u_{n-1}^2 + 1 \; ; n \geq 2 \end{cases}$

g. Bereken de exacte waarde van u_2 en u_3.
   Bereken u_{20} en rond het antwoord af op 4 decimalen.

h. Gegeven is dat $u_n < 2$ voor elk natuurlijk getal n.
   Toon aan dat de rij (u_n) stijgend is.
   Leid hieruit af dat (u_n) convergeert
   en bereken de limiet van deze rij.

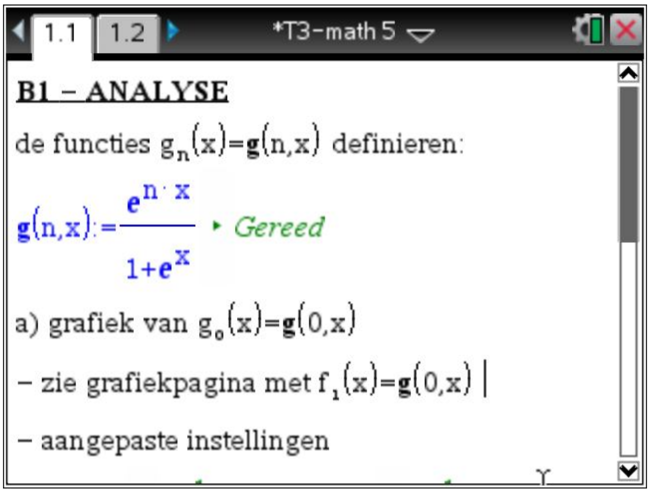
MATH 5 - VRAAG B5 – COMPLEXE GETALLEN

Gegeven is het complexe getal $w = \frac{1+iz}{z+2}$ waarbij $z = x + iy$ een complex getal is en $z \neq -2$.

a. Bepaal het reële deel en het imaginaire deel van w uitgedrukt in x en y.

b. Als w zuiver imaginair is liggen de punten die z representeren in het complexe vlak, op een rechte lijn.
   Toon dit aan en bepaal een vergelijking van deze lijn.

MATH5 - VRAAG B1 – ANALYSE



1.1 1.2 *T3-math 5

B1 – ANALYSE

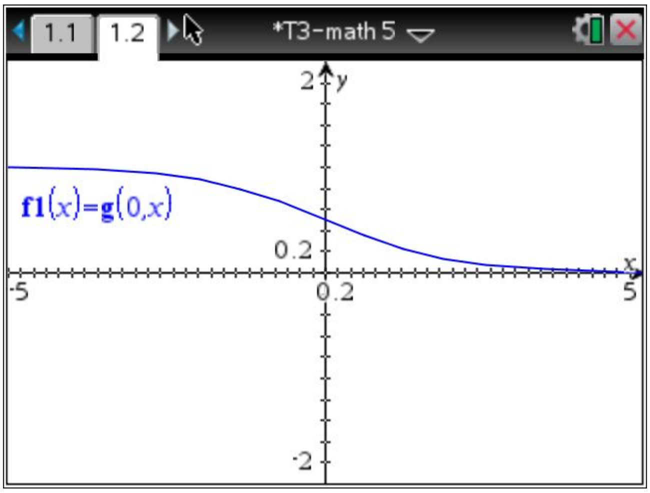
de functies $g_n(x) = \mathbf{g}(n,x)$ definieren:

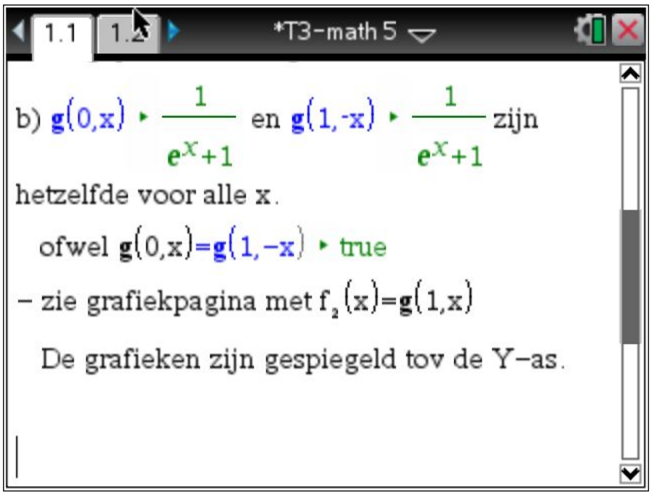
$\mathbf{g}(n,x) := \dfrac{e^{n \cdot x}}{1+e^x}$ ▸ *Gereed*

a) grafiek van $g_0(x) = \mathbf{g}(0,x)$

– zie grafiekpagina met $f_1(x) = \mathbf{g}(0,x)$

– aangepaste instellingen





1.1 1.2 *T3-math 5

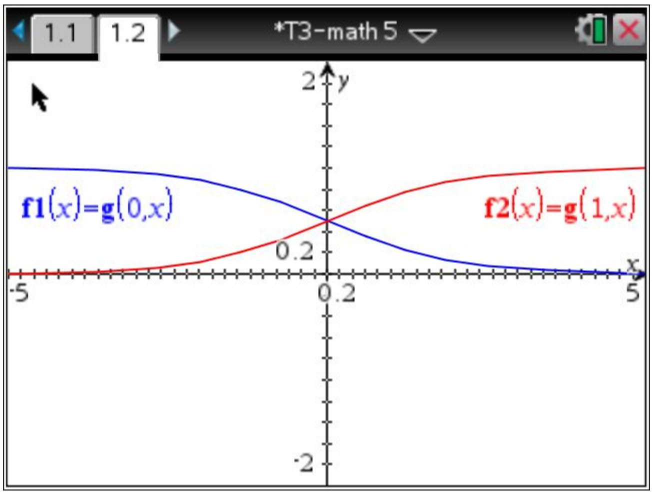
b) $\mathbf{g}(0,x)$ ▸ $\dfrac{1}{e^x+1}$ en $\mathbf{g}(1,-x)$ ▸ $\dfrac{1}{e^x+1}$ zijn

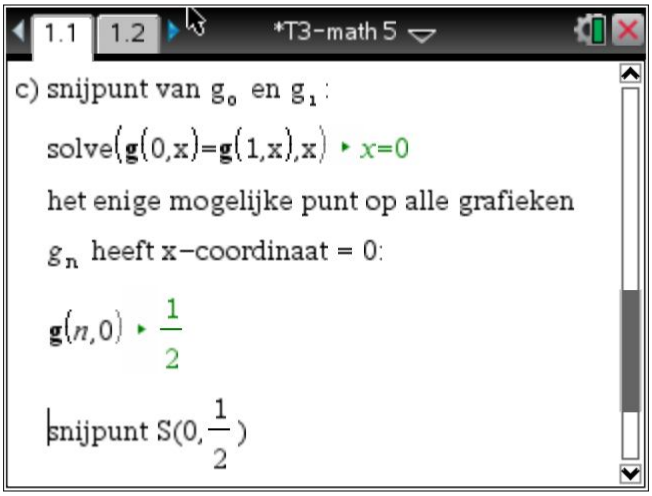
hetzelfde voor alle x.

ofwel $\mathbf{g}(0,x) = \mathbf{g}(1,-x)$ ▸ true

– zie grafiekpagina met $f_2(x) = \mathbf{g}(1,x)$

De grafieken zijn gespiegeld tov de Y–as.





1.1 1.2 *T3-math 5

c) snijpunt van g_0 en g_1:

solve$(\mathbf{g}(0,x) = \mathbf{g}(1,x), x)$ ▸ $x=0$

het enige mogelijke punt op alle grafieken

g_n heeft x–coordinaat = 0:

$\mathbf{g}(n,0)$ ▸ $\dfrac{1}{2}$

snijpunt S$(0, \dfrac{1}{2})$

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\mathbf{g}(n,x))|n>=2 \blacktriangleright 0$

$\lim\limits_{x \to \infty} (\mathbf{g}(n,x))|n>=2 \blacktriangleright \infty$

Als n>=2 dan is y=0 een horizontale asymptoot van $g_n(x)$

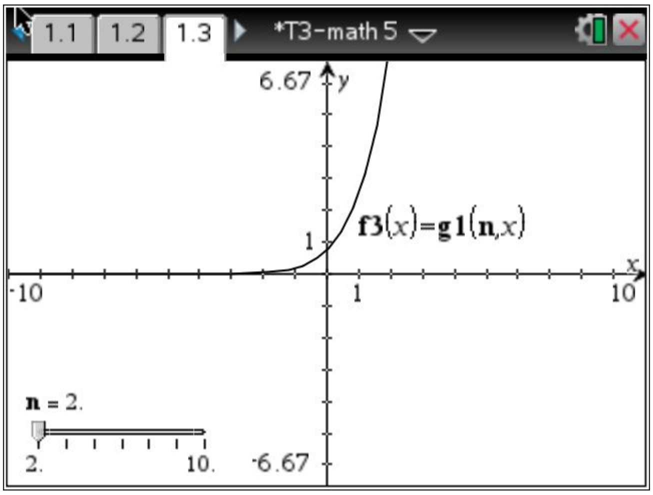
e) g1(n,x):= $\frac{d}{dx}(\mathbf{g}(n,x)) \blacktriangleright$ *Gereed*

$\mathbf{g1}(n,x) \blacktriangleright \dfrac{((n-1)\cdot \mathbf{e}^{x}+n)\cdot \mathbf{e}^{n\cdot x}}{(\mathbf{e}^{x}+1)^2}$

Als n>=2 dan is g1(n,x) >0

dus $g_n(x)$ is een stijgende functie

– tekenonderzoek van afgeleide kan ook grafisch (zie grafiekvenster)



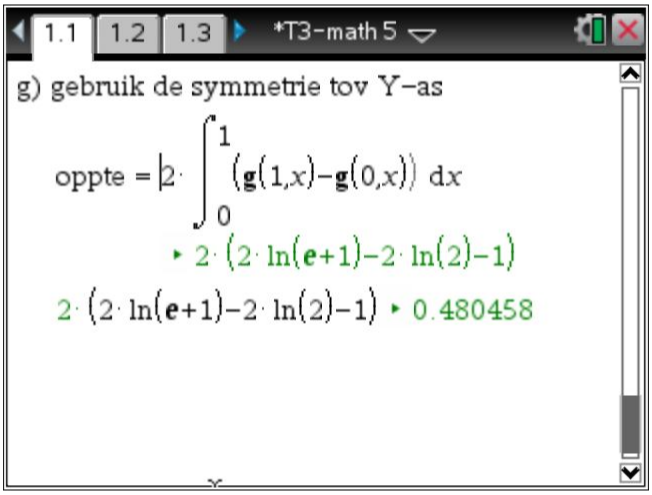
(f) vergelijking van de lijn

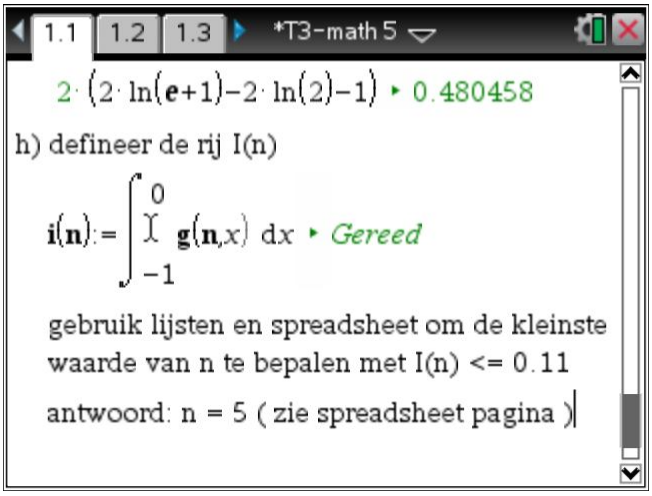
$\text{solve}(9\cdot x-4\cdot y-1=0,y) \blacktriangleright y=\dfrac{9\cdot x-1}{4}$

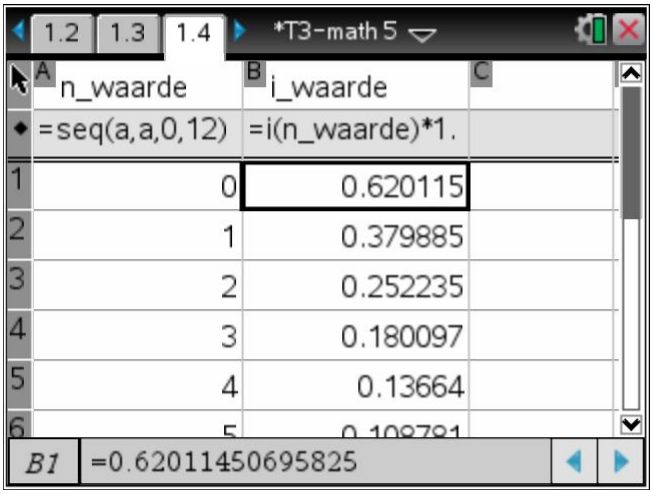
rico = $\dfrac{9}{4}$ in x = 0

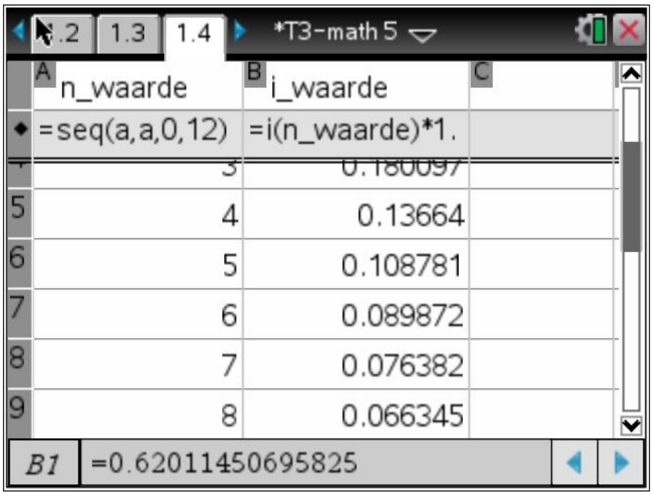
$\text{solve}\left(\mathbf{g1}(\mathbf{n},0)=\dfrac{9}{4},\mathbf{n}\right) \blacktriangleright \mathbf{n}=5$

$y=\text{tangentline}(\mathbf{g}(5,x),x,0) \blacktriangleright y=\dfrac{9\cdot x}{4}+\dfrac{1}{2}$


1.1 1.2 1.3 *T3-math 5
g) gebruik de symmetrie tov Y-as
oppte = 2· ∫₀¹ (g(1,x)−g(0,x)) dx
▸ 2·(2·ln(e+1)−2·ln(2)−1)
2·(2·ln(e+1)−2·ln(2)−1) ▸ 0.480458


1.1 1.2 1.3 *T3-math 5
2·(2·ln(e+1)−2·ln(2)−1) ▸ 0.480458
h) defineer de rij I(n)
i(n):= ∫₋₁⁰ g(n,x) dx ▸ Gereed
gebruik lijsten en spreadsheet om de kleinste
waarde van n te bepalen met I(n) <= 0.11
antwoord: n = 5 (zie spreadsheet pagina)


1.2 1.3 1.4 *T3-math 5
A n_waarde
B i_waarde
C
=seq(a,a,0,12)
=i(n_waarde)*1.
1 0 0.620115
2 1 0.379885
3 2 0.252235
4 3 0.180097
5 4 0.13664
B1 =0.62011450695825


1.3 1.4 *T3-math 5
A n_waarde
B i_waarde
C
=seq(a,a,0,12)
=i(n_waarde)*1.
5 4 0.13664
6 5 0.108781
7 6 0.089872
8 7 0.076382
9 8 0.066345
B1 =0.62011450695825

MATH5 - VRAAG B2 – MEETKUNDE

B2-MEETKUNDE

a) $\mathbf{r1}:=\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}$ en $\mathbf{r2}:=\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$

richtvectoren zijn geen veelvouden dus zijn de lijnen niet evenwijdig.

gemeenschappelijke punten ?

$\text{solve}\left(\begin{cases}2\cdot\lambda-7=3\cdot\mu-10\\3\cdot\lambda-14=2\cdot\mu-6\\\lambda=\mu\end{cases},\lambda,\mu\right) \blacktriangleright \text{false}$

bijgevolg zijn de lijnen kruisend.

b) gemeenschappelijke normaalvector

van d_1 en d_2: $\mathbf{n}:=\text{crossP}(\mathbf{r1},\mathbf{r2}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\1\\-5\end{bmatrix}$

stelsel cartesiaanse vergelijkingen:

– de lijn p is de doorsnede van het vlak α door de lijn d_1 en evenwijdig met n en het vlak β door d_2 en evenwijdig met n.

– We zoeken eerst normaalvectoren van α en β

$\mathbf{n\alpha}:=\text{crossP}(\mathbf{n},\mathbf{r1}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}16\\-11\\1\end{bmatrix}$

$\mathbf{n\beta}:=\text{crossP}(\mathbf{n},\mathbf{r2}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}11\\-16\\-1\end{bmatrix}$

– vergelijking van α en β

$\text{dotP}\left(\mathbf{n\alpha},\begin{bmatrix}x+7\\y+14\\z\end{bmatrix}\right)=0 \blacktriangleright 16\cdot x-11\cdot y+z-42=0$

$\text{dotP}\left(\mathbf{n\beta},\begin{bmatrix}x+10\\y+6\\z\end{bmatrix}\right)=0 \blacktriangleright 11\cdot x-16\cdot y-z+14=0$

– vergelijking van α en β

$$\operatorname{dotP}\left(\mathbf{n\alpha}, \begin{bmatrix} x+7 \\ y+14 \\ z \end{bmatrix}\right)=0 \quad ▸ \quad 16 \cdot x-11 \cdot y+z-42=0$$

$$\operatorname{dotP}\left(\mathbf{n\beta}, \begin{bmatrix} x+10 \\ y+6 \\ z \end{bmatrix}\right)=0 \quad ▸ \quad 11 \cdot x-16 \cdot y-z+14=0$$

dus p: $\begin{cases} 16 \cdot x-11 \cdot y+z-42=0 \\ 11 \cdot x-16 \cdot y-z+14=0 \end{cases}$

stelsel parametervergelijkingen:

– Neem 2 punten P_1 op d_1 en P_2 op d_2

$$\mathbf{p1}:=\begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda-7 \\ 3 \cdot \lambda-14 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad ▸ \quad \begin{bmatrix} 2 \cdot \lambda-7 \\ 3 \cdot \lambda-14 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{p2}:=\begin{bmatrix} 3 \cdot \mu-10 \\ 2 \cdot \mu-6 \\ \mu \end{bmatrix} \quad ▸ \quad \begin{bmatrix} 3 \cdot \mu-10 \\ 2 \cdot \mu-6 \\ \mu \end{bmatrix}$$

– de vector P_1P_2 = **p2−p1** is loodrecht op d_1 en d_2 als het scalair product = 0 is

$$\operatorname{solve}\left(\begin{cases} \operatorname{dotP}(\mathbf{p2}-\mathbf{p1},\mathbf{r1})=0 \\ \operatorname{dotP}(\mathbf{p2}-\mathbf{p1},\mathbf{r2})=0 \end{cases}, \lambda, \mu\right)$$

$$▸ \quad \lambda=\frac{161}{27} \text{ and } \mu=\frac{136}{27}$$

– punt P_1 of P_2 bepalen:

$$\mathbf{p2}|\mu=\frac{136}{27} \quad ▸ \quad \begin{bmatrix} \frac{46}{9} \\ \frac{110}{27} \\ \frac{136}{27} \end{bmatrix}$$

– gemeenschappelijke loodlijn:

$$p: \begin{cases} x=\frac{46}{9}+t \\ y=\frac{110}{27}+t \quad ;t \in \mathbb{R} \\ z=\frac{136}{27}-5t \end{cases}$$

c) Neem 2 punten A op d_1 en B op d_2

$$\mathbf{a}:=\begin{bmatrix}-7\\-14\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-7\\-14\\0\end{bmatrix} \text{ en } \mathbf{b}:=\begin{bmatrix}-10\\-6\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}-10\\-6\\0\end{bmatrix}$$

$$\text{afstand}(d_1,d_2)=\frac{|\text{dotP}(\mathbf{n},\mathbf{b}-\mathbf{a})|}{\text{norm}(\mathbf{n})} \blacktriangleright \frac{5\cdot\sqrt{3}}{9}$$

d) definieer M: $\mathbf{m}:=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$

– de lijn l is de doorsnede van het vlak θ_1 door d_1 en M en het vlak θ_2 door d_2 en M

– normaalvectoren bepalen

$$\mathbf{n\theta1}:=\text{crossP}(\mathbf{r1},\mathbf{m}-\mathbf{a}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}-16\\8\\8\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{n\theta2}:=\text{crossP}(\mathbf{r2},\mathbf{m}-\mathbf{b}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}-8\\11\\2\end{bmatrix}$$

– richtvector van l = $\text{crossP}(\mathbf{n\theta1},\mathbf{n\theta2}) \blacktriangleright \begin{bmatrix}-72\\-32\\-112\end{bmatrix}$

– parametervgln van l: $\begin{cases}x=1-72t\\ y=2-32t \text{ ; } t\in\mathbb{R}\\ z=-112t\end{cases}$

d) *alternatieve oplossing:*

de lijn MP_1 = lijn MP_2 met 2 punten P_1 op d_1 en P_2 op d_2 (zie hoger)

$$\text{solve}(\rho\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{p1})+\mathbf{m}=\sigma\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{p2})+\mathbf{m},\lambda,\mu,\rho,\sigma)$$

$\blacktriangleright$ $\lambda=\mathbf{c198}$ and $\mu=\mathbf{c197}$ and $\rho=0$ and $\sigma=0$ or $\lambda=\frac{112}{19}$ and $\mu=\frac{14}{3}$ and $\rho=\frac{19\cdot \mathbf{c196}}{24}$ and $\sigma=\mathbf{c196}$

– Punt T $\mathbf{f}:=\mathbf{p2}|\mu=\frac{14}{3} \blacktriangleright \begin{bmatrix}4\\ \frac{10}{3}\\ \frac{14}{3}\end{bmatrix}$

– lijn $MP_2=MP_1=MF$: $t\cdot(\mathbf{m}-\mathbf{f})+\mathbf{m} \blacktriangleright \begin{bmatrix}1-3\cdot t\\ 2-\frac{4\cdot t}{3}\\ \frac{-14\cdot t}{\ldots}\end{bmatrix}$

$$\frac{-14 \cdot t}{3}$$

– parametervgln van l: $\begin{cases} x=1-3t \\ y=2-\dfrac{4}{3}t \\ z=-\dfrac{14}{3}t \end{cases}$; t∈ℝ

(zelfde oplossing als met andere methode)

e) afstand van M tot de beide lijnen bepalen:

$$d(d_1, M) = \frac{\text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{r1}, \mathbf{a}-\mathbf{m}))}{\text{norm}(\mathbf{r1})} \blacktriangleright \frac{8 \cdot \sqrt{21}}{7}$$

$$d(d_2, M) = \frac{\text{norm}(\text{crossP}(\mathbf{r2}, \mathbf{b}-\mathbf{m}))}{\text{norm}(\mathbf{r2})} \blacktriangleright \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{8 \cdot \sqrt{21}}{7} = \frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2} \blacktriangleright \text{false}$$

dus geen bol mogelijk.

f) Bol met middelpunt M rakend aan d_2

$$(x-1)^2+(y-2)^2+z^2=\left(\frac{3 \cdot \sqrt{6}}{2}\right)^2$$

$$\blacktriangleright x^2-2 \cdot x+y^2-4 \cdot y+z^2+5=\frac{27}{2}$$

MATH5 - VRAAG B3 – KANSREKENING

1.4 | 2.1 | 3.1 | *T3-math 5

B3 KANSREKENING

a) gemiddelde = 60; standaarddeviatie = 5

$P(60-k \leq X \leq 60+k)=0.98$

solve(normCdf(60−k,60+k,60,5)=0.98,k=10)

▸ $k=11.6317$

98% van de eieren hebben een diameter in het interval [60−11.6317,60+11.6317]

▸ [48.3683   71.6317]

2.1 | 3.1 | 3.2 | *T3-math 5

a) *alternatieve oplossing*

mbv een spreadsheet

stapsgewijze benaderen door de stapgrootte

te wijzigen (zie spreadsheet)

$k=11.6317$

2.1 | 3.1 | 3.2 | *T3-math 5

	A k_waarde	B van	C tot	D
◆	=seq(5.+n/2	=60−k_wa	=60+k_wa	=normcdf(
1	5.	55.	65.	0.682689
2	5.5	54.5	65.5	0.728668
3	6.	54.	66.	0.769861
4	6.5	53.5	66.5	0.806399
5	7.	53.	67.	0.838487
6	7.5	52.5	67.5	0.866386

D =normcdf(**van**,**tot**,60,5)

2.1 | 3.1 | 3.2 | *T3-math 5

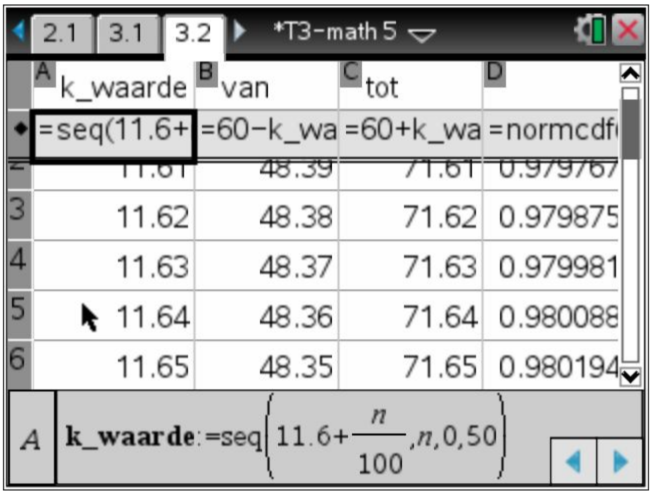
	A k_waarde	B van	C tot	D
◆	=seq(5.+n/2	=60−k_wa	=60+k_wa	=normcd
11	10.	50.	70.	0.954
12	10.5	49.5	70.5	0.96427
13	11.	49.	71.	0.97219
14	11.5	48.5	71.5	0.97855
15	12.	48.	72.	0.98360
16	12.5	47.5	72.5	0.98758

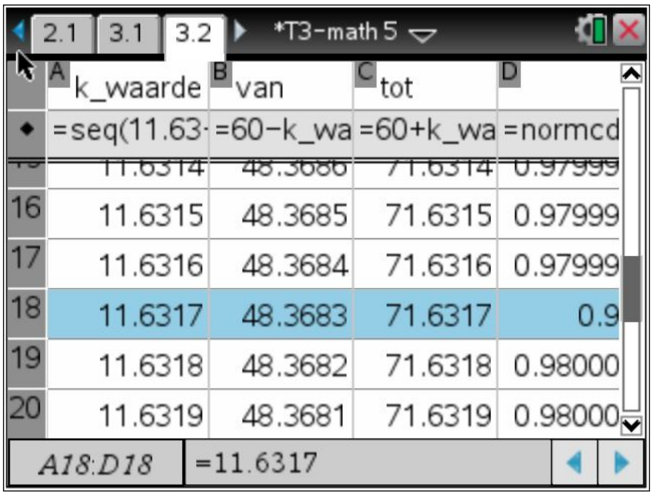
A14:D15 =11.5

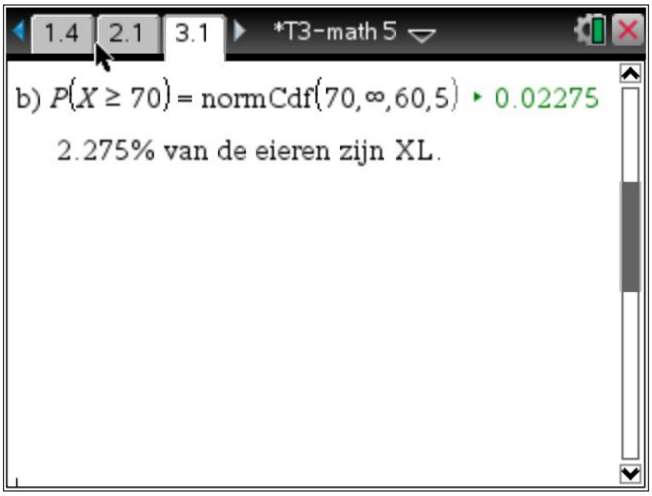
2.1 | 3.1 | 3.2 | *T3-math 5

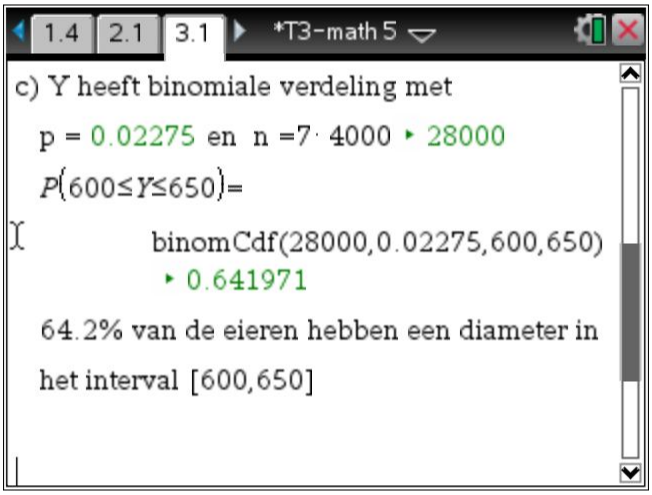
	A k_waarde	B van	C tot	D
◆	=seq(11.5+	=60−k_wa	=60+k_wa	=normcdf
2	11.55	48.45	71.55	0.979112
3	11.6	48.4	71.6	0.979659
4	11.65	48.35	71.65	0.980194
5	11.7	48.3	71.7	0.980716
6	11.75	48.25	71.75	0.981227

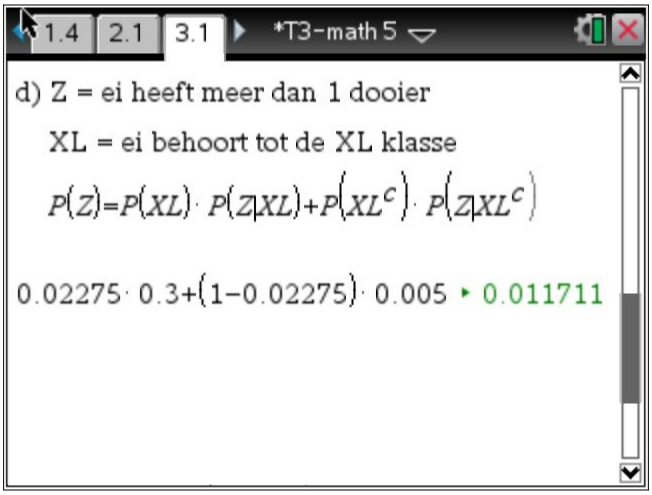
A **k_waarde**:=seq$\left(11.5+\frac{n}{20},n,0,20\right)$

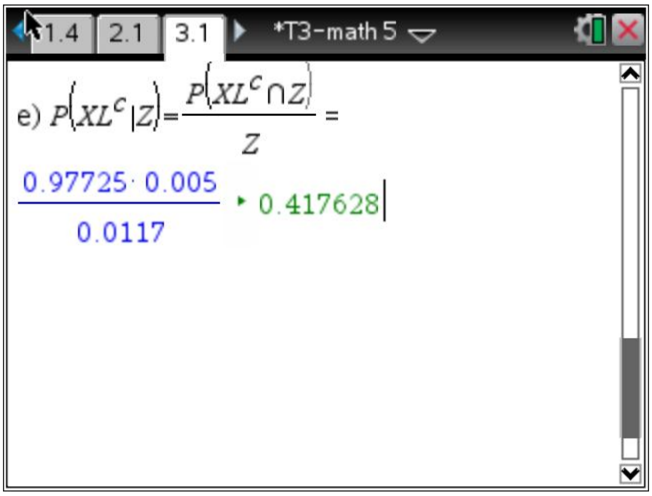

2.1 3.1 3.2 *T3-math 5
A k_waarde B van C tot D
=seq(11.6+ =60−k_wa =60+k_wa =normcdf
3 11.62 48.38 71.62 0.979875
4 11.63 48.37 71.63 0.979981
5 11.64 48.36 71.64 0.980088
6 11.65 48.35 71.65 0.980194
A k_waarde:=seq(11.6+n/100,n,0,50)


2.1 3.1 3.2 *T3-math 5
A k_waarde B van C tot D
=seq(11.63 =60−k_wa =60+k_wa =normcd
16 11.6315 48.3685 71.6315 0.97999
17 11.6316 48.3684 71.6316 0.97999
18 11.6317 48.3683 71.6317 0.9
19 11.6318 48.3682 71.6318 0.98000
20 11.6319 48.3681 71.6319 0.98000
A18:D18 =11.6317

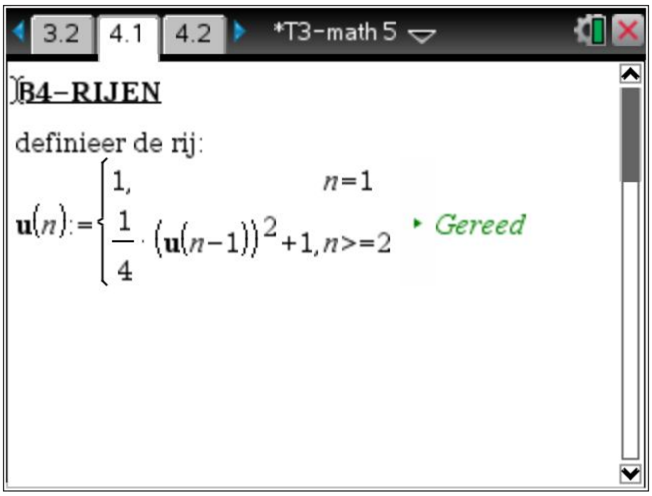

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5
b) P(X ≥ 70) = normCdf(70,∞,60,5) ▸ 0.02275
2.275% van de eieren zijn XL.

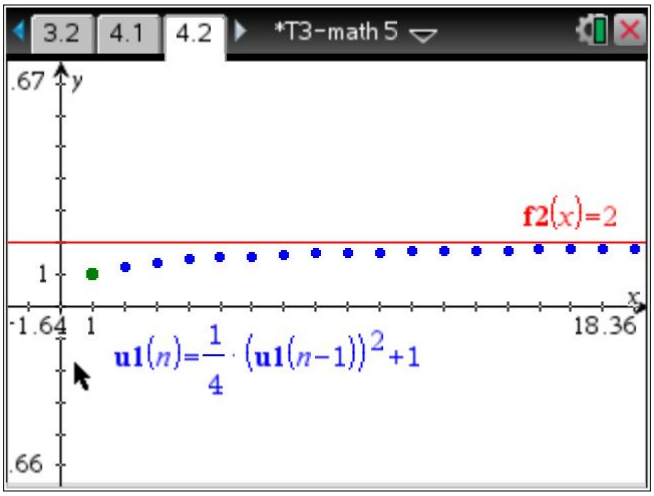

1.4 2.1 3.1 *T3-math 5
c) Y heeft binomiale verdeling met
p = 0.02275 en n =7· 4000 ▸ 28000
P(600≤Y≤650)=
binomCdf(28000,0.02275,600,650)
▸ 0.641971
64.2% van de eieren hebben een diameter in
het interval [600,650]





MATH5 - VRAAG B4 – RIJEN





a) $\mathbf{u}(2) \blacktriangleright \frac{5}{4}$

$\mathbf{u}(3) \blacktriangleright \frac{89}{64}$

$\mathbf{u}(20) \blacktriangleright 1.83977$ dus u(20)=1.8398

b) stel x=u(n−1); dan is u(n)=$\frac{1}{4}x^2+1$

u(n)−u(n−1)= $\frac{1}{4}x^2+1-x$

$\text{factor}\left(\frac{1}{4}x^2+1-x\right) \blacktriangleright \frac{(x-2)^2}{4}$

u(n)−u(n−1)>0 dus stijgende rij

en omdat u(n)<2 (gegeven) is u(n) een convergerende rij met limiet v.

Deze limiet is de oplossing van

$\text{solve}\left(v=\frac{1}{4}\cdot v^2+1,v\right) \blacktriangleright v=2$

dus: $\lim\limits_{n\to\infty}(\mathbf{u}(n))=2$

(zie ook grafiekpagina)

MATH5 - VRAAG B5 – COMPLEXE GETALLEN