T³ VLAANDEREN

www.t3vlaanderen.be

19-20 augustus 2013
KHBO Campus Oostende

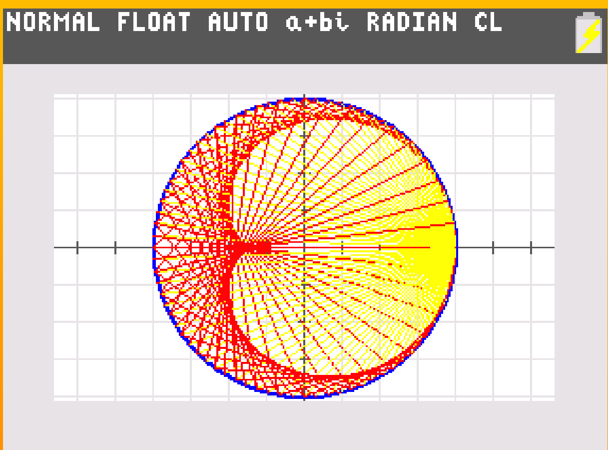
KU LEUVEN khbo KATHOLIEKE HOGESCHOOL BRUGGE - OOSTENDE

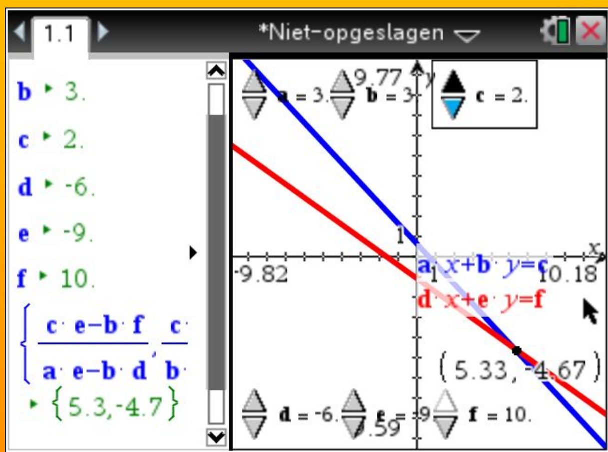
KATHO & KHBO WORDEN VANAF 09/2013: vives KATHOLIEKE HOGESCHOOL VIVES

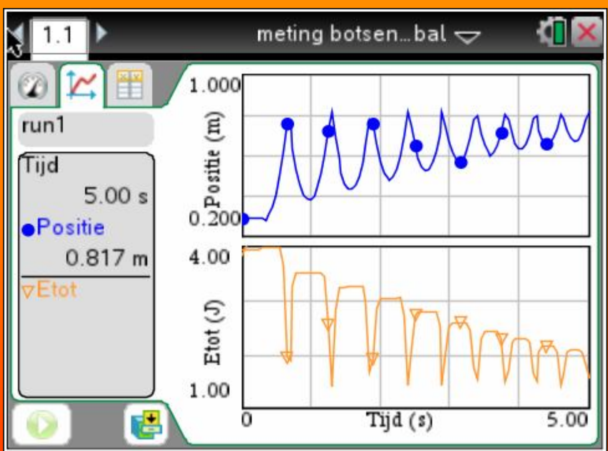
16de T³ Europe Symposium

Wiskunde en Wetenschappen ondersteunen met ICT

Numeriek, grafisch, symbolisch







TEXAS INSTRUMENTS

KU LEUVEN

16de T^{3} Europe Symposium
Oostende

19 & 20 augustus 2013

Wiskunde en wetenschappen ondersteunen met ICT
Numeriek, grafisch, symbolisch

Wetenschapsdag

20 augustus 2013

---

www.t3vlaanderen.be

T³ EUROPE

Inhoud

Tijdschema en abstracts

Plenaire lezingen 16de symposium en Wetenschapsdag

Werkgroepen

Cahiers voor de Wetenschapsdag

16de T³ Europe symposium

Programma
Maandag 19 augustus 2013

8.15 – 9.15	Ontvangst en registratie in gebouw C, conferentielokaal
9.15 – 10.30 lokaal A01	Opening Plenaire lezing door Helmut Heugl
10.45 - 12.15	Werkgroepkeuze:
lokaal B54A	10) Aan de slag met Lua – *Joline Strubbe*
D202	2) Random walks on graphs, matrices, economics and monkey business – *Hans Schneebeli*
D205	7) Mathematiseren en oplossen van problemen in de 3de graad KSO/TSO *Geert Delaleeuw*
D206	9) Inleiding tot TI-Nspire en bestandenbeheer, deel 1 – *Etienne Goemaere*
D203	11) Negatieve kwadraten: Een positieve verrassing voor leerlingen *Gert Treurniet*
12.15 – 13.45	Middagmaal & Strandwandeling of bezoek infostand. Infostand van 13.15 tot 13.45 in lokaal D201
13.45 – 15.15	Werkgroepkeuze:
lokaal B54A	1) Difference equations, a door to new mathematical applications *Helmut Heugl*
D205	5) Werken met iPad en verkennen van de TI-Nspire App – *Björn Carreyn*
D203	8) Nieuwe mogelijkheden met de TI-84 Plus Color – *Didier Deses*
D206	9) Inleiding tot TI-Nspire en bestandenbeheer, deel 2 – *Etienne Goemaere*
D202	12) Meten is Weten: datalogging en wiskunde – *Jan Vermeylen*
15.15 – 16.00 lokaal D201	Koffie & Infostand
16.00 –17.30	Werkgroepkeuze:
lokaal B54A	13) Des maths animées sur TI-Nspire: Intersection droite –parabole *Claude Warin*
D206	3) Fermi problems, computers, and first steps in modelling *Hans Schneebeli*
D205	6) Beschrijvende statistiek in de 2de graad met de TI-Nspire App *Björn Carreyn*
D202	12) Meten is Weten: datalogging en wiskunde – *Jan Vermeylen*
D203	11) Negatieve kwadraten: Een positieve verrassing voor leerlingen *Gert Treurniet*
17.30-18.30	Receptie T³ Vlaanderen in gebouw A, eetzaal
18.30	Avondmaal

16de T³ Europe symposium

Programma
Dinsdag 20 augustus 2013

08.45 - 10.15	Werkgroepkeuze:
lokaal B54A	1) Difference equations, a door to new mathematical applications *Helmut Heugl*
D202	4) Getalmysteries met de TI-84 Plus – *Philip Bogaert*
D205	5) Werken met iPad en verkennen van de TI-Nspire App – *Björn Carreyn*
D203	8) Nieuwe mogelijkheden met de TI-84 Plus Color – *Didier Deses*
10.15 - 10.45 lokaal D201	Koffie & Infostand
10.45 - 12.00	Plenaire lezing door Hans Schneebeli
12.00 – 13.30	Middagmaal & Strandwandeling of bezoek infostand. Infostand van 13.00 tot 13.30 in lokaal D201
13.30 – 15.00	Werkgroepen – maak een keuze uit:
lokaal B54A	14) Des maths animées sur TI-Nspire: les dérivées et quelques applications – *Claude Warin*
D202	4) Getalmysteries met de TI-84 Plus – *Philip Bogaert*
D205	6) Beschrijvende statistiek in de 2de graad met de TI-Nspire App *Björn Carreyn*
D206	7) Mathematiseren en oplossen van problemen in de 3de graad KSO/TSO *Geert Delaleeuw*
15.00 – 15.45 lokaal D201	Koffie & Infostand
15.45 – 16.00 lokaal A01	Evaluatie en Sluiting

Wetenschapsdag 20 augustus 2013

Programma

8.30 – 9.15	Ontvangst en registratie in gebouw C, conferentielokaal
9.15 – 10.15 lokaal A01	Plenaire lezing door Ian Galloway
10.15 - 10.45 lokaal D201	Koffie & Infostand
10.45 – 12.15 lokaal B406	Werkgroep: introductie tot het verzamelen van data met sensoren
12.15 – 13.30	Middagmaal & Strandwandeling
13.30 – 15.00 lokaal B406	Werkgroep: uitvoeren van experimenten chemie, biologie en fysica met sensoren (deel 1)
15.00 – 15.30 lokaal D201	Koffie & Infostand
15.30-16.30 lokaal B406	Werkgroep: uitvoeren van experimenten chemie, biologie en fysica met sensoren (deel 2)
16.30 – 16.45 lokaal A01	Evaluatie en Sluiting

Abstracts 16de T^3 Europe Symposium
Maandag 19 en dinsdag 20 augustus 2013
KHBO Campus Oostende
www.t3vlaanderen.be

Plenaire lezingen 16de symposium en Wetenschapsdag

Growth processes described and solved by technology - an example of a sustainable learning spiral (Helmut Heugl)

The first part of the lecture deals with the two questions:

- What is the goal of mathematics education? What quality of long term competences should the learners acquire for their future life, for their jobs or their studies?
- How can technology support sustainability?

The second part tries to give a possible answer: Realizing the „spiral principle“, **a course "exponential growth"** starts in the 7th grade by exploring first fundamental rules of exponential functions using only numerical calculators. The next and central step of this lecture is the use of **difference equations** for technology supported problem solving. The last step dealing with mathematical aspects of difference equations shows the necessity of knowledge in algebra and analysis.

Is the Calculus a Must in General Education? (Hans Schneebeli)

The use of technology in the teaching of Analysis is combined with a genetic approach. This includes the history of ideas, key problems and their solution, and the use of tools. Notions and concepts are introduced and motivated in their historical context. The idea behind this approach is that the collective learning process of humanity is imitated by each individual learner - with many abbreviations.
In this text the term `Analysis' will be distinguished from `the Calculus' for the sake of clarity and ease of communication. This distinction contrasts somewhat with the fact that both terms are often used with less care.
The CALCULUS, an extension of algebra, is essentially *syntax* and works with *finite methods* only. ANALYSIS shows how to cope with some aspects of the *infinite*. The *continuum of the real numbers* is the ground on which Analysis grows. Analysis forms a *semantic framework* necessary to make sense of the Calculus. The Calculus may fruitfully be applied only in the context of notions, concepts, and theorems provided by Analysis. Teaching Analysis is a challenge compared to instructing the rules of the Calculus.
All the fundamental IDEAS of elementary Analysis emerged (in the European context) sometimes between the Hellenistic period and 1700, except a clear concept for real numbers. We trace a few central ideas back and give them a face by telling the history - or maybe stories only - of eminent scientists, engineers, lawyers, diplomats, philosophers, and more, who contributed to the evolution of the subject by their ideas, mostly brilliant or sometimes mistaken. At the end of the saga, the students will have been confronted with the main basic notions of Analysis, with preliminary ideas, definitions, results but - most importantly - with *insight and motivation* for understanding the tools of Analysis. Two essential procedures

suffice in the context of pre-university teaching:

- *Discretisation* replaces an infinite number of operations by a finite one at the cost of some *errors*. Instead of the original problem, a discrete replacement is solved by finite methods.

- *Idealisation* aims at purging the discretisation errors. This involves passing from the finite to the infinite and deals with some *limits* in order to overcome the discretisation errors - if possible. Elementary Analysis arranges for this possibility to be given routinely by assuming enough `smoothness'. Other cases exist but they were discovered only in the 19th century and are not considered of preeminent importance in a first encounter with the subject.

Technology is used throughout the course in an essential way. It permits to cope with historical examples that were key in the genesis of Analysis. We make no effort to follow historical terminology but rather introduce modern concepts, notation and parlance. We make extensive use of scaffolding and the blackbox - whitebox principle to prepare the ground for teaching Calculus based on important bits of Analysis.

Without Data there is no Science (Ian Galloway)

Science is an empirical subject. Its entire philosophical edifice is founded on interpreting experimental evidence in order to explain a physical process or justify a hypothesis. Since experimental evidence implies the existence of data it does not seem inappropriate to say that without data there is no science. One can go further and argue that data must consist of measured quantities using units which can be replicated by other experimenters. Observations are not enough. For example it is no use measuring a light spectrum by describing the colours as this is purely subjective. Newton famously invented the colour indigo so that there were seven named colours in the spectrum. What is needed is a measure of the colour, its wavelength. Measurements are needed so that we can apply mathematics to their analysis. Data are numbers with units. Historically Aristotle is noted for not experimenting which probably explains why science did not advance under his tutelage. Archimedes is considered the father of science and his era was not recaptured until the middle ages and the renaissance. Very few human activities take place today without them being based on data collection: cooking, agriculture, textile work, engineering, policing, sport, construction to name a few. It is inconceivable today that we would engage with any activity except politics without collecting data, and look where that has got us. It is worth pointing out that although there may be no science without data it is perfectly reasonable to have science without hypothesis. Again Newton set the stage here by declaring famously when asked to explain his Law of Gravity, “Hypotheses non fingo”.

> I have not as yet been able to discover the reason for these properties of gravity from phenomena, and I do not feign hypotheses. For whatever is not deduced from the phenomena must be called a hypothesis; and hypotheses, whether metaphysical or physical, or based on occult qualities, or mechanical, have no place in experimental philosophy. In this philosophy particular propositions are inferred from the phenomena, and afterwards rendered general by induction.
>
> Isaac Newton, second edition *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1713.

Werkgroepen

1 Difference equations, a door to new mathematical applications (Helmut Heugl)

Recursive models by using difference equations allow to solve problems starting in the 7th grade which before could only be solved by complex differential equations or other complex methods.
Because operating and visualizing is transferred to the tool students can concentrate on modeling, interpreting and arguing.
Participants of the workshop will use difference equations for solving growth processes like exponential growth, logistic growth, interacting populations a.s.o.
No special tool competence is necessary.

2 Random walks on graphs, matrices, economics and monkey business (Hans Schneebeli)

The final goal of this workshop is to give some insight into the workings of modern algorithms involved in social ranking. The basic ingredient is a bijective correspondence associating directed and weighted graphs to matrices, and vice versa.
The use of a scientific calculator is essential here. We use scaffolding and the black-box - white-box principle and hence take advantage of data types like matrices, and built-in standard algorithms for dealing with eigenvalue - eigenvector problems.
My aim in this workshop is to sketch a path into advanced applications of linear algebra not yet well rooted in pre-university teaching. My claim that the use of appropriate technology is essential will be discussed and we'll see that the technology of up-to-date calculators offers useful pedagogical tools. However it has to be combined with appropriate concepts in teaching - like scaffolding - in order to open new avenues towards relevant and attractive applications, provide motivation and leave much to be done to the universities offering traditional courses in linear algebra.
This workshop illustrates the close connection between graph theory and matrix algebra, and how to unravel the social ranking in a group of monkeys. This involves some detours through stochastic matrices and random walks on graphs, Markov chains, and closed economies as models for the monkey business which generates social rankings.
The mathematical hot spots are fixed points in affine mappings and a theorem of Perron and Frobenius on nonnegative matrices.

3 Fermi problems, computers, and first steps in modelling (Hans Schneebeli)

Enrico Fermi was known to be able to answer difficult questions by applying seemingly trivial mental arithmetic. This biased view shadows his most brilliant capacity of dealing with difficult questions by finding some key idea that opens the mind to focus on the essential aspects of the problem.
The Workshop aims at presenting some samples where educated guessing works and moreover can be fruitfully cultivated in a pedagogical setting. While dealing with youngsters of today, we favor small scale technology for computation but we focus on analysing and identifying the dominant features in the problems under discussion.
Not all problems yield to Fermi's method. Violent dynamics or even chaotic behaviour have to be avoided. Situations close to equilibrium tend to be ruled by some fundamental

principle and might be amenable to educated guessing. Many aspects of current research share some characteristics with Fermi Problems: Coarse information or lacking data or incomplete theoretical framing. This analogy might hint at the pedagogical virtues of educated guessing, and it is an excellent coincidence for our argument that skill in mental arithmetic may be relaxed in the century of ubiquitous computing while deep thinking and thorough analysis remain essential. Our education is open to consider calculators as valuable tools.
Some sample questions:

- How many dentists are there working in Belgium?
- How much energy is arriving from the sun on earth per second?
- By how much does the level of the oceans rise if the temperature of the waters increases by 1°C throughout?
- How much energy does such an increase absorb?
- How much energy is released by the falling rain in a thunderstorm?
- How much kinetic energy is stored in the global wind systems?

4 Getalmysteries met de TI-84 Plus (Philip Bogaert)

Getaltheorie, de studie van de gehele getallen, is één van de oudste takken van de wiskunde. Rekeningnummers, barcodes, serienummers van bankbiljetten en cryptografie zijn maar een paar van de talrijke dagdagelijkse toepassingen waarbij men gebruik maakt van eigenschappen uit de getallenleer. Anderzijds bevat de getaltheorie nog een schat van onopgeloste problemen. Hierbij denken we onder andere aan het vermoeden van Goldbach en de Riemann hypothese. Priemgetallen, de atomen van de getallenleer, bevatten nog heel wat onopgeloste mysteries.
De werktekst van deze workshop is een mogelijk onderwerp dat men kan gebruiken tijdens de uren “vrije ruimte” wiskunde in de derde graad.

5 Werken met iPad en verkennen van de App TI-Nspire CAS (Björn Carreyn)

Je leert de basishandelingen om een iPad te gebruiken, je maakt kennis met de verschillende mogelijkheden van iPad en we verkennen de TI-Nspire app.
Deze sessie is noodzakelijk om de volgende sessie te volgen.

6 Beschrijvende statistiek in de tweede graad met de TI-Nspire App (Björn Carreyn)

Beschrijvende statistiek maakt deel uit van de verplichte leerplandoelstellingen in de tweede graad (aso, tso, kso). Leerlingen worden in hun leefwereld regelmatig geconfronteerd met verschillende soorten gegevens, interpretatie van die gegevens en grafische voorstellingen… Met behulp van ICT kunnen leerlingen gegevens ordenen, groeperen, overzichtelijk voorstellen en interpreteren. Het hoofdaccent van beschrijvende statistiek ligt immers bij het interpreteren van gegeven voorstellingen en informatie. In de sessie worden een aantal praktijkvoorbeelden van beschrijvende statistiek stap voor stap behandeld. Je krijgt zelf de kans om mee te doen.

7 Mathematiseren en oplossen van problemen in de 3de graad KSO/TSO (Geert Delaleeuw)

‘Mathematiseren en oplossen van problemen’ maakt deel uit van de verplichte leerplandoelstellingen in de derde graad kso/tso. Uiteraard komen er in elk leerstofonderdeel wiskunde veel vraagstukken of problemen aan bod, maar deze volstaan niet om dit onderwerp te realiseren. De bedoeling is de leerlingen te confronteren met problemen die voor hen niet meteen een routineoefening betekenen, maar wel een analyse (exploratie) vereisen. Het verwerken van allerlei problemen met behulp van wiskunde kan zo bij de leerlingen opvattingen en houdingen ontwikkelen over wiskunde. Zo kunnen ze zich realiseren dat wiskunde meer is dan een stel regels, maar effectief kan ingezet worden om problemen uit het dagelijkse leven op te lossen of tenminste om er inzicht in te verwerven.

Inspirerende opdrachten voor de lessen ‘mathematiseren en oplossen van problemen’ komen aan bod. Hierbij gaat de aandacht zowel naar studierichtingen met weinig uren wiskunde als naar studierichtingen met een sterke(re) wiskundige component.
De aangeboden opdrachten zijn problemen waarbij de leerlingen bewust gebruik leren maken van mogelijke oplossingsstrategieën (heuristieken) en waarbij ze de verschillende fasen van het oplossingsproces duidelijk leren expliciteren.

Waar de gelegenheid zich voordoet, maken we functioneel gebruik van de grafische rekenmachine. Verder besteden we aandacht aan de opbouw van een leerlijn van het eerste tot het zesde jaar secundair en geven we concrete tips betreffende werkvormen en evaluatie.

8 Nieuwe mogelijkheden met de TI-84 Plus Color (Didier Deses)

We bekijken de mogelijkheden van de nieuwe TI-84 Plus Color. Naast de enkele veranderingen in de menu's en opties wordt vooral aandacht besteed aan het gebruik van het nieuwe kleurenscherm. Hiertoe worden enkele klassieke oefeningen beschouwd, alsook een voorbeeld uit de optica. Dit zal het aangrijpingspunt zijn om enkele zeer eenvoudige programma's te schrijven. Deze zullen voluit gebruik maken van het nieuwe kleurenscherm. We leggen een link naar de kunstwereld, hetgeen tenslotte leidt naar een knutseloefening voor leerlingen.

9 Inleiding tot TI-Nspire en bestandenbeheer, deel 1 en deel 2 (Etienne Goemaere)

Deze twee opeenvolgende werksessies zijn vooral bedoeld om de absolute leek kennis te laten maken met een paar facetten van TI-Nspire.
Je leert werken met de handheld TI-Nspire CX CAS.
Een van de grootste vernieuwingen die de komst van TI-Nspire inluidde, was ontegensprekelijk de mogelijkheid om documenten op te slaan.
Kennismaken met TI-Nspire is dan ook meer dan kennismaken met een rekentoestel of een wiskundesoftwarepakket.
Via concrete voorbeelden verkennen we stap per stap enkele toepassingen waaruit een document is opgebouwd: Rekenmachine – Grafieken - Meetkunde - Lijsten & Spreadsheet - Gegevensverwerking & Statistiek – Notities - Vernier DataQuest – Vraagtoepassing.

Bestanden aanmaken op de handheld, de computer of Ipad en uitwisselen van deze tussen de verschillende dragers verdient dan ook eens van naderbij bekeken te worden.
Ook verdiepen we ons wat meer in de specifieke structuur van de TI-Nspire documenten: pagina – opgave – document.

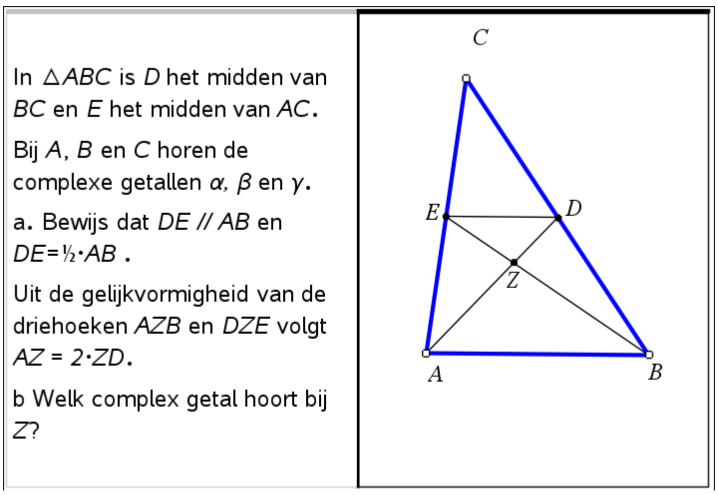
10 Aan de slag met Lua (Joline Strubbe)

LUA is een krachtige programmeertaal die reeds in veel domeinen zijn nut bewezen heeft. Ook in TI-Nspire kan LUA worden gebruikt. Tijdens deze werkgroep word je ingewijd in de eerste stappen van de wondere LUA-wereld in TI-Nspire. Enkele toepassingsgebieden van deze programmeertaal worden geïllustreerd. Hopelijk zal dit je stimuleren om LUA verder te bestuderen, om gepersonaliseerde scripts te schrijven en eigen programma's te ontwerpen die in TI-Nspire kunnen draaien.

11 Negatieve kwadraten: Een positieve verrassing voor leerlingen (Gert Treurniet)

Dit is een beginnerscursus over complexe getallen met activiteiten die de deelnemers zelf uitvoeren (en ook in de klas kunnen laten doen). Een afsluiting met een paar voorbeelden van bewijzen in de meetkunde.

Complexe getallen lijken, op de naam afgaand, ingewikkeld. Complex betekent echter samengesteld. De introductie van de complexe getallen kan worden beschouwd als een logische voortzetting van de introductie van de positieve en negatieve getallen, de breuken en de reële getallen. De complexe getallen vormen een uitbreiding van de verzameling reële getallen.
Voor beginners in de complexe getallen zal opvallen dat de rekenregels opnieuw moet worden doordacht. Dat is niet alleen opvallend, maar ook leerzaam, omdat we weer even ervaren hoe lastig het is om bestaande denkpatronen opnieuw tegen het licht te houden. Onze leerlingen moeten dat elke dag doen.
Complexe getallen 'passen' niet meer op de getallenlijn. Dus de getallenlijn moet ook worden uitgebreid. En dan komen er meetkundige figuren tevoorschijn. Als we nog een stapje verder gaan, blijkt dat we met complexe getallen meetkundige constructies kunnen bewijzen. En dat dat soms heel erg simpel is.



12 Meten is Weten: datalogging en wiskunde (Jan Vermeylen)

"Meten is weten" is een adagium dat zeker in de wetenschappen van belang is, maar ook in de wiskunde kunnen eenvoudige proefondervindelijke metingen van fysische grootheden een waardevolle instap of illustratie betekenen voor belangrijke concepten uit de functieleer en de analyse. In deze sessie wordt datalogging uitgevoerd met de grafische rekenmachine TI-84+ en de TI-Nspire technologie om begrippen als afgeleiden, integralen en regressieanalyse te illustreren.

13 Trucs et astuces pour créer des maths animées sur TI-Nspire. Comment utiliser l'éditeur et les curseurs pour calculer l'intersection entre 2 droites et l'intersection entre une droite et une parabole. Niveau 3ième et 4ième (Claude Warin)

14 Trucs et astuces pour créer des maths animées sur TI-Nspire. Comment utiliser l'éditeur et les curseurs:une introduction sur les dérivées et quelques applications. Niveau 5ième et 6ième(Claude Warin)

L'utilisation de TI-Nspire (Texas Instruments) et d'ActivInspire (Promethean) permet aujourd'hui de réaliser des films favorisant l'apprentissage et la vulgarisation des mathématiques. Vous trouverez sur Internet une page Facebook (Mathématiques Animées) et sur Youtube (Claude Warin) quelques vidéos que j'ai réalisées.
Lors de la conférence, je vous apprendrai, quelques trucs et astuces permettant la réalisations de telles applications.
L'utilisation de l'éditeur de notes, des curseurs , des attributs conditionnels (couleur et existence) et la récupération des résultats dans des variables intermédiaires permet la réalisation de fichier performants permettant de faire des mathématiques en direct en classe.
Je peux maintenant concevoir sur ordinateur un exercice type et le répéter à volonté en faisant varier des paramètres dans l'énoncé avec une adaptation instantanée des résultats.
Ces fichiers peuvent être utilisé sur un ordinateur portable, transféré sur la machine à calculer TI-Nspire Cas ou sur un Ipad ou encore utilisé sur un rétroprojecteur ou un tableau interactif.
Cela s'avère particulièrement intéressant pour faire des maths de manière dynamique, en direct, en classe.

Lors du premier atelier (13) , je m'intéresserai, de manière dynamique, aux différentes positions et intersections de droites et de paraboles et si on a le temps à quelques applications de celles-ci: tangentes issues d'un point extérieur à une parabole ou tangente à une parabole de direction donnée.

Lors du second atelier (14), je m'intéresserai, de manière dynamique, à une approche de la dérivée comme limite de sécantes. J'appliquerai ensuite, si on a le temps, les fonctions et les dérivées à leur interprétation en termes d'espace parcouru de vitesse et d'accélération.

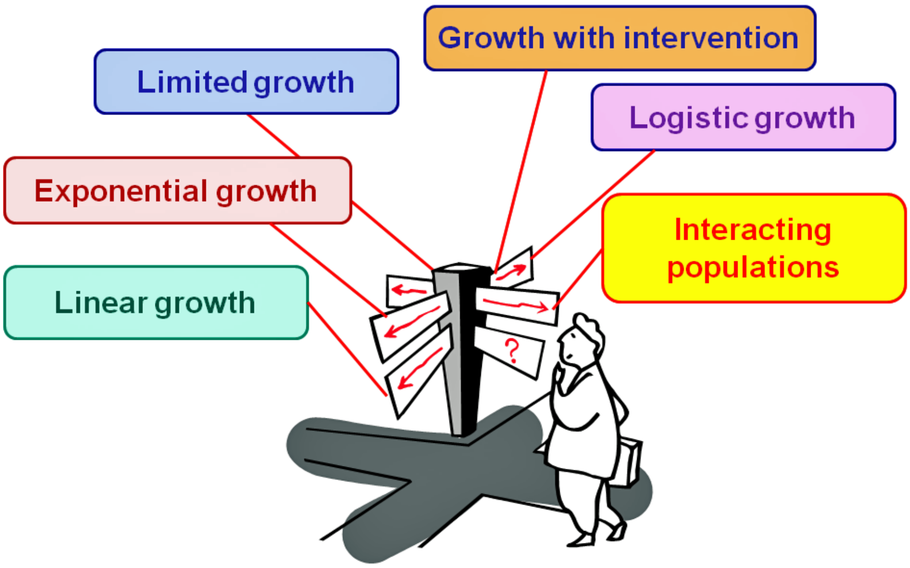
16^{de} T^3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Growth processes described and solved by technology

an example of a sustainable learning spiral

Helmut Heugl



Dr. Helmut Heugl

Growth processes described and solved by technology

- an example of a sustainable learning spiral

Abstract:

The first part *of the lecture deals with the two questions:*

- *What is the goal of mathematics education? What quality of long term competences should the learners acquire for their future life, for their jobs or their studies?*
- *How can technology support sustainability?*

The second part *tries to give a possible answer: Realizing the „spiral principle“,* ***a course "exponential growth"*** *starts in the 7th grade by exploring first fundamental rules of exponential functions using only numerical calculators. The next and central step of this lecture is the use of* ***difference equations*** *for technology supported problem solving. The last step dealing with mathematical aspects of difference equations shows the necessity of knowledge in algebra and analysis.*

1. The expectation of society and the contribution of mathematics education to a higher education

1.1 Sustainability?

The term "sustainability" - a fashionable word of our times, is used in so many fields like ecology, economy, environment, climate a.s.o. But the more such a concept is used in several fields the less it expresses. Suitable to this topic my definition is:

Sustainability of an educational system can be recognized on long-term effects which are caused by a learning or a developing process

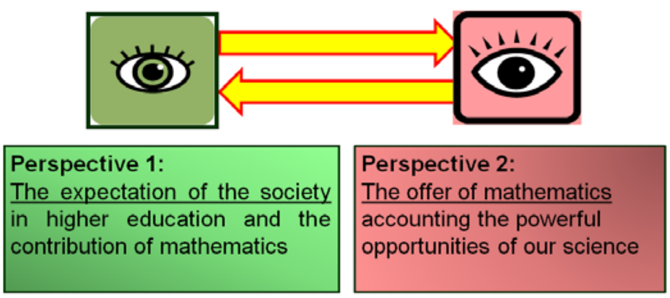
4 fields of long term effects can be distinguished:

- Sustainable learning strategies
- Sustainable learning results
- Sustainable attitudes and values
- General available thinking technology

According to the learning results and learning strategies a weakness of our educational system, mainly caused by assessment strategies, is that students are gaining short term competence for the next exam situation which is forgotten shortly afterwards and has no continual effects.

1.2 The main task of higher general education and the contribution of mathematics

Discussing this question two perspectives are conceivable:



Mathematicians normally use perspective 2 trying to show the many possibilities which mathematics offers and based on these options they justify the necessity of their subject. But we have also to consider the needs of a human being in our society.

When we started planning a new final central exam in Austria, at first we formulated our position of an educational theory [IDM, 2009]: My position was different to Roland Fischer's position, who published several articles dealing with the topic “mathematics and society [Fischer, 2003, S.559-566].

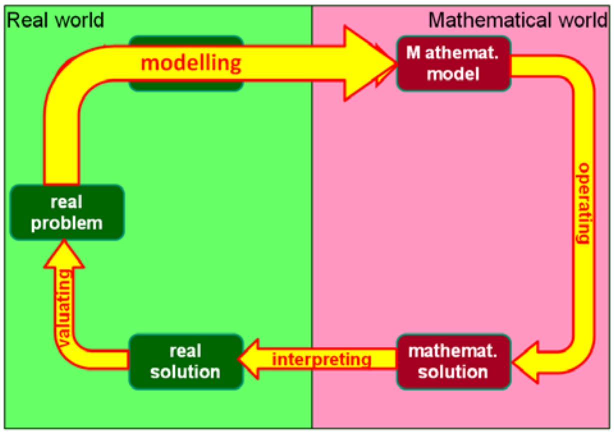
Fischers Thesis: *The main task of higher general education is to lead the human beings to the ability of a better communication with experts and the general public.*	My addition: *...as important is to enable human beings to become experts themselves.*

In due consideration of both positions we could try to define **the contribution of mathematics education**:

> *While the focus of primary and secondary I education is the general living environment, in higher general education learners should experience mathematics as a special path towards worldly wisdom, as **spectacles for recognizing and modeling the world around them**. That requires the acquisition of **the thinking technology which is significant for doing mathematics** and which is the base of a general problem solving competence.*

Suitable to this theoretical educational orientation is my favourite **definition of mathematics** which originates from Bruno Buchberger:

Mathematics is the science of problem solving by reasoning



Characteristic phases of the problem solving cycle are:

- Modelling
- Operating
- Interpreting
- Arguing

Reasoning and valuating accompanies the whole process

1.3 The contribution of technology

The emphasis of this conference and especially of this lecture is to discuss **the contribution of technology** to the mission of mathematics as a part of higher education:

Some mathematics becomes more important –
because technology requires it
Some mathematics becomes less important –
because technology replaces it
Some mathematics becomes possible –
because technology allows it
Bert Waits

The progress of humanity is documented by her tools. Tools, on the one hand, are results of recognition and on the other hand new recognition is not possible without tools. [Claus, 1990, p 43]

In the middle Ages there existed an honorable guild, the guild of “calculating masters”. They died out when people became able to calculate themselves. The math teachers will also die out if they are only “calculating masters”.

On these grounds I am not happy if our mathematical tools are named “calculators”. Machines like TI Nspire are learning environments or learning platforms where several tools are working under a common user interface. Only the cross-linked use of these tools cause a new quality of thinking and learning.

Following characters of a mathematical tool can be classified:

A tool for modelling

Technology offers an extensive quantity of models, even those which were not available before like recursive models. Also complex models for realistic applications can now be used because the more difficult calculations can be transferred to the machine.

Technology allows the development of modules which can be used on the one hand as didactic tools to support the learning process and on the other hand as models for problem solving.

The modules offered by the tool and the modules produced by the students can be seen as language elements of the mathematical language. The central activity of modelling is the translation process from a problem formulated in the colloquial language into a mathematical model written in the language of mathematics.

A tool for visualizing

A special quality of mathematics is the possibility of graphic representation of abstract facts. Apart from free hand drawings, it is difficult to develop graphs without using a computer. Without technology a main activity was to shuttle between several representation modes of a function (e.g. given the equation - look for the graph). The graphic representation of a function is now available directly and parallel to other representations like terms or tables. Using the options of the graphic window allows the students to solve problems graphically, to interpret several characteristics of a function and to investigate the influence of parameters e.g. by using slider bars.

A tool for experimenting

The students look for assumptions by systematic trial. An assumed model is tested, accepted as usable, improved or discarded. Testing means checking whether the model fulfils the given requirements and whether it is applicable for larger given requirements. Technology offers a lot of testing strategies which can be used by the students without achieving the necessary calculations.

Interpreting of mathematical results concerning the mathematical correctness and the suitability for the applied problem often implies experimenting with concrete values and several parameters.

A tool for calculating

At first we should define what calculation competence implies:

Calculation competence is the ability of a human being to apply a given calculus in a concrete situation purposefully [Hischer, 1995].

This definition shows that calculation competence does not only mean to execute a certain operation “by hand”. Most important for us is the distinction between the two goals “performing an operation” (to some extent this can be delegated to a calculator) and “choosing a strategy” (this cannot be done by the calculator.). Calculation competence by using technology leads to a shift from doing to planning and increases the necessity of competences like the competence of recognizing structures.

1.4 Didactical contributions to more sustainable results

Two didactical principles are guidelines of the following learning sequence dealing with exponential growth:

- The Genetic Principle and
- The Spiral Principle

The Genetic principle

In literature you will find various interpretations of the genetic method. I will use the interpretation of E. Wittman [Wittmann, 1981, p 59 und p 130ff]. Another foundation is Piagets' thesis that development of knowledge follows the same mechanism in the individual as well as the development in the respective science.

Characteristics of the genetic principle

(1) Starting the learning process with problems coming from the experience of the learners

(2) Showing that the single problem is part of a larger, holistic context inside or outside of mathematics.

(3) Permitting a not so exact approach at the beginning based on the mathematical experience of the learner.

(4) Shift of the standpoint; leading to more strict considerations including further aspects. Showing the learners that exactifying is necessary to open up new fields of application, showing them that higher mathematics is so complex because reality is so complex.

(5) Making transparent the continual structure of the learning field. Learners should recognize the connection of the single steps of the learning process and the logic of the sequence.

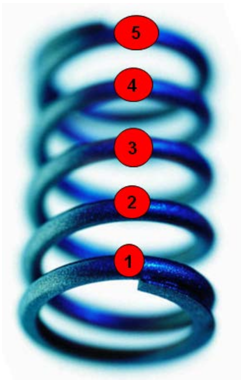
The Spiral Principle

formulated by J. Bruner 1967

Characteristics of the spiral method

The same subject is treated at different dates with varying levels

- The single steps must not be isolated from each other
- The shift of the standpoint must be transparent, the profit must be recognizable
- Earlier steps must not impede further expansion



2. Exponential growth – a realization of the spiral

[Kirsch, 1976]

Growth and decay processes or in general dynamic processes, changing in space and time are of great importance for many applications. Functions which describe them especially the exponential and logarithmic function are, beside the linear functions, belonging to the most important sorts of functions.

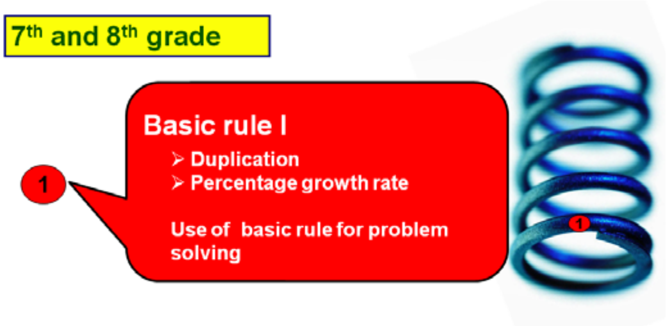
This chapter is a proposal for a progression of a technology supported learning process which is starting in the 7^{th} grade and ending at the interface school/university in the 12^{th} grade. Guidelines are the genetic and the spiral principle which support long-term effects and therefore support sustainability.

Corresponding to these didactical principles learning proceeds in certain steps or phases. It is essential that the learners should recognize the change of the standpoint, new aspects and new basic rules should be developed based on previous phases.

A central idea of this proposal is to start the learning process in secondary level I with verbal formulated attributes of the exponential growth. The use of technology allows the early application of recursive models and opens a wide range of applications also in the 7th and 8th grade.

Part 1: Growth processes in secondary level 1

Step 1 : Duplication and percentage growth rate



In this phase the only **growth factor** which the learners use **is 2**

Sustainable goals of the phase are:

- Acquiring fundamental attributes of the exponential function
- Reflecting upon the progression of exponential processes by investigating tables
- Solving problems by using tables

Step 1.1: Duplication

From several prototypes of the exponential function only two are used:

- The "word-formula" – the verbal formulation of fundamental attributes
- Tables with respect to the time

Utilities:

- No technology

Example 1: The area needed by a water plant doubles every day. On the first day the plant needs 1 dm^2

- After how many days is half of a 1 ha squared lake filled?
- After how many days is the lake fully covered?

Growth of a plant

Day	Area in dm²
1.	1
2.	2
3.	4
4.	8
5.	16
6.	32
7.	64
8.	128
9.	256
10.	512
11.	1024
....	????

Growth of a plant

Day	Area in dm²
1.	1
2.	2
3.	4
4.	8
5.	16
6.	32
7.	64
8.	128
9.	256
10.	512
11.	1024
....	????

By reflecting upon the growth process and investigating rules in the table students discover basic rules of exponential functions which open the door to many applications:

Basic rule I:
The same time period belongs to the same growth factor

This "basic rule I" is the "word formula" of the first difference equation

$$N_{new} = q \cdot N_{old}$$

Step 1.2 Percentage growth rate

From several **prototypes (representations) of the exponential function** the following are used:

- The “word-formula” – the verbal formulation of fundamental attributes
- Tables with respect to the time
- Recursive models
- Graphs

Utilities:

- At the beginning the single steps of the growth process should be calculated step by step with a numeric calculator.
- The next step the use of tools with spreadsheets or with a sequence mode which allows using difference equations. The two activities are: *Modeling* by using the basic rules of exponential growth and *reflecting* about the characteristics of the process by watching the graph or a table . Calculating is done by the machine.

Mathematics is a language. Therefore one of the most important cognitive activities is the translation act from the colloquial language into the language of mathematics. Similar to foreign language learning a “vocabulary book” is helpful

Using the basic rule I this new growth rate opens a large field of applications.

Vocabulary book

English	Mathematics
“equals“	$=$
“threefold of	$\cdot 3$
“three fourth of“	$\cdot \frac{3}{4}$
“p % of“	$\cdot \frac{p}{100}$
“increase about p%“	$\cdot(1+\frac{p}{100})$

A new growth rate: $\cdot(1+\frac{p}{100})$

Example 3: Radioactive decay:

Per hour 3% of the radioactive agent disaggregate.

- On Monday, at 10 a.m., the quantity m_o= 200 mg is available. After what time (and what day) is the only half is left (radioactive half life)?

Time	Radioactive agent
Monday, 10^h	200 mg
11^h	194
12^h	188,2
13^h	182,5
14^h	177,1
15^h	171,7
16^h	166,5
...	...
...	...
...	...
Tuesday, 8^h	102,3
9^h	99,3

„decrease about 3% „⇔
„multiply with 0,97“

Only a numeric calculator should be used. Students press the buttons (·0.97) until only one half remains.

Example 3.1: Radioactive decay:

Per hour 3% of the radioactive substance disaggregate.

- After what time is less than 1 mg available?

Using the same strategy as in example 3 it will be hard work until coming to 1 mg, but recalling basic rule I, a consequence of the “half time” is that 21 hours need the growth factor 0.5.

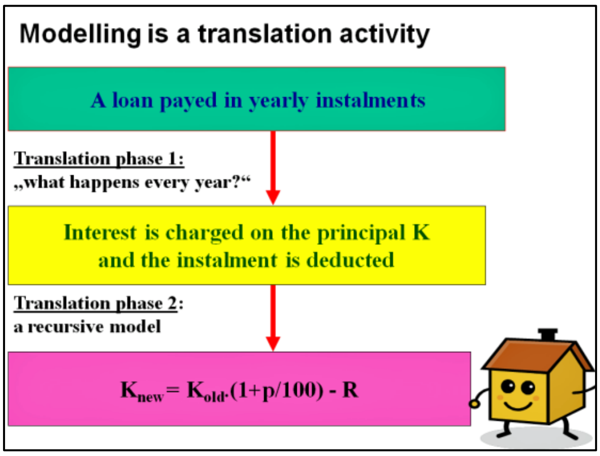
Time	Radioactive agent
Montag, 10h	200 mg
Dienstag, 9h	100
Mittwoch, 8h	50
Donnerstag, 7h	25
Freitag, 6h	12,5
Samstag, 5h	6,25
Sonntag, 4h	3,13
Montag, 3h	1,57
Dienstag, 2h	0,79

Half life⇔„times 1/2“

solution

Example 4: Building saving

- For buying a house one needs a loan of € 140.000 and wants to pay off the loan in yearly installments in 30 years.
- The bank offers an interest rate of 3.5% which could be changed depending on the index Euribor. The maximum rate is guaranted with 6%.

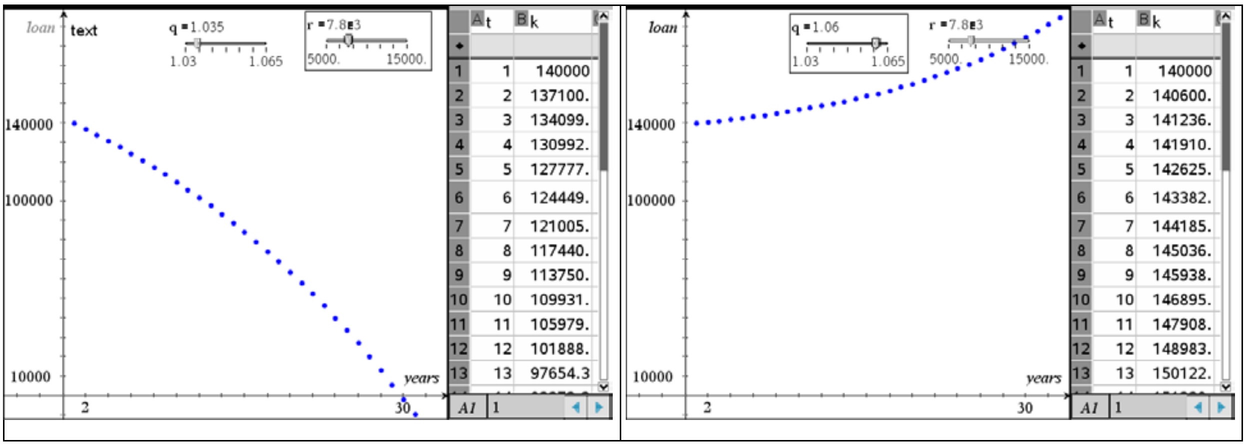


While in the past such problems could only be solved by using geometric series and logarithms now students in the 8th grade can solve it with a recursive model.

Utilities:

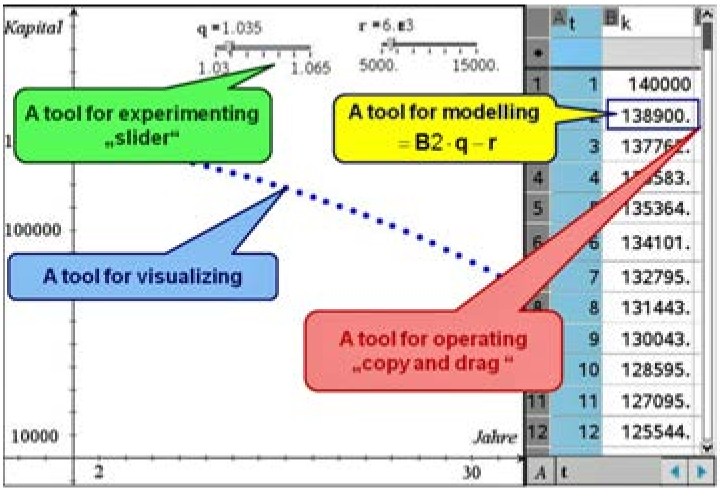
- Spreadsheet and graph of a tool like TI Nspire

Two features are important for the problem solving process: The possibility to investigate the table and the graph parallel and the use of sliders.



An important conclusion for savers: If the index Euribor causes the maximum rate of 6% and the yearly installment is not changed after 30 years the loan is higher than now!

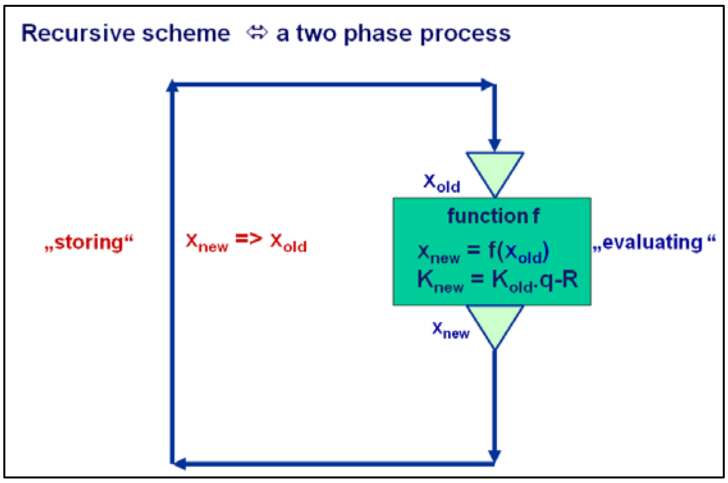
This example shows the varied options of a modern technology tool like the TI Nspire.



And it strengthens the thesis of W. Dörfler [Dörfler 1991] that "*technology does not only support cognition, it becomes part of cognition*".

Recursive schemes are a new quality of mathematical thinking and can now be experienced also in secondary level I.

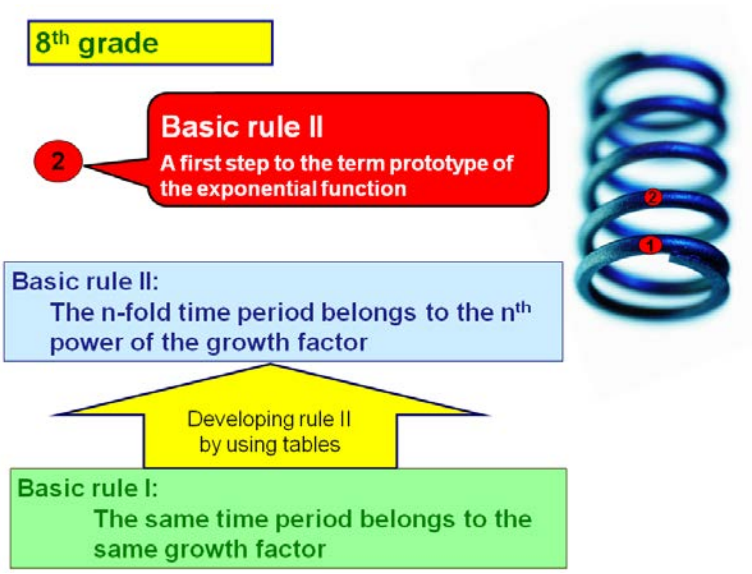
After the implicit use of this scheme in the 8th grade in secondary level II a reflection about the two phases of a recursive process is possible especially with a visual assistance:



The phase of evaluating: The input of a value x_{old} into a "mathematical machine" (= recursive formula") causes the output of the value x_{new}

The phase of storing: The new value x_{new} substitutes the old value x_{old} and by the input of x_{new} into the recursive formula a new cycle of the recursive scheme is starting.

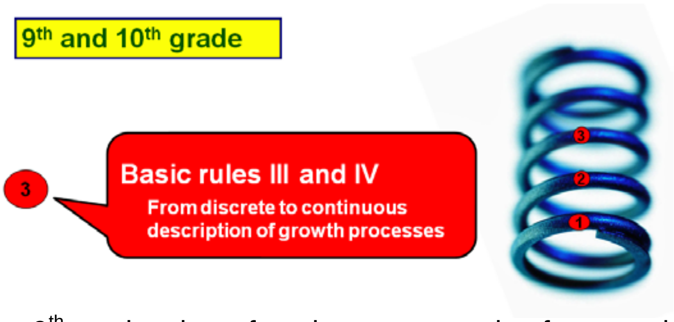
Step 2: Term representations of exponential functions



Reflections about the characteristics of such growth processes by investigating tables lead to a new basic rule:

Part 2: Growth processes in secondary level 2

Step 3 : From discrete to continuous description of growth processes



Until now the description of growth processes was discrete (step by step). Such a model is suitable for financial problems (annual installment) or biological problems with generations. But is it also a good description of the growth of a plant or bacteria, or the radioactive decay? In the 9th grade where functions are a topic of our curriculum the step to a continuous description of growth processes is possible.

In this phase at first any real growth factors are used.

From several **prototypes of the exponential function** the following are used:

- The “word-formula” – the verbal formulation of fundamental attributes
- Tables with respect to the time
- Algebraic terms of functions
- Graphs

Calculation tools

- Electronic tools which are able to generate tables and to draw graphs.
- CAS for manipulating terms

Attempt of an interpolation

Example 5: Earth population:

Data material shows: The earth population growing exponentially has doubled during the last 40 years. The current population 2012 is estimated at 7.06 billion.

How many people were living on earth in 1992?

		year	population		
+40	+20	1972	3,53 bn	.x	.2
		1992	??		
	+20	2012	7,06 bn	.x	

Students remaining in linear thinking technology would say “half of time => half of people”. But remembering the basic rule “equal time ⇔ equal growth factor” leads to the question:

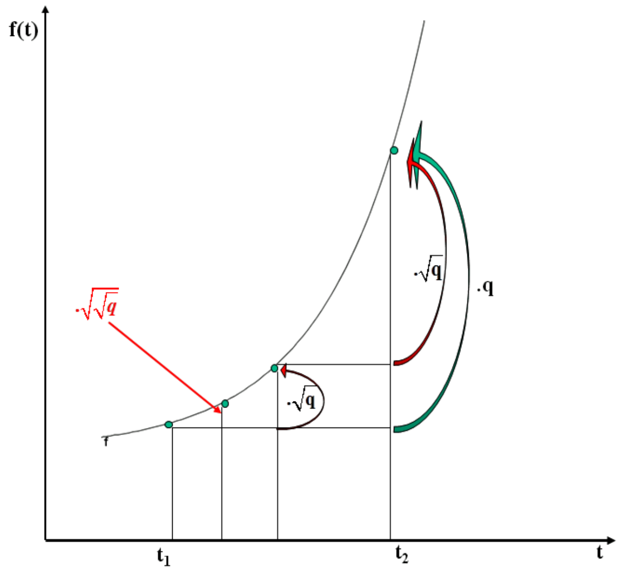
We are looking for a factor x with

$$x \cdot x = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$$

The consequence is a new basic rule of exponential growth:

Basic rule III:

The half time belongs to the square root of the growth factor



Now we have the justification for “continuous” drawing of the graph, because “the quarter of the time belongs to the square root of the square root, i.e. the fourth root", "the eighth of the time belongs to the square root of the square root of the square root i.e. the eighth root of the factor" a.s.o.

Conclusion: If there are given two points with different positive function values, than exactly one growth function exists which is defined for all time points and assumes all positive values.

That means over a densely packed set of time points a function is defined which follows the 3 basic rules and is monotone.

At first after 3 years we use the name ***"exponential function"***

The basic rule IV is the extension of rule II to the set of real numbers. It is the "wordformula" of the term-prototype of the exponential function.

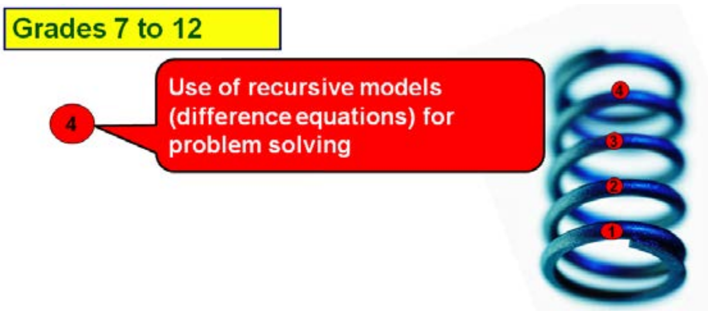
Basic rule IV:

For any real number the n-fold time belongs to the n^th^ power of the growth factor

Definition: Functions with $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{+}\,\big|\, x\to c\cdot a^{x}$ with $a>0$ are called "exponential functions"

The following part of the learning phase ("use of the term prototype of the exponential function") can be found in every school book. In this article the emphasis is the use of recursive models.

Step 4: Use of difference equations for modelling



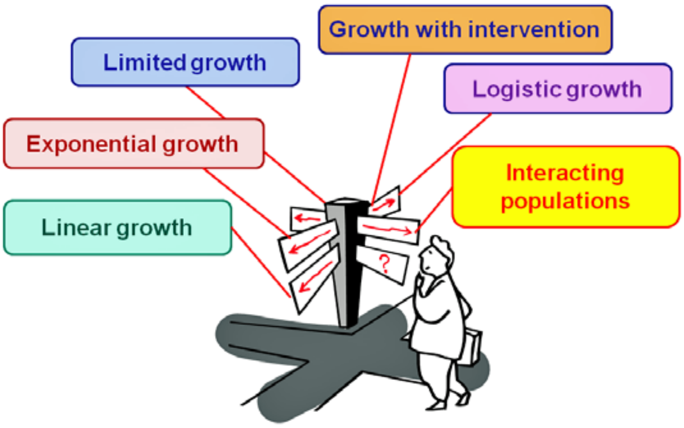
Difference equations first gained significance for mathematics education by the use of technology. It is no longer necessary to find the explicit term prototype which is very often a complex mathematical task. Learner's activity concentrates on modeling, which means the translation act from the colloquial to the mathematical language, to use the model of the difference equation for simulating and to reflect about the growth process. The necessary calculations should be done by the tool as a black box.

The prerequisites of the first steps of this spiral in secondary level I are very important for the learning process in this phase. Often used verbalizations which directly can be translated into mathematical activities are:

- growing about r-fold
- increase about 30%
- reduce about 15%
- direct proportional to

- relative rate of
- absolute change, relative change

Some sorts of specific growth processes which can be described by difference equations



(1) Exponential growth

Real model	Mathematical model
Characteristcs: – The rate of change is proportional to the actual stock. The increase is not constant – The same time period belongs to the same growth factor. **"Word-formula"** *"New population = old population + increase"* *The increase is proportional to the actual stock*	**Difference equations** ➢ y(n) - y(n-1) = r.y(n-1) growth rate r (per step), Starting value y(0) ➢ y(n) = y(n-1) + r.y(n-1) ➢ y(n) = y(n-1).(1+r) growth factor q = (1+r); starting value y(0) ➢ y(n) = q.y(n-1)

(2) Logistic growth

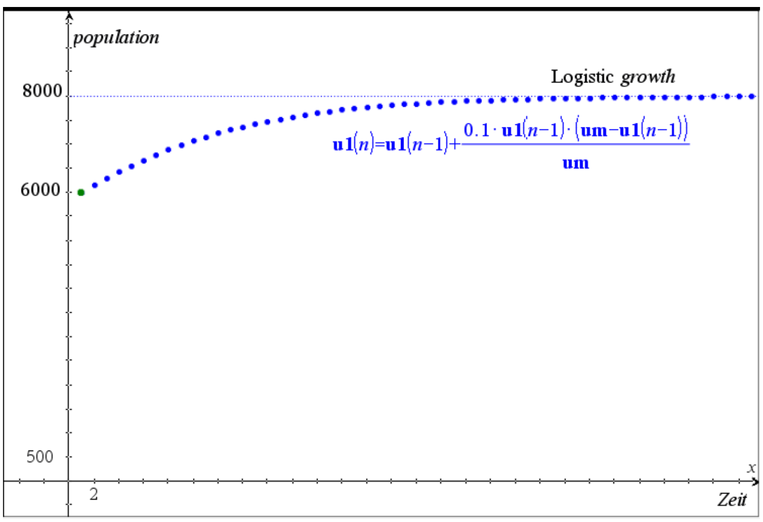
Real model version 1:	Mathematical model
Characteristcs: – Growth depending on the value of the actual stock and the free space. – The relative change is decreasing with a growing number of individuals. **“Word-formula”** *“New population= old population + increase”* *The increase is proportional to the actual stock and free space.*	**Version 1** **Difference equations** y(n) - y(n-1) = r.y(n).(G - y(n-1)) growth rate r, growth limit (capacity limit) G, starting value y(0) y(n) = y(n-1) + r.y(n).(G - y(n-1))
Real model version 2 **Characteristcs:** – Growth depending on the value of the actual population and the free space. – The relative change is decreasing with a growing number of individuals **“Word-formula”** *“New population= old population + increase”* *The increase is proportional to the actual population and the relative change of the free space.*	**Version 2:** **Difference equations** $y(n)-y(n-1)=r\cdot y(n-1)\cdot\frac{(G-y(n-1))}{G}$ $y(n)=y(n-1)+r\cdot y(n-1)\cdot\frac{(G-y(n-1))}{G}$ growth rate r, growth limit (capacity limit) G, starting value y(0)

The differences between the two versions are the several parameters: r (in version 1) versus r/G in version 2). The parameters usually are found by experimental investigations.

Example 6: A fish population

Currently about 6000 fish are living in a lake (u0). The maximum amount of the fish population is estimated with about 8000. The growth rate of the fish population is estimated with10%.

Develop a mathematical model of the evolution of the fish population including a graphic representation of the growth process.



(3) Limited growth

<table>
<tr>
<td>

Real model

Characteristcs:

– The rate of change is proportional to the available free space (e.g. living space for biological populations). The increase is not constant

"Word-formula"

"New population = old population + increase"

The increase is proportional to the available free space.

</td>
<td>

Mathematical model

Difference equations

➢ y(n) - y(n-1) = r.(G - y(n-1))

growth rate r, growth limit G, starting value y(0)

➢ y(n) = y(n-1) + r.(G - y(n-1))

</td>
</tr>
</table>

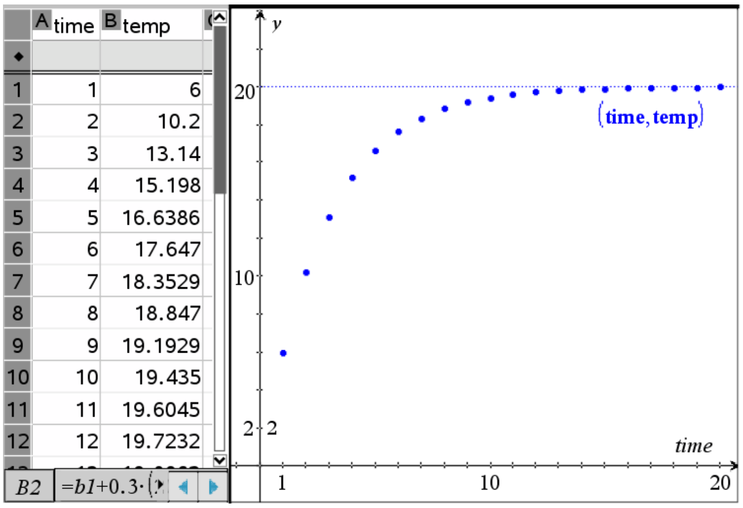
Example 7: A warming process

Food in a refrigerator has a temperature of 6°C. It is warmed to the room temperature of 20°C. The growth of the temperature is 30% of the difference in temperature between the room temperature and the current temperature (at the beginning of the current minute).

Simulate the warming process including a graphic representation

(1) with the tool "list&spreadsheet"

(2) withe a difference equation defined in the graphic window



	A time	B temp
1	1	6
2	2	10.2
3	3	13.14
4	4	15.198
5	5	16.6386
6	6	17.647
7	7	18.3529
8	8	18.847
9	9	19.1929
10	10	19.435
11	11	19.6045
12	12	19.7232

(4) Growth with intervention

<table>
<tr>
<td>

Real model

Characteristics:

The population is growing exponentially and is simultaneously increased or reduced by a certain amount

"Word-formula"

"New population = old population + increase"

The increase is proportional to the actual population and is increased or reduced by a certain value

</td>
<td>

Mathematical model

Difference equations

➢ y(n) - y(n-1) = r.y(n-1) - e

growth rate r (per step), reduced amount e,starting value y(0)

➢ y(n) = y(n-1) + r.y(n-1) - e

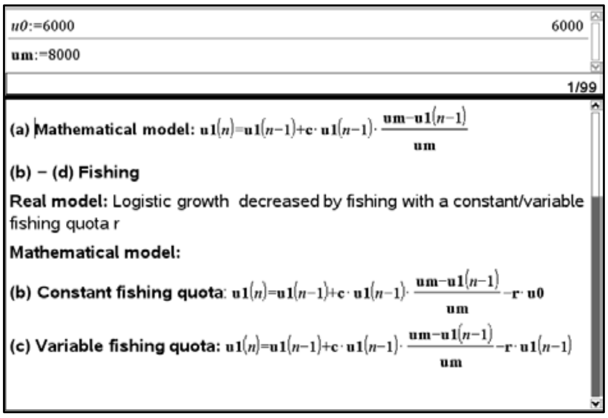
➢ y(n) = y(n-1).(1+r) – e

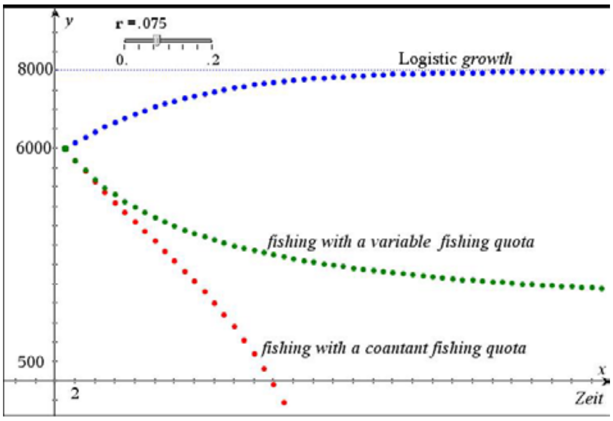
</td>
</tr>
</table>

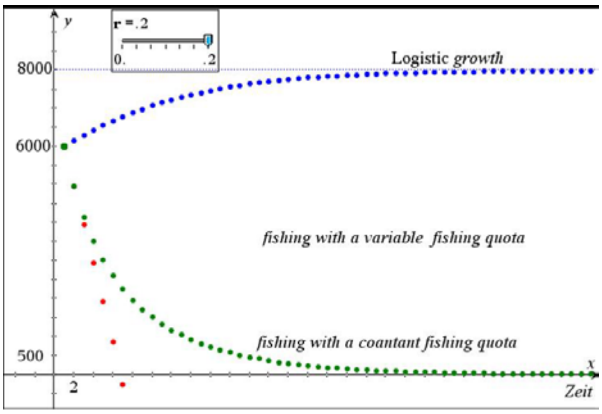
Example 8: Fishing

Currently about 6000 fishes are living in a lake (u0). The maximum amount of the fish population is estimated with about 8000. The growth rate of the fish population is estimated with10%.

a) Develop a mathematical model of the evolution of the fish population including a graphic representation of the growth process.
b) "Constant fishing quota": The agreed fishing quota is 7.5% of the population at the beginning of the process. Describe the development of the fish population by using a difference equation in the graphic window.
c) "Variable fishing quota": The agreed fishing quota is 7.5% of the current population. Describe the development of the fish population by using a difference equation in the graphic window.
d) Define a slider for the percentage rate r (0<r<0.1) and change the fishing quota starting with 7.5%. Interpret the development of the fish population for a constant and a variable fang rate.







This model would be a useful support for the politicians of the European Union who are in charge for fishing. Until now they are not able to reach an agreement about useful fang rates. Especially constant fang rates are dangerous but if the fang rate is too high (20%) the fish population will also die out if a variable fang rate is arranged.

(5) Growth of interacting populations

Often two or more populations influence each other. In the following we regard two populations B_k and Rk. Concerning the interaction between the populations we can differentiate several scenarios.

3 Models of main sorts of interacting systems:

- **Predator-prey relationship**

  The population B_k promotes the growth of R_k; on the other hand R_k impedes the growth of B_k

$B_{k+1} = q_1.B_k - d.R_k.B_k$

$R_{k+1} = q_2.R_k + c.R_k.B_k$

- **Competition relationship**

  Every population B_k and R_k impedes the growth of the other population.

  $B_{k+1} = q_1.B_k - d.R_k.B_k$

  $R_{k+1} = q_2.R_k - c.R_k.B_k$

- **Symbiosis**

  Every population B_k and R_k promotes the growth of the other population.

  $B_{k+1} = q_1.B_k + d.R_k.B_k$

  $R_{k+1} = q_2.R_k + c.R_k.B_k$

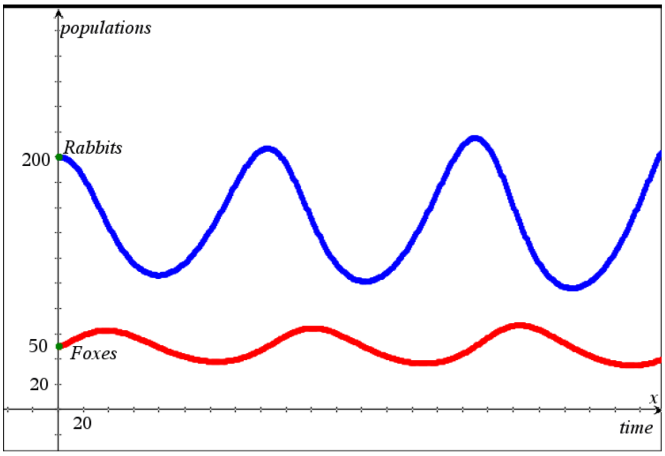
Example 9: Foxes and rabbits – a predator-prey problem

A rabbits population is annually growing with r=5%. Rabbits are hunted by foxes. The subsequent decrease of the rabbit population is proportional to the number of rabbits and foxes (kr=0.001).

The number of foxes depends on the number of rabbits. Without finding rabbits the fox population would annually decrease with s=3%. The increase of the fox population caused by rabbit hunting is proportional to the number of rabbits and foxes (kf=0.0002).

At the beginning 200 rabbits and 50 foxes would live in the district.

Describe the development of the two populations by using difference equations in the graphic window.



Example 10: HIV and the Immune System - A Mathematical Model [Lechner,1999]

- **AIDS** ⇔Acquired Immune Deficiency Syndrome
- **HIV** ⇔ human immunodeficiency virus),
- A **cytotoxic T cell** (also known as **killer T cell**) is a T lymphocyte (a type of white blood cell) that kills cells that are infected with viruses.

This example is part of a lecture which Josef Lechner gave at the ACDCA-conference in Gösing/Austria in 1999. The mathematical models were developed by the Austrian mathematician M.Nowak [Nowak, 1992].The example deals with a mathematical model of increasing the HI-viruses in the human body. It shows that the computer allows the student to reflect upon the very complex problem of the spreading of an aggressive virus and the interaction with resistant cells although in school the problem cannot be solved.

The terrible fact is that HI-viruses are that `successful" because their replication is susceptible to mistakes. For every mutated virus the immune system must create new specific killer cells, which can only fight this special kind. **The resistant cells act as *specialists***. On the contrary all mutating viruses can destroy *all* kinds of resistant cells against **HIV** or at least impair their function. They **work as *generalists***.

If a certain variety of viruses is exceeded, the immune system finally loses control of them and AIDS breaks out. In this way the number of virus cells increases sharply whereas the number of immune cells drastically decreases.

In school it is impossible to develop mathematical models for any numbers of mutants, and it is not so easy in general either. What we can do in mathematics education is to start with simple models of one or two mutants by using the fundamental competences about growth processes and especially about interacting systems. J. Lechner developed a program using voyage 200 for 11 mutants. Simulating needs about one hour!

The simulation of these models allows an act of reflection about the real situation.

Simulation 1:

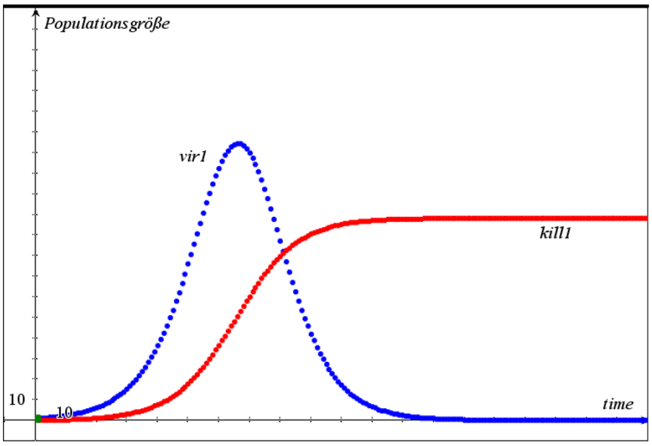
Let's start with a trivial model with only one type of virus. The difference equations are developed by using the "word-formulas" of the interacting process:

Virus 1	u1(n)=u1(n-1)+r*u1(n-1)-p*u1(n-1)*u2(n-1)	u1(0) = 1; 0≤n≤200
Killer T-cell 1	u2(n)=u2(n-1)+s*u1(n-1)-q*u1(n-1)*u2(n-1)	u2(0) = 0; 0≤n≤200

According to [Lippa, 1997, Nowak, 1992] the following parameters are realistic:

- The rate of increase of the virus. r = 0.1
- The efficiency of the immune cells in their fight of resistance. p = 0,002
- The factor of proportionality s describes the increase of the resistant cells, which is generated by the mutant of the viruses. s = 0,02
- The factor *q* characterizes the aggressiveness of the viruses. q = 0,00004

One step in time represents 0,005 years (i.e. 200 steps describe a year).

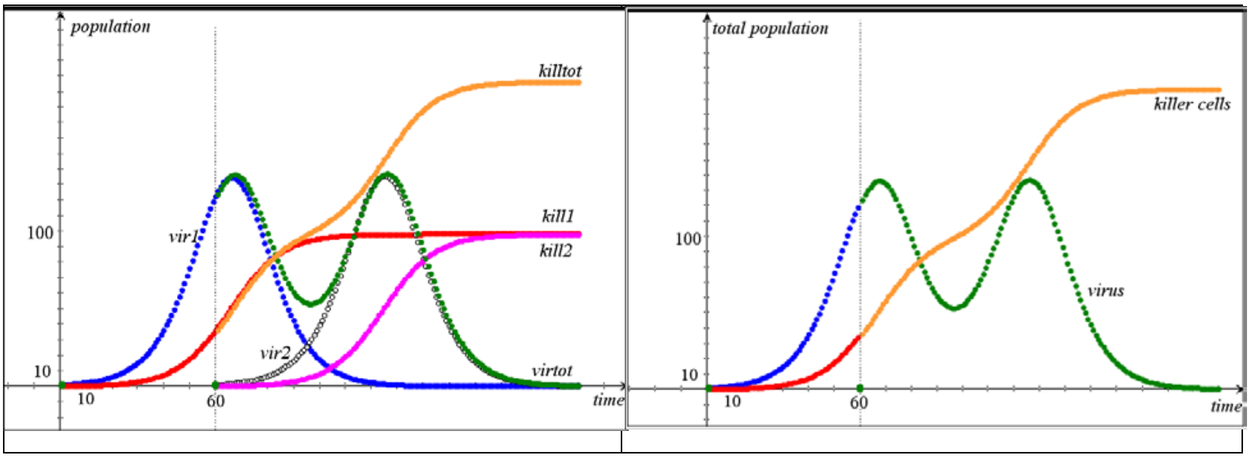


The result shows that if there exists only one mutant of the virus the resistant cells can be successful.

Simulation 2:

Now we want to work with two mutants, the second of which shall appear after 60 steps of time (which means after about 3.6 months). We have to consider, that the virus cells are generalists and therefore can fight all sorts of cytoxic T-cells while these cells are specialists and can only defeat a certain virus mutant.

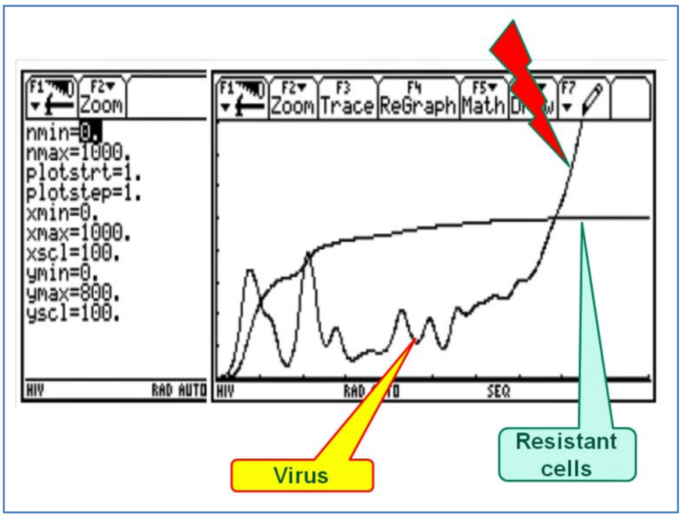
Virus 1	u1(n)=u1(n-1)+r*u1(n-1)-p*u1(n-1)*u2(n-1)	u1(0) = 1; 0≤n≤200
Killer T-cell 1	u2(n)=u2(n-1)+s*u1(n-1)-q*u1(n-1)*u2(n-1)	u2(0) = 0; 0≤n≤200
Virus 2	u3(n)=u3(n-1)+r*u3(n-1)-p*u3(n-1)*u4(n-1)	u3(0) = 1; 60≤n≤200
Killer T-cell 2	u4(n)=u4(n-1)+s*u3(n-1)-q*u5(n-1)*u4(n-1)	u4(0) = 1; 60≤n≤200
Virus total	u5(n)=u1(n-1)+u3(n-1)	u5(0) = 1; 60≤n≤200
Killer T-cell total	u6(n)=u2(n-1)+u4(n-1)	u6(0) = 1; 60≤n≤200



The result of the simulation shows that also with supposed 2 mutants the resistant cells are able to win.

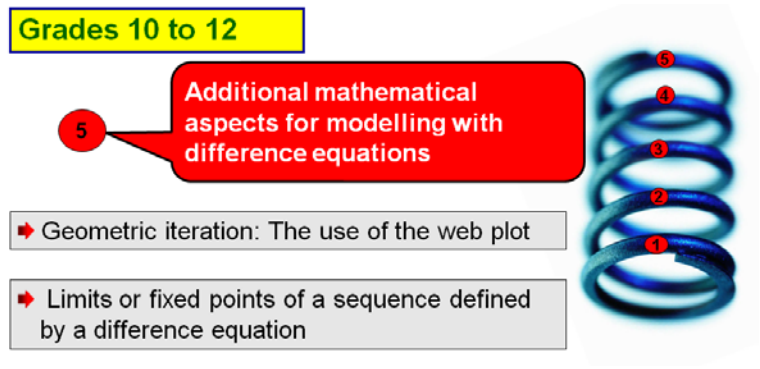
Simulation 3:

Now the number of mutants shall be increased to 11. The time for the appearance of the mutations shall be determined at random. Using the program of J. Lechner after about one hour the following result can be observed:



After a fierce fighting the virus cells win. The breakout of AIDS happens after four years.

Step 5: Some mathematical aspects of using difference equations



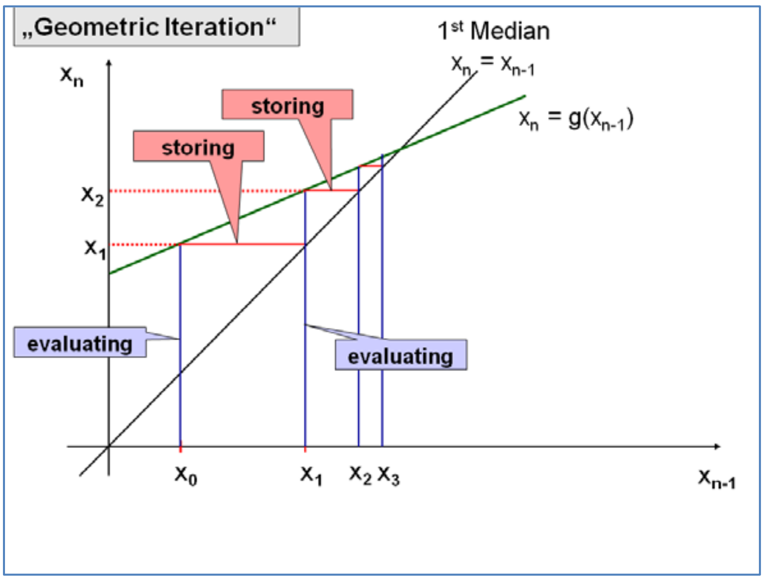
5.1 Geometric iteration – the use of the web plot

If a sequence is defined by a difference equation two graphic representations are possible:

- The Time plot: $x_n = f(t)$ and
- The Web plot: $x_n = g(x_{n-1})$

Advanteges of the „web plot“ are:

- Visualization of the two phases of a recursive scheme. Recursive thinking is a new cognitive quality. Sustainable availability is supported by reflecting about the two phases of a recursive scheme, the phase of evaluation and the phase of storing.
- Visual investigation of the convergence of the sequence: To prove the convergence of a sequence defined by a difference equation is not so easy. The visualization strengthens the assumption and can be seen as an “experimental prove”.
- Investigation of the fixed points (invariant points): See chapter 5.2



5.2 Limits or fixed points of a sequence defined by a difference equation

A ***fixed point*** x* (sometimes shortened to ***fixpoint***, also known as an ***invariant point***) of a function f is a point that is mapped to itself by the function ⇔ f(x*) = x*

Is x* an ***attractive fixed point*** *of a difference equation $x_n = f(x_{n-1})$ then the sequence* *converges to x*:* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$

The fixed point theorem

A fixed point x* of a difference equation $x_n = f(x_{n-1})$ *(f is continuous and differentiable) is an attractive fixed point, if* $|f'(x^*)| < 1$ and is distractive, if $|f'(x^*)| > 1$

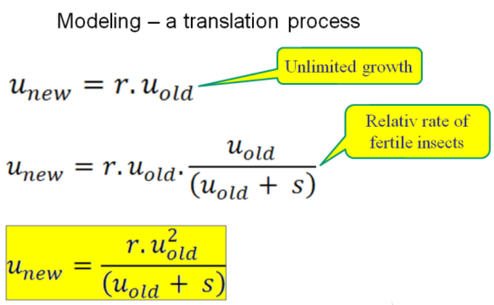
Example 11: The sterile insect technique – SIT [Timischl, 1988]

An insect population with u_0 female and u_0 male insects at the beginning may have a natural growth rate r.

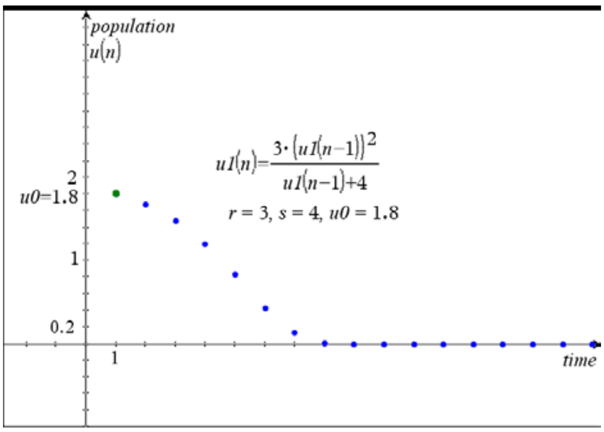
To fight these insects per generation a certain number s of sterile insects is set free.

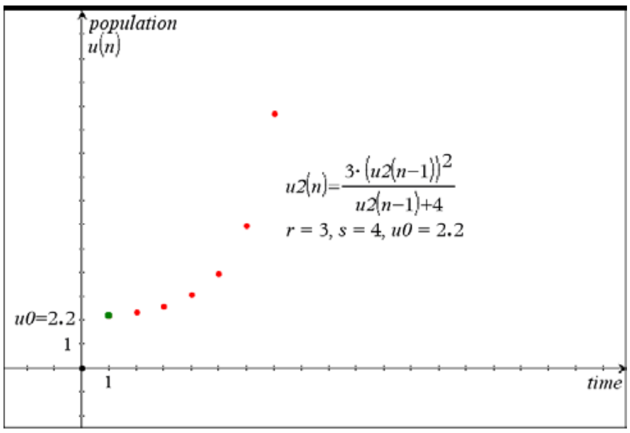
Investigate the effect of the method SIT by interpreting the growth function for several parameters u_0, r, s.

- Model assumption: r=3; s=4
- Initial values: u_0=1,9; u_0=2,2; u_0=2,0



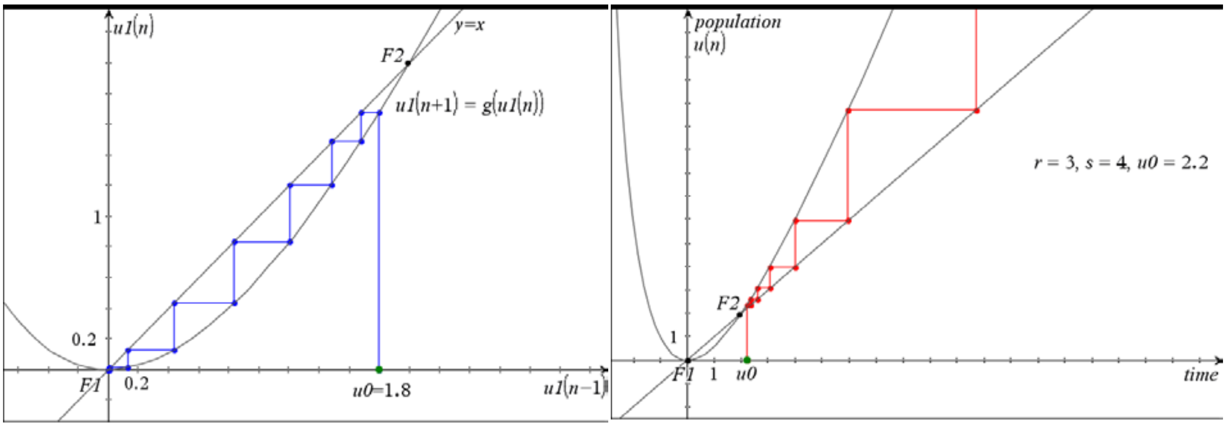
The new population is proportional to the old population (with growth rate r) and to the relative rate of the fertile insects.





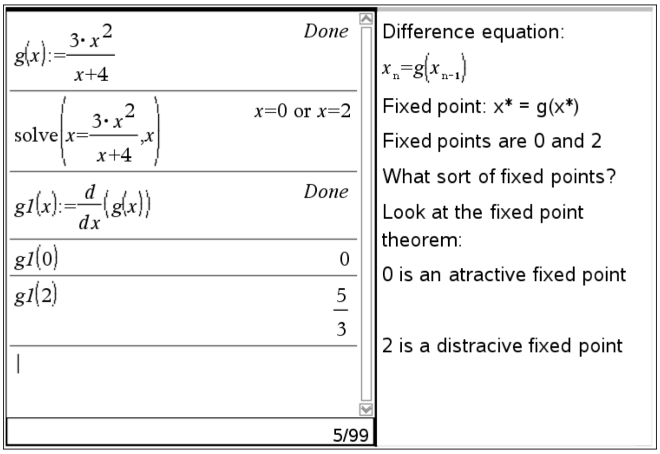
For u0 =1.8 the population will die out, for u0 = 2.2 the population will grow fast.

More concise information can be received in the web plot:



The graphs show that the fixed point F1 = 0 is an attractive fixed point, the fixed point F2 = 2 is distractive.

Using the definition of the fixed point it can also be calculated by CAS and in the same way the fixed point theorem can be used to prove the convergence of a sequence by calculating the absolute value of the first derivative.



Conclusion

I expect more sustainability by this longitudinal section starting in the 7th grade and ending at the interface school/university in the 12th grade dealing with growth processes. The learners can *experience mathematics as* ***spectacles for recognizing and modeling the world around*** *them. The acquisition of* ***new thinking technologies like the recursive scheme will be motivated.***

This learning path is unthinkable without the use of technology which at first opens a large field of applications and supports the development of the mathematical thinking technology.

Literature

Fischer, Roland, (2003): „Höhere Allgemeinbildung und Bewusstsein der Gesellschaft." In Zeitschrift „Erziehung und Unterricht", Band 56, S. 559-566.

Heugl, Helmut, (2005): „Bildungsstandards Mathematik in Österreich - Konzepte, Umsetzung und Einfluss von Technologie" in „Fokus Didaktik. Vorträge beim 16. Internationalen Kongress ÖMG/DMV an der Universität Klagenfurt (Edith Schneider (Hrsg.)). Profil Verlag München/Wien S 59 – 78. ISBN 3-89019-598-9

Heugl, Helmut (2006): "Didactical principles of mathematics education supported by electronic media" in Böhm, Josef (Hrsg.) CD: Proceedings der Konferenz "DES-TIME-2006" (Dresdner internationales Symposium zum Einsatz von Technologie in der mathematischen Ausbildung). Online Shop: shop.bk-teachware.com (Best.Nr. BKT-G54)

IDM, 2009: " Das Projekt "Standardisierte schriftliche Reifeprüfung aus Mathematik". Institut für Didaktik der Mathematik an der Universität Klagenfurt. http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/519.htm

Kirsch, Arnold (1976): „Vorschläge zur Behandlung von Wachstumsprozessen und Exponentialfunktionen im Mittelstufenunterricht", DdM 4 (1976), H. 4, 257 - 284

Lechner, Josef (1999): "HIV and the Immune System - A Mathematical Model" Lecture at the ACDCA conference in Gösing, Austria. Proceedings: http://www.acdca.ac.at/kongress/goesing/g_lechne.htm

Nagl, Anton (2000): „Mathematik mit dem TI-92 – Wachstumsvorgänge", Skriptum für Schüler/innen der 6. Klasse (10. Schulstufe) am BG/BRG Stockerau

OECD (Hrsg.) (2006): "Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy" A Framework for PISA 2006. OECD Publishing, p.72-118. ISBN92-64-02639-8

Peschek, Werner; Heugl Helmut (Hrsg.), (2007): „Standards für die mathematischen Fähigkeiten österreichischer Schülerinnen und Schüler am Ende der 8. Schulstufe" Version4/07. Institut für Didaktik der Mathematik, Alpen-Adria-Universität Klagenfurt. Homepage des Institutes: http://www.uni-klu.ac.at/idm/inhalt/295.htm

Timischl, Werner (1988): „Biomathematik." Springer Verlag New York-Wien. ISBN 0-387-82039-6

Wittmann, Erich (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts, S 59 und S 130ff. Vieweg Verlag 1981. ISBN 3-528-58332-0.

T³ EUROPE

16de T3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Is the Calculus a Must in General Education?

Hans Schneebeli

On Teaching and Technology

The Origins of Analysis and the Calculus

Elementary Analysis:
approximate to exact or discrete to Continuous - back and forth

Key notions, examples, and comments

Conclusion

TEXAS INSTRUMENTS
KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Is the Calculus a Must in General Education?

Hans R. Schneebeli

Abstract

The use of technology in the teaching of Analysis is combined with a genetic approach. This includes the history of ideas, key problems and their solution, and the use of tools. Notions and concepts are introduced and motivated in their historical context. The idea behind this approach is that the collective learning process of humanity is imitated by each individual learner – with many abbreviations.

In this text the term 'Analysis' will be distinguished from 'the Calculus' for the sake of clarity and ease of communication. This distinction contrasts somewhat with the fact that both terms are often used with less care.

The CALCULUS, an extension of algebra, is essentially *syntax* and works with *finite methods* only. ANALYSIS shows how to cope with some aspects of the *infinite.* The *continuum of the real numbers* is the ground on which Analysis grows. Analysis forms a *semantic framework* necessary to make sense of the Calculus. The Calculus may fruitfully be applied only in the context of notions, concepts, and theorems provided by Analysis. Teaching Analysis is a challenge compared to instructing the rules of the Calculus.

All the fundamental IDEAS of elementary Analysis emerged (in the European context) sometimes between the Hellenistic period and 1700, except a clear concept for real numbers. We trace a few central ideas back and give them a face by telling the history – or maybe stories only – of eminent scientists, engineers, lawyers, diplomats, philosophers, and more, who contributed to the evolution of the subject by their ideas, mostly brilliant or sometimes mistaken. At the end of the saga, the students will have been confronted with the main basic notions of Analysis, with preliminary ideas, definitions, results but – most importantly – with *insight and motivation* for understanding the tools of Analysis. Two essential procedures suffice in the context of pre-university teaching:

- *Discretisation* replaces an infinite number of operations by a finite one at the cost of some *errors.* Instead of the original problem, a discrete replacement is solved by finite methods.
- *Idealisation* aims at purging the discretisation errors. This involves passing from the finite to the infinite and deals with some *limits* in order to overcome the discretisation errors – if possible. Elementary Analysis arranges for this possibility to be given routinely by assuming enough 'smoothness'. Other cases exist but they were discovered only in the 19th century and are not considered of preeminent importance in a first encounter with the subject.

Technology is used throughout the course in an essential way. It permits to cope with historical examples that were key in the genesis of Analysis. We make no effort to follow historical terminology but rather introduce modern concepts, notation and parlance. We make extensive use of scaffolding and the blackbox – whitebox principle to prepare the ground for teaching Calculus based on important bits of Analysis.

1 On Teaching and Technology

Teaching allways happens in the context of some technology. Good technology enhances teaching and bad technology creates a need for more instruction to overcome the shortcommings of the tools available.

Today's technology demonstrates that large parts of the Calculus may be automated and performed with the help of even handheld devices. This fact challenges educators and teachers of mathematics alike. Is the Calculus still a worthy subject in the context of general education? Should our syllabus be adapted to this situation? And if so, what might to be changed?

This talk reflects about the evolution of mathematics from early geometry to classical mathematics with special attention to the co-evolution of the tools available from compass and straight edge to paper and pencil, from logarithms and slide rules to calculators, work stations, smart phones or tablets. This point of view clearly suggests a genetic approach to teaching mathematics and to link the contents and methods of teaching with the technology available. In particular I propose to study some key problems that lead the way from Greek mathematics and technology to classical mathematics and present day technology. Doing so, we focus on the genesis of Algebra, the Calculus and Analysis. The insight gained from this reflection will be the basis of our approach to teaching the Calculus and the principles of Analysis using the tools available today.

It will become clear that the use of technology may naturally entail a reduction of some skills our predecessors were proud of. The formation of basic notions essential to Analysis (i.e. semantics) may be separated from the rather syntax oriented Calculus. Indeed, Calculus is an extension of basic algebra by the formal rules of the differentiation operators (i.e. syntax). The understanding of basic notions cannot be replaced by computational skills. This understanding is necessary if we aim to teach relevant applications. Today's tools and a sound conceptual basis allow to introduce both kinds of *dynamical systems,* discrete or continuous. The discrete case is essential in many numerical procedures or in evolution models with discrete time steps. The continuous case provides the stage for models based on ODEs. The two cases are linked with one another by discretisation or the reverse process where a limit of a sequence of discrete processes ends up as a continuous one.

The following approach favors the *genetic method* over an imitation of Bourbaki style mathematics. The formalisation of mathematical content is a necessary task too. However, history shows that formalisation rather follows than preceeds experimentation, discovery, exploration and accumulation of insights and results.

An alternative approach used in higher education stresses the logical structures by definitions, theorems and proofs. This style of teaching is time saving and ends up with a lean formal theory whose meaning or possible interpretations remain largely untouched. If applied to unprepared beginners it risks to miss the point and to produce formalisms of little use.

Euclid codified greek Mathematics in his Elements only after of a long and prosperous evolution of geometry, logic, number theory. In his lifetime the decline of greek power became evident. This may indicate that formalisation also serves to concentrate and reduce a wealth of related but scattered ideas in a systematic way to essential notions and basic principles. In this way the 13 books of Euklid succeeded to preserve the legacy of Greek Mathematics. At the same time Euclid set a standard for teaching geometry to persist in Europe and elsewhere during 2 millennia. Thus Euclid became a role model for mathematicians of the formalist school. In 1899, Hilbert a leading formalist, published his *Grundlagen der Geometrie*, a modern systematic analysis of axiomatic geometry whose existence was largely due to the discovery of Non-Euclidian geometry in the 19th century.

Remark A formal definition of the *real numbers* is avoided at this stage. This task is left to university courses to serve their own intentions and aims.

However, the extension of numbers $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ and $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ may be suitably explained in school in the context of algebra and by finite means.

Much Analysis and Calculus was in use for more than a century, before an attempt was made to understand the completion of the rationals $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. This step was possible only in the 19th century with major contributions by Cauchy and Dedekind. It is the essential step in creating a continuum all of whose properties are necessary to prove the major theorems of elementary Analysis. The syntax of the Calculus is a much simpler affair and is valid without this essential step. The *existence* of limits, derivatives, and primitive functions must be granted by Analysis.

2 The Origins of Analysis and the Calculus

Greek geometers used ot think in terms of ideal tools, ruler and compass. A good part of geometry was constructive, even *algorithmic* in nature and hence *finitistic* by ideology. Constructive solutions to geometric problems were restricted to finitely many fundamental constructions with ruler and compass. Another typical expression of greek mathematics is found in logics and the need for proofs. All proofs justifying certain constructions and the derivation of theorems from fundamental principles could involve only finitely many words. Moreover logics, i.e. a very disciplined use of words, had to replace the role we are used to assign to algebra, a method unavailable in Greek antiquity.

2.1 Three famous problems greek geometers tried to solve in vain

We might compare ruler and compass with the Turing machines. Then we discover a close analogy between classical problems in geometry and recent problems in algorithmic and computational mathematics. Greek mathematics left us with three famous unsolved problems:

- Given the side length of a cube. Construct the side length of another cube whose volume is twice the volume of the given cube using ruler and compass only.
- Given an arbitrary angle. How can the angle be trisected by using ruler and compass?
- Given an arbitrary circle. How can the area of the circle be represented by a square of equal area by using ruler and compass only?

None of the three problems may be solved using the prescribed tools. But this insight needed 19th century mathematics for a proof. Note that the trisection of angles as well as the solution of cubic equations would be possible by Origami constructions.

2.2 Infinity, lacking concepts, and paradoxa

Infinity transcends human imagination. Greek philosophers were aware of the problems arising when the firm ground of finitistic methods is left behind. Still some may have invented certain paradoxa of the infinite in order to demonstrate the pitfalls of naive thinking combined with talking about infinity. Zenos paradoxa [Achilles and the tortoise, the dichotomy] and the parodoxon of the flying arrow may serve to signal the dangers of naive thinking or the lack of welldefined technical terms still today. We possibly follow Zeno's intentions by recalling and commenting them before entering the territory of Analysis/Calculus.

One possibility to avoid the paradoxa is to follow the atomists whose world view is essentially finitistic and discrete. Their mathematics would reduce to combinatorics. Possibly Archimedes probed this perspective when he wrote *The Sand Reckoner*.

An alternative needs definitions and notions that avoid the paradoxa. The paradoxon of Achilles and the tortois as well as the paradoxon of the flying arrow come down to the insight that a scientific definition of velocity is connected to concepts of space and time which have to precede such discussions. The problem of the dichotomy has to be overcome before numerical methods such as bisection may be understood.

The good news is that Archimedes found a way to overcome the problems hidden in Zeno's paradoxa. This is the main point of the next section. The notion of velocity emerged only in medieval times (Oresme) but remained enclosed in academic circles. A breakthrough happend with Galileo's and finally with Newton's work in physics.

2.3 Archimedes: engineer, mathematician, genius – early roots and principles of basic Analysis.

Ruler and compass constructions allow approximate solutions up to any given positive tolerance. But this could not satisfy the requirements of rigorous philosophical standards in classical greek mathematics.

Think of an engineer designing a gear box or a mechanical orrery. In its construction wheels will have to be made with mutually prescribed proportions of the lengths of their circumferences. Greek mathematicians knew that squaring the circle and measuring the circumference of any circle are essentially the same task. A mechanical orrery of surprising sophistication made in ancient time was found near the island of Antikytera around 1900. Hence, antique craftsmen or engineers knew how to use approximations to squaring the circle of prescribed precision with success.

For the sake of preparing the essential ideas of Analysis allow me to personalise a major step of mathematical thinking. The following sketch is a kind of saga with a grain of truth rather than historical truth with a grain of salt.

About teaching In class, I might read now Ciceros 4th letter from Tusculum where he searched and found Archimedes's tomb stone and found engraved a cone, a cylinder and a sphere. Then I would discuss Archimedes's *approximations* for π which of course are the essential approximations for the content of the unit circle by regular n-gons, inscribed and circumscribed. Today this provides an exercise in programming, and it is instructive because it may show the pitfall of naive algorithms and the potential numerical degenerations due to the use of machine numbers in stead of real numbers. Here we are close to a major issue of Analysis and we dive into the problem rather than to avoid getting wet by constructing the real numbers in a 19th century fashion outside the intellectual reach of youngsters. And we may chose this approach only thanks to the easy acces to a programmable device be it a handheld, a tablet or a desktop.

The main point here is that Archimedes thought like an engineer. He overcame an ideological obstacle of greek geometry by accepting a method that lead to approximate solutions with an error that could be made smaller than any given positive tolerance. This is good enough for all practical purposes. This change of attitude is an essential step necessary for the working of what I am going to call *Archimedes's trick.*

Once we understand the approximations of the area of a unit cercle up to a given arbitrary positive tolerance, we may satisfy the requirements of an engineer or craftsman who has the task to construct a mechanical device within the limitations given by his materials and his tools. In this way we are able to measure the content of any cylinder, cone or sphere for the sake of practical applications. In doing so, we use *discretisations* of an appropriate kind in order to produce results that can be proved to satisfy the precision requirements. Technically speaking we consider Riemann sums approaching a circle or half circle, a cone, a sphere, and we may do so because the algebra involved gets trivialised by *scaffolding* thanks to the CAS which simplifies the sums where necessary. Note the advantage of using algebra, a means not available to Archimedes.

Furthermore, a discussion of an ancient atomist's view may be fruitful here. For an atomist, the iterate refinements stop after a finite number of steps. In his view the area or volume reduces to a *finite* sum over the corresponding measures at the atomic level. Measuring is reduced to counting. (cf. also Archimedes's writing on the sand reckoner)

Archimedes's trick is a label to denote the method of successive approximations up to an arbitrary positive tolerance. And, moreover, the radically new convention is that a problem is considered to be *solved* (not only for all practical puroses) if this stage is reached. This suffices, of course, for all constructive approximations, and we may stay inside the rational numbers as long as we refrain from postulating the existence of limits.

In all the examples studied, the limits may be determined naively by algebraically grouping terms into a constant and terms involving the discretisation parameter. As the case may be, this parameter is n and we consider $n \to \infty$ or it is some Δx and $\Delta x \to 0$, and in the examples chosen the error terms are functions of the discretisation parameter and these functions tend to zero if the discretisation is pushed to its continuous limit.

Archimedes's trick is now applied in the educational context to explore the diverse methods for approximating the volume of a sphere (stacks of thin discs, triangulation or shelling) in analogy to similar methods for computing the area and circumference of a circle. By way of example we are lead to consider difference quotients of the area of a circle or the volume of a sphere as a function of the radius and we get into contact with the *idea* of a derivative. But beware – the name is kept in the cheek as well as 'integral' is a no-name at this stage of instruction.

Archimedes's intuition found some basic principles and essential *ideas* on the way to Analysis. For lack of algebra he was unable to contribute to what we now would call the Calculus.

2.4 Heron and iterative numerical approximation of roots

Square roots may be constructed by ruler and compass respecting the highest standards of greek philosophy. But this does not help to satsify practical needs for a good approximation in terms of fractions. Archimedes's trick does not work with a materialised tools of geometry.

The long tradition of mathematical culture in the Middle East offered an alternative. Its origin is documented in clay tablets but the name of the method is attributed to Heron, a physicist, engineer and mathematician living in Alexandria in the Hellenistic period.

Heron's method is interesting because it shows the role of numerics in antiquity and it produces in principle a series of rapidly converging rational approximations to square roots. This may be exploited to extend the role of Archimedes's trick beyond geometry to function iteration producing successive approximations to solutions that cannot be reached in finitely many steps within the given arithmetic.

About teaching In practical computation with calculators, saturation of the decimal representation occurs. Still an algebraic argument shows that errors decay in exact arithmetic. Hence Archimedes's trick applies and shows the existence of an exact square root to any positive number independently of geometry and its idealised tools.

Students' projects for an adapted version of Heron's method to arbitrary roots are an option here. They may lead to Newton's famous method being rediscovered in the context of special examples in school.

Heron in a modern perspective: Heron's iteration is a discrete dynamical system on the field of rationals $\mathbb{Q}$. Typically its fixed points lie in $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$. This fact motivates the need for extensions of $\mathbb{Q}$ in the context of a smooth mathematical theory. But paradoxically all numerical computations take place in some finite subset $\mathbb{R}_{\mathbb{M}} \subset \mathbb{Q}$. Even a CAS is bound to a finite memory implying that its range of effectively computable terms remains finite all the time. Our tools do not fit the needs of the basic mathematical background in theoretical Analysis. However, the Calculus provides us with some algebraic shortcuts which open the way for solutions in finite terms under suitable conditions. The impression of an allmighty Calculus is seductive like a mirage. Numerical approximations are absolutely essential to the engineers' tricks of trade. Hence *numerical Analysis is a must in general education* complementing the applications of the Calculus in an essential way.

2.5 Dido, Pappus and Fermat: Is Nature ruled by extremal principles?

Tell about Dido and the foundation of Carthago, tell about Pappus and his school. In particular tell how Pappus explained the propagation of light rays between two points A and B and why they ought to follow a straight line or why the angle between the incident light ray and a mirror is equal in size to the one of the outgoing light ray because of the postulated parsimony of nature.

An easy argument in Euclidian geometry suffices in order to 'prove' what Pappus claimed. But it only works under the hypothesis that shortest paths between two points are straight lines.

Tell that Pappus also claimed the bee hive to solve a minimal problem. Another claim of his says that the bee cells have hexagonal walls 'because' the bees have six legs.

An exact study reveals that bees aren't precision workers and that several different types of bee cells may be found in nature. Still T. C. Hales in 1999 published a proof that a form of the honeycomb conjecture attributed to Pappus or Varro is true in two dimensions.

Twelve centuries after Pappus, Fermat extended the principle of the shortest path for light rays and gave it a new twist. He claimed that light rays travel with finite speed depending on the medium of propagation and his principle was little more than a belief that light propagates through an optical system such as a rain drop, a lens, a prism in such a way that the time of travel along a light ray was minimal [or extremal] among all paths connecting a given starting point A to some given point B.

About teaching We take up Fermat's claim and derive the *law of Snell* in mathematics as an exercise and application of Fermat's principle. [Here we need an essential ingredient to modern Analysis: analytic geometry and its link to algebra.] Moreover we enlarge the set of exercises in nonlinear optimisation. They may be solved first using the CAS and *scaffolding* and then using the *black box – white box principle* to make acquaintance with numerical optimisation and with Fermat's forerunner for the derivative. In the case of a polynomial function p, the difference quotient $\frac{1}{h}(p(x+h)-p(x))$ may be divided out completely and then we recognize a function of x and a multiple of h. Setting $h := 0$, the function of x remains and it is what we now call the *derivative.* It is noteworthy that Fermat didn't hit the correct definition at first stroke. We use the 'error' of the famous man for didactical purposes and comment on it later on when the derivative will be defined formally.

This example is relevant since in the 20th century all physical theories were based on variational principles. This view allowed to see parallels between optics and mechanics and to free a way for quantum mechanics to amalgamate both subjects.

2.6 Kepler and the volume of barrels

When Kepler married his second wife, the wine was furnished in several barrels. But Kepler understood that the seller of the wine tried to cheat him. The volume indicated of the barrels was non-plausible to Kepler. This prompted the scientist to derive a handy formula to determine the volume of a barrel based on four measurements: The cross sections of the barrel at the bottom, the top and at mid height, and the distance between bottom and top. Keplers rule is a formula that approximates the volume of a barrel based on these data. The formula is exact, e.g., for cylinders, truncated cones, spheres and their segments or spherical zones, and in general it provides good approximations for many practical applications.

About teaching Kepler's method may be rediscovered in school. A CAS calculator and scaffolding allow to concentrate on the essential steps which consist of:

- interpolate the measures of the three cross sections quadratically.
- integrate a quadratic function over an interval using discrete approximations and idealisation by limits.

It is worthwile to extend Keplers rule and to discover *Simpson's rule.* It provides us with an opportunity for an exercise in programming an early example of a numerical procedure. This leads to first experiments in what we shall call *numerical integration* only after a systematic categorisation of all the diverse examples to be given in the sequel.

By the way, Kepler was among the first to profit from the then novel use of logarithms. Without these tables, his lifetime might not have sufficed to decypher the laws of planetary motion based on the records of the best astronomical observer of his times and his predecessor at the court of Prague, Tycho Brahe.

2.7 Aristotle and Galileo

Aristotle was an authority and part of his prestige derived from the fact that he was the teacher of Alexander the Great. Artistotle's philosophy embraced also an early form of natural science which dominated what was taught, learned and believed in European schools and universities well through the Middle Age. Aristotle claimed that a falling object accelerates in such a way that the speed is proportional to the length of the path coverd. Galileo contested this claim and was lead to think and experiment with falling bodies. His empirical approach to physics helped overcome the imposed mistaken beliefs and stagnant understanding of the natural phenomena under the authoritative regime of traditional philosophy as well as religion. Galileo dealt with models of motion under constant acceleration and hence was able to describe the trajectory of arrows or mortar balls much better than the learned philosophers or the gunners. Galileo placed mathematics at the base of understanding nature by saying that the book of Nature lays open before our eyes but it is written in geometric figures and who wants to read has to master the *language of mathematics.*

About teaching Essentially Galileo defined mean velocity as a difference quotient of positions and [mean] acceleration as a difference quotient of velocities. The case of Galileo also shows that notions are basic to understanding rather than formulae.

2.8 Pascal and Leibniz: infinitesimals and the Calculus

Pascal, a child prodigy, found about 400 theorems about projective geometry and conic sections. Among other results he showed how to construct a tangent to a conic section $\mathcal{C}$ defined by five points through one of the given points. Call it $P \in \mathcal{C}$ and *imagine* what happens in the following procedure. Step 1: construct a secant line through P and an auxiliary point $Q \in \mathcal{C}$. Step 2: move point $Q \in \mathcal{C}$ towards P and observe what happens to the secant lien. In this perspective, one may catch the seductive idea that the tangent to $\mathcal{C}$ in point P is a line connecting P with itself as the limiting case of a secant between 'immediately neighboring' points $P \approx Q$ both on $\mathcal{C}$. The idea that tangents are limiting cases of secants must have been somehow in the air. Or not? It is also known that Leibniz on a diplomatic mission visited Paris and met Pascal. So we might speculate what they talked about. A fact is that Leibniz invented a method of computing tangents for almost every curve known at his time by using the *somewhat mysterious differentials.* Leibniz's differentials were conceived as *positive but infinitely small.* His concept is suggestive but cannot be grasped easily. If 'number' means fraction there is no place for infinitesimals. Infinitesimals contradict the so called archimedian property of real numbers. A well established notion of real number was lacking at the time. The geometric substitute, a straight line, was diffuse enough to allow speculations about the local structure of a continuum. Leibniz successfully developed a Calculus for differentials based on an extension of algebra to include operations with differentials and a pertaining convincing notation. Leibniz was focussed on syntax and he was successful and competitive with the leading mathematicians of his time. Although he was a lawyer and librarian by profession, his creative mind made him a universal genius. His character brought him into conflict with others of similar stature.

About teaching In our introduction, we paraphrase the computation of tangents in guise of *local linear approximations* following the two steps of the archimedian trick. The slope of the tangent to the graph of a function f is gotten by first computing the slope of a secant.

$$DQ(f, x, \Delta x) := \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

In the second step, we try to idealize and let $\Delta x \to 0$. Of course we discuss the problem of existence and we find that in the case of polynomials (of low degree), algebraic manipulations suffice to find the limit. By the way, this is Fermat's view on the problem.

Our first aim is to be able ot find derivatives for all polynomials. This is achieved by proving two results of the Calculus: The rules for derivatives of sums and of products. Calculus now suggests as corollaries the rules for integral powers and even fractional powers.

It is noteworthy that Pascal constructed one of the early mechanical calculators, cf. [PAS]. Did he show it to Leibniz? Leibniz propagated the idea that thinking could be formalised and hence mechanized with drastic consequences: Stop quarrelling – Let's compute!

To some extent, a CAS makes Leibniz's vision to be true. But Daniel Richardson in his 1968 thesis put an end to Leibniz's dream. Some essential questions are algorithmically undecidable in the class of elementary functions a CAS is supposed to operate on, cf. [RIC].

2.9 Newton's Principia: New Maths for new Physics

While Kepler found his laws of planetary motion by analysing empirical data, Newton made a claim about the law of gravitational attraction. However, a problem remained, the attraction exerted by masses escaped laboratory experiments in Newton's generation. The celestial bodies with their huge masses might be used to corroborate the claim. Newton's idea was to deduce Keplers laws of planetary motion as a logical consequence under the hypothesis of his universal law of gravitation. This is what Newton finally achieved. Still he had to invent new mathematical tools in order to finish the proof. Finally, Newton invented his own version of derivatives and integrals and he based mechanics on axioms and differential equations. With respect to his masterpiece, the *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* containing the solution of the *two body problem*, he was modest enough to remark 'I stood on the shoulder's of giants', acknowledging thus the role of many forerunners in a long tradition.

Newton's presentation however eschewed this new form of mathematics and rather relied on geometric arguments. (Was this a 'didactical' concession to his contemporaries or rather a protection for the uniqueness of his powerful invention?) Although he introduced the new discipline of *dynamical systems* with his celestial mechanics, we recognise this fact only with hindsight.

Finally Newton and Leibniz disputed bitterly over the priority of the invention of the Calculus.

About teaching While teaching Analysis to beginners, we profit from the occasion and introduce some connections between mechanics of mass points and Analysis. We consider a mass point moving along the real line. Its *position* x is a function fo time $x : t \mapsto x(t)$. From any given position function we may tentatively derive a *velocity* function in two steps.

- Choose an interval $\Delta t \neq 0$ and define the mean velocity for the Interval $[t, t + \Delta t]$ by the difference quotient

$$\bar{v}(t, \Delta t) := \frac{1}{\Delta t} \cdot (x(t + \Delta t) - x(t))$$

- Remove a possible discretisation error by taking the limit $\Delta t \to 0$ and define

$$v(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v}(t, \Delta t) \quad \text{if this limit exists}$$

Remarks

1. Note that here the derivative naturally appears as an *operator* producing functions from functions, rather than a prescription to produce numbers. This is essential for the next step where acceleration is derived from velocity by an analogous procedure.

2. Acceleration is the derivative of the velocity function:

$$a(t) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \cdot v(t + \Delta t) - v(t)) \,, \text{ if this limit exists}$$

3. Standard notations

   (a) Newton: $v = \dot{x}, \quad a = \dot{v} = \ddot{x}$
   Today, this notation is reserved for derivatives if the variable is time t.

   (b) Leibniz: $v = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$

   (c) Cauchy: For all t in the domain of the functions:
   $v(t) = x'(t), \quad a(t) = v'(t) = x''(t)$

4. Newton's law:
   $F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x}$ is a *differential equation* for the function $x : t \mapsto x(t)$.

5. Galieo's inertial law has the form $m \cdot \ddot{x} = 0$. This implies that either $m = 0$ or $\ddot{x} = 0$. In the second case, Galileo claims this to be equivalent to $v(t) = v_0$, a constant.

   A mathematical proof of this claim requires two arguments. The derivative of a constant v_0 vanishes as any beginner who understood the concepts will agree. The opposite conclusion, however, requires all the major theorems of elementary Analysis, possibly disguised in the fundamental theorem of Analysis.

6. Any free falling mass without air resistance obeys a law of the form $\ddot{x} = g =$ constant according to Galileo.
   We may check as an exercise that $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g \cdot t = g$ and that $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{1}{2} \cdot gt^2 = g \cdot t$, but for all constants x_0 and v_0 the functions $x : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0$ are solutions too. How can we see that no other solutions exist? Could mathematics possibly produce solutions that Galileo missed or, even worse, that nature forgot to display?

   Those who venture considering the vector version of this example will find the parametrisation for a parabolic flight under a constant acceleration.

3 Elementary Analysis: approximate to exact or discrete to continuous – back and forth

3.1 Discretisation

A problem involving some continuum implying infinitely many operations is reduced to a finite one by discretising. Discretisation creates some errors and loss of information. The problem is to keep discretisation errors under control. If this can be done sucessfully, a second step will follow and purge the effects of discretisation. (cf. Idealisation, below)

Mean values of finitely many values sampled from some continuous function.

Riemann sums for a function sampled at finitely many points.

Difference quotients as the mean specific rate of change over an interval.

Function plotting is always based on finitely many samples.

Difference equations e.g., Euler's method, sampling a vector field

3.2 Idealisation

The errors of discretisation may often be removed by taking a suitable *limit.* Here some general properties of functions like continuity or differentiability or smoothness are usually required.

Basic Analysis defines and limits its range of validity to such cases where the two principles of discretisation and idealisation may be combined sucessfully. Counter examples may serve as a warning. However their mathematical treatment easily exceeds the possibility of a first course. Or remember the advice of D'Alembert in this context: Allez en avant et la foi vous viendra.

4 Key notions, examples, and comments

Machine numbers, rational numbers, and real numbers Every student working with a computer, even a handheld calculator, ought to be confronted with some of the unavoidable difficulties of numerical computing: roundoff, underflow, overflow as consequences of the finiteness of the set of machine numbers. Similarly, despite the famous pythagorean dogma concerning the non-existence of irrationals, the rational numbers do not suffice and the real numbers, which are needed for Analysis to work, typically have no names and pop up like random numbers from an uncountable set.

The Derivative exists if the limit of the differential quotients exists. The term 'derivative' has several interpetations.

- value of a function
- a function
- a linear operator on function spaces.

The Calculus refers mainly to the rules that hold for computing the derivative of some elementary functions based on rules for certain primitives.

The Integral comes in various forms as

- the limit of Riemann sums defines the definite integral.
- integral function $I_f : x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$
- indefinite integral, the solution set of a differential equation $F' = f$ for a given continuous function f.
- a primitive function F satisfies $F' = f$ and is an element of the indefinite integral.

All these terms are connected by the statement of the Fundamental Theorem of Analysis. The definite integral of a continuous function may be defined as a limit of Riemann sums. The indefinite integral is the solution of a differential equation and the Fundamental Theorem guarantees the existence of primitive functions with continuous derivatives. Moreover it describes how to get primitive functions based on definite integrals and it parametrises the indefinite integral, i.e. all the solutions of the differential equation $F' = f$. The proof of this central result resides on all major theorems of elementary Analysis.

From the point of view of the Calculus, the role of the Fundamental Theorem rather gets belittled when reduced to its role in computing a definite integral with the help of a primitive function. Although primitive functions exist for all continuous functions given on some interval, typically primitive functions of elementary functions are not elementary any more. Here the Calculus and hence any CAS come to some unsurmountable limits. Thanks to technology, *numerical integration* with the help of a computer becomes an alternative. However this alternative typically involves sampling and discretization and some errors that cannot be removed at will by computing a limit.

Sampling and [spline] interpolation The use of graphing devices calls for some remarks about sampling. Sampling is necessary for computer graphics. It may cause artefacts that illuminate the problems of discretisation in this case. Similarly function tables involve sampling to. The reconstruction of approximate values often is done by interpolation. Interpolation is an alternative for closing gaps *independent* of the concept of limits.

Differential equations in the context of vector fields and dynamical systems are a valuable addition to basic Analysis. In view of the role ODEs played in the genesis of Analysis, some differential equations ought to belong to any introduction to Analysis. Hereby the graphing capability and *numerical simulation* might be more illuminating to a general audience than the bag of tricks offered by Calculus and of use in selected cases only.

Mean values and the Fundamental Theorem of Analysis The mean values of a continuous function may be computed either by a definite integral or by a difference quotient (involving a primitive function). Both methods lead to the same answer. This is the essence of the Fundamental Theorem of Analysis.

Limits to Analysis All cases where discretisation and idealisation by limits fail, are excluded from basic Analysis by definition. A noteworthy example where the tools of basic Analysis do not suffice are *fractals.*

Beyond the introduction It is clear that students knowing only the basic notions would be ill prepared for further studies an the university level. Some of the following subjects will be dealt with as time and students' abilities permit.

- Polynomial functions and their special properties, e.g. interpolation, numerical integration, numerical differentiation.
- rational functions
- exponential functions, logarithms and models for growth or decay
- trigonometric functions and models for vibrations
- parametrised curves and motions of mass points
- some examples for vector fields and ODEs, population models, linear ODEs with constant coefficients, vibrations.

5 Conclusion

Calculus may be automatised. This may be one reason for Calculus to be taught quite sucesssfully by drill and practice, by programming humans, so to speak. Our students deserve more general education than algorithms and algebraic rules. The discussion, motivation and careful introduction of basic ideas and specific notions and their interrelationship is the fabric of Analysis which cannot be left to an automate. Here learning is based on gaining understanding and insight. We have a theory to pass to the next generation. This theory has two sides to consider:

- *Semantics* is the essence of Analysis, a part of mathematics dealing with the real numbers, functions and limits. For the sake of general education the *Archimedian trick* based on *discretisation* and *idealisation* is the center piece. It explains why and how many of the applications of Analysis work. Why can the derivative be used to compute instantaneous velocity, instantaneous acceleration, the slope of a tangent, the density of a mass distribution? Why do we need integration to find the total charge from a charge density? Why is there a well defined mean for any continuous function and any finite interval of its domain? Why can we use integration for measuring curve length, areas as well as volumes? Why can we use the derivative to determine the surface of a sphere? Why can the surface of a sphere also be determined by integration? How can we find the centre of mass of a mass distribution in a 'decent' finite domain? What about smooth curves compared to fractal shapes? And why did it take humanity and the best of its thinkers 2000 years or more to develop Analysis out of greek mathematics? Why are there tasks in Analysis no computer may solve exactly, and what prevents computers from operating on typical real numbers?

- *Syntax* is the essence of the Calculus which reduces operations from Analysis to *finite algebraic operations.* This algorithmic part avoids dealing with infinities and even the computation of limits is passed on to algebraic manipulations thanks to the Bernoulli-Hôpital rule. This syntax is essential and is at the heart of the tools of modern science and technology. However it is not expected to convey insight and understanding and by its finitistic nature it cannot reach the fundaments of Analysis. Moreover, the available computational power not only allows the construction of reliable CAS software. Numerical procedures usually do not follow from Calculus but rather need the insights of Analysis and algorithmics to be constructed and applied correctly.

- The Calculus is a powerful tool as long as we stay in the range of *elementary functions* only. However, the elementary functions are scarce exceptions in the function spaces Analysis deals with. Moreover, the elementary functions are closed with respect to the derivative but *not* with respect to primitive functions. An exclusive use of technology bears the risk, to convey the naive idea that all practically relevant functions are elementary.

No engineer would want to turn back to the slide rule or the trigonometric tables. The tools of the 19th century are definitely outdated. We need creative minds developping and using new tools for the present and the future. Calculus will be among these tools, and Analysis will remain its basis. However it has to be augmented by numerical and statistical methods based on corresponding software and hardware which enable substantial amounts of data to be exploited. Up to the automatised data collection and data processing, data was scarce.

The Calculus never showed a big appetite for data. Its central and unrivalled position in the pre-information age may be a consequence of this fact.

Let's open the way for a Calculus enhanced and combined with other algorithms taking advantage of the treasures of big data. This aim cannot be reached without understanding the basic ideas of our intellectual, technological and material tools and heritage.

The use of a CAS in the teaching of mathematics may save some time necessary to dive into the interesting genesis of ideas leading to Analysis. Education that neglects important ideas in favor of drill and practice has to be questioned. We may choose to show big ideas to the next generation with the help of technology like graphing computers, CAS, tablets and more to come. Technology is part of our culture but it will continue to change in contrast to the long lasting and deep ideas in mathematics. We have to take our time to TEACH FUNDAMENTAL IDEAS AND DEMONSTRATE THEIR VALUES ALSO IN APPLICATIONS.

Final comments and pointers to the literature

I have given an account for teaching Analysis and the Calculus according to the genetic approach and my own experience. In line with my motivation, the focus is on a special approach to teaching Analysis at the pre-university level. My message is the combination of the genetic method with the extensive use of technology based on scaffolding and the blackbox–whitebox principles.

I freely admit a somewhat sloppy use of hints to historical facts. The history of the subject is dealt with adequately in [ARN], [EDW], [H&W], [STI].

The *genetic method* was propagated first by Otto Toeplitz since 1926. An authoritative source is [TOE], based on Toeplitz's introductory courses at the university level. David Bressoud, in his preface to [TOE], praises the method as an antidote to the undesired early pseudo-formalisation introduced by New Math. Another text with similar orientation is [SIM].

References

[ARN] V.I. Arnol'd, Huygens & Barrow, Newton & Hooke, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 1990, ISBN 3-7643-2382-3

[EDW] C. H. Edwards, Jr., The Historical Development of the Calculus, Springer Verlag, New York, Heidelberg, 1979, ISBN 0-387-90436-0

[H&W] E. Hairer, G. Wanner, Analysis by Its History, Springer Verlag, UTM, Readings in Mathematics, New York, Berlin, 2000, ISBN 0-387-94551-4

[PAS] B. Pascal, Pensées (1670), Chapitre III, no 262, no 470, no 471

[RIC] D. Richardson, Some unsolvable problems involving elementary functions of a real variable. Journal of Symbolic Logic 33 (4), pp. 514 -520.

[SIM] G.R. Simmons, Calculus Gems, McGraw-Hill, New York, 1992, ISBN 0-07-057566-5

[STI] J. Stillwell, Mathematics and Its History, Springer Verlag, New York, 1989, ISBN 0-387-96981-0

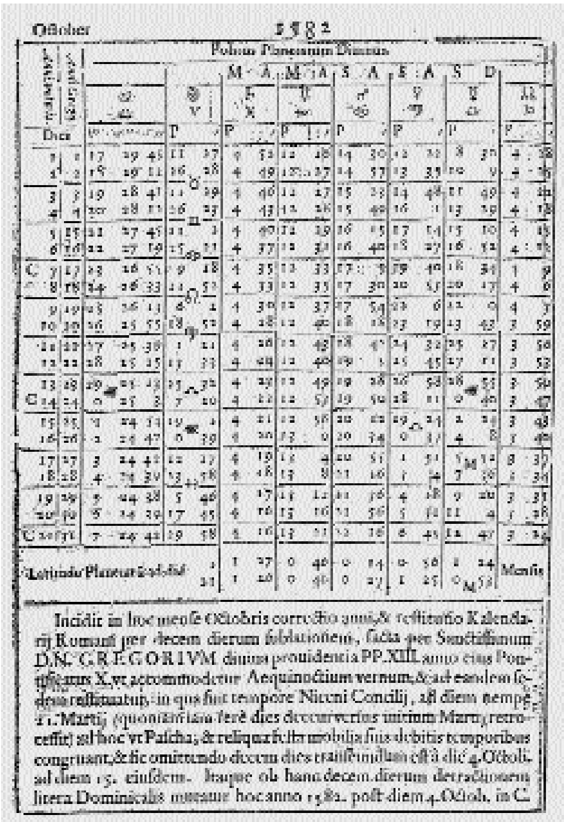
[TOE] O. Toeplitz, The Calculus, A Genetic Approach, The University of Chicago Press, Chicago, 2007, ISBN-13 978-0-226-80668-6

16de T3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Without Data there is no Science

Ian Galloway



Without Data there is no Science

Ian Galloway

Abstract
Science is an empirical subject. Its entire philosophical edifice is founded on interpreting experimental evidence in order to explain a physical process or justify a hypothesis. Since experimental evidence implies the existence of data it does not seem inappropriate to say that without data there is no science. One can go further and argue that data must consist of measured quantities using units which can be replicated by other experimenters. Observations are not enough. For example it is no use measuring a light spectrum by describing the colours as this is purely subjective. Newton famously invented the colour indigo so that there were seven named colours in the spectrum. What is needed is a measure of the colour, its wavelength. Measurements are needed so that we can apply mathematics to their analysis. Data are numbers with units. Historically Aristotle is noted for not experimenting which probably explains why science did not advance under his tutelage. Archimedes is considered the father of science and his era was not recaptured until the middle ages and the renaissance. Very few human activities take place today without them being based on data collection: cooking, agriculture, textile work, engineering, policing, sport, construction to name a few. It is inconceivable to-day that we would engage with any activity except politics without collecting data, and look where that has got us. It is worth pointing out that although there may be no science without data it is perfectly reasonable to have science without hypothesis. Again Newton set the stage here by declaring famously when asked to explain his Law of Gravity, "Hypotheses non fingo".

> I have not as yet been able to discover the reason for these properties of gravity from phenomena, and I do not feign hypotheses. For whatever is not deduced from the phenomena must be called a hypothesis; and hypotheses, whether metaphysical or physical, or based on occult qualities, or mechanical, have no place in experimental philosophy. In this philosophy particular propositions are inferred from the phenomena, and afterwards rendered general by induction.
>
> Isaac Newton, second edition *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* 1713.

What are data?

This is a difficult question as dictionary definitions do not readily support my idea that data are measurements. Data are defined as

> *Factual information, especially information organized for analysis or used to reason or make decisions (OED and Freedictionary)*

So I was happy to find data defined as

> *factual information (as measurements or statistics) used as a basis for reasoning, discussion, or calculation (Merriam-Webster)*

Data are also variously described as

> *information output by a sensing device or organ that includes both useful and irrelevant or redundant information and must be processed to be meaningful*

and

> *information in numerical form that can be digitally transmitted or processed*

Thus we see that data today are conflated with information of a very general nature as all written material and art forms can be digitised. Note that the writer of the last dictionary definition describes information which can be digitally transmitted or processed as being numerical in form.

We further note that (in the penultimate definition above) data can be information which is output by a sensing device and we should not be misled into believing that all information which can be processed has to be digital!

For the purposes of this paper data are measurements which can be used as a basis for reasoning, discussion or calculation. This does not exclude the digital variety and indeed this conference has a particular focus on digital data. I would assert that data-logging has in fact become synonymous with digital data capture and storage. If data are measurements we are therefore drawn into understanding what is meant by a measurement.

What is a measurement?

Put most simply when one measures something or a quantity, one counts. Therefore a measurement is a number related to a quantity. Early Babylonians were masters of observational skill. They also devised number systems enabling them to count. We see here the beginning of the connection between mathematics and science. The Babylonian observational and counting skills were put to most use in their study of astronomy. They counted the days, months and years between occurrences of celestial events and established patterns of behaviour enabling them to predict with great accuracy when eclipses and sightings of the planets would occur. There was no attempt to provide explanation of the behaviour and such activities would have to wait until the advent of the Greek civilisation.

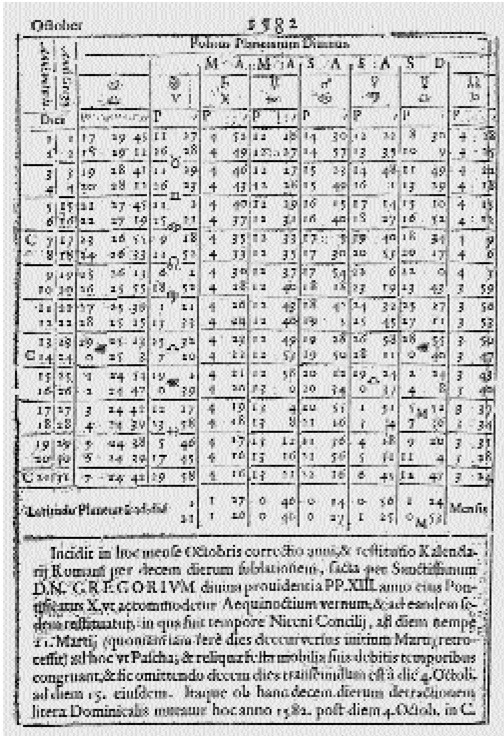
Picture shows the "Table of reciprocals of 60" (2100 BC to 2000 BC) from southern Iraq. The central numerical system which underpinned 3,000 years of daily Mesopotamian calculation was the sexagesimal system - counting in 60s, our division of hours and minutes into 60 units is a direct descendent of Babylonian systems of counting and measurement. This exhibit is on display at the Hong Kong Museum of History's "The Wonders of Ancient Mesopotamia" exhibition.

The Greeks measured angle length, weight and time, (Roche, 1998). That is to say these measurements were quantified and there were procedures for carrying these measurements out. The quantified concepts were largely derived from astronomy and commerce. Concepts such as density (despite Archimedes), acceleration, temperature loudness and brightness (of stars) were not measured even though they were considered to be quantities. For example density remained understood simply as the degree of compaction of a body, “dense differs from rare in containing more matter in the same cubic area [sic]”, *Aristotle.* Temperature remained unmeasured even though philosophers such as Galen (200 CE) defined medical scales in terms of hotness and coldness. Galen’s scale had four degrees each of hotness and coldness, the “neutral” point being constructed from mixing an equal quantity of ice and boiling water. It was not until the seventeenth century that the first thermometer was devised. Again many physical phenomena such as electrical and magnetic attraction were observed until the seventeenth century without any attempt at quantification, let alone measurement.

It would probably be fair to say that science did not advance a great deal during the first 5000 years of recorded history without data! Nevertheless we see how progress towards the underpinnings of modern science have been made through a process of quantification and metrological development.

The beginnings of an interest in experimental work

Bishop Grosseteste was the central figure in the intellectual movement in England during the first half of the thirteenth century. He was familiar with Aristotle and Ptolemy and wrote many works on the subject of light. We see in much of his writing a synthesis of belief and reference to empirical work. For example he believed that the tides were caused by rays from the moon releasing vapours from the ocean depths and so pushing up the water. The weaker second daily tide was caused by reflection of the moon's rays back onto the earth from the celestial sphere, a fascinating mixture of observation and nonsense. There was little attempt to back up this idea with data.

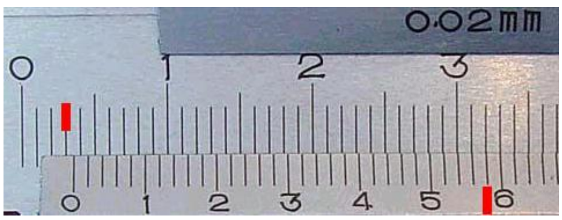

Octobe 1582
Polus Planetarum Diurnus
Latitudo Planetarum ... Mensis
Incidit in hoc mense Octobris correctio anni,& restitutio Kalendarij Romani per decem dierum sublationem, facta per Sanctissimum D.N. GREGORIVM diuina prouidencia PP.XIII. anno eius Pontificatus X, vt accommodetur Aequinoctium vernum,& ad eandem sedem restituatur, in qua fuit tempore Niceni Concilij, ad diem nempe 21. Martij (quoniam iam ferè dies decem versus initium Martij retrocessit) ad hoc vt Pascha, & reliqua festa mobilia suis debitis temporibus congruant,& sic omittendo decem dies transilitum est à die 4. Octob. ad diem 15. eiusdem. Itaque ob hanc decem dierum detractionem litera Dominicalis mutatur hoc anno 1582. post diem 4. Octob. in C.

The calendar was a different matter. The moon was never full at the right time and Easter was always in error. Grosseteste decided that an accurate measurement of the length of the solar year should be made along with a better value for the mean lunar month. Time had been of paramount importance since the early Egyptians and the water clock or clepsydra was to remain in use until the seventeenth century. It was more than three hundred years before Pope Gregory XIII reformed the calendar and removed 10 days of people's lives. Despite the sound science this was considered by the masses to be merely a trick with the numbers and so the Pope and mathematicians (Duncan, 1998) took the brunt of the rioting which followed. The importance, from a scientific point of view, of having a commonly agreed rate to the passage of time cannot be underestimated.

But it is in Grosseteste's optics that I wish to focus. Grosseteste had read Ptolemy and was immersed in his use of geometry for measurements, notably the measurement of angle. In fact the angle today is still an anomalous unit being based on an idealised geometrical figure, the circle. Grosseteste put forward an original law of refraction stating that the angle of refraction was half the angle of incidence. What is curious is that he referenced Ptolemy's construction for finding the refracted image and appears not to have carried out any experiments himself to derive any data. Without the data his scientific pronouncements were simply not valid. He was guided by the principle of experiment but not convinced by it!

Vernier

In 1631 the French mathematician Pierre Vernier (1580-1637) invented a scale which improved remarkably the precision with which a measurement scale could be read. With such a scale Hershel was able to discover Uranus in 1781 and the dimensions of the solar system were established from the transits of Venus in 1761 and 1769. Better instruments were providing data of greater precision so helping the advancement of science. (wikipedia.org/wiki/Vernier_scale)



Newton and the speed of sound

Newton was a self-declared experimental philosopher. Data forms the basis of any law or theory which can or cannot be hypothesised. Newton appears to use the word hypothesis to mean simply an idea whereas the modern meaning would be an idea which can be tested. As he was unable to test his famous Law of Gravitation for its mechanism he refused to be drawn on the nature of the gravitational interaction. All he knew was that the available data fitted the law.

The French mathematician Marin Mersenne was the first person to measure the speed of sound in 1636. He used the return of an echo and arrived at a figure that was in error (using the modern value) by about 10 percent. Newton was aware of this and other measurements for the speed of spound. He carried out his own measurements in the corridor of Trinity College and developed a formula for the speed from known theory. Unfortunately the formula yielded a value which was grossly in error. Newton set about finding out why and invented a story to explain 10% of the error. He stated that as air particles must be spaced at about 10 times their diameter, the sound travelled infinitely quickly through the particles, so that the distance actually covered by the sound was 10 % short!

This discrepancy of 20% between theory and experiment lasted for more than a hundred years and occupied the greatest intellects of the time. In 1759 Euler admitted "We know that sound is transmitted in one second through almost 1100 feet, and no one has yet discovered the cause of this excess over theory." (Finn, 1964). Eighteenth century physicists dismissed Newton's explanation for the discrepancy but were completely baffled, they had the data but were unable to relate it to known theory.

At last in 1802 Laplace described the solution to the problem. It was simply that when a sound wave compressed the air it raised the temperature as the compression was an adiabatic one. That is to say Boyle's Law was not obeyed! Laplace asked his assistant Biot to carry out measurements to discover the influence that temperature changes in compressed air would have on the speed of sound and so reconcile theory with experiment. Alas Biot was unable to do this as he was unable to obtain the necessary data. Science would have to wait on the availability of the data, but he was able to calculate the temperature needed for sound to have the speed measured. Over the next twenty years Laplace produced more than a dozen different ideas to explain what he knew qualitatively was correct. Not just Laplace, pretty well all the well known scientists in continental Europe were engaged in the debate and were all producing their own theories! The problems they encountered were beset by what was known about the nature of heat (or caloric) at the time. Finally in 1823, without recourse to any contemporary theories of heat Laplace calculated the speed of sound using the ratio of the specific heats of air at constant pressure and constant volume. The argument however persisted and even raged until James Joule fully confirmed Laplace's theory using his own experimentally derived value for the mechanical equivalent of heat in 1845.

It can be seen in this one example how data drives science, there is no science without data. From the original data in 1636 it took 209 years and countless scientists to refine scientific theory to the point where everyone was satisfied that all the questions were answered. Laplace however takes all the glory as he provided the correct explanation. Confirmation of the idea came with further data and changes to scientific theory. This is the power of science, a remarkable synthesis of experiment, mathematics and creative thought to explain the behaviour of the world around us.

What next?

Data has discovered the Higg's Boson and confirmed theory, at least for the moment! Data is driving the science behind global warming, itself a 200 year old story beginning with Fourier. Astronomical data suggests that much matter is missing and even more energy has not been accounted for. Theories will be devised and debated until the matter is resolved to everyone's satisfaction perhaps 200 years into the future! Without data there is no science.

References

Crombie, A.C. 1996. Science Art and Nature in Medieval and Modern Thought. The Hambleden Press, London. pp 44-46.

Duncan, David E., 1998. The Calendar. 4th Estate Ltd, London. pp 288-291.

Finn, Bernard S., 1964. Laplace and the Speed of Sound. ISIS, 1964,Vol 55, No 179, pp 7-19

Roche, John J., 1998. The Mathematics of Measurement. The Athlone Press New York. pp 28-31

http://en.wikipedia.org/wiki/Vernier_scale accessed 2 August 2013

T³ EUROPE

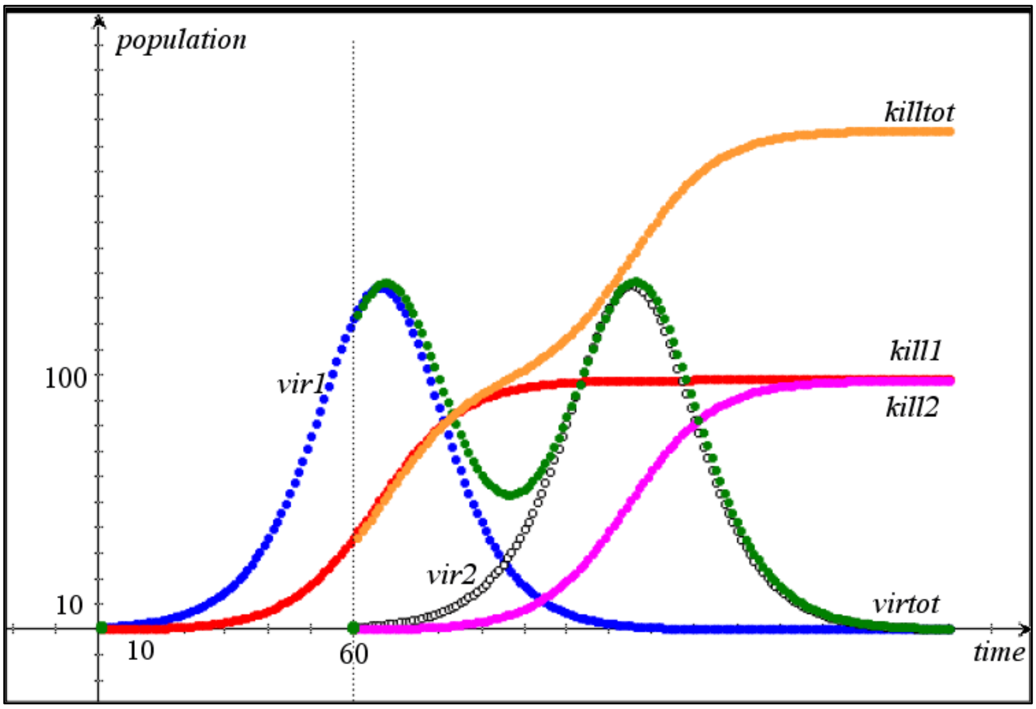
16de T3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Difference equations

a door to new mathematical applications

Helmut Heugl



TEXAS INSTRUMENTS

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Austrian Center for Didactics of Computer Algebra

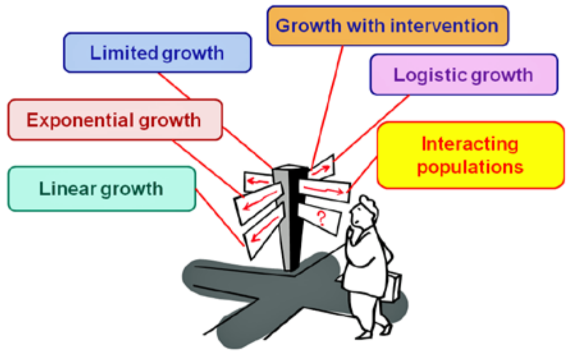
Dr. Helmut Heugl

Oostende 2013

Workshop „Difference Equations“

Part 1:

Some sorts of specific growth processes which can be described by difference equations



(1) Exponential growth

Real model	**Mathematical model**
Characteristcs: – The rate of change is proportional to the actual stock. The increase is not constant – The same time period belongs to the same growth factor. **“Word-formula”** *“New population = old population + increase”* *The increase is proportional to the actual stock*	**Difference equations** ➢ y(n) - y(n-1) = r.y(n-1) growth rate r (per step), Starting value y(0) ➢ y(n) = y(n-1) + r.y(n-1) ➢ y(n) = y(n-1).(1+r) growth factor q = (1+r); starting value y(0) ➢ y(n) = q.y(n-1)

(2) Logistic growth

Real model version 1:	**Mathematical model**
Characteristcs: – Growth depending on the value of the actual stock and the free space. – The relative change is decreasing with a growing number of individuals. **“Word-formula”** *“New population= old population + increase”* *The increase is proportional to the actual stock and free space.*	**Version 1** **Difference equations** y(n) - y(n-1) = r.y(n).(G - y(n-1)) growth rate r, growth limit (capacity limit) G, starting value y(0) y(n) = y(n-1) + r.y(n).(G - y(n-1))

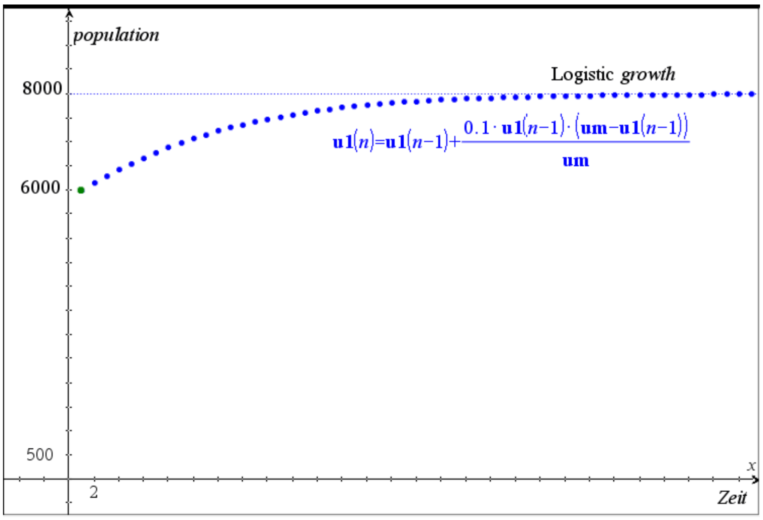
Real model version 2	**Version 2:**
Characteristcs: – Growth depending on the value of the actual population and the free space. – The relative change is decreasing with a growing number of individuals **"Word-formula"** *"New population= old population + increase"* *The increase is proportional to the actual population and the relative change of the free space.*	**Difference equations** $y(n)-y(n-1)=r\cdot y(n-1)\cdot\frac{(G-y(n-1))}{G}$ $y(n)=y(n-1)+r\cdot y(n-1)\cdot\frac{(G-y(n-1))}{G}$ growth rate r, growth limit (capacity limit) G, starting value y(0)

The differences between the two versions are the several parameters: r (in version 1) versus r/G in version 2). The parameters usually are found by experimental investigations.

Example 6: A fish population

Currently about 6000 fish are living in a lake (u0). The maximum amount of the fish population is estimated with about 8000. The growth rate of the fish population is estimated with10%.

Develop a mathematical model of the evolution of the fish population including a graphic representation of the growth process.

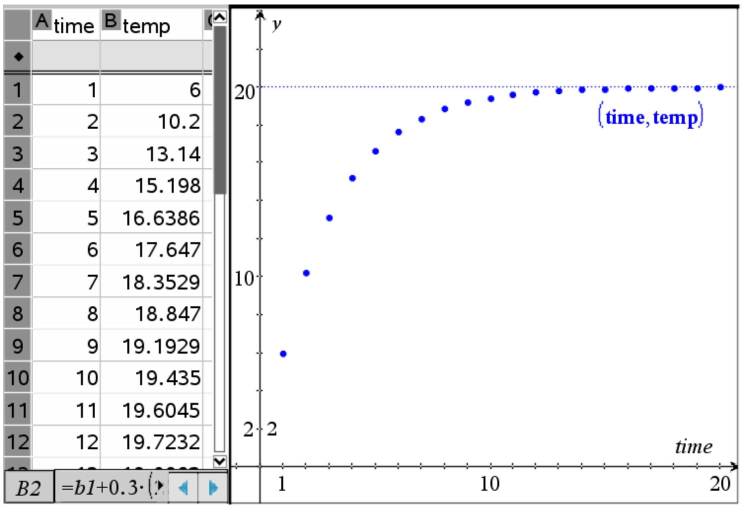


(3) Limited growth

Real model	**Mathematical model**
Characteristcs: – The rate of change is proportional to the available free space (e.g. living space for biological populations). The increase is not constant **"Word-formula"** *"New population = old population + increase"* *The increase is proportional to the available free space.*	**Difference equations** ➢ y(n) - y(n-1) = r.(G - y(n-1)) growth rate r, growth limit G, starting value y(0) ➢ y(n) = y(n-1) + r.(G - y(n-1))

Example 7: A warming process

Food in a refrigerator has a temperature of 6°C. It is warmed to the room temperature of 20°C. The growth of the temperature is 30% of the difference in temperature between the room temperature and the current temperature (at the beginning of the current minute).



Simulate the warming process including a graphic representation

(1) with the tool "list&spreadsheet"

(2) with a difference equation defined in the graphic window

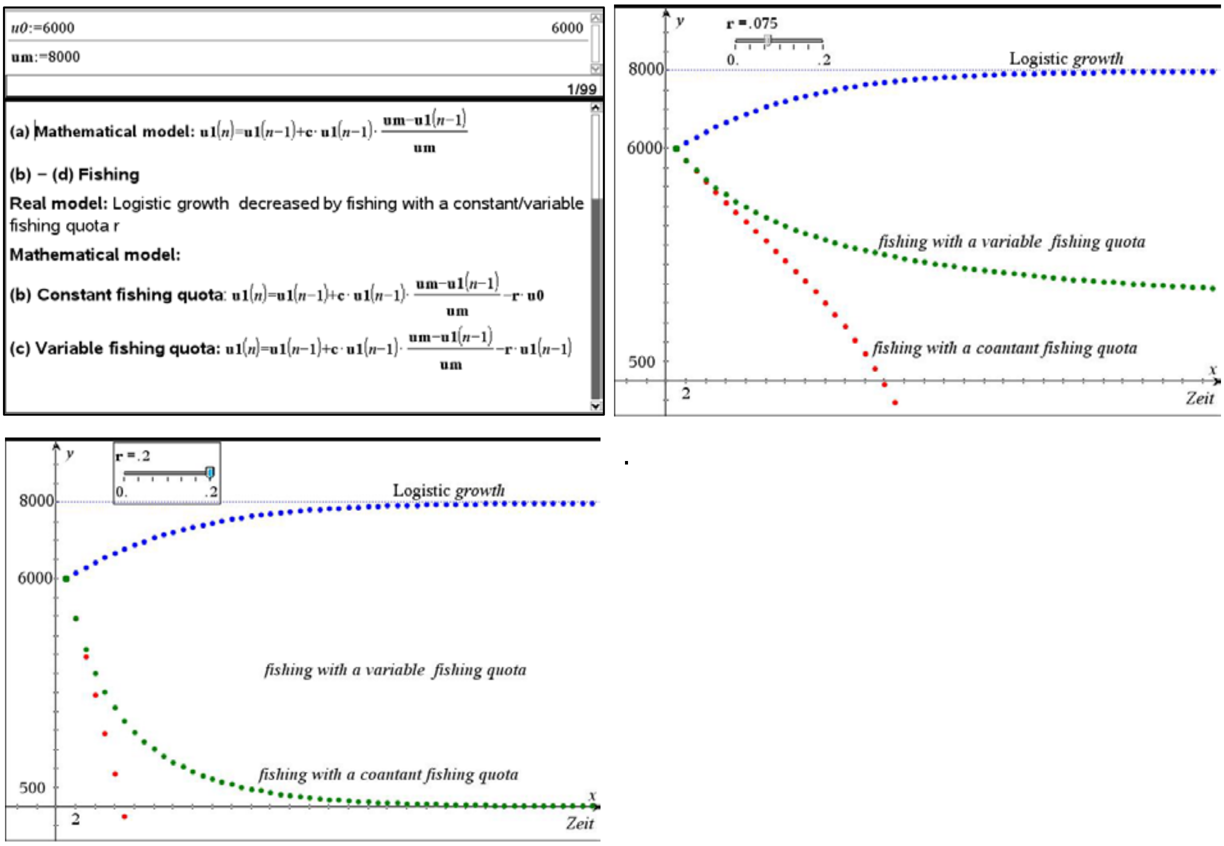
(4) Growth with intervention

Real model	**Mathematical model**
Characteristics: The population is growing exponentially and is simultaneously increased or reduced by a certain amount **"Word-formula"** *"New population = old population + increase"* The increase is proportional to the actual population and is increased or reduced by a certain value	**Difference equations** ➢ y(n) - y(n-1) = r.y(n-1) - e growth rate r (per step), reduced amount e,starting value y(0) ➢ y(n) = y(n-1) + r.y(n-1) - e ➢ y(n) = y(n-1).(1+r) – e

Example 8: Fishing

Currently about 6000 fishes are living in a lake (u0). The maximum amount of the fish population is estimated with about 8000. The growth rate of the fish population is estimated with10%.

a) Develop a mathematical model of the evolution of the fish population including a graphic representation of the growth process.
b) "Constant fishing quota": The agreed fishing quota is 7.5% of the population at the beginning of the process. Describe the development of the fish population by using a difference equation in the graphic window.
c) "Variable fishing quota": The agreed fishing quota is 7.5% of the current population. Describe the development of the fish population by using a difference equation in the graphic window.
d) Define a slider for the percentage rate r (0<r<0.1) and change the fishing quota starting with 7.5%. Interpret the development of the fish population for a constant and a variable fang rate.



(5) Growth of interacting populations

Often two or more populations influence each other. In the following we regard two populations B_k and Rk. Concerning the interaction between the populations we can differentiate several scenarios.

3 Models of main sorts of interacting systems:

- **Predator-prey relationship**

  The population B_k promotes the growth of R_k; on the other hand R_k impedes the growth of B_k

  $B_{k+1} = q_1.B_k - d.R_k.B_k$

  $R_{k+1} = q_2.R_k + c.R_k.B_k$

- **Competition relationship**

  Every population B_k and R_k impedes the growth of the other population.

  $B_{k+1} = q_1.B_k - d.R_k.B_k$

  $R_{k+1} = q_2.R_k - c.R_k.B_k$

- **Symbiosis**

  Every population B_k and R_k promotes the growth of the other population.

  $B_{k+1} = q_1.B_k + d.R_k.B_k$

  $R_{k+1} = q_2.R_k + c.R_k.B_k$

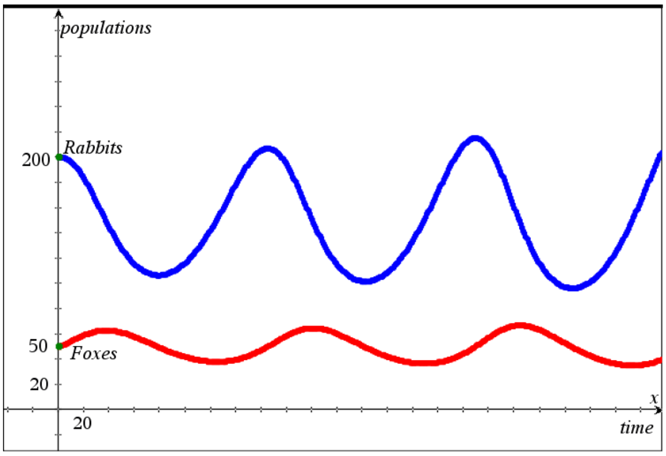
Example 9: Foxes and rabbits – a predator-prey problem

A rabbits population is annually growing with r=5%. Rabbits are hunted by foxes. The subsequent decrease of the rabbit population is proportional to the number of rabbits and foxes (kr=0.001).

The number of foxes depends on the number of rabbits. Without finding rabbits the fox population would annually decrease with s=3%. The increase of the fox population caused by rabbit hunting is proportional to the number of rabbits and foxes (kf=0.0002).

At the beginning 200 rabbits and 50 foxes would live in the district.

Describe the development of the two populations by using difference equations in the graphic window.



Example 10: HIV and the Immune System - A Mathematical Model [Lechner,1999]

- **AIDS** ⇔Acquired Immune Deficiency Syndrome
- **HIV** ⇔ human immunodeficiency virus),
- A **cytotoxic T cell** (also known as **killer T cell**) is a T lymphocyte (a type of white blood cell) that kills cells that are infected with viruses.

The terrible fact is that HI-viruses are that `successful" because their replication is susceptible to mistakes. For every mutated virus the immune system must create new specific killer cells, which can only fight this special kind. **The resistant cells act as *specialists***. On the contrary all mutating viruses can destroy *all* kinds of resistant cells against **HIV** or at least impair their function. They **work as *generalists***.

If a certain variety of viruses is exceeded, the immune system finally loses control of them and AIDS breaks out. In this way the number of virus cells increases sharply whereas the number of immune cells drastically decreases.

In school it is impossible to develop mathematical models for any numbers of mutants, and it is not so easy in general either. What we can do in mathematics education is to start with simple models of one or two mutants by using the fundamental competences about growth processes and especially about interacting systems. J. Lechner developed a program using voyage 200 for 11 mutants. Simulating needs about one hour!

The simulation of these models allows an act of reflection about the real situation.

Simulation 1:

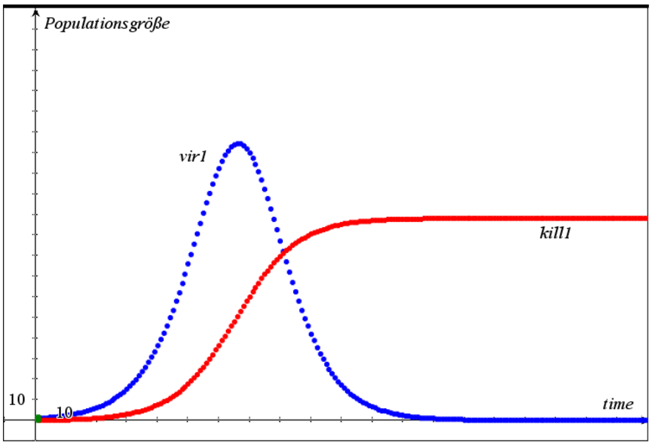
Let's start with a trivial model with only one type of virus. The difference equations are developed by using the “word-formulas” of the interacting process:

Virus 1	u1(n)=u1(n-1)+r*u1(n-1)-p*u1(n-1)*u2(n-1)	u1(0) = 1; 0≤n≤200
Killer T-cell 1	u2(n)=u2(n-1)+s*u1(n-1)-q*u1(n-1)*u2(n-1)	u2(0) = 0; 0≤n≤200

According to [Lippa, 1997, Nowak, 1992] the following parameters are realistic:

- The rate of increase of the virus. r = 0.1
- The efficiency of the immune cells in their fight of resistance. p = 0,002
- The factor of proportionality s describes the increase of the resistant cells, which is generated by the mutant of the viruses. s = 0,02
- The factor *q* characterizes the aggressiveness of the viruses. q = 0,00004

One step in time represents 0,005 years (i.e. 200 steps describe a year).

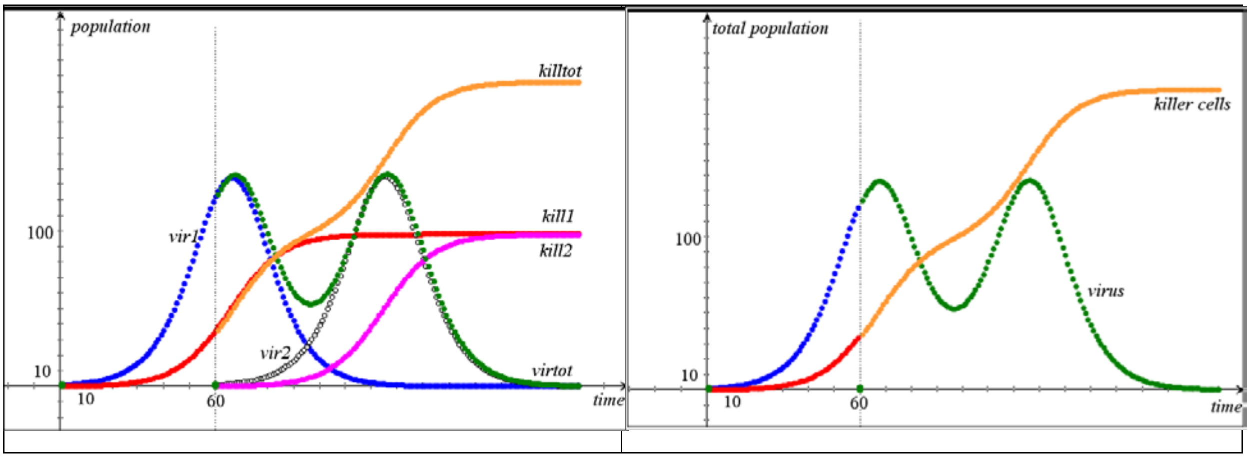


The result shows that if there exists only one mutant of the virus the resistant cells can be successful.

Simulation 2:

Now we want to work with two mutants, the second of which shall appear after 60 steps of time (which means after about 3.6 months). We have to consider, that the virus cells are generalists and therefore can fight all sorts of cytoxic T-cells while these cells are specialists and can only defeat a certain virus mutant.

Virus 1	u1(n)=u1(n-1)+r*u1(n-1)-p*u1(n-1)*u2(n-1)	u1(0) = 1; 0≤n≤200
Killer T-cell 1	u2(n)=u2(n-1)+s*u1(n-1)-q*u1(n-1)*u2(n-1)	u2(0) = 0; 0≤n≤200
Virus 2	u3(n)=u3(n-1)+r*u3(n-1)-p*u3(n-1)*u4(n-1)	u3(0) = 1; 60≤n≤200
Killer T-cell 2	u4(n)=u4(n-1)+s*u3(n-1)-q*u5(n-1)*u4(n-1)	u4(0) = 1; 60≤n≤200
Virus total	u5(n)=u1(n-1)+u3(n-1)	u5(0) = 1; 60≤n≤200
Killer T-cell total	u6(n)=u2(n-1)+u4(n-1)	u6(0) = 1; 60≤n≤200



Example 11: The sterile insect technique – SIT [Timischl, 1988]

An insect population with u_0 female and u_0 male insects at the beginning may have a natural growth rate r.

To fight these insects per generation a certain number s of sterile insects is set free.

Investigate the effect of the method SIT by interpreting the growth function for several parameters u_0, r, s.

- Model assumption: r=3; s=4
- Initial values: u_0=1,9; u_0=2,2; u_0=2,0

Modeling – a translation process

$u_{new} = r.u_{old}$ Unlimited growth

$u_{new} = r.u_{old}\cdot\frac{u_{old}}{(u_{old}+s)}$ Relativ rate of fertile insects

$$\boxed{u_{new} = \frac{r.u_{old}^2}{(u_{old}+s)}}$$

The new population is proportional to the old population (with growth rate r) and to the relative rate of the fertile insects.

Use the “web mode” to investigate the convergence of the sequence, calculate the fixed points and determine the type of fixed point also by using the fixed point theorem.

A ***fixed point*** x* (sometimes shortened to ***fixpoint***, also known as an ***invariant point***) of a function f is a point that is mapped to itself by the function ⇔ f(x*) = x*

Is x* an ***attractive fixed point*** *of a difference equation* $x_n = f(x_{n-1})$ *then the sequence converges to x*:* $\lim_{n\to\infty} x_n = x^*$

The fixed point theorem

A fixed point x* of a difference equation $x_n = f(x_{n-1})$ *(f is continuous and differentiable) is an attractive fixed point, if* $\left|f'(x^*)\right| < 1$ *and is distractive if* $\left|f'(x^*)\right| > 1$

Part 2:

Long-term behaviour of linear difference equations

Definition: $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$ are called linear difference equations

Mathematical models of the following growth processes are linear difference equations:

	Linear difference equation $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$	
Exponential growth	$y_{n+1} = q \cdot y_n$	a = q and b =0
Limited growth	$y_{n+1} = y_n + r \cdot (G - y_n)$ $y_{n+1} = (1\text{-}r) \cdot y_n + r \cdot G$	a = (1-r) and b = r·G
Growth with intervention	$y_{n+1} = y_n + r \cdot y_n - e$ $y_{n+1} = (1+r) \cdot y_n - e$	a = (1+r) and b = e

Calculate the fixed point y* of the difference equation (y* = f(y*)) and investigate the long-term behavior of the difference equation for following cases (y_0:is the initial value):

	$y_0 < y^*$	$y_0 > y^*$
a > 1		
0 < a < 1		
a = 0		
-1 < a < 0		
a = -1		
a < -1		

Select the initial point in the respective interval and draw the suitable graphs in the “time mode” and the “web mode”. A possible value for b is 2, but for a>1 it is better to take b=-2.

Choose the suitable window variable; in the “web mode” it is necessary to choose “zoom square” to get the correct position of the 1st median.

Part 3:

Conjectures about adaptions of Heron's method for $\sqrt[N]{A}$

The Austrian Mathematical Society publishes so called "Math letters" (in German "Mathe-Brief") with materials for teachers dealing with several mathematical topics. This part of the workshop is a technology supported approach to the topic of Mathe-Brief Nr. 33 published by Fritz Schwaiger entitled "Babylonisches Wurzelziehen" (http://www.oemg.ac.at/Mathe-Brief/mbrief33.pdf)

Heron's method is an iterative method of approximating $\sqrt{A}$:

For A>1 and u_0=A the sequence defined by $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{A}{u_n} \right)$ is convergent and the limit is $\sqrt{A}$.

Conjecture: Is $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{A}{u_n^{N-1}} \right)$ a suitable iterative method for approximating $\sqrt[N]{A}$?

Take A = 5 and investigate the conjecture for n = 3, 4, 5:

(1) Approximating $\sqrt[3]{5}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{5}{u_n^2} \right)$

(2) Approximating $\sqrt[4]{5}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{5}{u_n^3} \right)$

(3) Approximating $\sqrt[5]{5}$: $u_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(u_n + \frac{5}{u_n^4} \right)$

The investigation should proceed in two phases:

Phase 1 (experimental phase): Draw the graphs of the sequence in the "time mode" and the "web mode". Is a convergence observable?

Phase 2 (exactifying phase): Calculate the fixed points and investigate the character of the fixed point by using the fixed point theorem.

Addition:

The fixed point theorem

A fixed point x* of a difference equation $x_n = f(x_{n-1})$ *(f is continuous and differentiable) is an attractive fixed point, if* $|f'(x^*)| < 1$ *and is distractive if* $|f'(x^*)| > 1$

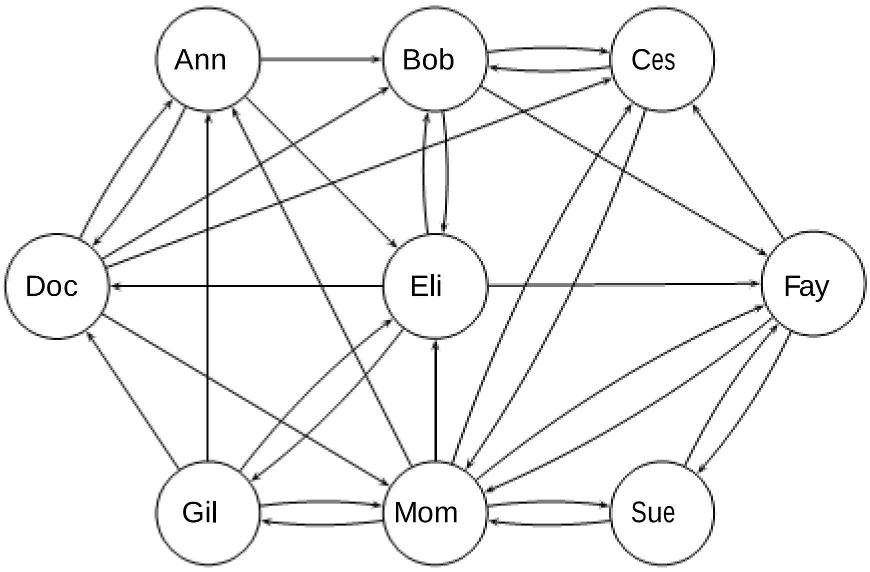
T³ EUROPE

16^de^ T³ Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Random walks on graphs, matrices, economics and monkey business

Hans Schneebeli



TEXAS INSTRUMENTS

KATHOLIEKE UNIVERSITEIT LEUVEN

Graphs, Random Walks, and Matrices

Hans R. Schneebeli

Abstract

A link is established between graphs and matrices or between random walks on graphs and stochastic matrices. It is then exploited computationally in order to solve some prototypical problems about random walks on graphs and their applications.

The toolbox of a graphing calculator or a CAS enables us to operate rather easily on matrices. The workshop presents a selection of sample problems which are in the reach of students equipped with handheld technology.

Our principal aim is to shed some light on social rankings and one of the basic ideas behind Google's PageRank. The centrepiece of this kind of application of mathematics is the Theorem of Perron-Frobenius on non-negative matrices.

Requirements Basics of linear algebra, linear maps, the fundamental theorem on linear maps, eigenvalues, eigenvectors. All computations can be done with the help of a CAS, calculator or some numerical software like Octave, Matlab, TI-Nspire.

Aims Explore the power of linear algebra applied to random walks on graphs, applications of Markov processes, stochastic matrices in various situations from climate simulations to Leontjev models for closed economies to social rankings in a group of monkeys or to Google's PageRank.

1 Random walks on graphs, and matrices

Any directed and weighted graph may be interpreted in terms of flows along directed edges between the vertices of the graph. Assume that the graph is finite and has n vertices. Then n^2 directed and weighted connections are possible between these vertices, if a connection from any vertex to itself is allowed. Now label any directed edge with a number indicating the strength of a hypothetical flow along this edge. Then a directed and weighted graph results. It may be conveniently interpreted as an $n \times n$-matrix $G = [g_{ij}]$ whose entry g_{ij} describes the strenght of the flow from vertex number j to vertex number i. This convention depends on the manner in which linear selfmaps of vector spaces are coded as matrices. Specifically, we assume a linear selfmap $g : V \to V$ to be coded in matrixform with respect to some basis $\{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\} \subset V$ in such a way that column number r of the associated matrix G contains the coordinates with respect to this basis of the image $g(\vec{b}_r)$ of vector $\vec{b}_r$. The only other notational convention for matrices as coordinate descriptions of linear maps would result in an interchange of rows and columns, i.e. replace any product $G \cdot \vec{x}$ by the transpose notation $(G \cdot \vec{x})^\mathsf{T} = \vec{x}^\mathsf{T} \cdot G^\mathsf{T}$. Both variants may be found in the literature.

A vector is called stochastic if all its entries are non-negative and sum up to 1. The set of stochastic vectors in $\mathbb{R}^n$ is the convex hull of its standard basis. An $n \times n$-matrix is stochastic if its columns are stochastic vectors. Equivalently, it describes a linear transformation mapping the set of stochastic vectors to itself. Here, we assume the standard basis to be chosen for the coordinatization of the selfmap. Any stochastic matrix $S = [s_{ij}]$ is a description of a random walk between n points or states, where s_{ij} is the constant probability for a transition from state j to state i.

Example: Winter weather in Tel Aviv During winter, the weather in Tel Aviv is either rainy or sunny. Climatologists found out that a stochastical model describes the pattern of transitions between the two states $\mathbb{S}$ or $\mathbb{R}$ at least for the sake of climatology.

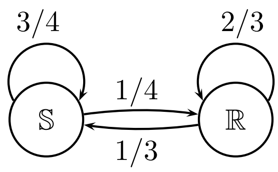


Figure 1: Markov chain model for a two state climate in winter at Tel Aviv

Problems

1. Given, on November 30th the weather at Tel Aviv is sunny and we use the climatological model for a prediction. What is the probability for
   (a) sunny weather on the following days:
   December 2nd, 4th, 8th, 16th, January 1st, January 2nd?
   (b) the same events if the weather on November 30th is rainy?
2. Draw a schematic sketch showing the stochastic vectors in $\mathbb{R}^2$ and in $\mathbb{R}^3$.
3. Why is the set of stochastic vectors in $\mathbb{R}^2$ and in $\mathbb{R}^3$ the convex hull of the canonical basis?
4. Assume S is a stochastic 3×3-matrix and $S^\intercal$ its transpose.
   (a) Let $\vec{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ and compute $\quad S^\intercal \cdot \vec{e}$.
   (b) Why is 1 an eigenvalue of S?
   (c) Is $\vec{e}$ an eigenvector of S?
   (d) Does S admit a fixed point in the set of stochastic vectors?
   (e) Which of your findings generalize to stochastic matrices acting on the stochastic vectors of $\mathbb{R}^n$?
5. Assume we cast a fair coin and observe the results.
   (a) Which directed graph represents this experiment?
   (b) Which stochastic matrix describes this experiment?
   (c) What about rolling a fair dice?
   (d) What conclusions generalize to arbitrary Laplacian experiments?

2 Linear models for closed economies according to Leontjev

Leontjev, the first Nobel laureate in economics (1973), invented two simplified models for economies. One for closed economies which will be dealt with in the sequel in a didactically simplified form. The only difference between an example in teaching linear algebra and the work of a pioneering Nobel laureate lies in the data, including data processing by one of the early electronic computers, the Harvard Mark I in 1943.

The data for the following example are pure inventions while the ones in Leontjev's model were based on an analysis of empirical data from the US market after 1935.

We are going to explain the working of Leontjev's model using a toy market based on five sectors only. In contrast, Leontjev considered a subdivision of the US economy into at least 70 sectors. The main idea of the so called closed model is to simulate the flow of money during the economic activities of the various branches exchanging goods, services, energy or information for money. The key question to be solved empirically was to find out what happens to a monetary unit in anyone of the various branches in one time step. There is a simplifying assumption: The total amount of money as well as prices are kept constant inside the market.

This results in a graph describing a lossless flow of money between the different sectors of economy. After normalising the currency we find ourselves in the situation of a Markov process and the Leontjev matrix is seen to be a stochastic one. Typically it is ergodic and after some time its dynamics settles down in an equilibrium described mathematically by a fixed point.

For the purpose of illustration our toy economy will consist of five sectors only:

1. industry
2. agriculture
3. transportation
4. energy production and waste treatment
5. information treatment and administration

Then

$$L = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.4 & 0.25 & 0.15 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.1 & 0.2 & 0.25 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.15 & 0.15 \\ 0.20 & 0.1 & 0.15 & 0.25 & 0.1 \\ 0.25 & 0.1 & 0.3 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}$$

is a Leontjev matrix for a closed economy.

Questions concerning the Leontjev toy model

1. What is the interpretation of the number 0.4 in the Leontjev matrix of the toy model?
2. How can we check that the total amount of the money circulating in the model remains constant?
3. What happens to the money after a long time in this model?

4. Make a prediction for the diffusion of a currency unit concentrated initially in agriculture into the various sectors after $8,\ 64,\ 1024$ time steps.

5. Why did the assumptions of a closed economy fit the US market around 1940?

6. Why could Leontjev be awarded a Nobel price in Economics despite the fact that the mathematical model is due to Markov?

3 Monkey business – a prelude to PageRank

Look at this picture from Mount Bukit, the top spot of Singapore. It shows monkey business in action. While father and son are chasing insects, three females interact socially. A measurable expression of social interaction in primates is the intensity of grooming. Grooming is important for social bonding by cultivating sympathy and curing one another's skin and hair. To make a link to the Leontjev model we might say that grooming is an exchange of sympathy capital or respect. From this point of view it is tempting to ask what will happen to a unit of sympathy capital in the monkey society after some time.

For an answer we need a sociogram based on the observation of the group and the mutual grooming activity levels.

Figure 2: A group of macaques, social interaction

We now introduce a measure for the intensity of grooming into the sociogram and derive the 'grooming matrix' in two steps. The intensity levels are coarsly discretized on a scale from 0 to 3. There results a matrix with non-negative entries. Now normalize the columns such that a stochastic matrix G arises

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/3 & 1/7 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/5 & 1/5 & 1/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & 0 & 2/5 & 0 & 1/5 & 0 & 2/7 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/7 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 1/6 & 1/7 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 & 2/5 & 1/3 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/5 & 0 & 1/7 & 0 \end{bmatrix}$$

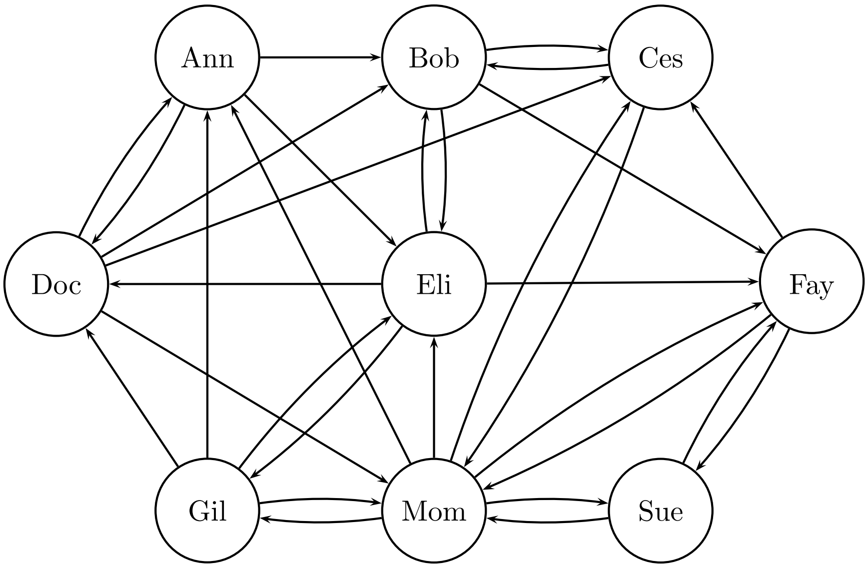


Figure 3: Sociogram of a group of nine macaques

Activities: Social ranking to PageRank

1. Check that the vector

$$\vec{v} := \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ M \\ S \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.054678.. \\ 0.155003.. \\ 0.195428.. \\ 0.053923.. \\ 0.079753.. \\ 0.141545.. \\ 0.052858.. \\ 0.183916.. \\ 0.082892.. \end{bmatrix}$$

   is stochastic and an eigenvector of G corresponding to a fixed point.

2. Argue why the maximal entry identifies the most worshiped individual of the group of macaques.

3. In what way can a social ranking among the macaques be derived from the eigenvector?

4. Imagine a sociogram for web sites on the internet. What corresponds to grooming?

5. What is an important difference between the group of macaques and the ranking of web sites on the Internet? Try to find out the additional mathematical or numerical problems that had to be overcome for a ranking such as the PageRank used in Google's search engine.

4 Some Remarks

For those interested in the mathematical background, we mention the Theorem of Perron - Frobenius. It applies in particular to ergodic stochastic matrices and guarantees the existence of a fixed point.

More generally, the theorem deals with non-negative matrices or linear maps that map the positive orthant of $\mathbb{R}^n$ into itself. Then a dominant positive eigenvalue exists and the corresponding eigenvector may be chosen such that all its entries are non-negative.

References

Anton and Rorres, Elementary Linear Algebra, Applications Version, 7th Ed, John Wiley & Sons Inc., New York 1994, ISBN 0-471-30570-7

Anton and Busby, Contemporary Linear Algebra, John Wiley & Sons Inc., New York 2003, ISBN 0-471-16362-7 [Search Engines, Page Rank, cf. pp 249-263]

S. Brin and L. Page. The anatomy of a large-scale hypertextual (Web) search engine. In The Seventh International World Wide Web Conference, 1998.

D. Carlson et al., Linear Algebra Gems, MAA Notes # 59, 2002, ISBN 0-88385-170-9

P. G. Doyle, J.L. Snell, Random Walks and Electric Networks, Carus Monograph Vol. 22, MAA, 1984, ISBN 0-88385-024-9

Arthur Engel, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Klett Studienb"ucher, Band 2, 1978, ISBN 3-12-983170-3

Gabriel, K. R. and Neumann J. (1962); A Markov chain model for daily rainfall occurrence at Tel Aviv, Quart. Jour. Roy. Meteorol. Soc. Vol. 88, pp 90-95.

Dr. E. Garcia www.miislita.com, [10.3.2012]
Matrix Tutorial 3: Eigenvalues and Eigenvectors. A tutorial on eigenvalues, eigenvectors and their properties. Includes step by step how-to calculations. An introduction to vector iteration, the Power Method and the Deflation Method is provided.

Andrew Y. Ng, Alice X. Zheng and Michael Jordan. Link Analysis, Eigenvectors, and Stability. In Proceedings of the Seventeenth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-01), 2001. [ps, pdf]

A. N. Langville und C. D. Meyer, Who is #1? The science of Rating and Ranking, Princeton University Press, ISBN 978-00691-15422-0

A. N. Langville und C. D. Meyer, Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings, Princeton University Press, 2006, ISBN 978-0-691-15266-0

Matoušek, Jiří, Thirty-three Miniatures, Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra, MAA Student Mathematical Library Vol 53, ISBN 978-8218-4977-4

C. D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM, Philadelphia, 2000

Cleve B. Moler, Numerical Computing with MATLAB, section 2.11 PageRank and Markov Chains, SIAM, Philadelphia, 2004, ISBN 0-89871-560-1 (pbk)

16de T3 Europe Symposium
Oostende

19 & 20 augustus 2013

Fermi problems, computers, and first steps in modelling

Hans Schneebeli

How many dentists are there working in Belgium?

How much energy does the earth get from the solar radiation per second?

How much kinetic energy is stored in the earth atmosphere?

How much energy is released by the falling rain in a thunderstorm?

Fermi Problems and Computers

H.R. Schneebeli

1 Two Introductory Examples

E1 How many dentists are there working in Belgium?

E2 In the earth-moon-system there is a transfer of rotational energy from the earth to the moon. There results a steady increase of the mean distance between earth and moon of 0.04 m per year.

How many Joules are transferred by this process from the earth to the moon per year?

2 Problems to be solved in small teams

Please analyse at least one of the following problems in a small team. You may ask questions. Only a minimal amount of data will be needed and provided on request.

- Which data are ideally needed, which are available?
- What simplifications would fit a Fermi problem?
- How is technology used in your approach?
- Please prepare a short group presentation for a Fermi-like approximate answer.

The Questions

1. Suppose a power plant is supplying 1 GW of electrical power by thermally driven generators.
   (a) How big is the mass equivalent to its daily output of electrical energy?
   (b) How much mass is transformed into energy per day in this power plant?
2. How much energy does the earth get from the solar radiation per second?
3. How much kinetic energy is stored in the earth atmosphere?
4. How much energy is released by the falling rain in a thunderstorm?
5. There are various claims regarding the rise of the ocean levels since the year 1900. A quick look at various sources gives the following results in meters

   0.2 0.25 0.35 0.5 0.6 0.65 0.7 0.75 0.8

   (a) List the effects that may cause a steady increase of the sea levels?
   (b) By how much does the level of the oceans rise, if the temperature of the waters is heated up by 1°C throughout?
   (c) How much energy is taken up in this expansion?
   (d) Which further effects cannot be excluded if the temperature of the oceans increases by 1°C ?
   (e) Which ones of the claims might be ruled out? Which would you deem to consider plausible?

16de T³ Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Getalmysteries

met de TI-84 Plus

Philip Bogaert

```
PROGRAM:LUCAS
:Disp A
:Disp "S = ",S
:If S=0
:Then
:Disp "MERSENNEP
RIEM"
:End
```

```
PROGRAM:RSA
:Prompt A,B,M
:iPart(B/2)→C
:remainder(B,2)→
D
:If D=0
:Then
:1→P
```

```
PROGRAM:PASEN
:Input "JAARTAL
",J
:remainder(J,19)
→A
:remainder(J,4)→
B
:remainder(J,7)→
```

Getalmysteries

1. Modulorekenen

1.1. Deelbaarheid

definitie

Als $a, n \in \mathbb{Z}$ dan noteren we de equivalente uitspraken “n is een deler van a”, “a is deelbaar door n” en “n is een veelvoud van a” als $n \mid a$.

$$n \mid a \quad \Leftrightarrow \quad \exists q \in \mathbb{Z} : a = qn$$

q wordt het quotiënt genoemd van de gehele deling van a door n.

gevolgen

- Als $n \mid a$ dan ook $-n \mid a$ en $n \mid -a$.
- Als n een deler is van a dan is het quotiënt q van de gehele deling van a door n eveneens een deler van a.
- ± 1 en $\pm a$ zijn delers van a.

praktische methode voor het opsporen van alle delers van een geheel getal

Als we alle delers van een geheel getal a willen bepalen dan gaan we na welke natuurlijke getallen tussen 1 en m, met m het grootste natuurlijk getal waarvoor $m \leq \sqrt{|a|}$, deler zijn. Is een natuurlijk getal k tussen 1 en m deler, dan is –k ook een deler en zijn $\pm$q, met q het quotiënt bij deling van a door k, eveneens delers.

De verzameling van de delers van een geheel getal a stellen we voor door $\operatorname{del} a$:

$$\operatorname{del} a = \{n \;;\; n \in \mathbb{Z} \wedge n \mid a\}$$

De verzameling van de gehele veelvouden van een geheel getal a stellen we voor door $a\mathbb{Z}$:

$$a\mathbb{Z} = \{n;\; n \in \mathbb{Z} \wedge a \mid n\}$$

eigenschappen/stellingen i.v.m. deelbaarheid

- transitiviteit: $a \mid b \wedge b \mid c \Rightarrow a \mid c$
- de absolute waarde van een deler van een van nul verschillend geheel getal is kleiner dan of gelijk aan de absolute waarde van dit getal: $a, n \in \mathbb{Z}_0 :\ n \mid a \Rightarrow |n| \le |a|$
- een deler van een geheel getal is ook een deler van elk geheel veelvoud van dit getal: $n \mid a \Rightarrow n \mid ka \quad (k \in \mathbb{Z})$
- een deler van twee gehele getallen is ook een deler van hun som: $n \mid a \wedge n \mid b \Rightarrow n \mid a+b$
- een deler van twee gehele getallen is ook een deler van elke lineaire combinatie met gehele coëfficiënten van deze getallen: $n \mid a \wedge n \mid b \Rightarrow n \mid ka+lb \quad (k, l \in \mathbb{Z})$

1.2. Perfecte en bevriende getallen

Voor elk natuurlijk getal n groter dan nul definiëren we :

$d(n)$: het aantal delers van n
$s(n)$: de som van alle (natuurlijke) delers van n, behalve n
$\sigma(n)$: de som van alle delers van n, m.a.w. $\sigma(n) = s(n) + n$

n	delers	$d(n)$	$s(n)$	$\sigma(n)$
1	1	1	0	1
2	1,2	2	1	3
3	1,3	2	1	4
4	1,2,4	3	3	7
5	1,5	2	1	6
6	1,2,3,6	4	6	12
7	1,7	2	1	8
8	1,2,4,8	4	7	15
9	1,3,9	3	4	13
10	1,2,5,10	4	8	18
11	1,11	2	1	12
12	1,2,3,4,6,12	6	16	28

perfecte getallen

Een perfect getal of volmaakt getal is een natuurlijk getal dat gelijk is aan de som van zijn echte delers (dus buiten zichzelf, 1 wordt als echte deler meegerekend).

n is perfect $\Leftrightarrow \; s(n) = n \; \Leftrightarrow \; \sigma(n) = 2n$

bevriende getallen

Van twee natuurlijke getallen n en m wordt gezegd dat ze bevriend zijn als de som van de echte delers van n gelijk is aan m, terwijl de som van de echte delers van m samen het getal n opleveren.

n en m zijn bevriend $\Leftrightarrow \; s(n) = m \; \wedge \; s(m) = n$

1.3. De Euclidische deling of delingsalgoritme

Als $a \in \mathbb{Z}$ en $n \in \mathbb{N}_0$ dan bestaat er een uniek stel van gehele getallen r en q zodat $a = qn + r$ met $0 \leq r < n$.

q wordt het quotiënt en r de rest genoemd van de deling van a door n in $\mathbb{Z}$. De rest r van a na gehele deling door n die aan het delingsalgoritme voldoet noemen we ook "*a modulo n*" en noteren we a mod n.

Als $n \mid a$ dan is de rest $r = a \bmod n = 0$

Als $n \nmid a$ dan is de rest verschillend van nul en $r = a \bmod n \in \{1, 2, ..., n-1\}$

1.4. Grootste gemene deler

definitie

Het natuurlijk getal d is de grootste gemene deler van twee van nul verschillende natuurlijke getallen a en b als en slechts als d de grootste is van de gemeenschappelijke delers van a en b.

$$\begin{gathered} \mathrm{ggd}(a,b) = d \\ \Updownarrow \\ d \in \mathrm{del}\, a \cap \mathrm{del}\, b \;\wedge\; \forall c \in \mathrm{del}\, a \cap \mathrm{del}\, b : c \leq d \end{gathered}$$

eigenschappen/stellingen i.v.m. ggd

- de gemeenschappelijke delers van twee van nul verschillende natuurlijke getallen a en b $(a \geq b)$ zijn dezelfde als de gemeenschappelijke delers van b en de rest van de Euclidische deling van a door b.

  Als: $a, b \in \mathbb{N}_0 \qquad a \geq b$
  $a = bq + r \qquad 0 \leq r < b \qquad q \in \mathbb{N}$

  dan: $c \mid a \wedge c \mid b \;\Leftrightarrow\; c \mid b \wedge c \mid r$

- de grootste gemene deler van twee van nul verschillende natuurlijke getallen a en b is de kleinste en van nul verschillende lineaire combinatie van a en b met gehele coëfficiënten.

  Als: $a, b \in \mathbb{N}_0$
  $M = \{xa + yb;\; x, y \in \mathbb{Z} \wedge xa + by > 0\}$

  dan: $d = \mathrm{ggd}(a, b) = \min(M)$

- gegeven twee gehele getallen a en b, dan bestaan er gehele getallen x en y zodat $ax + by = \mathrm{ggd}(a, b)$. **(stelling van Bézout)**

- de vergelijking $ax + by = c$ heeft en oplossing (in $\mathbb{Z}$) als en slechts als $\mathrm{ggd}(a, b) \mid c.$

- een gemeenschappelijke deler van twee getallen is ook een deler van hun grootste gemene deler en omgekeerd.

  Als: $a, b \in \mathbb{N}_0$
  $d = \mathrm{ggd}(a, b)$

  dan: $c \in \mathrm{del}\, a \cap \mathrm{del}\, b \;\Leftrightarrow\; c \mid d$

onderling ondeelbare getallen

Twee gehele getallen a en b zijn onderling ondeelbaar als en slechts als $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$.

Als men twee getallen door hun ggd deelt, dan zijn de quotiënten onderling ondeelbaar.

1.5. Ontbinding in priemfactoren

priemgetal

Een positief geheel getal p > 1 is een priemgetal als en slechts als 1 en p de enige positieve delers zijn van p.

eigenschappen/stellingen i.v.m. priemgetallen

- elk natuurlijk getal a > 1 is deelbaar door een priemgetal
- als een priemgetal een product van natuurlijke getallen deelt, dan is minstens één van de factoren deelbaar door dit priemgetal
- er bestaat geen grootste priemgetal, m.a.w. er zijn oneindig veel priemgetallen (stelling van Euclides)

hoofdstelling van de getaltheorie

Elk natuurlijk getal a $\geq$ 2 kan, op de volgorde van de factoren na, op een unieke wijze geschreven worden als een product van priemgetallen.

$\forall a \in \mathbb{N}:\ a = p_1^{n_1}.p_2^{n_2}...p_k^{n_k}$ met p_1 t.e.m. p_k priemgetallen en n_1 t.e.m. n_k natuurlijke exponenten groter dan of gelijk aan 1.

1.6. Kleinste gemene veelvoud

Het van nul verschillend natuurlijk getal m is het kleinste gemene veelvoud van twee natuurlijke getallen a en b als en slechts als m het kleinste is van de strikt positieve gemeenschappelijke veelvouden van a en b.

$$\mathrm{kgv}(a,b) = m$$
$$\Updownarrow$$
$$m \in a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \ \wedge\ \forall c \in \mathbb{N}_0 \cap \left(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}\right): m \leq c$$

praktische methode voor het berekenen van de ggd en het kgv van twee natuurlijke getallen

De grootste gemene deler van 2 natuurlijke getallen groter dan 1 kan als volgt worden gevonden:

- ontbind de 2 getallen in priemfactoren
- maak het product van de gemeenschappelijke factoren, ieder genomen met zijn kleinste exponent

Het kleinste gemene veelvoud van 2 natuurlijke getallen groter dan 1 kan als volgt worden gevonden:

- ontbind de 2 getallen in priemfactoren
- maak het product van alle factoren, ieder genomen met zijn grootste exponent

verband tussen a, b, ggd(a,b) en kgv(a,b)

- het product van 2 natuurlijke getalln is gelijk aan het product van hun grootste gemene deler en hun kleinste gemeen veelvoud

$$\forall a,b \in \mathbb{N}: \ \text{ggd}(a,b).\text{kgv}(a,b) = a.b$$

1.7. Congruentie modulo n

Stel $n \neq 0$ een natuurlijk getal en a en b twee gehele getallen, dan is a congruent aan b modulo n als en slechts als $n \mid (b-a)$.

a congruent aan b modulo n noteren we als $a \equiv b \pmod{n}$.

$$a \equiv b \pmod{n} \ \Leftrightarrow \ n \mid (b-a) \ \Leftrightarrow \ \exists q \in \mathbb{Z} : a = b + qn$$

eigenschappen/stellingen i.v.m. congruentie modulo n

Stel n een positief geheel getal. “Congruent modulo n” is een relatie met de volgende eigenschappen:

- Reflexiviteit: $a \equiv a \pmod{n}$
- Symmetrie: $a \equiv b \pmod{n} \ \Rightarrow \ b \equiv a \pmod{n}$
- Transitiviteit: $a \equiv b \pmod{n} \wedge b \equiv c \pmod{n} \ \Rightarrow \ a \equiv c \pmod{n}$

Deze eigenschappen toont eigenlijk aan dat de verzameling van de gehele getallen voor elke positieve $n \neq 0$ gepartitioneerd wordt in n verschillende congruentieklassen modulo n, ook wel restklassen genoemd. De restklasse van a modulo n noteren we als $\overline{a} \pmod{n}$ of kortweg $\overline{a}$.

$$\overline{a} = \{ b \in \mathbb{Z} \mid a \equiv b \pmod{n} \}$$

De verzameling van alle restklassen modulo n noteren we als $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$$

1.8. Bewerkingen modulo n

stelling

Stel dat $a_1 \equiv a_2 \pmod{n}$ en $b_1 \equiv b_2 \pmod{n}$ dan geldt:

- $a_1 + b_1 \equiv a_2 + b_2 \pmod{n}$
- $a_1 - b_1 \equiv a_2 - b_2 \pmod{n}$
- $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 \pmod{n}$

inverse

Een inverse van $a \pmod{n}$ is een getal x zodat $a.x \equiv 1 \pmod{n}$.

Met behulp van een vermenigvuldigingstabel kunnen we de restklassen opsporen die een symmetrisch element hebben voor de vermenigvuldiging. Als een restklasse een symmetrisch element heeft voor de vermenigvuldiging kunnen we in zo'n tabel ook aflezen welke restklasse dat symmetrisch element is.

Voorbeeld de vermenigvuldigingstabel voor $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$

$\cdot$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$	$\overline{7}$	$\overline{8}$	$\overline{9}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{6}$	$\overline{8}$
$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{6}$	$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{7}$
$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{4}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{6}$
$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$
$\overline{6}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{6}$	$\overline{2}$	$\overline{8}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{0}$	$\overline{7}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$	$\overline{5}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{6}$	$\overline{3}$
$\overline{8}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{8}$	$\overline{6}$	$\overline{4}$	$\overline{2}$
$\overline{9}$	$\overline{0}$	$\overline{9}$	$\overline{8}$	$\overline{7}$	$\overline{6}$	$\overline{5}$	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$

In de vermenigvuldigingstabel voor $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ zien we dat de rijen (kolommen) met rijkoppen (kolomkoppen) $\bar{1}\,,\bar{3}\,,\bar{7},\,\bar{9}$ een $\bar{1}$ bevatten. Dit betekent dat deze 4 van de 10 restklassen een symmetrisch element voor de vermenigvuldiging hebben. Deze symmetrische elementen lezen we af op de corresponderende kolomkoppen (rijkoppen). We vinden voor $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$:

$$\bar{1}^{-1}=\bar{1}\ \ ;\ \ \bar{3}^{-1}=\bar{7}\ \ ;\ \ \bar{7}^{-1}=\bar{3}\ \ ;\ \ \bar{9}^{-1}=\bar{9}$$

stelling

Een inverse van $a\ (\bmod n)$ bestaat als en slechts als $\operatorname{ggd}(a,n)=1$.

1.9. Priemgetallen en modulorekenen

Voor een priemgetal p geldt:

- $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$
- $n^p \equiv n \pmod p$ (kleine stelling van Fermat)
- $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$ (stelling van Wilson)

1.10. De stelling van Euler

definitie

De functie ϕ van Euler telt voor elk natuurlijk getal n hoeveel kleinere positieve getallen er zijn die geen factor met n gemeen hebben.

$\phi(n)$ = aantal getallen $1 \le i \le n$ met $ggd\,(i,n)=1$

formule van Euler voor

Voor en getal $n = p^a q^b r^c s^d$ (p,q,r,s zijn priemfactoren en a,b,c,d zijn natuurlijke exponenten groter dan nul) geldt dat:

$$\phi(n) = p^{a-1}q^{b-1}r^{c-1}s^{d-1}.(p-1)(q-1)(r-1)(s-1)$$

stelling van Euler

Als a geen factor gemeen heeft met n dan geldt dat $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

1.11. De Chinese reststelling

Wanneer een Chinese boer zijn eieren 's morgens op de markt op rijtjes van 3 legt, heeft hij één ei over. Legt hij dezelfde eieren op rijtjes van 5 heeft hij er 2 over en legt hij ze op rijtjes van 7 heeft hij er 3 over. Hoeveel eieren heeft de boer minstens?

- Stel dat s en t twee natuurlijke getallen zijn met $\mathrm{ggd}(s,t)=1$. Als nu $x \equiv y \pmod{s}$ en ook $x \equiv y \pmod{t}$, dan geldt $x \equiv y \pmod{st}$.

- Stel dat $n = s \cdot t$ met $\mathrm{ggd}(s,t)=1$. Dan heeft het stelsel
$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{s} \\ y \equiv b \pmod{t} \end{cases}$$
een unieke oplossing in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

De oplossing van het Chinese raadsel kunnen we nu herschrijven als volgt:

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3} \\ x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \end{cases}$$

Uit $x \equiv 1 \pmod{3}$ volgt dat $x = 3y+1$, invullen in de tweede vergelijking geeft:

$$3y+1 \equiv 2 \pmod{5}$$

Van beide zijden 1 aftrekken en met 2 vermenigvuldigen geeft:

$$\begin{aligned} &3y+1 \equiv 2 \pmod{5} \\ &\Leftrightarrow 3y \equiv 1 \pmod{5} \\ &\Leftrightarrow 6y \equiv 2 \pmod{5} \\ &\Leftrightarrow y \equiv 2 \pmod{5} \end{aligned}$$

Zodat $y = 5z+2$ en dus $x = 3y+1 = 3(5z+2)+1 = 15z+7$. Invullen in de derde vergelijking geeft:

$$15z+7\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,7)$$
$$\Leftrightarrow 15z\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,7)$$
$$\Leftrightarrow z\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,7)$$

M.a.w. $z=7u+3$ en dus $x=15(7u+3)+7=105u+52$. De kleinste gehele waarde die hier aan voldoet is 52 (eieren).

Hoeveel eieren had de boer minstens als blijkt dat als hij zijn eieren ook nog eens op rijtjes van 9 legt, hij 4 eieren over heeft?

2. Modulorekenen met de TI-84

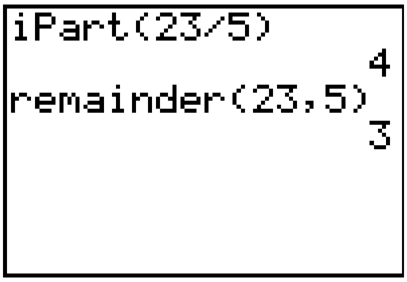
2.1. Modulorekenen

De rest en het quotiënt na deling van a door n in $\mathbb{N}$ worden bij de TI-84 respectievelijk gegeven via Math Num 0:remainder en Math Num 3:iPart.

M.a.w. a = q.n + b

Dan is q = iPart(a / n) en b = remainder(a , n)

Voorbeeld:



23 = 4.5 + 3

2.2. Rekenen met grote getallen

Modulorekenen wordt in het dagelijkse leven meer gebruikt dan we soms denken. De getallen waarmee gerekend wordt zijn echter cijferreeksen die soms meer dan 15 cijfers lang zijn.

780546 320783 111400 $\equiv$?? (mod 97)

Dit probleem lossen we als volgt op:

10000 $\equiv$ 9 (mod 97)

En dus:

$10000^2 = 9^2$

$10000^3 = 9^3$

$10000^n = 9^n$

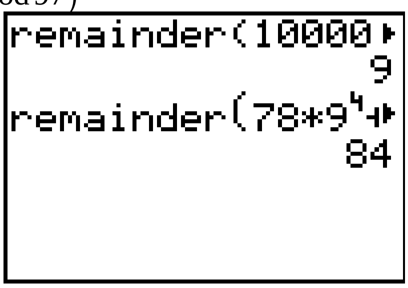
Zodat

78 0546 3207 8311 1400

$\equiv 78.9^4 + 0546.9^3 + 3207.9^2 + 8311.9 + 1400 \pmod{97}$

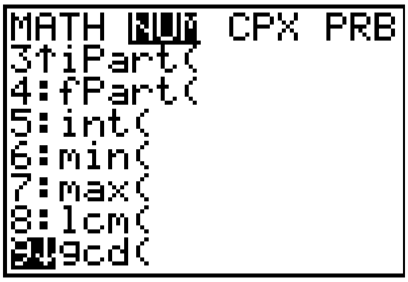
$\equiv 1245758 \pmod{97}$

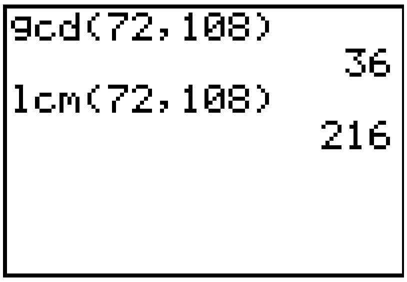
$\equiv 84 \pmod{97}$



2.3. Grootste gemene deler – Kleinste gemene veelvoud

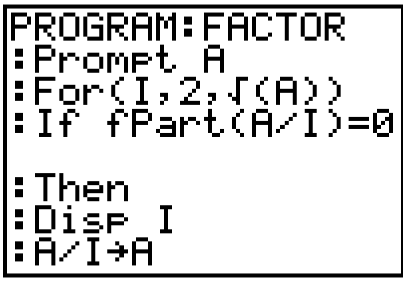
GGD vinden we bij Math Num 9:gcd
en KGV via Math Num 8:lcm

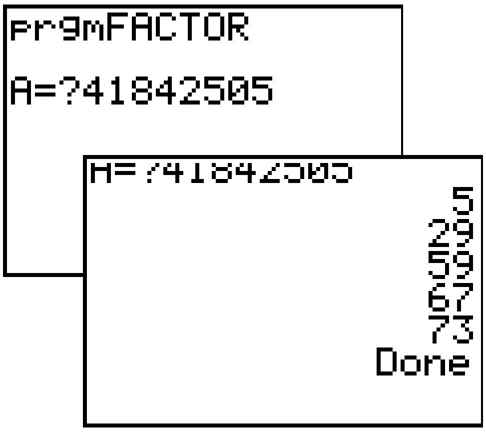




2.4. Ontbinden in priemfactoren

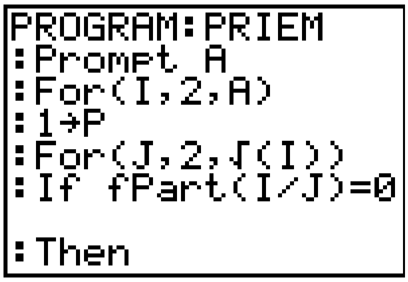
PROGRAM:FACTOR
:Prompt A
:For (I,2, $\sqrt{A}$)
:If fPart(A / I) = 0
:Then
:DISP I
:A / I → A
:I – 1 → I
:End
:If A = 1
:Then
:Stop
:End
:End
:If A <> 1
:Then
:Disp A
:End
:Stop

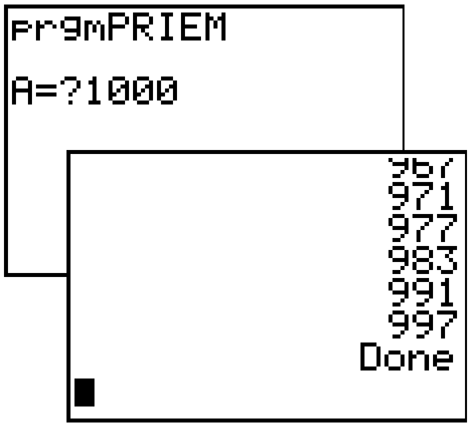




2.5. Priemgetallen van 2 tot A

```
PROGRAM:PRIEM
:Prompt A
:For (I,2,A)
:1→ P
:For (J,2,√I )
:If fPart(I / J) = 0
:Then
:0 → P
:End
:End
:If P = 1
:Then
:Disp I
:End
:End
:Stop
```





3. Toepassingen

3.1. rekeningnummers

Een Belgisch rekeningnummer (Belgian Bank Account Number of BBAN) bestaat uit 12 cijfers, verdeeld in drie groepen gescheiden door liggende streepjes: een groep van 3 cijfers, een groep van 7 cijfers en een groep van 2 cijfers. bvb. 780-5463207-83

- een eerste blok van drie cijfers, die informatie geven over de bank
- een blok van zeven cijfers, het eigenlijke rekeningnummer bij die bank
- een laatste blok met twee controlecijfers, deze twee cijfers zijn de rest (modulo) bij deling door 97 van het getal dat gevormd wordt door de 10 voorafgaande cijfers. (indien de rest 0 is, wordt 97 als controlegetal gebruikt)

Ga na dat: 7805463207 mod 97 = 83

IBAN-nummers

Een International Bank Account Number (IBAN) wordt gebruikt om internationale transacties tussen rekeningen en banken gelegen in verschillende landen vlotter te laten verlopen.

Het IBAN telt maximaal 34 alfanumerieke tekens en heeft een vaste lengte per land. Het IBAN bestaat uit een landcode (twee letters), een controlegetal (twee cijfers) en een nationaal rekeningnummer.

Zo wordt 780-5463207-83 → BE?? 7805 4632 0783

Het controlegetal wordt verkregen door het rekeningnummer te nemen

(1) 780546320783

er de landcode achter te plaatsen

(2) 780546320783BE

alle letters te vervangen door hun positie in het Romeinse alfabet, met als basispositie het begincijfer 9 (d.w.z. beginnen bij 10 met A=10, B=11...Z=35)

(3) 7805463207831114

twee nullen toe te voegen aan het einde

(4) 780546320783111400

dan de rest te nemen van de deling van het zo bekomen getal door 97

(5) 780546320783111400 mod 97 = 84

deze rest van 98 af te trekken om het controlegetal te krijgen

(6) 98 – 84 = 14

780-5463207-83 → BE14 7805 4632 0783

3.2. ISBN nummers

Een ISBN (International Standard Book Number) is een gecontroleerd identificatienummer van 10 of 13 cijfers dat uitgevers, bibliotheken en boekhandelaars toelaat boeken terug te vinden.

10-cijferig (oude nummers)

Bij de oude tiencijferige ISB-nummers is het laatste cijfer een controlecijfer. Van de bekende 9 cijfers van het ISBN wordt het eerste met 10 vermenigvuldigd, het tweede met 9, het derde met 8 en zo vervolgens, aflopend. Bij de som van de producten wordt dan een getal opgeteld, zodanig dat een veelvoud van 11 ontstaat. Dit toegevoegde getal wordt als controlecijfer genomen; het kan uiteraard 0 zijn, namelijk als de bedoelde productsom reeds een veelvoud van 11 is. Als het controlecijfer 10 is, wordt in plaats van een cijfer een X op de laatste positie gezet.

voorbeeld:

90-395-1394-?

9 x 10 + 0 x 9 + 3 x 8 + 9 x 7 + 5 x 6 + 1 x 5 + 3 x 4 + 9 x 3 + 4 x 2 = 259

259 mod 11 = 6   en   11 – 6 = 5

→ 90-395-1394-5

13-cijferig (EAN systeem)

Bij de 13-cijferige ISB-nummers gaat de berekeningswijze van het controlegetal als volgt:

- ieder cijfer op een oneven positie wordt met 1 vermenigvuldigd
- ieder cijfer op een even positie wordt met 3 vermenigvuldigd
- deze producten worden bij elkaar opgeteld
- het controlecijfer is het cijfer nodig om van deze som een tienvoud te maken.

voorbeeld:

978-90-395-1394-?

(9 + 8 + 0 + 9 +1 + 9) + (7 + 9 + 3 + 5 + 3 + 4) x 3 = 129

129 + 1 = 130 dus controlegetal = 1

➔ 978-90-395-1394-1

3.3. barcodes

Een barcode bevat 13 cijfers en maakt deel uit van het EAN-systeem. M.a.w. het dertiende cijfer (controlecijfer) wordt op dezelfde manier berekend als bij de 13-cijferige ISBN nummers.

3.4. serienummers van bankbiljetten

In tegenstelling tot de euromunten hebben de bankbiljetten geen nationale zijde die de herkomst aangeeft. Deze informatie is wel vervat in de code op de achterkant van het biljet. De letter identificeert het land waar het biljet is uitgegeven. De Checksum wordt bepaald door alle getallen in het serienummer op te tellen. De cijfers in de uitkomst hiervan worden vervolgens ook opgeteld en eventueel wordt dit herhaald bij de uitkomst wat hieruit voorvloeit, teneinde een eencijferig cijfer over te houden. Dit cijfer wordt vervolgens vergeleken met het cijfer behorende bij het land om zo te bepalen of het biljet echt is. Als dat zo is dan is het biljet echt volgens het serienummer.

Code	Land	Uitkomst Checksum
Z	België	9
Y	Griekenland	1
X	Duitsland	2
(W)	*Denemarken*	(3)
V	Spanje	4
U	Frankrijk	5
T	Ierland	6
S	Italië	7
R	Luxemburg	8
P	Nederland	1

Code	Land	Uitkomst Checksum
N	Oostenrijk	3
M	Portugal	4
L	Finland	5
(K)	*Zweden*	(6)
(J)	*GB*	(7)
H	Slovenië	9
G	Cyprus	1
F	Malta	2
E	Slowakije	3
D	Estland	4

Afgesproken is dat ieder land zijn eigen euro's heeft, herkenbaar aan de landcode. Als een land uit de euro treedt dan zijn de biljetten met de code van dat land geen geldige euro's meer in de andere landen. Tegelijkertijd kunnen de biljetten van het uittredende land bijvoorbeeld gestempeld worden voor extra zichtbaarheid en dan dienen als lokale bankbiljetten zodat er niet gelijk of geen nieuwe lokale bankbiljetten gemaakt hoeven te worden. Weinig mensen blijken hiervan op de hoogte te zijn.

voorbeeld:

biljetnummer H55805151312 is afkomstig uit Slovenië en heeft als checksum dus 9;

$$5 + 5 + 8 + 0 + 5 + 1 + 5 + 1 + 3 + 1 + 2 = 36 \;>\; 3 + 6 = 9$$

3.5. Rijkregisternummer

Het Rijksregisternummer is een uniek identificatienummer toegekend aan natuurlijke personen ingeschreven in België. Het wordt toegekend na het invoeren van de basisgegevens door de dienst Bevolking in het Rijksregister. Men vindt het terug op de SIS-kaart of de (elektronische) identiteitskaart of men kan het persoonlijk opvragen aan het loket van de dienst Bevolking.

Het identificatienummer bevat 11 cijfers:

- Een eerste groep van zes cijfers, gevormd door de geboortedatum in de volgorde: jaar, maand, dag. Maand en/of dag kunnen nul zijn indien de exacte geboortedatum niet gekend is.
- Een tweede groep van drie cijfers dient als herkenning van de personen die op dezelfde dag geboren zijn. Dit reeksnummer is even voor een vrouw en oneven voor een man. Het is de dagteller van de geboortes. Voor een man van 001 tot 997 en voor een vrouw van 002 tot 998.

- Een derde groep van twee cijfers is een controlegetal op basis van de 9 voorafgaande cijfers. Dat wordt berekend door het getal van negen cijfers, dat gevormd wordt door de aaneenschakeling van de geboortedatum en het reeksnummer, te delen door 97. De rest van deze deling ("modulo") wordt van 97 afgetrokken. Het aldus bekomen verschil is het controlenummer. Voor personen geboren na 2000, moet men een 2 voor het getal van negen cijfers plaatsen (+ 2000000000) alvorens te delen door 97.

3.6. CAS-nummers

Een CAS-nummer is een unieke numerieke identifier voor chemische elementen, componenten, polymeren, en legeringen. CAS staat voor Chemical Abstracts Service, een divisie van de American Chemical Society gevestigd in Columbus, Ohio, USA.

De CAS Registry is een van de grootste databases in de wereld met informatie over meer dan 50 miljoen chemische verbindingen. De 50-miljoenste verbinding, CAS-nummer 1181081-51-5, werd op 7 september 2009 geregistreerd. Er worden dagelijks ongeveer 4000 nieuwe verbindingen toegevoegd. Aan het gebruik van de CAS-Registry-database waarnaar met behulp van een CAS-nummer verwezen wordt, zijn kosten verbonden.

Elke verbinding heeft een uniek nummer, het CAS Registry nummer. Dit nummer bestond aanvankelijk uit maximaal 9 cijfers, verdeeld in 3 groepjes die gescheiden zijn met een streepje. Het linker groepje bestond tot 2007 uit 3 tot maximaal 6 cijfers; het volgende uit 2 cijfers en rechts staat een controlecijfer. In september 2007 kondigde de CAS aan, dat ze vanaf januari 2008 CAS-nummers met tien cijfers zou gaan toekennen, vanwege de gestage groei van het aantal nieuw geregistreerde stoffen. Het tiende cijfer komt op de meest linkse plaats, dus het eerste groepje krijgt dan 7 cijfers. De CAS-nummers worden met een checksum gecodeerd en zijn daardoor snel te verifiëren op typefouten.

voorbeelden:

- cafeïne : 58-08-2
- polypropeen : 9003-07-0

berekenen van het controlecijfer:

$N_8N_7N_6N_5N_4N_3N_2N_1$-R

R = (N_1 x 1 + N_2 x 2 + N_3 x 3 + … + N_8 x 8) mod 10

3.7. gestructureerde mededeling

Een gestructureerde mededeling of OGM is een combinatie van drie groepen van drie, vier en vijf cijfers gescheiden door een schuine streep, zoals:
+++090/9337/55493+++

Deze mededeling wordt in België vaak gebruikt om overschrijvingen automatisch te kunnen laten verwerken. Zo weet het computersysteem van de ontvanger onmiddellijk welke factuur betaald wordt. Op deze manier is er geen personeel nodig om te gaan kijken welke rekeningen vereffend werden.

De eerste tien cijfers zijn bijvoorbeeld een klantennummer of een factuurnummer. De laatste twee cijfers vormen het controlegetal dat bekomen wordt door van de voorgaande tien cijfers de rest bij deling door 97 te berekenen (modulo 97). Voor en achter de cijfers worden drie plussen (+++) of sterretjes (***) gezet.

Uitzondering: Indien de rest 0 bedraagt, dan wordt als controlegetal 97 gebruikt.

Als het controlegetal niet overeenstemt met de 10 eerste cijfers, dan wordt de betaling geweigerd. Zo wordt voorkomen dat er willekeurige fouten optreden bij het manueel inleiden van betalingsopdrachten.

3.8. Paasdag

Wanneer valt Pasen in 20xx. De berekening, volgens Gauss, gaat als volgt:

Voor de 20ste en 21ste eeuw is K = 24 en L = 5

- a = jaartal (mod 19)
- b = jaartal (mod 4)
- c = jaartal (mod 7)
- d = 19a + K (mod 30)
- e = 2b + 4c + 6d + L (mod 7)
- paasdag = (22 + d + e) maart of (d + e – 9) april

```
JAARTAL 2014
              51
 MAART
              20
 APRIL
            Done
```

```
PROGRAM:PASEN
:Input "JAARTAL
",J
:remainder(J,19)
→A
:remainder(J,4)→
B
:remainder(J,7)→
```

```
PROGRAM:PASEN
:remainder(J,7)→
C
:remainder(19A+2
4,30)→D
:remainder(2B+4C
+6D+5,7)→E
:22+D+E→X
```

```
PROGRAM:PASEN
:22+D+E→X
:D+E-9→Y
:Disp X," MAART"
:Disp Y," APRIL"
:Stop
```

4. Priemgetallen

	2	3		5		7				11		13				17		19	
		23						29		31						37			
41		43				47						53						59	
61						67				71		73						79	
		83						89								97			
101		103				107		109				113							
						127				131						137		139	
								149		151						157			
		163				167						173						179	
181										191		193				197		199	
										211									
		223				227		229				233						239	
241										251						257			
		263						269		271						277			
281		283										293							
						307				311		313				317			
										331						337			
						347		349				353						359	
						367						373						379	
		383						389								397			

Priemgetalhiaat

Een priemgetalhiaat is het verschil tussen twee opeenvolgende priemgetallen. Het n^{de} priemgetalhiaat, aangeduid door g_n, is het verschil tussen het (n+1)^{de} en het n^{de} priemgetal, dat wil zeggen $g_n = p_{n+1} - p_n$.

De eerste 30 priemgetalhiaten zijn:
1, 2, 2, 4, 2, 4, 2, 4, 6, 2, 6, 4, 2, 4, 6, 6, 2, 6, 4, 2, 6, 4, 6, 8, 4, 2, 4, 2, 4, 14

Priemtweelingen

Priemtweelingen zijn priemgetallen die voorkomen in de vorm p en $p+2$, waarbij zowel p als $p+2$ een priemgetal zijn.

Voorbeelden:
3 en 5 ; 5 en 7 ; 11 en 13 ; 17 en 19 ; 29 en 31 ; 41 en 43 ; 59 en 61 ; 71 en 73 ; 101 en 103 ; 107 en 109 ; …

Priemgetaltest

Een priemgetaltest is een algoritme dat bepaalt of een gegeven getal al dan niet priem is. Een dergelijke test wordt onder andere gebruikt in de cryptografie. Het verschil tussen een priemgetaltest en ontbinding in priemfactoren is dat een priemgetaltest niet noodzakelijk priemfactoren geeft, maar alleen zegt of het gegeven getal wel of niet priem is.

4.1. Mersennegetallen

Een Mersennegetal is een (positief geheel) getal dat precies één kleiner is dan een macht van twee.

$$M_n = 2^n - 1$$

Een Mersennepriemgetal is een Mersennegetal dat een priemgetal is.

n	$2^n - 1$	faktorisatie
2	3	3
3	7	7
4	15	3 x 5
5	31	31
6	63	3 x 3 x 7
7	127	127
8	255	3 x 5 x 17
9	511	7 x 73
10	1023	3 x 11 x 31
11	2047	23 x 89
12	4095	3 x 3 x 5 x 7 x 13
13	8191	8191

Januari 2013 zijn er 48 Mersennepriemgetallen bekend. Het grootst bekende priemgetal is een Mersennepriemgetal:

$$M_{57885161} = 2^{57885161} - 1$$

Een basisstelling over Mersennegetallen stelt dat M_n alleen een Mersennepriemgetal is, als de exponent n zelf ook een priemgetal is. Dit sluit getallen, zoals M_4 = 24−1 = 15 uit, aangezien de exponent 4(=2×2) samengesteld is. De stelling voorspelt dat 15 ook samengesteld is, wat inderdaad klopt, want 15 = 3×5. De drie kleinste Mersennepriemgetallen zijn M_2 = 3, M_3 = 7, M_5 = 31.

Hoewel het waar is dat alleen Mersennegetallen M_p priem kunnen zijn, als p ook een priemgetal is, kan het niettemin het geval zijn dat M_p geen priemgetal is, terwijl p dat wel is. Het kleinste tegenvoorbeeld is het Mersennegetal M_{11} = 211−1 = 2047 = 23×89 .

Het ontbreken van een duidelijke regel om te bepalen of een gegeven Mersennegetal een priemgetal is maakt de zoektocht naar Mersennepriemgetallen een interessante taak, die aangezien Mersennegetallen zeer snel groeien, heel snel zeer moeilijk wordt.

Lucas-Lehmertest voor Mersennegetallen

De Lucas-Lehmertest voor Mersennegetallen is een algoritme om te bepalen of het Mersennegetal $M_p = 2^p - 1$ (p een priemgetal) een Mersennepriemgetal is. De test is ontwikkeld door Edouard Lucas en later verbeterd door Derrick Henry Lehmer.

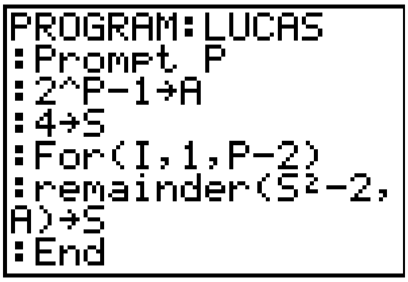
Gegeven een Mersennegetal $M_p = 2^p - 1$ met p een priemgetal. Definieer nu de rij s_i als volgt:

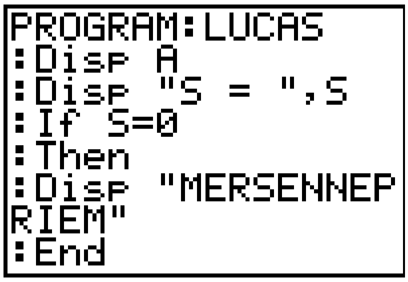
$$s_i = \begin{cases} 4 & als\ i = 0 \\ s_{i-1}^2 - 2 & als\ i > 0 \end{cases}$$

de eerste termen van deze rij zijn 4, 14, 194, 37634, 1416317954, …

Nu geldt dat M_p een priemgetal is dan en slechts dan als $s_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$.

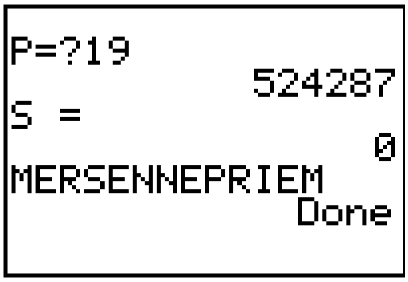
Voorbeeld:





$$M_5 = 2^5 - 1 = 31$$

$$s_0 \equiv 4 \pmod{31}$$
$$s_1 \equiv 4^2 - 2 \equiv 14 \pmod{31}$$
$$s_2 \equiv 14^2 - 2 \equiv 8 \pmod{31}$$
$$s_3 \equiv 8^2 - 2 \equiv 0 \pmod{31}$$



$s_3 = 0$ dus 31 is een priemgetal.

Perfecte getallen en Mersennepriemgetallen

Er is een verband tussen Mersennepriemgetallen en perfecte getallen.

Als $2^n - 1$ een priemgetal is, dan is $2^{n-1}.\left(2^n - 1\right)$ een perfect getal.
Omgekeerd kan ieder perfect getal geschreven worden als $2^{n-1}.\left(2^n - 1\right)$ waarbij n een priemgetal is en $2^n - 1$ een Mersennepriemgetal.

4.2. De Priemgetalstelling

Definieer de priemgetal-telfunctie $\pi(x)$ die voor elke positieve x het aantal gevonden priemgetallen kleiner of gelijk aan x geeft.

vb. $\pi(10) = 4$ omdat er precies vier priemgetallen (2, 3, 5 en 7) kleiner of gelijk aan 10 zijn.

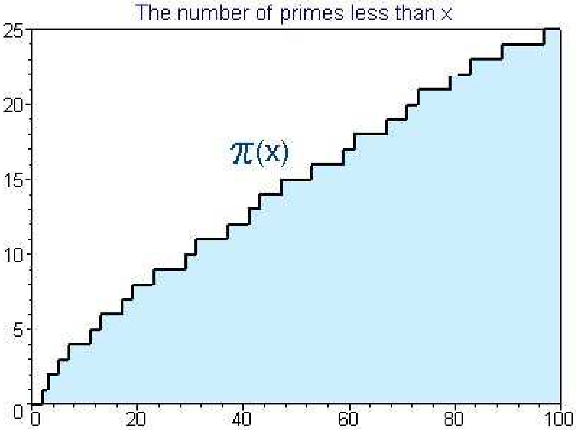
De priemgetalstelling stelt dat de limiet van het quotiënt van de functies $\pi(x)$ en $\dfrac{x}{\ln(x)}$ gelijk wordt aan één als x tot oneindig nadert.

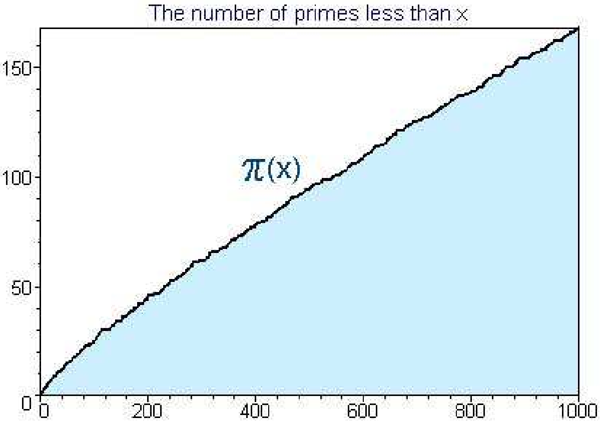
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x / \ln(x)} = 1$$

Deze formule staat bekend als de asymptotische verdelingswet van de priemgetallen.

vb. stel x = 1 000 000

$\pi(x) = 78498$ en $\dfrac{x}{\ln(x)} \approx 72382$





4.3. De Riemann hypothese

In het jaar 2000 stelde het Clay Institute in Cambridge in Massachusetts een lijst van zeven belangrijke onopgeloste vraagstukken in de wiskunde op en loofde voor de oplossing van een probleem een prijs van een miljoen Amerikaanse dollar. Tot nu toe is uit deze lijst van millenniumprijsproblemen alleen “het Vermoeden van Poincaré” opgelost door Grigori Perelman in 2002.

De Riemann-hypothese is één van de onopgeloste problemen van de wiskunde. Wie een sluitend bewijs levert, wordt wereldberoemd en verdient bovendien een prijs van een miljoen dollar.

De Riemann-hypothese kan worden gezien als een verfijning van de priemgetalstelling. De priemgetalstelling geeft een nauwkeurige schatting voor het aantal priemgetallen en de Riemann-hypothese vertelt ons hoever de priemgetalstelling ernaast zit.

De zèta functie

Als u_1 , u_2 , u_3 , ... de termen zijn van een willekeurige rij u, definiëren we

- $S_1 = u_1$
- $S_2 = u_1 + u_2$
- $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$
- …

Dan geldt dat S_1 , S_2 , S_3 , ... de termen (functiewaarden) zijn van bijbehorende reeks (functie) S

Een reeks is eigenlijk een oneindige som:

$$S = \sum u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

Hyperharmonische reeksen

De harmonische reeks wordt gegeven door:

$$\sum \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

De hyperharmonische reeks wordt gegeven door:

$$\sum \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots$$

zo voor

$$s = 2: \ \sum \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$$

$$s = \frac{1}{2}: \sum \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$$

men kan bewijzen dat:

- voor $s \leq 1$ deze oneindige som naar ∞ gaat, men zegt dat de reeks divergeert,
- voor $s > 1$ deze oneindige som eindig is, men zegt dat de reeks convergeert.

Euler bewees dat:

$$\sum \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad , \quad \sum \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945} \quad , \quad \sum \frac{1}{k^8} = \frac{\pi^8}{9450} \quad , \quad \sum \frac{1}{k^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}$$

De zèta functie

Men definieert de zèta functie $\zeta(s)$ als volgt:

$\zeta(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{4^x} + \ldots$ met x een complex getal waarbij Re(x) > 1

Euler bewees dat deze functie kan herschreven worden als:

$$\zeta(x) = \frac{2^x}{2^x - 1} \times \frac{3^x}{3^x - 1} \times \frac{5^x}{5^x - 1} \times \frac{7^x}{7^x - 1} \times \frac{11^x}{11^x - 1} \times \ldots$$

m.a.w. als een oneindig product van factoren van de vorm $\frac{p^x}{p^x - 1}$, waarbij je voor p achtereenvolgens alle priemgetallen moet nemen.

De zèta functie voldoet aan de volgende functionaalvergelijkingen:

$$\zeta(x) = 2^x \pi^{x-1} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Gamma(1-x)\zeta(1-x)$$

$$\zeta(-x) = -2\frac{1}{(2\pi)^{x+1}} \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \Gamma(1+x)\zeta(x+1) \qquad \forall x \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$$

hierbij stelt Γ de gammafunctie voor. $\forall n \in \mathbb{N} : \Gamma(1+n) = n!$

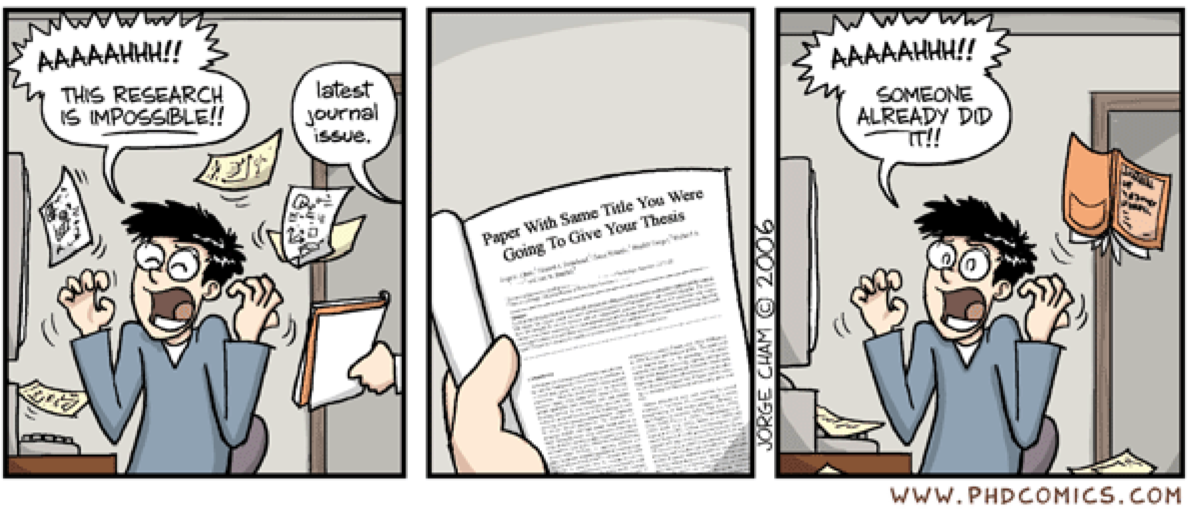
De Riemann hypothese

De zèta-functie is nul voor alle complexe getallen z = x + yi die liggen in het halfvlak x > 1.

De Riemann-zèta-functie heeft nulpunten in de negatieve even gehele getallen. Deze nulpunten zijn eenvoudig te vinden vertrekkende van de functionaalvergelijking en ze worden dan ook triviale nulpunten genoemd.

De zèta-functie heeft echter nog meer nulpunten en deze liggen noodzakelijkerwijze in de zogenaamde kritieke strook, de verzameling van alle complexe getallen met reële gedeelte strikt tussen nul en een.
De beroemde Riemann-hypothese zegt dan dat alle niet-triviale nulpunten precies 1/2 als reële gedeelte hebben. Deze hypothese is nog niet bewezen en ze wordt zelfs als een van de belangrijkste (of in ieder geval een van de meest bekende) problemen in de wiskunde beschouwd.

Toch is er redelijk wat geweten over de structuur van de verzameling van alle niet-triviale nulpunten. Zo zijn er bijvoorbeeld oneindig veel niet-triviale nulpunten en ze zijn symmetrisch gelegen ten opzichte van de reële as (de complexe getallen met imaginaire gedeelte gelijk aan nul) en de as van de complexe getallen met reële gedeelte gelijk aan 1/2.



4.4. Het vermoeden van Goldbach

Elk even getal groter dan 2 is te schrijven als de som van twee priemgetallen.

Men heeft dit vermoeden met de computer gecontroleerd tot aan 10^{18}, dus het ziet er “zeer waarschijnlijk” uit dat dit vermoeden wel waar is. Bewezen is dit echter nog niet.

Stelling van Vinogradov – Bombieri

Elk oneven getal groter dan 5 is te schrijven als de som van drie priemgetallen.

Deze stelling wordt ook wel het “zwakke” vermoeden van Goldbach genoemd.

4.5. Problemen van Landau

Het vermoeden van Legendre

Er ligt minstens één priemgetal tussen n^2 en $(n+1)^2$.

Problemen van Landau

Op het internationale congres van wiskundigen in 1912 besprak Edmund Landau vier basisproblemen met betrekking tot de priemgetallen. Landau karakteriseerde deze vier problemen in zijn toespraak als "niet aanvalbaar bij de huidige stand van de wetenschap". Zij staan nu bekend als de problemen van Landau.

- Het vermoeden van Goldbach
- Het vermoeden van Legendre
- Het priemtweelingvermoeden: *zijn er oneindig veel priemgetallen p zodanig dat $p+2$ ook een priemgetal is?*
- Zijn er oneindig veel priemgetallen p zodanig dat $p-1$ een kwadraat is? Met andere woorden: *bestaan er oneindig veel priemgetallen van de vorm n^2+1?*

Anno 2012 (100 jaar later) zijn deze vier problemen nog niet opgelost.

Het vermoeden van Brocard

Er liggen minstens vier priemgetallen tussen $(p_n)^2$ *en* $(p_{n+1})^2$ *waarbij* p_n *het n*^{de} *priemgetal is.*

Het vermoeden van Polignac

Voor elk natuurlijk getal k bestaan er oneindig veel priemgetalhiaten van grootte 2k.

In het geval van k = 1 is het vermoeden van Polignac gelijkwaardig aan het priemtweelingvermoeden

5. RSA

RSA is een asymmetrisch encryptiealgoritme, dat veel gebruikt wordt voor elektronische betalingen en handel (beveiliging van transacties). Het formele algoritme werd in 1977 ontworpen door Ron Rivest, Adi Shamir en Len Adleman (vandaar de afkorting RSA).

De veiligheid van RSA steunt op het probleem van de ontbinding in factoren bij heel grote getallen. Op dit moment is het bijna onmogelijk de twee oorspronkelijke priemgetallen p en q te achterhalen als alleen p*q bekend is en p en q groot genoeg zijn; het zou te veel tijd in beslag nemen. Nieuwe ontwikkelingen op dit gebied zouden RSA onbruikbaar kunnen maken.

Hoe werkt nu RSA?

Stel dat je de zin “JEROEN SPEELT GITAAR” wilt coderen.

- Eerst maak je van elk teken een getal door het om te zetten in de bijbehorende ASCII-code.

DEC	0	16	32	48	64	80	96	112	128	144	160	176	192	208	224	240
0			space	0	@	P	`	p	€	□	nbsp	°	À	Ð	à	ð
1			!	1	A	Q	a	q	□	‘	¡	±	Á	Ñ	á	ñ
2			"	2	B	R	b	r	‚	’	¢	²	Â	Ò	â	ò
3			#	3	C	S	c	s	ƒ	“	£	³	Ã	Ó	ã	ó
4			$	4	D	T	d	t	„	”	¤	´	Ä	Ô	ä	ô
5			%	5	E	U	e	u	…	•	¥	µ	Å	Õ	å	õ
6			&	6	F	V	f	v	†	–	¦	¶	Æ	Ö	æ	ö
7			'	7	G	W	g	w	‡	—	§	·	Ç	×	ç	÷
8			(	8	H	X	h	x	ˆ	˜	¨	¸	È	Ø	è	ø
9	TAB		)	9	I	Y	i	y	‰	™	©	¹	É	Ù	é	ù
10	LF		*	:	J	Z	j	z	Š	š	ª	º	Ê	Ú	ê	ú
11			+	;	K	[	k	{	‹	›	«	»	Ë	Û	ë	û
12			,	<	L	\	l	|	Œ	œ	¬	¼	Ì	Ü	ì	ü
13	CR		-	=	M	]	m	}	□	□		½	Í	Ý	í	ý
14			.	>	N	^	n	~	Ž	ž	®	¾	Î	Þ	î	þ
15			/	?	O	_	o	□	□	Ÿ	¯	¿	Ï	ß	ï	ÿ

Om het rekenwerk te beperken gebruiken we in ons voorbeeld een eenvoudigere omzettingstabel:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9		A	B	C	D	E	F	G	H
00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18
I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	

JEROEN SPEELT GITAAR

→ 20 15 28 25 15 24 10 29 26 15 15 22 30 10 17 19 30 11 11 28

- Kies twee priemgetallen p en q. Normaal gesproken worden daarvoor gigantisch grote getallen gekozen. Neem p = 37 en q = 29.

- Bereken het product: N = p • q = 37 • 29 = 1073

  Om echt veilig te zijn, zijn p en q priemgetallen van minstens 80 cijfers en telt hun product N minstens 200 cijfers.

- Bereken M = (p – 1) • (q – 1) = 36 • 28 = 1008, vernietig nu p en q, je hebt ze niet meer nodig.

- Kies een getal K kleiner dan M zodat ggd(K,M) = 1.
  Bijvoorbeeld K = 25 voldoet aan de voorwaarden.

- Nu kun je aan het coderen met behulp van de getallen K = 25 en N = 1073.

- Omdat N niet groot is (normaal gezien is dit een getal met enorm veel cijfers), verdelen we onze te coderen zin in blokjes van 3 cijfers. Een blokje B moet immers kleiner zijn dan N. (B < N).

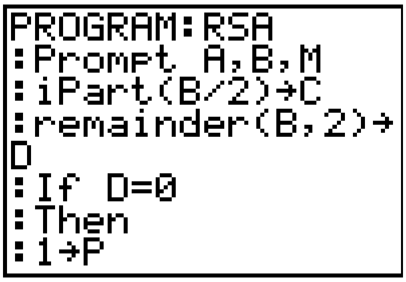
  201 528 251 524 102 926 151 522 301 017 193 011 112 810

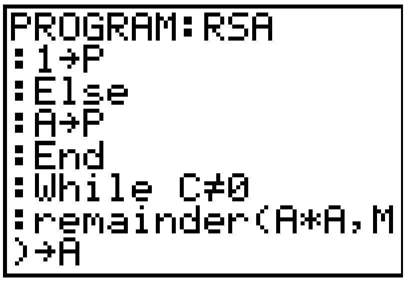
- Doe elk blokje tot de macht 25. Vervolgens trek je er zo vaak mogelijk 1073 van af. (Je berekent dus B^{25} (mod.1073) waarin B het blokje voorstelt.)
  Zet alles achter elkaar en je hebt je geheimschrift.

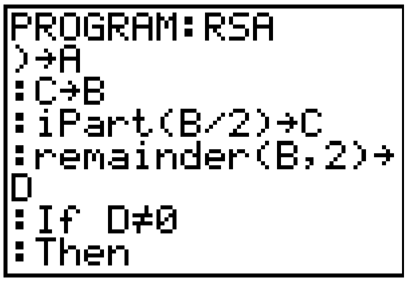
$$\begin{aligned}201^{25}\ (\mathrm{mod}\,1073) &= 201.\left[201^2\right]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 201.[700]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 201.\left[700^2\right]^{6}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 201.[712]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 201.\left[712^2\right]^{3}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 201.[488]^{3}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 201.488.\left[488^2\right]\ (\mathrm{mod}\,1073) = 201.488.1011\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 308\end{aligned}$$

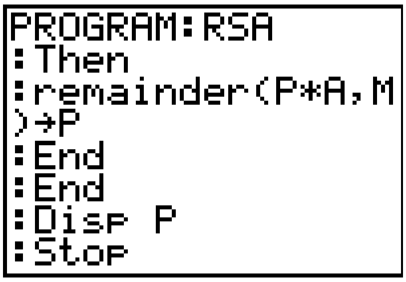
…

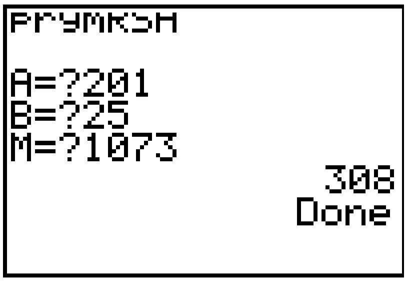
$$\begin{aligned}810^{25}\ (\mathrm{mod}\,1073) &= 810.\left[810^2\right]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 810.[497]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 810.\left[497^2\right]^{6}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 810.[219]^{12}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 810.\left[219^2\right]^{3}\ (\mathrm{mod}\,1073) = 810.[749]^{3}\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 810.749.\left[749^2\right]\ (\mathrm{mod}\,1073) = 810.749.895\ (\mathrm{mod}\,1073)\\ &= 192\end{aligned}$$











308 676 843 968 095 482 966 696 019 133 785 048 778 192

- De getallen K en N vormen de publieke sleutel. Die mag iedereen weten, iedereen kan dus een bericht versleutelen.

- Om het gecodeerde woord weer te decoderen heb je de decodeersleutel L nodig.

  Die decodeersleutel moet voldoen aan K • L = 1 (mod.M),

  In ons voorbeeld moet dus 25 • L = 1 (mod.1008).

  L (hier 121) is de geheime sleutel die alleen bekend is aan degene die moet decoderen.

- Je decodeert door de afzonderlijke cijfers van het geheimschrift tot de macht L te doen en er veelvouden van 1073 (= N) van af te trekken. (Je berekent dus C^{121} (mod.1073) waarin C een gecodeerd blokje voorstelt.)

$$
\begin{aligned}
308^{121}\ (\text{mod}\,1073) &= 308.\left[308^2\right]^{60}\ (\text{mod}\,1073) = 308.[440]^{60}\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 308.\left[440^2\right]^{30}\ (\text{mod}\,1073) = 308.[460]^{30}\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 308.\left[460^2\right]^{15}\ (\text{mod}\,1073) = 308.[219]^{15}\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 308.219.\left[219^2\right]^{7}\ (\text{mod}\,1073) = 926.[749]^{7}\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 926.749.\left[749^2\right]^{3}\ (\text{mod}\,1073) = 416.[895]^{3}\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 416.895.\left[895^2\right]\ (\text{mod}\,1073) = 1062.567\ (\text{mod}\,1073)\\
&= 201
\end{aligned}
$$

201 528 251 524 102 926 151 522 301 017 193 011 112 810

➔ 20 15 28 25 15 24 10 29 26 15 15 22 30 10 17 19 30 11 11 28

➔ JEROEN SPEELT GITAAR

Samengevat

p en q twee “grote” priemgetallen

N = p • q

M = (p – 1) • (q – 1)

K < M én ggd(K,M) = 1

L < M en K • L = 1 (mod.M)

K en N zijn publiek, iedereen (ook de “vijand”) kent deze sleutels

Tekst
➔ omzetten in cijfervorm
➔ verdelen in blokjes B
➔ coderen: $B^K \pmod{N} = C$
➔ code

L is de geheime sleutel die enkel de “ontvanger van de boodschap” kent

Code
➔ decoderen: $C^L \pmod{N} = B$
➔ cijfervorm
➔ omzetten in tekst

6. Oefeningen

6.1. Reeks 1

(1) Ontbind volgende getallen in priemfactoren

(a) 1 080 432 = ………………………………………

(b) 20 073 277 = ………………………………………

(c) 118 459 = ………………………………………

(d) 5 504 701 = ………………………………………

(e) 62 656 243 = ………………………………………

(f) 12 689 123 = ………………………………………

(g) 15 581 523 = ………………………………………

(h) 249 001 = ………………………………………

(i) 41 842 505 = ………………………………………

(j) 121 330 189= ………………………………………

(k) 8 587 340 257 = ………………………………………

(l) 11 161 = ………………………………………

(2) Bewijs volgende eigenschappen

(a) $17 \mid 10a + b \;\Rightarrow\; 17 \mid a - 5b$

(b) $13 \mid 5a + 7b \;\Rightarrow\; 13 \mid -3a + 27b$

(c) $19 \mid 8a + 3b \;\Rightarrow\; 19 \mid 37a + 2b$

(d) Als men een getal van 4 cijfers tweemaal naast elkaar schrijft, dan bekomt men een getal van 8 cijfers dat steeds deelbaar is door 137.

(3) Bepaal de natuurlijke delers van volgende getallen en ga na dat deze getallen perfect zijn:

(a) $6 = 2^1\left(2^2 - 1\right)$

$d(n)$: ……………………………………………………………

$s(n)$: ……………………………………………………………

(b) $28 = 2^2\left(2^3 - 1\right)$

$d(n)$: ……………………………………………………………

$s(n)$: ……………………………………………………………

(c) $496 = 2^4\left(2^5 - 1\right)$

$d(n)$: ……………………………………………………………

$s(n)$: ……………………………………………………………

(d) $8128 = 2^6\left(2^7 - 1\right)$

$d(n)$: ……………………………………………………………

$s(n)$: ……………………………………………………………

(4) Bepaal de “vriend” van volgende getallen:

(a) 1184

$d(n) = d(1184)$: ………………………………………………

$m = s(n) = s(1184)$: ………………………………………………

$d(m) = d(.........)$: ………………………………………………

$1184 = s(m)$: ………………………………………………

(b) 2924

$d(n) = d(2924)$: ………………………………………………

$m = s(n) = s(2924)$: ………………………………………………

$d(m) = d(\text{.........})$: ………………………………………………

$2924 = s(m)$: ………………………………………………

(c) 5020

$d(n) = d(5020)$: ………………………………………………

$m = s(n) = s(5020)$: ………………………………………………

$d(m) = d(\text{.........})$: ………………………………………………

$5020 = s(m)$: ………………………………………………

(5) Bereken ggd(a,b) en kgv(a,b)

(a) a = 130 801	ggd(a,b) =	…………………………………
b = 279 312	kgv(a,b) =	…………………………………
(b) a = 1 227 744	ggd(a,b) =	…………………………………
b = 666 792	kgv(a,b) =	…………………………………
(c) a = 121 125	ggd(a,b) =	…………………………………
b = 18 135	kgv(a,b) =	…………………………………
(d) a = 49 786 511	ggd(a,b) =	…………………………………
b = 50 874 269	kgv(a,b) =	…………………………………
(e) a = 126 619	ggd(a,b) =	…………………………………
b = 12 890 623	kgv(a,b) =	…………………………………

(6) Bepaal, indien mogelijk, een oplossing van … (toepassing op de st. v. Bézout)

(a) 37 x + 73 y = 1 x = ………………… y = …………………

(b) 54 x + 24 y = 12 x = ………………… y = …………………

(c) 101 x + 11 y = 1 x = ………………… y = …………………

(d) 89 x + 67 y = 1 x = ………………… y = …………………

(e) 19 x + 29 y = 3 x = ………………… y = …………………

(f) 129 x + 123 y = 6 x = ………………… y = …………………

(7) Bereken

(a) modulo 11: 12 + 7 x 8 – 9 = ………..

(b) modulo 7: 3 x (7 + 4 x (8 + 9) – 5) = ………..

(c) modulo 19: 4 x 12 + 13 x 28 – 7 x 6 = ………..

(d) modulo 14: 3 x (4 – 6) + 8 x (12 + 25) + 16^2 = ………..

(e) modulo 23: [44 x $(57 – 13)^2$ + 5^2 x (8 + 11) $]^2$ = ………..

(f) modulo 67: 99999999 – 12345678 = ………..

(8) Stel de vermenigvuldigingstabel op voor $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

.	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$	$\overline{6}$
$\overline{0}$							
$\overline{1}$							
$\overline{2}$							
$\overline{3}$							
$\overline{4}$							
$\overline{5}$							
$\overline{6}$							

Welke restklassen hebben een symmetrisch element?

…………………………………………………………………………

(9) Bepaal het kleinste natuurlijk getal x dat voldoet aan:

(a) $4x + 5 = 4 \pmod 7$ x = ……………………

(b) $5x + 7 = 3 \pmod{11}$ x = ……………………

(c) $6x + 1 = 7 \pmod 9$ x = ……………………

(d) $3x + 8 = 7 \pmod 7$ x = ……………………

(e) $7x + 5 = 2 \pmod{11}$ x = ……………………

(10) Bepaal het kleinste natuurlijk getal x dat voldoet aan (Chinese reststelling):

(a) $\begin{cases} x \equiv 4 \pmod{11} \\ x \equiv 8 \pmod{12} \end{cases}$ x = ……………………

(b) $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{6} \\ x \equiv 4 \pmod{7} \\ x \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$ x = ……………………

(c) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv 0 \pmod{9} \\ x \equiv 6 \pmod{11} \end{cases}$ x = ……………………

(d) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{4} \\ x \equiv 5 \pmod{6} \\ x \equiv 8 \pmod{9} \end{cases}$ x = ……………………

(e) $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{5} \\ x \equiv 2 \pmod{9} \\ x \equiv 5 \pmod{12} \\ x \equiv 7 \pmod{14} \end{cases}$ x = ……………………

6.2. Reeks 2

(1) Vervolledig volgende rekeningnummers

(a) 860 – 0112905 - ……

(b) 833 – 4819287 - ……

(c) 780 – 54632 …… - 83

(d) 001 – 42820 …… - 92

(e) BE … … - 8602 - 7 … 48 - … 667

(f) BE … … - 7994 - … 43 … - 7436

(2) Vervolledig volgende ISBN-nummers

(a) 978 – 90 – 351 – 3801 – …

(b) 978 – 90 – 5764 – 993 – …

(c) 978 – 90 – 314 – 30…7 – 0

(d) 978 – 90 – 314 – 3…07 – 3

(3) Vervolledig volgende serienummers

(a) Z 6648 … 386393

(b) U 27 … 60155785

(c) M 334846 … 7205

(4) Vervolledig volgende gestructureerde mededelingen

(a) +++ 568 / 2469 / 654 … … +++

(b) +++ 478 / 8 … … 5 / 25733 +++

(c) +++ 9 … 8 / 721 … / 95735 +++

(d) +++ 201 / 8 … 25 / 787 … 0 +++

(5) In volgende rekeningnummers zit één fout (eerste drie en laatste twee zijn sowieso juist). Kan je het juiste nummer terugvinden?

(a) 001 – 1246129 – 42 → 001 - ………………………. - 42

(b) 680 – 4200678 – 02 → 680 - ………………………. - 02

(c) 000 – 5544233 – 07 → 000 - ………………………. - 07

(d) 850 – 4710482 – 77 → 850 - ………………………. - 77

(6) Vervolledig volgende CAS nummers

(a) 2-butenal ; C_4H_6O ; CAS : 123 – 73 – …

(b) waterstofcyanide ; HCN ; CAS : 74 – 90 – …

(c) diethylsulfaat ; $C_4H_{10}O_4S$; CAS : 64 – …7 – 5

(d) DDT ; $C_{14}H_9Cl_5$; CAS : 7…9 – 02 – 6

(e) isoproturon ; $C_{12}H_{18}N_2O$; CAS : 34123 – …9 – 6

(7) Bepaal alle natuurlijke getallen $x \in [40,60]$ waarvoor geldt:

$\left[x \pmod{19}\right] \pmod{11} = 2$ antwoord : ……………………

(8) Bepaal alle natuurlijke getallen x kleiner dan 100 die voldoen aan:

$\left[x \pmod{8}\right].\left[x \pmod{11}\right] = 7$ antwoord : ……………………

(9) Bepaal alle natuurlijke getallen $x \in [0,50]$ waarvoor geldt:

$(2x-1) \pmod{7} = (3x+4) \pmod{8}$ antwoord : ……………………

(10) Wanneer valt Paasdag de komende vijf jaar?

6.3. Reeks 3

(1) Geef alle priemtweelingen tussen 300 en 500:

……………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………

(2) Toon aan dat het vermoeden van Goldbach klopt voor alle even getallen tussen 55 en 85:

56 = ………………………………	72 = ………………………………
58 = ………………………………	74 = ………………………………
60 = ………………………………	76 = ………………………………
62 = ………………………………	78 = ………………………………
64 = ………………………………	80 = ………………………………
66 = ………………………………	82 = ………………………………
68 = ………………………………	84 = ………………………………
70 = ………………………………	

(3) Ga m.b.v. de Lucas-Lehmertest na of volgende Mersennegetallen een priemgetal zijn of niet. Indien priem, bepaal dan het bijbehorende perfecte getal.

(a) $M_{17} = 2^{17} - 1 = 131071$

priem : ja / neen → zo ja, perfecte getal : ……………………………

(b) $M_{19} = 2^{19} - 1 = 524287$

priem : ja / neen → zo ja, perfecte getal : ……………………………

(c) $M_{23} = 2^{23} - 1 = 8388607$

priem : ja / neen → zo ja, perfecte getal : ……………………………

(d) $M_{31} = 2^{31} - 1 = 2147483647$

priem : ja / neen → zo ja, perfecte getal : ……………………………

(4) Bereken m.b.v. de functionaalvergelijking:

(a) $\zeta(2) =$

(b) $\zeta(-1) =$

(c) $\zeta(-2) =$

(d) $\zeta(-3) =$

(e) $\zeta(-5) =$

(f) $\zeta(-7) =$

(5) Gamma-functie:

(a) Stel in de eerste functionaalvergelijking x = ½ en bereken zo $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) =$

(b) Als je weet dat $\Gamma(x+1) = x.\Gamma(x)$ bereken dan:

$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) =$

$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) =$

$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) =$

6.4. Reeks 4

(1) Decodeer volgende zin. K = 41 , N = 1043 , L = 65

926 690 464 644 786 127 557 422 927 353 159 901 464 038 584 521

… … … … … … … … … … … … … … … …

Antwoord : ……………………………………………………………………………......

(2) Codeer volgende zin. K = 31 , N = 1027 , L = 151

JENS DROOMT NOOIT

J E N S D R O O M T N O O I T

… … … … … … … … … … … … … … … … …

groeperen per 3 cijfers

… … … … … … … … … … … …

coderen

… … … … … … … … … … … …

(3) Bepaal L als p = 11, q = 101, K = 21.

N =

M =

L =

(4) Decodeer volgende zin. K = 619 , N = 1769 , M = 1680 , L = …………

1651	486	512	1114	401	1108	336	929	512	1114
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Antwoord : ……………………………………………………………………………......

(5) Kies p en q priem zodat $19 \le p,q \le 83$.

p =

q =

Bereken N en M

N =

M =

Kies een K < M zodat ggd(K,M) = 1

K =

Bepaal L < M zodat K • L = 1 (mod.M)

L =

Geef de publieke sleutels K en N door aan en andere groep en vraag naar een gecodeerd woord.

Probeer het gecodeerde woord te decoderen.

Bibliografie

- Frits Beukers, Getaltheorie voor Beginners, Epsilon Uitgaven, 2000
- Roland van der Veen en Jan van de Craats, De Riemannhypothese, Epsilon Uitgaven, 2011
- Jan De Beule, Tom De Medts en Jeroen Demeyer, Opgeloste en onopgeloste mysteries in de getaltheorie, Die Keure, 2013
- Aldine Aaten en Cor Kraaikamp, Verborgen boodschappen, Epsilon Uitgaven, 2013
- nl.wikipediia.org/wiki/

T³ EUROPE

16de T³ Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Beschrijvende statistiek in de 2de graad met de TI-Nspire App

Björn Carreyn

Texas Instruments
Katholieke Universiteit Leuven

> VOORBEELD 1

Welk rekenblad gebruik jij?

Aan 50 leerlingen uit het vierde jaar werd gevraagd welk rekenblad zij het liefst gebruiken.
De resultaten vind je in onderstaande tabel.

Numbers	Excel	Numbers	Excel	Calc	Google Docs	Numbers	Calc	Excel	Numbers
Numbers	Excel	Excel	Excel	Excel	Excel	Calc	Numbers	Excel	Excel
Excel	Calc	Numbers	Google Docs	Excel	Numbers	Numbers	Excel	Numbers	Excel
Excel	Numbers	Calc	Numbers	Numbers	Excel	Numbers	Google Docs	Excel	Excel
Numbers	Excel	Excel	Excel	Numbers	Numbers	Excel	Excel	Excel	Numbers

Je vindt de gegevens ook in een Numbersbestand - tabblad vraag 03

a) Verwerk de gegevens in een frequentietabel met behulp van Numbers. Voeg in een aparte pagina jouw verwerkte gegevens als afbeelding in.

b) Maak een staafdiagram van de absolute frequenties en voeg een afbeelding in.

c) Maak een strookdiagram van de relatieve frequenties en voeg een afbeelding in.

d) Hoeveel leerlingen maken het liefst gebruik van een ander pakket dan Microsoft Excel om een rekenblad aan te maken?

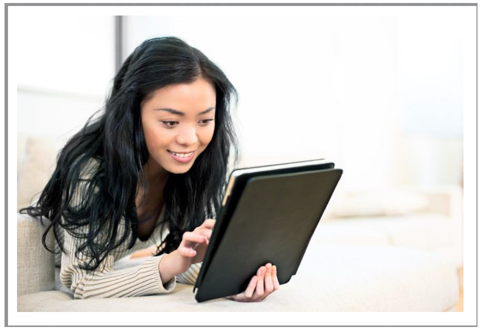
e) Hoeveel procent van de leerlingen maken het liefst gebruik van Numbers of van Google Docs?

> VOORBEELD 2

Volgens een studie van het onderzoeks- en informatiecentrum van de verbruikersorganisatie is het internet heel populair bij jongeren van 14 tot 16 jaar. Tot 98% van de jongeren surfen op het internet. Een beperkt onderzoek naar het aantal uren dat jongeren op dagen in de week surfen op het internet geeft volgende resultaten.

a) Vervolledig de frequentietabel in Numbers en voeg jouw verwerkte gegevens als afbeelding in.

klasse	m_i	f_i	rf_i	rf_i (%)	cfi	crf_i	crf_i (%)
[0,1[					3		
[1,2[		21					
[2,3[						0,78	
[3,4[					45		
[4,5[				8			
[5,6[		1	0,02				
TOTAAL							



b) Maak een ogief en voeg de grafiek in als afbeelding op een nieuwe pagina.

c) Beschrijf wat de getallen in de aangeduide vakjes betekenen. Antwoord in een zin!

betekenis groen vakje:

betekenis oranje vakje:

betekenis blauw vakje:

betekenis paars vakje:

betekenis rood vakje:

d) Hoeveel leerlingen uit het onderzoek surfen op een weekdag 2 u of meer, maar minder dan 5 u?

> VOORBEELD 3

Op een gevaarlijk kruispunt is een jaar lang bijgehouden wat de leeftijd is van de bij verkeersongevallen betrokken personen. De gegevens werden in een stengelbladdiagram gepubliceerd.

leeftijd slachtoffers bij verkeersongevallen

0	6 6 7 7 9
1	2 2 2 3 5 6 7 7 7 8
2	0 3 3 7 8
3	5 7 7
4	0 8 9 9
5	0 0
6	2 2 3 5 7 8
7	
8	1 3 4
9	1

a) Bepaal de volgende centrum- en spreidingsmaten.

minimum: maximum:

gemiddelde: mediaan:

eerste kwartiel: derde kwartiel:

variatiebreedte: interkwartielafstand:

b) Waarom staat er rechts van 7 in de stengel geen cijfers?

> VOORBEELD 4

Uit een mand eieren worden van 32 eieren het gewicht vastgesteld.
Het resultaat wordt hier onderweergegeven in grammen.

55	56	62	63	48	65	44	60	66	49	58	57	73	51	68	55
41	50	53	57	50	59	59	65	50	62	49	71	54	53	44	49

Teken een boxplot van deze gegevens en voeg deze hieronder in.

> VOORBEELD 5

Meneer Hanton heeft gedurende 2 weken het aantal iMessages die op zijn mobiele toestellen toekwamen genoteerd

33	35	27	19	37	40	43	39	42	49	21	44	49	38

a) Bereken de standaardafwijking met behulp van Numbers. Voeg hieronder een afbeelding in van jouw berekeningen.

b) Om te kijken welke dagen uitzonderlijk kalm waren, bekijkt meneer Hanton hoeveel dagen buiten het interval $[\overline{x}-2\sigma\ ;\ \overline{x}+2\sigma]$. Hoeveel dagen waren extreem rustig en hoeveel iMessagesontving meneer Hanton toen?

GEWICHT PAKJES CHIPS

In een klein zakje chips staat er dat er 45 gram in een zakje zit. In werkelijkheid blijkt dat er bijna nooit precies 45 gram chips in een zakje zit. Daarom worden de zakjes regelmatig gecontroleerd. Bij één van die controles worden 40 zakjes chips nauwkeurig gewogen. De resultaten vind je in onderstaande tabel.

45,2	45,8	44,9	45,3	43,9
44,9	45,0	46,5	44,5	45,0
43,2	45,6	45,9	43,7	45,4
46,1	46,0	43,3	46	44,7
47,2	46,4	45,4	45,8	45,0
44,9	43,3	44,6	45,3	43,8
46,2	45,5	43,1	45,1	44,9
45,2	45,9	44,5	44,8	46,2

a) Bereken op 1 decimaal hoeveel gram chips er gemiddeld in een zakje zit.

b) Maak van bovenstaande gegevens een stengelbladdiagram.

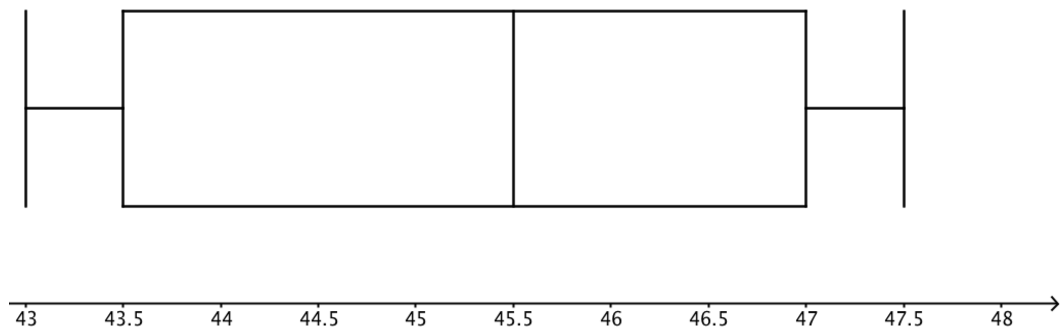
c) De controleur moet na de controle van de 40 zakjes de mediaan doorgeven aan de persoon die de machine bedient. Welk gewicht geeft hij door als mediaan.

d) Maak een boxplot van deze gegevens.

e) Bereken de standaardafwijking σ .

f) Alle zakjes die niet behoren tot $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ worden afgekeurd. Hoeveel zakjes worden er afgekeurd?

De volgende dag wordt er een tweede controle gehouden. Dit maal werden 200 zakjes chips gecontroleerd in een boxplot.



g) Ook nu moet de mediaan doorgegeven worden aan de persoon die de machine bedient. Welk gewicht geven we door aan de controleur?

h) Een zakje dat 43,5 gram of minder weegt wordt afgekeurd. Als er meer dan 20 zakjes worden afgekeurd dan moet de machine opnieuw worden afgesteld.

Moet de machine opnieuw worden afgesteld?

[6] bron: www.wiskunde-examens.nl

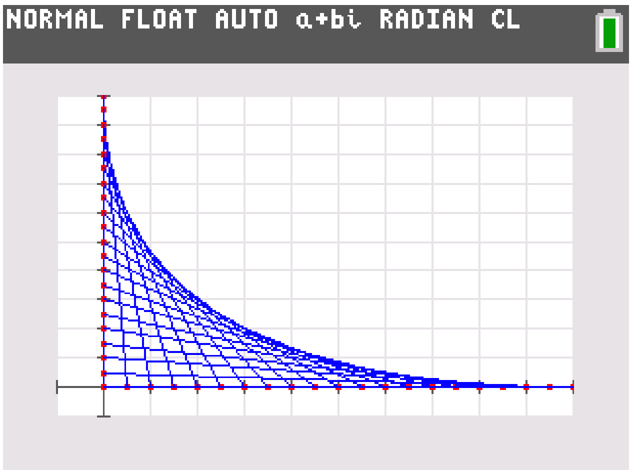
T³ EUROPE

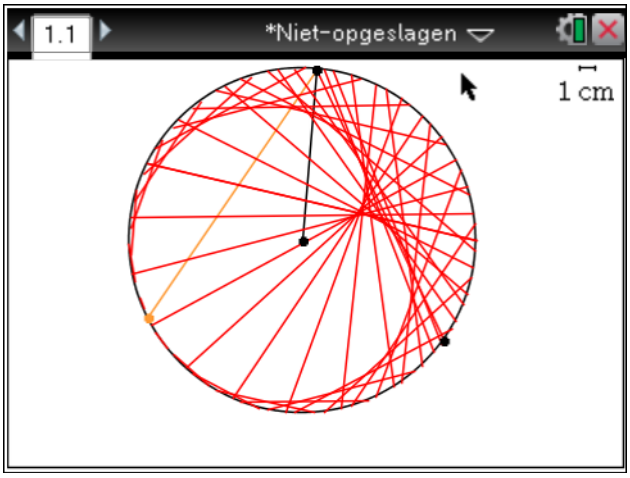
16de T³ Europe Symposium
Oostende

19 & 20 augustus 2013

Nieuwe mogelijkheden met de TI-84 Plus Color

Didier Deses





Texas Instruments
Katholieke Universiteit Leuven

Nieuwe mogelijkheden met de **TI-84 Plus Color**

Dr Didier Deses*

Samenvatting

We bekijken de nieuwigheden van de **TI-84 Plus Color** . Naast de enkele veranderingen in de menu's en opties wordt vooral aandacht besteed aan het gebruik van het nieuwe kleurenscherm. Enkele klassieke oefeningen beschouwd, alsook een voorbeeld uit de optica. Hiermee maken we enkele zeer eenvoudige programma's. Deze zullen voluit het nieuwe kleurenscherm gebruiken. We leggen een link naar de kunstwereld, hetgeen tenslotte leidt naar een knutseloefening voor leerlingen.

Inhoudsopgave

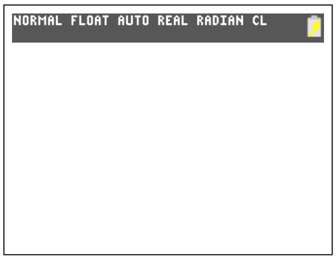
*Leerkracht wiskunde KA Koekelberg, medewerker aan het departement wiskunde van de VUB, stuurgroep T^3-Vlaanderen

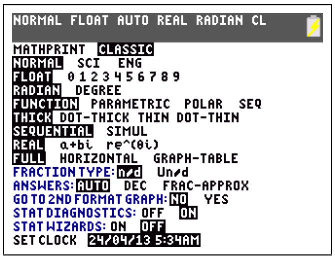
1 Inleiding

Deze tekst gaat over de mogelijkheden van de nieuwe **TI-84 Plus Color** . Deze nieuwe versie van de **TI-84 Plus** verschilt bijna niet in gebruik met het oudere zwart-wit toestel. De toetsen, functies en menu's zijn hetzelfde gebleven. Voor wie de **TI-84 Plus** gewoon is, zal de overstap vlot gaan.

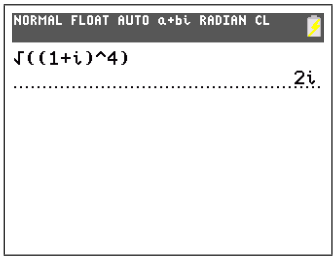
Het verschil tussen beide toestellen zit in het nieuwe scherm. De **TI-84 Plus Color** heeft een kleurenscherm dat een hogere resolutie heeft (320×240 pixels). Daarnaast zijn de losse baterijen vervangen door een accu, die men via een usb-lader kan opladen.

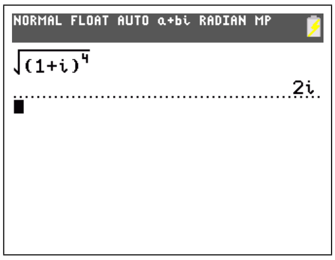
Aan de software is er bijna niets verandert. Enkele verbeteringen zijn wel noemenswaardig. Wanneer men de **TI-84 Plus Color** aanzet merkt men bovenaan een statusbalk. Hierin kan men onmiddellijk zien wat de staat van de batterij is en of het toestel in graden of radialen rekent. Ook andere opties die men via `mode` kan veranderen worden hier weergegeven.



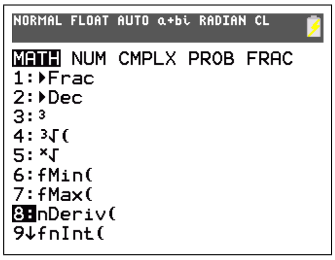


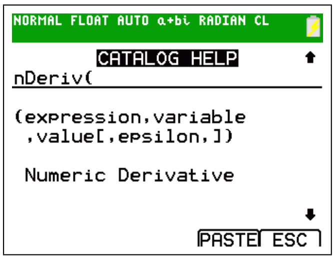
Nieuw voor de **TI-84 Plus Color** is optie `[mathprint]` onder `mode`. Dit geeft de stijl aan waarin formules worden ingegeven. In de `[classic]`-mode zal het toestel alle formules op één lijn zetten, in `[mathprint]` worden de formules getoond zoals ze in de wiskunde worden geschreven.

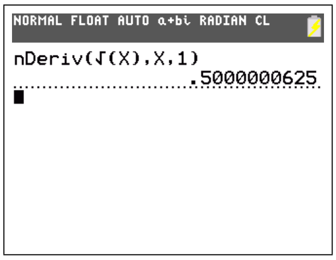




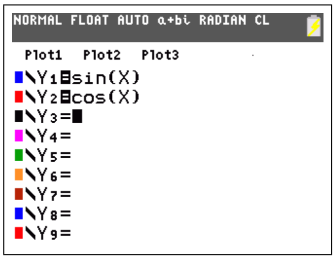
Een andere vernieuwing is de ingebouwde helpfunctie. Als je in een menu een commando vindt, kan je altijd `+` gebruiken om een korte omschrijving te krijgen. We geven het voorbeeld van `math` `[nDeriv]` dat de afgeleide van een functie in een punt numeriek benadert.

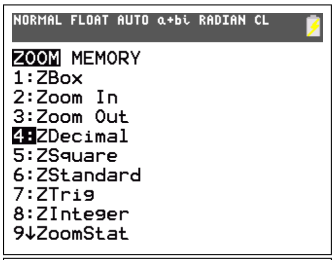


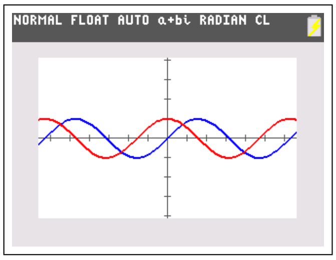


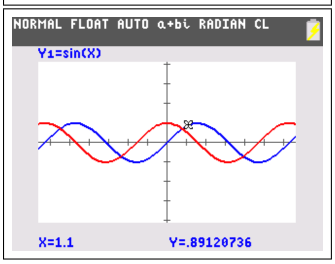


Het zal niet verbazen dat de grootste nieuwigheden van de **TI-84 Plus Color** te vinden in de grafische eigenschappen van het toestel. Indien we gewoonweg de grafiek van een functie maken zien we dat opeenvolgende grafieken in verschillende kleuren komen te staan. Wanneer er informatie op het scherm bijkomt (bijvoorbeeld bij het gebruik van `trace`) komt dit niet op het grafisch venster meer, maar eronder.

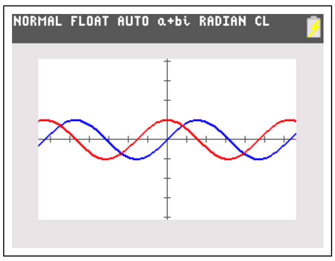


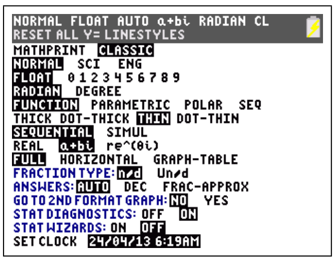


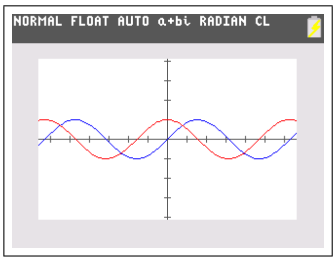


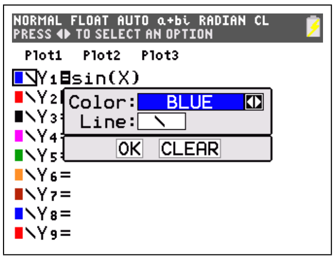


Standaard worden de grafieken met een vette lijn getekend. Door `mode` te gebruiken kan men dit veranderen. De instellingen [thick] en [thin] zorgen voor een dikke of dunne lijn, met [dot-thick] en [dot-thin] worden de punten van de grafiek niet met elkaar verbonden door een lijn. Je kan deze opties ook grafiek per grafiek wijzigen door vooraan op de lijn $y_1 =$ te gaan staan.

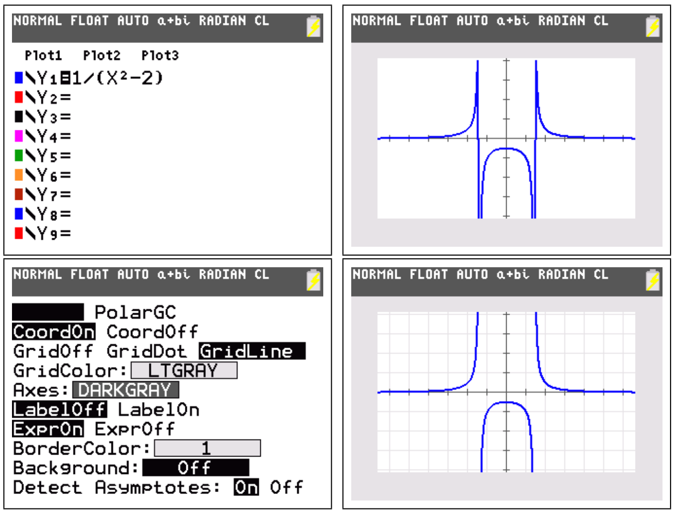








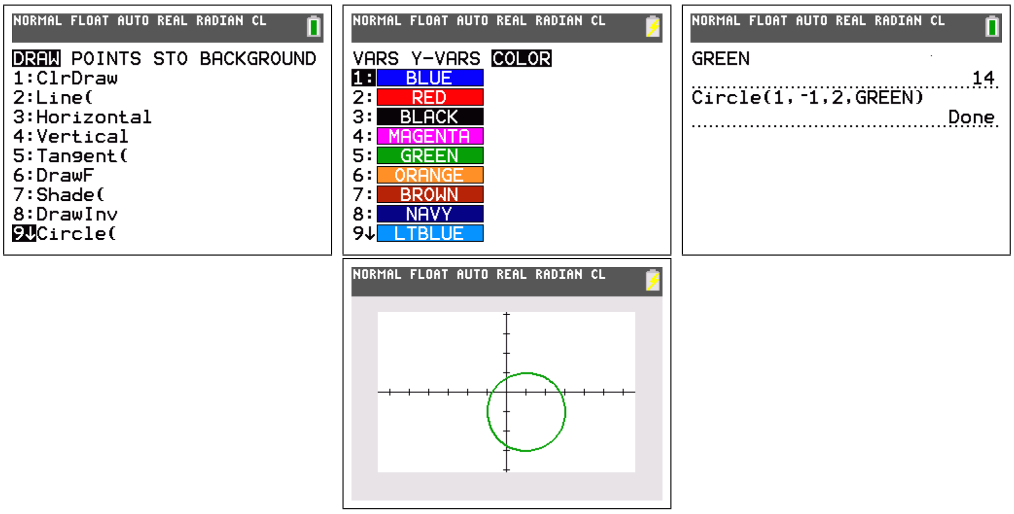
Verdere opties ivm grafieken vind je onder 2nd [format]. Je kan hier kiezen om een raster te maken en de kleur aan te passen. Verder is de optie [Detect Asymptotes] nieuw, je kan hiermee zorgen dat de **TI-84 Plus Color** nagaat of er verticale asymptoten zijn alvorens twee punten te verbinden.



Intern worden alle kleuren van het rekenmachine voorgesteld door een specifiek getal. Voor sommige commando's wordt dit getal gebruikt om de kleur te bepalen. Onderstaande tabel geeft de kleurcodes.

kleur	code
blauw	10
rood	11
zwart	12
paars	13
groen	14
oranje	15
bruin	16
donker blauw	17
licht blauw	18
geel	19
wit	20
licht grijs	21
medium grijs	22
grijs	23
donker grijs	24

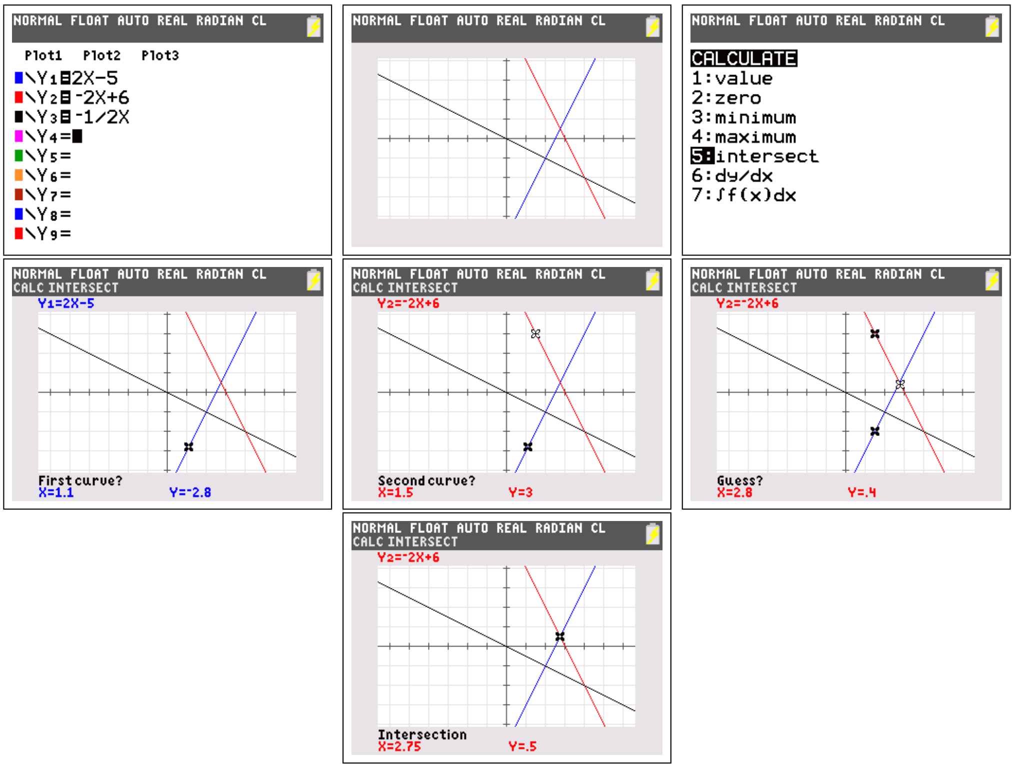
Het is ook mogelijk om de kleuren te halen uit `vars` `[color]`



2 Grafieken met kleur

Opdracht 1. Bepaal het zwaartepunt van de driehoek begrensd door de rechten $y = 2x - 5$, $y = -2x + 7$ en $y = -\frac{1}{2}x$.

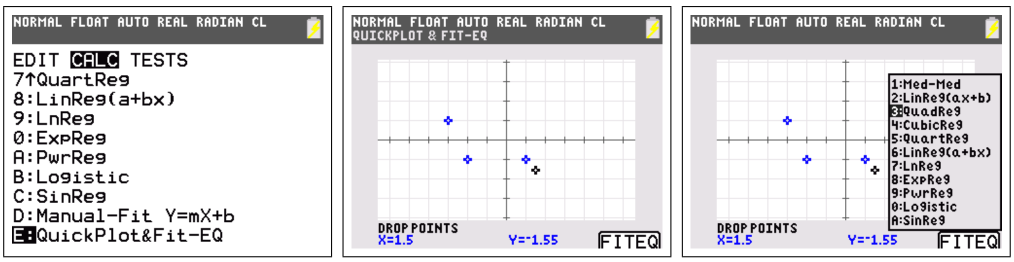
Oplossing. De opeenvolgende grafieken worden in een andere kleur getekend. Via `2nd` `[calc]` `[intersect]` kan je de eerste rechte en dan de tweede selecteren. Daarna geef je een eerste benadering voor het snijpunt. De **TI-84 Plus Color** berekent dan numeriek het snijpunt.

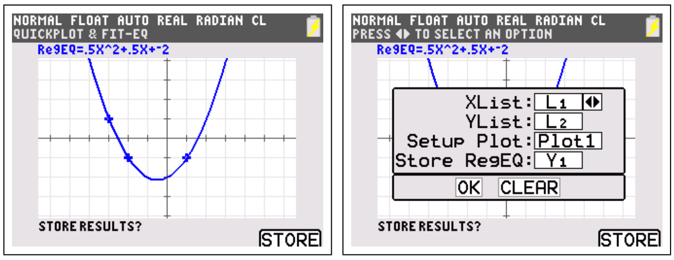


De snijpunten zijn $(\frac{11}{4}, \frac{1}{2})$, $(2, -1)$ en $(4, -2)$. Het zwaartepunt is dus $(\frac{35}{12}, -\frac{5}{6})$. Merk hierbij op dat de omzetting naar breuken nodig is, anders zit men met benaderde waarden.

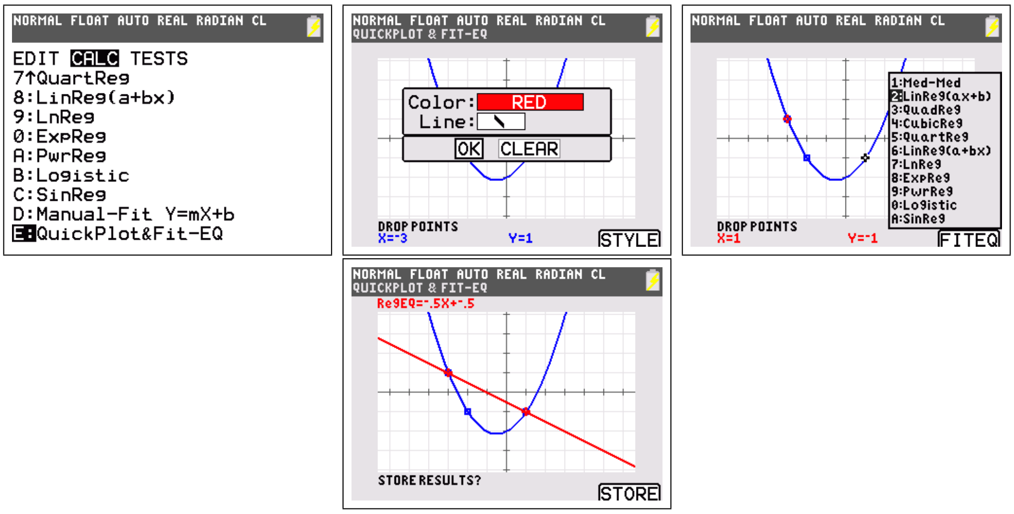
Opdracht 2. Gegeven zijn de punten $A(-3, 1)$, $B(-2, -1)$ en $C(1, -1,)$. Bepaal de vergelijking van de parabool door deze drie punten. Bepaal ook de vergelijking van de rechte door A en C. Wat als we een rechte proberen te vinden door alledrie de punten?

Oplossing. Via $\boxed{\texttt{stat}}$ `[calc]` `[Quickplot&Fit-EQ]` kom je in een applicatie terecht waar je gemakkelijk de vergelijkingen kan vinden van krommen door gegeven punten. Eerst geef je de punten in, daarna kies je de gepaste regressie (kwadratisch in ons geval). We vinden de vergelijking $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$. Je kan tenslotte opteren om de punten en het resultaat op te slaan.

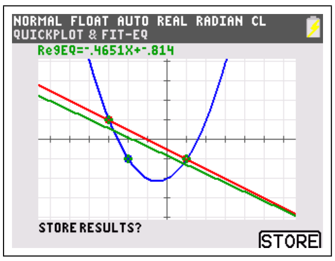




Om de vergelijking van de rechte AC te vinden gebruiken we opnieuw `[Quickplot&Fit-EQ]`. We passen eerst de kleur aan en voeren de twee punten in. Daarna passen we een lineaire regressie toe. De vergelijking van AC is $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$.

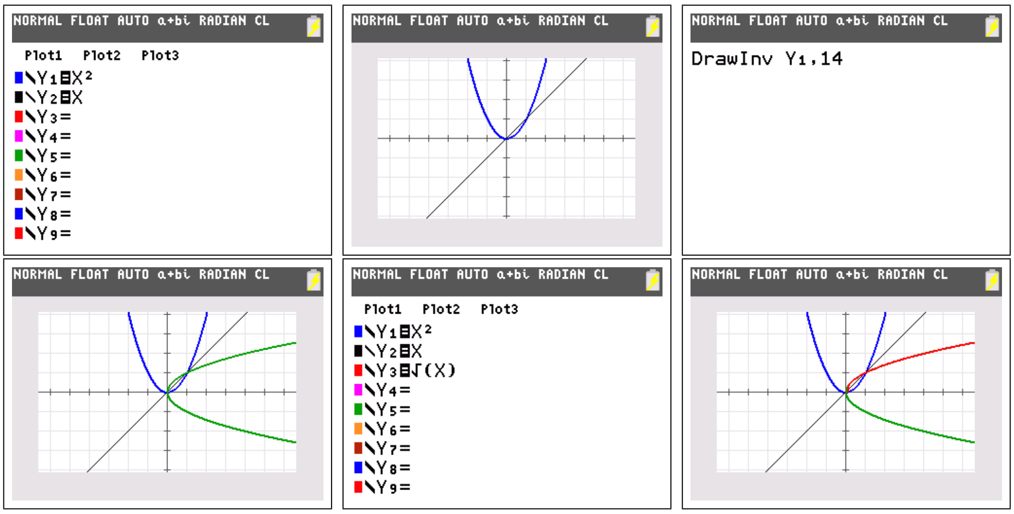


Indien we een lineaire regressie voor drie punten invoeren bekomen we de regressierechte, i.e. de beste rechte door deze puntenwolk.



Opdracht 3. Maak de grafiek van een functie (bijvoorbeeld $y = x^2$ of $y = \cos x$) en van de eerste bissectrice. Gebruik $\boxed{\texttt{2nd}}$ `[draw]` `[drawinv]` om de grafiek volledig te spiegelen. Je hebt nu de inverse *relatie* getekend. Is dit de grafiek van een functie? Teken nu de inverse functie (bijvoorbeeld $y = \sqrt{x}$ of $y = \text{Bgcos}\, x$). Begrijp je nu waarom men voor de inverse *functie* men het domein het bereik moet beperken?

Oplossing. Maak de grafieken als volgt.

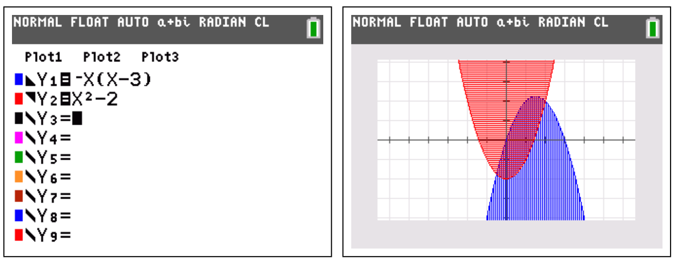


Men ziet duidelijk dat de grafiek van inverse *relatie* de spiegeling is van de grafiek van de functie t.o.v. de eerste bissectrice. In het algemeen echter is dit niet de grafiek van een functie. Indien men echter het domein en het bereik beperkt bekomt men wel de grafiek van de inverse *functie*.

Opdracht 4. Los het volgend stelsel ongelijkheden in het vlak grafisch op.

$$\begin{cases} y + x(x-3) < 0 \\ y > x^2 - 2 \end{cases}$$

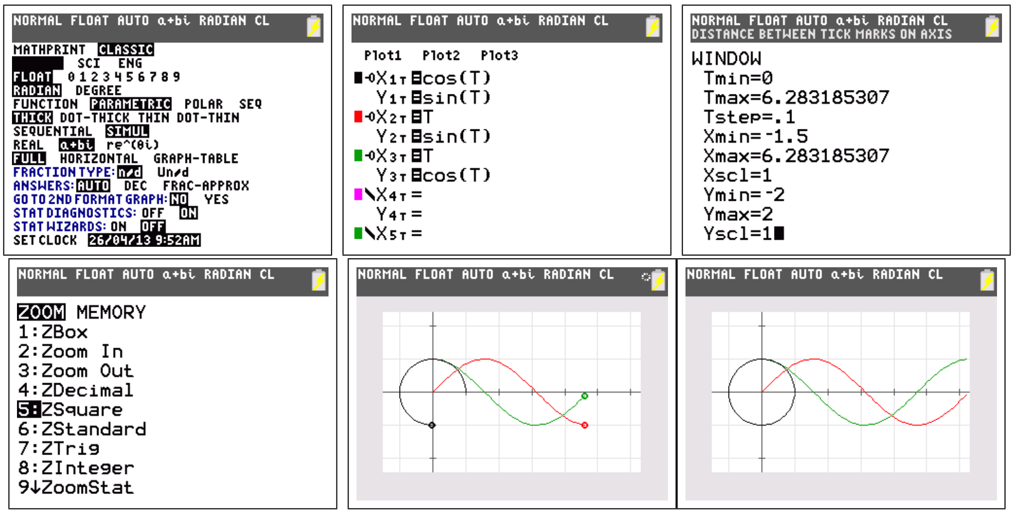
Oplossing. Je kan op de **TI-84 Plus Color** zeer eenvoudig de grafiek maken van ongelijkheden met twee onbekenden. Daarvoor herleid je de ongelijkheid naar de vorm $y > f(x)$ (of $y \leq f(x)$, ...). Geef nu de functie $f(x)$ in via $\boxed{\text{y=}}$ en gebruik het de pijltjestoetsen om het symbool voor de vergelijking te veranderen in de gewenste arcering (boven arceren = groter dan, onder arceren = kleiner dan). Je kan dit meerdere keren doen om de grafiek van een stelsel ongelijkheden met twee onbekenden grafisch op te lossen. Bijvoorbeeld:



Opdracht 5. Een mooie oefening voor het begrijpen van de goniometrische cirkel en de goniometrische getallen is het maken van volgende grafieken.

Stel met `mode` `[radian]`, `[simul]`, `[connected]` en `[par]` in. Voer dan de goniometrische cirkel en de goniometrische functies in (let op de tekenstijl). Gebruik `window` en stel de parameter t zo in dat die van 0 tot 2π gaat, pas vervolgens de assen aan. Maak de tekening via `zoom` `[ZSquare]`-met `enter` kun je pauzeren. Gebruik tenslotte `trace` en de pijltjestoetsen om de corresponderende punten op de goniometrische cirkel en op de goniometrische krommen te tonen.

Oplossing. Het resultaat is een soort animatie.



Vergeet niet om achteraf de opties via `mode` terug te zetten.

3 Programmeren

3.1 Families van krommen

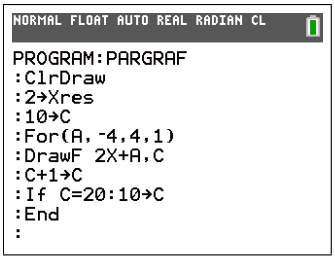
Verder is het kleurenpalet van de **TI-84 Plus Color** goed te gebruiken wanneer men programmeert.

Opdracht 6. Een familie krommen is een reeks krommen gegeven door een vergelijking met een parameter. Onderzoek volgende families krommen:

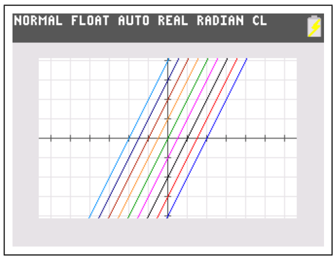
- de rechtenfamilie $y = 2x + A$
- de rechtenfamilie door $(1, 2)$
- de parabolenfamilie met nulwaarden 1 en 2
- de parabolenfamilie met top in $(-2, 1)$

- de waterfontein $y = -x^2 + Ax$

Oplossing. We schrijven eerste een klein programmaatje dat in een for-lus de parameter laat variëren alsook de kleur C. We laten deze vanaf kleurwaarde 10 stijgen to 20, daarna wordt C terug naar 10 gebracht.



De rechtenfamilie $y = 2x + A$ zijn allen evenwijdig.



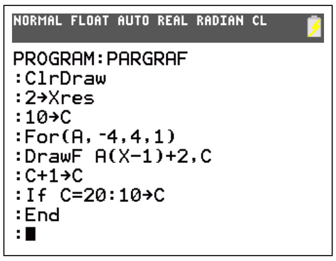
De algemene vergelijking van een rechte door een punt wordt gegeven door

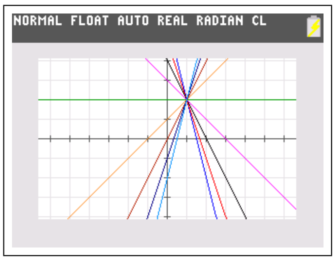
$$y = m(x - x_1) + y_1$$

De vergelijking van de rechtenfamilie door $(1, 2)$ wordt dan gegeven door

$$y = A(x - 1) + 2$$

We passen het programma aan. Het resultaat is het volgende.



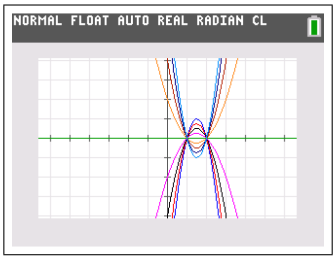


De algemene vergelijking van een parabool met nulwaarden x_1 en x_2 is

$$y = a(x - x_1)(x - x_2)$$

De parabolenfamilie met nulwaarden -1 en 2 wordt dus gegeven door

$$y = A(x - 1)(x - 2)$$

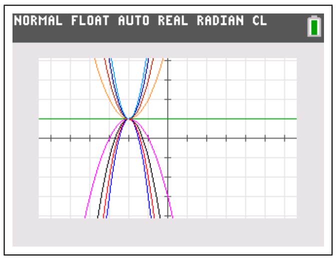


De vergelijking van een parabool met top (p, q) is

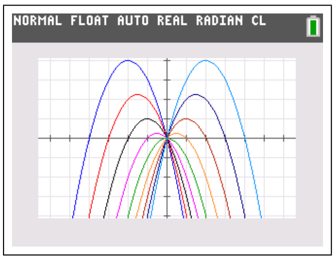
$$y = a(x-p)^2 + q$$

Zodat de parabolenfamilie beschreven wordt door

$$y = A(x+2)^2 + 1$$



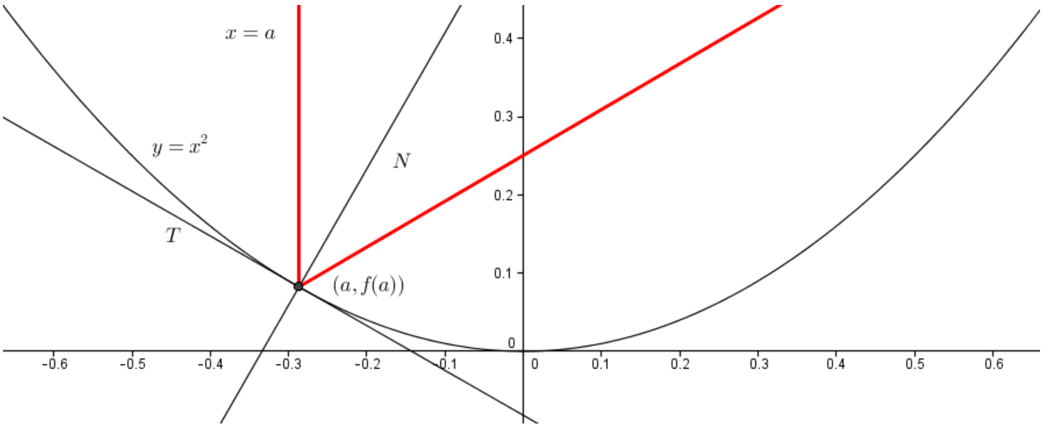
Voor een parabool $y = ax^2+bx+c$ is $y = bx+c$ de vergelijking van de raaklijn in $(0, c)$. Voor de waterfontein $y = -x^2 + Ax$ is de raaklijn in $(0, 0)$ dus de rechte $y = Ax$. De parameter A regelt dus de richting van een waterstraal.



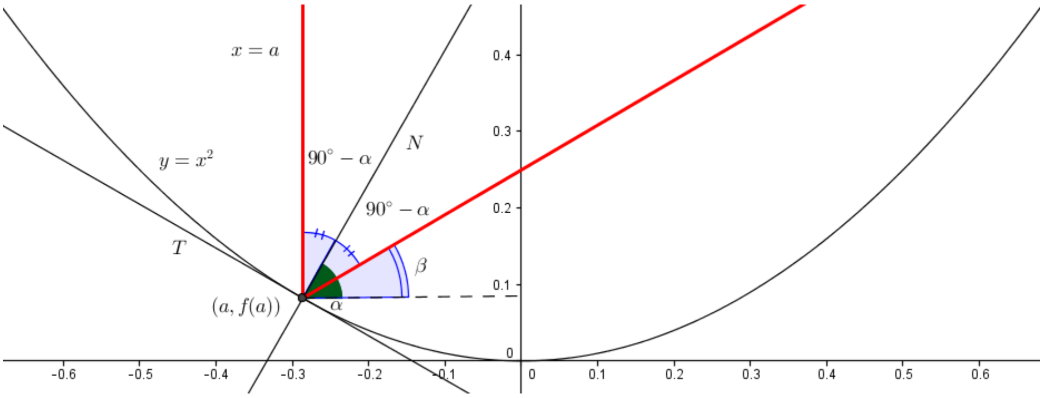
3.2 Kaustiek van een parabool

Wanneer lichtstralen worden weerkaatst, gebeurt het dat de weerkaatste stralen elkaar versterken op bepaalde plaatsen. Deze zullen dan oplichten, men noemt dit kaustieken. Je kan dit zien in een zwembad.

Een heel speciaal geval met belangrijke toepassingen is de parabolische spiegel. Wanneer een lichtstraal invalt, wordt deze weerkaatst volgens een spiegeling tov de normaal.



We maken nu de nodige berekeningen om dit fenomeen te programmeren. Gemakshalve kiezen we de parabool gegeven door $f(x) = x^2$. We beschouwen de hellingshoeken van de verschillende rechten.



De hellingshoek van de normaal N noemen we α. Omdat de lichtsraal evenwijdig met de y-as invalt, weten we dat de hoek met N gelijk is aan $90° - \alpha$. De weerkaatste straal maakt dus dezelfde hoek men N. De hellingshoek van de uitgaande straal is dus

$$\beta = 90° - 2(90° - \alpha) = 2\alpha - 90°$$

Omdat we de vergelijking van de uitgaande straal nodig hebben, beschouwen we de richtingscoëfficiënten. De normaal N staat loodrecht op raaklijn T. We vinden dus als richtingscoëfficiënt

$$m_N = -\frac{1}{f'(a)} = -\frac{1}{2a} = \tan\alpha$$

De richtingscoëfficiënt van de uitgaande straal is dus

$$m = \tan\beta = \tan(2\alpha - 90°) = -\tan(90° - 2\alpha) = -\cot(2\alpha) = -\frac{1}{\tan(2\alpha)}$$

Gebruik makend van de formule $\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$, vinden we

$$m = -\frac{1-\tan^2\alpha}{2\tan\alpha} = -\frac{1-\frac{1}{4a^2}}{-2\frac{1}{2a}} = a(1 - \frac{1}{4a^2}) = a - \frac{1}{4a}$$

De vergelijking van de weerkaatste straal is gegeven door $y = m(x-a)+f(a)$ dus

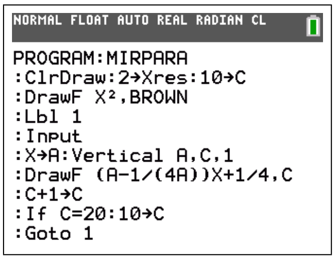
$$y = (a - \frac{1}{4a})(x-a) + a^2 = (a - \frac{1}{4a})x - a^2 + \frac{1}{4} + a^2 = (a - \frac{1}{4a})x + \frac{1}{4}$$

In ons programma tekenen we dus

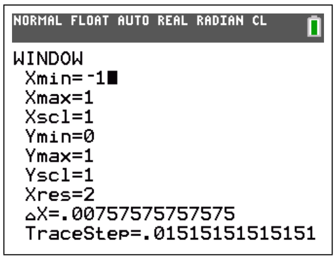
- de parabool $y = x^2$

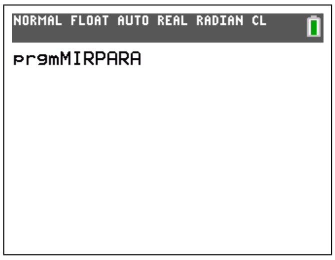
- de invallende straal $x = a$ (via 2nd [draw] [vertical])
- de uitgaande straal $y = (a - \frac{1}{4a})x + \frac{1}{4}$

We gebruiken [input] om de gebruiker grafisch de invallende straal te laten bepalen en zorgen er opnieuw voor dat het kleurenpalet wordt doorlopen.

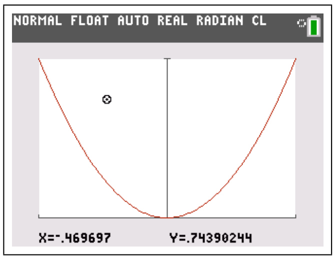


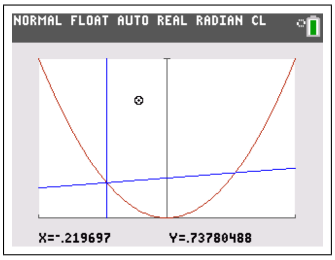
We passen de grenzen van het grafisch venster aan om een goed beeld te krijgen en roepen dan het programma op.

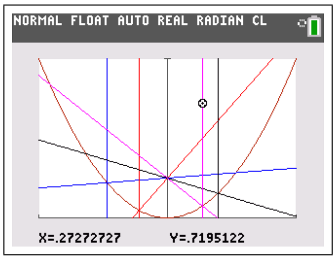




De gebruiker kan nu met de cursor bepalen waar de lichtstraal invalt.







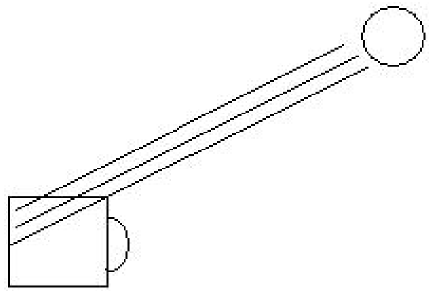
We zien dat alle teruggekaatste stralen samenkomen in één enkel punt, het brandpunt van de parabool. Dit is de basis voor technologie zoals paraboolteleskopen, schotelantennes of lichten van auto's.

3.3 Kaustieken in een kopje

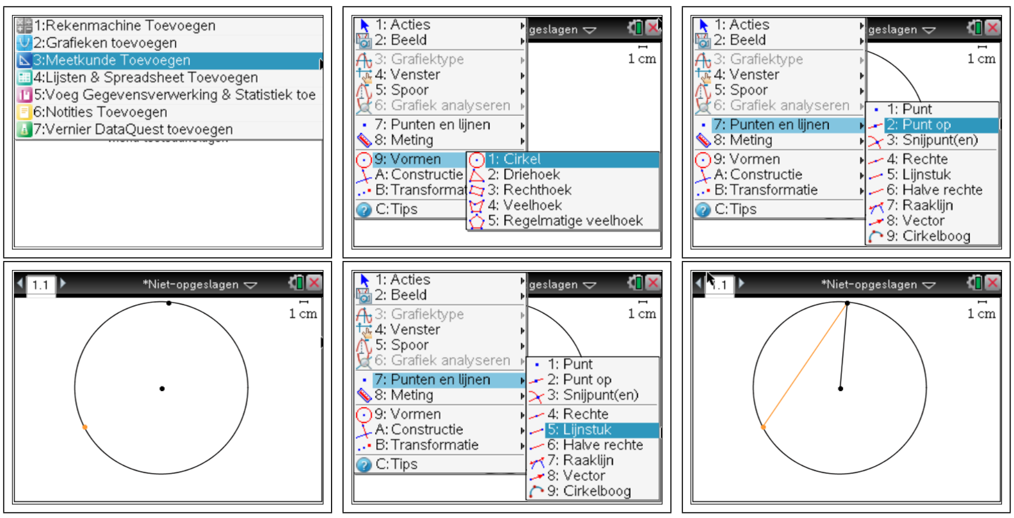
We zullen nu een ander geval van kaustieken beschouwen, namelijk het weerkaatste licht in een kopje. Dit voorbeeld biedt ons de mogelijkheid om verschillende didactische aanpakken te tonen en te vergelijken. Het is een onderwerp dat zich leent tot onderzoekscompetentie of ook gewoon als voorbeeld bij het onderwerp raaklijnen kan worden gebruikt.

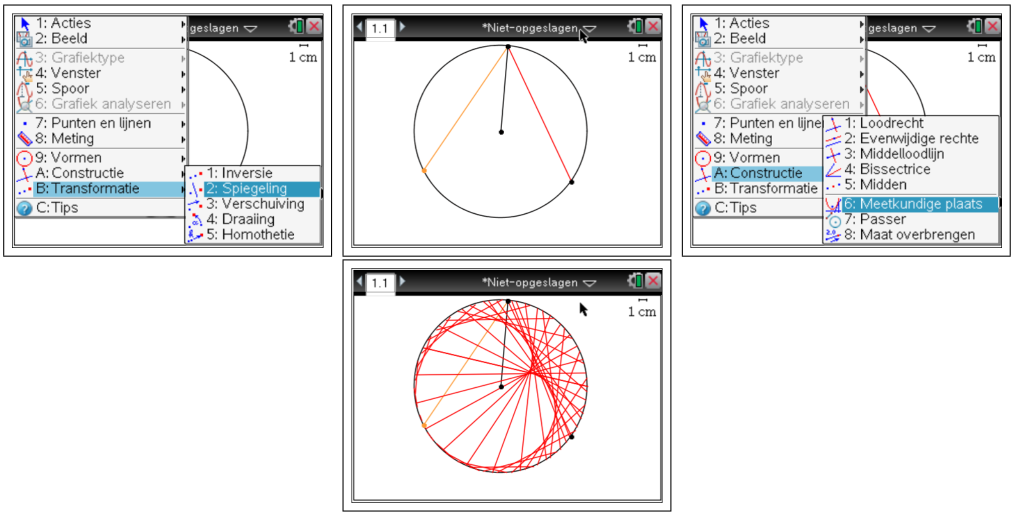
3.3.1 Simulatie

De probleemstelling is de volgende. Wanneer licht over de rand van een kopje invalt, wordt het weerkaatst. Wanneer men in het kopje kijkt ziet men een kromme oplichten. Deze kromme is en cardioïde. Hoe komt die daar? Om dit na te gaan kan men met behulp van de **TI-Nspire** een simulatie doen.



We vertrekken van een cirkel. De lichtbron bevindt zich in een vast punt op de cirkel en een invallende straal gaat naar een ander punt op de cirkel. De straal wordt weerkaatst in dit punt en dus gespiegeld t.o.v. de normaal. We gebruiken nu de meetkundige plaats van de weerkaatste stralen afhangend van het invalspunt op de cirkel en bekomen zo alle teruggekaatste stralen.



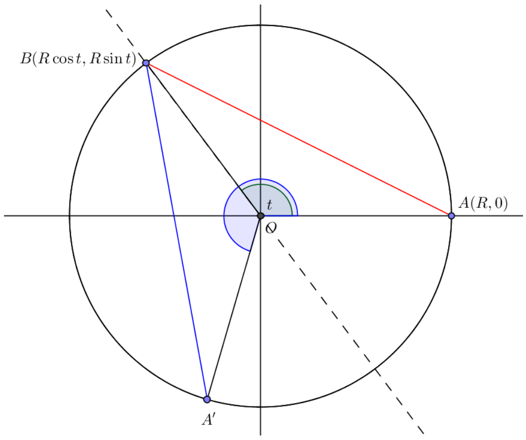


We zien dat alle teruggekaatste stralen samen de raaklijnen vormen aan een bepaalde kromme. Die kromme noemt men de **omhullende** van deze verzameling rechten. In ons geval is de omhullende een cardioïde. In werkelijkheid is er dus een ophoping van weerkaatste lichtstralen, de kromme licht dus op in het kopje.

3.3.2 Berekening

In oudere tijden, toen men bovenstaande simulatie met ict niet kon maken was men verplicht om berekeningen uit te voeren om de weerkaatste stralen te bepalen.

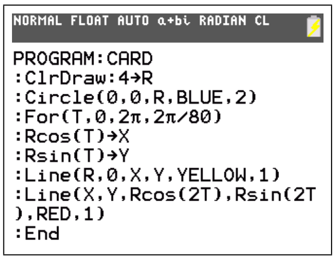
We vertrekken van een cirkel met straal R. De lichtbron bevindt zich in het punt $A(R, 0)$ en een invallende straal gaat naar een punt $B(R\cos t, R\sin t)$ op de cirkel. Het is gemakkelijk in te zien dat de normaal in dit punt eigenlijk een straal is. We moeten nu het beeldpunt A' van A bepalen door spiegeling t.o.v. deze straal.

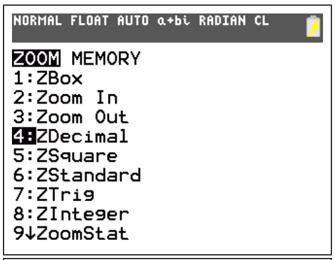


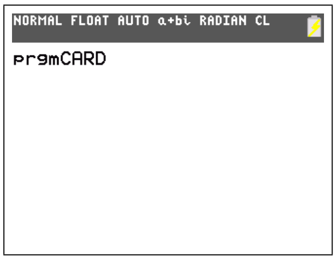
Omdat ΔOAB en $\Delta OA'B$ elkaars spiegelbeeld zijn weten we dat in beide driehoeken de hoek O gelijk is. De aangeduide hoek $\widehat{AOA'}$ is dus $2t$. De coördinaten van A' zijn dan $(R\cos 2t, R\sin 2t)$.

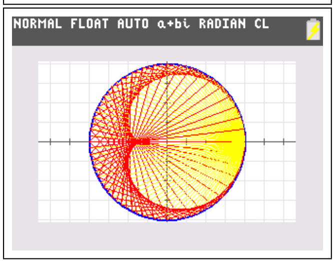
3.3.3 Programma

We schrijven nu een kort programma op de **TI-84 Plus Color** . Eerst wordt er een cirkel getrokken, daarna worden de invallende stralen als lijnstukken tussen $(R, 0)$ en het variabel punt $(x, y) = (R\cos t, R\sin t)$ getekend. Tegelijk worden de weerkaatste stralen in een andere kleur weergegeven, dit zijn de lijnstukken tussen (x, y) en $(R\cos 2t, R\sin 2t)$. We bekomen aldus de gezochte cardioïde als omhullende van de weerkaatste stralen.









Didactisch gezien is het maken van een simulatie met de huidige ict middelen uitstekend om het fenomeen te verklaren. Bovendien ziet de leerling hoe raaklijnen en normalen gebruikt kunnen worden om weerkaatste stralen in een kromme spiegel na te bootsen.

Wanneer men echter zelf het programma wil schrijven, is een grondigere kennis van wiskunde nodig. Volgende technieken werden expliciet gebruikt:

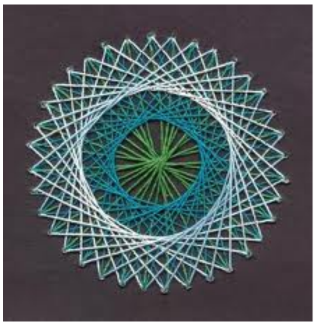
- het goed kiezen van een assenstelsel en van punten (probeer maar eens hetzelfde te doen indien de lichtbron niet in $(R, 0)$ zit).
- de goniometrische beschrijving van een cirkel
- de stelling die zegt dat een straal van een cirkel door een punt loodrecht staat op de raaklijn in dit punt
- de eigenschap over het behoud van hoekgrootten bij spiegelingen

Merk dus op dat de didactische doelen van beide methoden verschillen en dat het gebruik maken van ict er soms voor zorgt dat de achterliggende wiskunde verborgen wordt.

3.4 String art

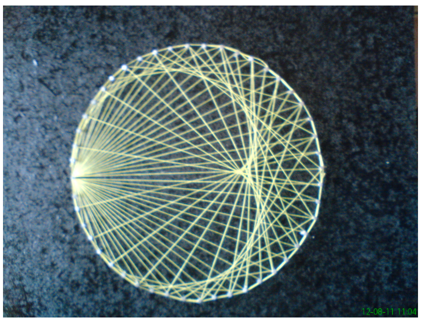
3.4.1 Knutselen

In de 'string art' worden vormen worden bekomen door touwtjes tussen spijkers te spannen. De vorm ontstaat meestal door de omhullende van de touwtjes en niet door de touwen zelf.

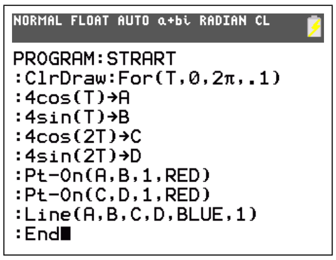

De 'string art' of 'curve stitching' is een techniek uitgevonden aan het einde van de 19de eeuw door Mary Everest Boole (1832 - 1916). Ze was één van de weinige vrouwlijke wiskundigen uit deze tijd. Haar man was de beroemde wiskundige George Boole die de boole algebra ontwikkelde. Ze ontwikkelde 'curve stitching' als een didactische methode om kinderen de wiskunde te laten ontdekken.

Wanneer we het bovenstaand voorbeeld van de cardioïde beschouwen, blijkt dit zeer vergelijkbaar met 'string art'. We verdelen onze spijkers gelijkmatig over een cirkel en verbinden de $t$de spijker met de $2t$de, i.e. het punt $(\cos t, \sin t)$ met $(\cos 2t, \sin 2t)$. Aldus bekomen volgend resultaat.

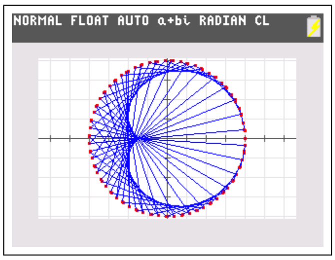


3.4.2 Programma

Het programma dat we reeds geschreven hebben, kan gemakkelijk aangepast worden om meerdere 'string-art' te maken. We tekenen punten voor de plaatsen van de spijkers en trekken met een andere kleur de lijnstukken. In onderstaand programma wordt telkens het lijnstuk getrokken van (A, B) naar (C, D). De posities van deze punten kunnen we willekeurig aanpassen.

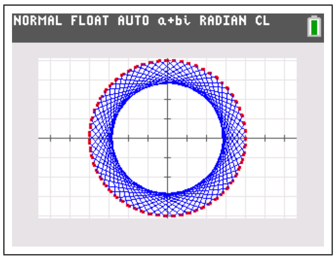


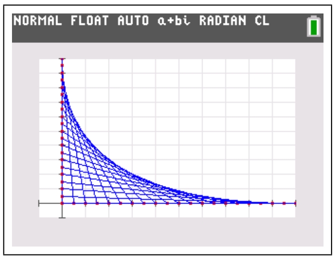

```
PROGRAM:STRART
:ClrDraw:For(T,0,2π,.1)
:4cos(T)→A
:4sin(T)→B
:4cos(2T)→C
:4sin(2T)→D
:Pt-On(A,B,1,RED)
:Pt-On(C,D,1,RED)
:Line(A,B,C,D,BLUE,1)
:End
```



Je kan volgende voorbeelden uitwerken.

- $(A, B) = (\cos t, \sin t)$ en $(C, D) = (\cos(t + \phi), \sin(t + \phi))$
- $(A, B) = (\cos 2t, \sin 2t)$ en $(C, D) = (\cos 3t, \sin 3t)$
- $(A, B) = (t, 0)$ en $(C, D) = (0, 10 - t)$ met $0 < t < 10$





3.4.3 Op papier

Natuurlijk is het fantastisch om leerlingen te motiveren om met hamers en spijkers te werken in de klas ... maar dit is misschien niet zo praktisch! Je kan hetzelfde resultaat bereiken door potlood, papier en een meetlat te gebruiken!

4 Appendix: Eventjes leren programmeren

Je kan de capaciteiten van de **TI-84 Plus Color** uitbreiden door zelf een programma toe te voegen. In tegenstelling tot hetgeen vaak wordt gezegd is programmeren voor de **TI-84 Plus Color** niet echt moeilijk. Als leerlingen zelf eens een programma behandelen tijdens de lessen, krijgen ze inzicht in hoe een grafisch rekenmachine rekent. Bovendien is tegenwoordig de belangrijkste toepassing van de wiskunde de informatica, in ruime zin. Van grafisch rekenmachine tot statistiche computerprogramma's, via gsm's, mp3-spelers, gameboy's en play stations, computer games en internettoepassingen, in bijna elke moderne technologie zit meer dan 50% wiskunde. Zonder wiskunde geen moderne technologie!

De programmeertaal die in de **TI-84 Plus Color** zit is TIBasic. Dit is een dialect van BASIC, een programmeertaal waarmee Bill Gates (Microsoft) zijn faam heeft verworven. BASIC (Beginners All-purpose Symbolic Instruction Code) werd ontworpen om ook de leek in staat te stellen om kleine programma's te schrijven. Het TIBasic-dialect is trouw aan deze filosofie: er is geen enkele programmeer-ervaring nodig om programma's te schrijven voor de **TI-84 Plus Color** . Enkel een beetje doorzettingsvermogen en zelfvertrouwen is nodig.

Om een programma te schrijven ga je naar `prgm`. Je kunt hier kiezen om een programma uit te voeren (`[exec]`), te veranderen (`[edit]`) of om een nieuw programma te schrijven (`[new]`). Indien je de laatste keuze maakt wordt er naar een naam gevraagd. Nadien kom je op de editor uit, waar je je programma kan invoeren. De commando's die met het programmeren te maken hebben zitten nu onder `prgm`. We geven hier een kort overzicht van de nuttigste programmeerfuncties.

[ctl]	
[if]	Eerste vorm:
	`:if` *voorwaarde* : *commando*
[then]	Tweede vorm: uitgebreide `if` structuur:
[else]	`:if` *voorwaarde*
	`:then`
	: *commando's*
	`:else`
	: *commando's*
	`:end`
[for]	om lussen te maken
	`:for(` *var, beginwaarde, eindwaarde [, stapgrootte]* `)`
	: *commando's*
	`:end`
[end]	om bovenstaande blokken te eindigen

[i/o]	
[disp]	om een waarde/string op het scherm te printen
[prompt]	om de waarde van een variabele te vragen aan de gebruiker
[input]	om een text op het scherm te tonen en een waarde te vragen aan de gebruiker, deze kan ook een functie zijn.
	`:input` *"text", variabele* (bijv. y_1)

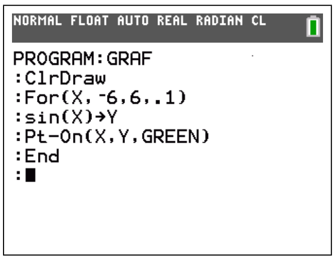
Nu we de nodige commando's kennen, kunnen we een zeer eenvoudig voorbeeld behandelen. Dit voorbeeld geeft inzicht over hoe de **TI-84 Plus** grafieken maakt.

Opdracht 7. Gebruik een `for`-lus om een programma te schrijven dat de grafiek van een functie (bijvoorbeeld de sinusfunctie) maakt d.m.v. het volgend algoritme.

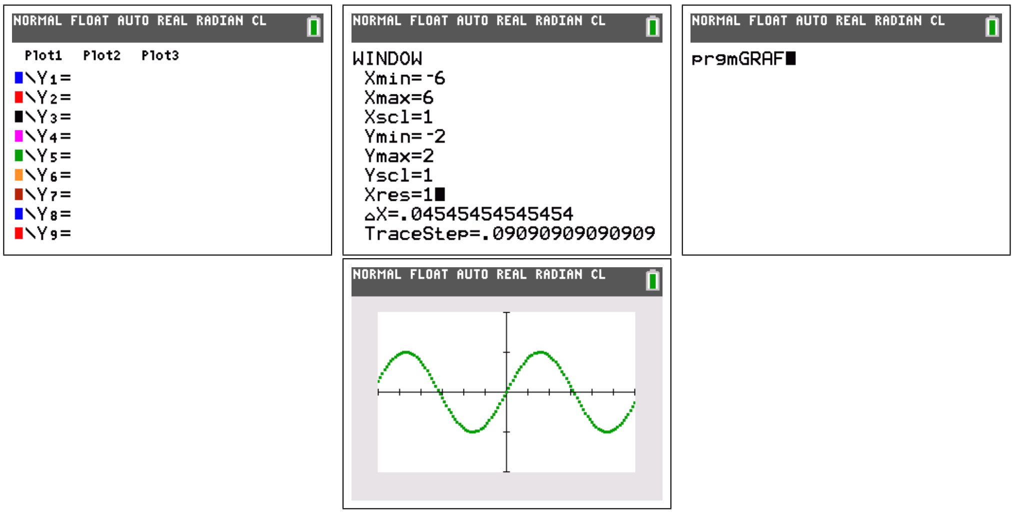
```
voor x gaande van -6 tot 6 met een stap van 0.1
bereken y=sin(x)
teken het punt (x,y)
sluit de lus
```

Gebruik de grafische commando's `2nd` `[draw]` `[clrdraw]` (om een leeg scherm te krijgen) en `2nd` `[draw]` `[point]` `[pt-on]` om een punt te tekenen. Vergeet niet van via `y=` alle functies weg te halen en om met `window` de grenzen aan te passen!

Oplossing. Het programma telt exact vijf regels:



Het resultaat is hetzelfde als hetgeen we zouden verkrijgen door de ingebouwde functies te gebruiken.



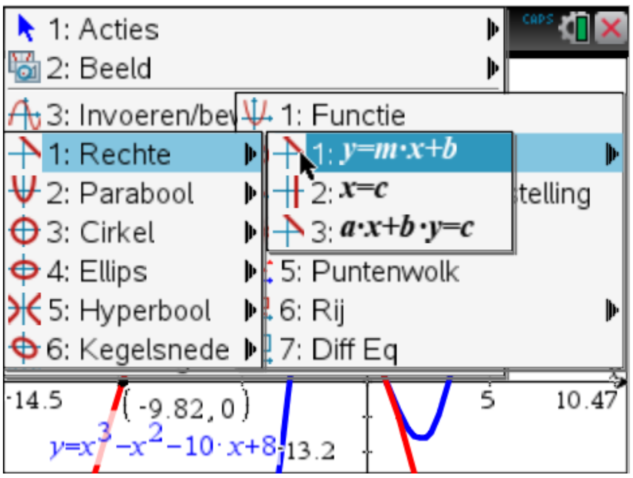
T³ EUROPE

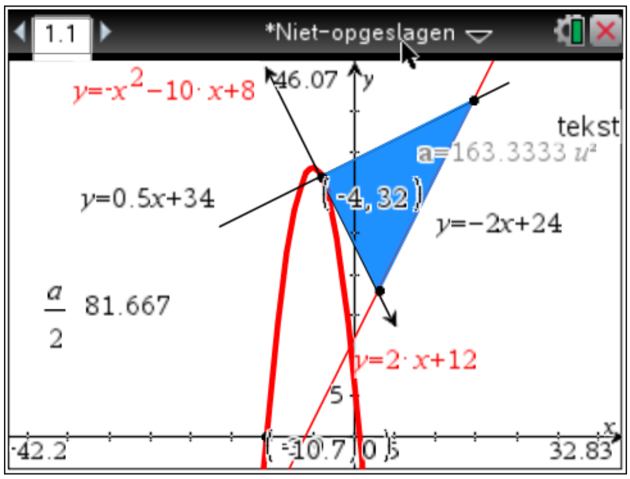
16^{de} T^3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Inleiding tot TI-Nspire en bestandenbeheer

Etienne Goemaere





Texas Instruments

Katholieke Universiteit Leuven

KENNISMAKING MET DE TI-NSPIRE: HANDHELD – SOFTWARE

Etienne Goemaere

0. INLEIDING

De meeste scholen kiezen er voor om een grafisch rekentoestel in te voeren vanaf de 2de graad.
Heel begrijpelijk, want vanaf dan komen leerlingen meer en meer in contact met problemen met lastiger rekenwerk of problemen die meerdere gebieden van de wiskunde aanspreken.
Hulpmiddelen zijn hier aangewezen en ICT is er zo één.

Een hulpmiddel met heel wat potentieel is TI-Nspire.
Deze wordt door Texas-instruments aangeboden in 2 versies:

- de TI-Nspire en
- de TI-Nspire **CAS**
  CAS staat voor Computer Algebra System, wat zoveel betekent als symbolisch kunnen rekenen.

Vermits men in ons onderwijs nogal terughoudend is ten opzichte van dergelijke CAS-systemen, ga ik in deze sessie vooral in op de mogelijkheden van de TI-Nspire software. Maar af en toe zal ik ook eens een tipje van de CAS-sluier lichten, al was het maar om jullie te laten zien dat het niet is omdat de CAS-software voor de leerlingen net iets te ver is, het voor de leerkracht geen meerwaarde kan zijn.

Tenslotte wil ik aangeven dat alles wat verteld wordt voor de software ook geldt voor de handhelds.
Want de twee zijn volledig compatibel met elkaar.
Lesvoorbereidingen, oefeningen voor leerlingen, toetsen kun je zo perfect aanmaken op de iets gebruiksvriendelijker pc, dit als bestand opslaan en vervolgens doorsluizen naar de handhelds van de leerlingen.

Texas Instruments heeft voor de transfer van bestanden speciale

- dockingsystems en
- software voor wireless transfer (Navigator) ontworpen.

Maar met een aantal hub's kan je in een mum van tijd evengoed de leerlingentoestellen van het nodige materiaal voorzien.
Dat laatste zal ik op het eind van de sessie illustreren.

Om de handheld aan te zetten druk je op de ON-knop uiterst rechts bovenaan je toestel.

De handheld opent altijd met een scherm dat uit 3 delen bestaat:

- het scratchpadmenu,
- het documentenmenu en
- het toepassingsmenu.

Het toepassingsmenu toont ons de iconen van 7 verschillende toepassingen: Rekenmachine – Grafieken – Meetkunde – Lijsten & Spreadsheet – Gegevensverwerking en Statistiek – Notities – Vernier DataQuest. De software kent nog een extra toepassing : de “Vraagtoepassing”.

Bewegen tussen de verschillende menu en menuonderdelen kan door:

- op de tabtoets te klikken,
- door op de pijltoetsen op de uiteinden van de touchpad te klikken of
- door de vinger te bewegen over de touchpad, de cursor naar het gewenste gebied te bewegen en te klikken.

1. SCRATCHPAD

Laat ons eerst eens een blik werpen op het “Scratchpad”.
Het scratchpad kan je starten

- door in het home-scherm voor “A Berekenen” of “B Grafiek” te kiezen of
- door op de -toets te klikken.

In het scratchpad werk je vooral als je niet van plan bent om je werk op te slaan.
Het is een soort virtueel kladblaadje.

a) De optie “Berekenen”

In deze toepassing kan je wiskundige berekeningen uitvoeren zoals je ze op elk rekentoestel uitvoert.

Voer uit :

1) $3-\frac{2}{3}$ Opmerking: wil je dat een resultaat benaderend wordt gegeven, druk dan ctrl enter

2) $\frac{2-\sqrt{57}}{3}$

3) $2\sqrt{8}$

4) $\frac{2-\sqrt{12}}{\sqrt{6}}$ Opmerking: bij CAS-toestellen kan men via de documentinstellingen er voor zorgen dat ook met wortelvormen exact gerekend wordt.

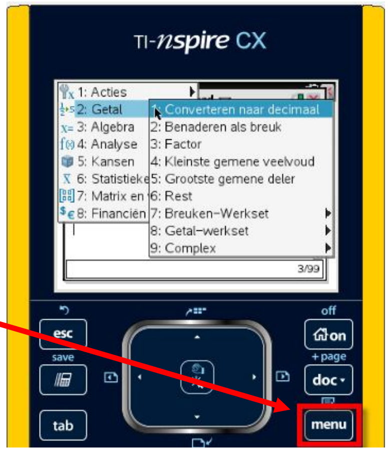
5) $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

6) $\log(100)$ Opmerking: of je nu wil of niet er verschijnt $\log_{10}(100)$

7) $\log_5(100)$

8) $e-1$

Naast de functies die op het toetsenbord zichtbaar aanwezig zijn, krijg je via menu toegang tot nog heel wat andere functionaliteiten. Maar hier komen we uitgebreid op terug bij de behandeling van het toepassingsmenu.



In het scratchpad kan je zo uitdrukkingen of functies in één of meerdere veranderlijken definiëren en waarden daarvoor berekenen.

Om uitdrukkingen te definiëren gebruik je niet het gelijkheidsteken maar dubbelpunt gelijkheidsteken.

Definieer

1) $g(t) = 205 - 9{,}81\dfrac{t^2}{2}$ en bereken $g(0)$ $g(2)$ $g(5)$

2) $f(p,q) = p^2 - 3pq + q^2 + 2$ en bereken $f(0,0)$ $f(-2,3)$ $f\left(\sqrt{2}+1\,,\,3-2\sqrt[3]{4}\right)$

   LET DUS OP : $pq \neq p \cdot q$ voor je handheld

3) $\text{opbrengst}(k,x,y) = (x-5)^2 - 3 \cdot x^2 y + \dfrac{y^3}{100} - k$ en bereken opbrengst(5000,31,200)

   [k vaste kosten per maand, x aantal dagen per maand, y het aantal geproduceerde stuks]

Om de berekeningen van je scratchpad te wissen druk menu 1 5.

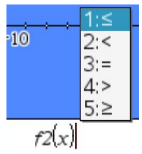
b) De optie "Grafiek"

Druk je [Grafiek-icoon] dan kan je van het tabblad "Berekenen" naar het tabblad "Grafiek".

In de invoerregel kan het voorschrift van een functie in de onafhankelijk veranderlijke x ingevuld worden.

Vul je achter $f1(x)=$ het functievoorschift 2x+1 in en druk je op [enter], dan verschijnt de grafiek van de functie.

Je merkt dat nu de invoerregel verdwenen is. Die haal je terug tevoorschijn door [tab] te drukken.

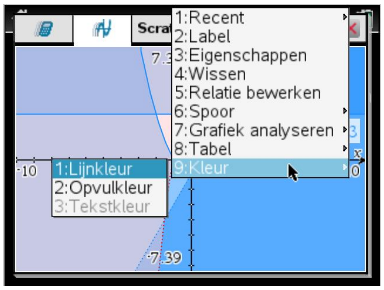


Naast functievoorschriften kan je ook ongelijkheden van de vorm $y \le f(x)$ ... $y > f(x)$ laten tekenen.

Sta je in de invoerregel en verwijder je met [del] het gelijkheidsteken dan verschijnt een tabblad met ongelijkheidstekens.

Laat zo grafisch de ongelijkheden
$$\begin{cases} \text{a)} & y > 2x+1 \\ \text{b)} & y \le 3 \\ \text{c)} & y < x^2 - 2x + 1 \\ \text{d)} & y \ge \dfrac{x^3-8}{4} \end{cases}$$
tekenen.

Soms ben je gedefinieerde variabelen liever kwijt, druk hiervoor [menu] [1] en kies [3] of [4].
Gedefinieerde variabelen haal de op door [var] te drukken.



Als je met de cursor één van de grafische voorstellingen aanwijst en je drukt [ctrl] [menu], dan verschijnt een tabblad waar je bijvoorbeeld de kleur van de grafiek kunt aanpassen.

Je bemerkt dat nog heel wat mogelijk is in dit tabblad.
Ik kom hier verder op terug als ik ga werken in de onderdelen van het toepassingsmenu.

Stel dat je opeens van oordeel bent dat je berekeningen niet langer kladwerk zijn, maar berekeningen die je wenst te behouden, dan kan je in dit scratchpad overgaan tot opslaan.

Daarvoor druk je [ctrl] [opslaan-icoon] en volg je de aanwijzingen.

2. TOEPASSINGSMENU

a) De rekenmachinetoepassing

Druk on en selecteer de Rekenmachinetoepassing.

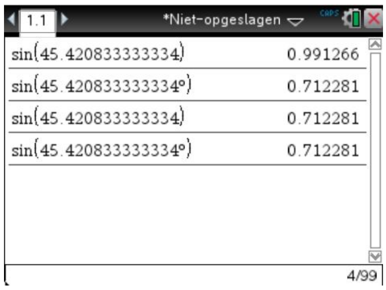
Bereken

1) sin(45°25´15´´)

Graden-minuten-seconden vind je op je rekentoestel bij de sjablonen (druk)

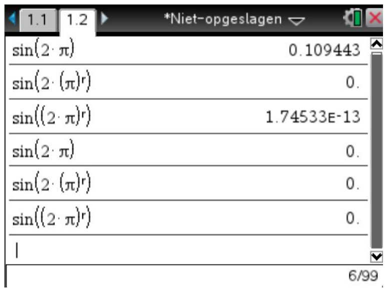
Als je het °'" -sjabloon gebruikt, doet het er niet toe of bij de documentinstellingen (doc 7 7) gekozen werd voor radialen of zestigdelige graden.

2) sin(45,4208333…°)



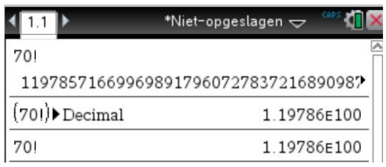
3) $\sin(2\pi)$ $\sin\left((2\pi)^r\right)$ $\sin\left(2(\pi)^r\right)$

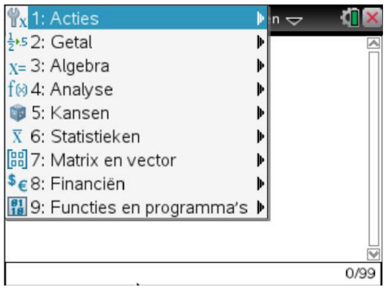
voor documentinstellingen van hoeken $\begin{cases} -\ \text{radialen} \\ -\ \text{graden} \end{cases}$



4) 70!

Om het resultaat onder wetenschappelijke notatie te krijgen kan je het getal converteren naar de decimale gedaante : menu 2 1, maar het kan ook door gewoon ctrl enter te drukken
De documentinstellingen op wetenschappelijk zetten helpt niet.





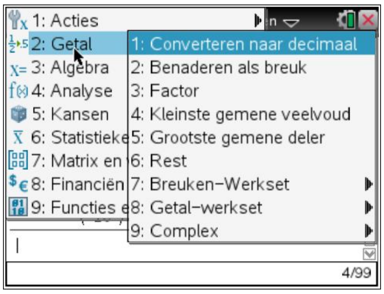
In het menu heb je een onderverdeling van verschillende functies in een aantal rubrieken.

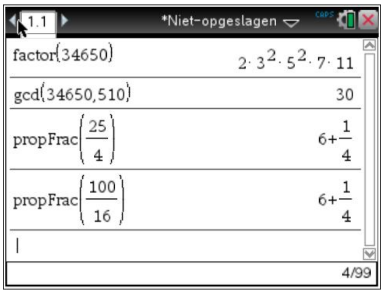
Om alles van a tot z te overlopen ontbreekt de tijd, dus beperk ik mij toch een paar illustrerende voorbeelden.

“Acties”

Bij “Acties” zal het meest gebruikte wellicht het wissen zijn van variabelen , de variabelen gekoppeld aan één letter: a, …, z en de historie.

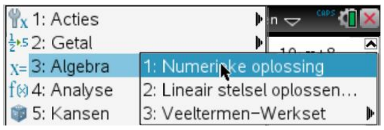
“Getal”

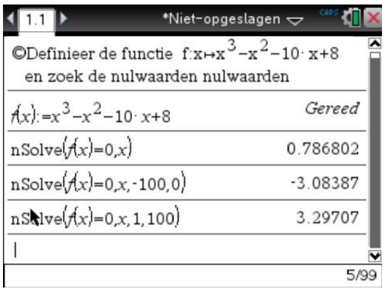




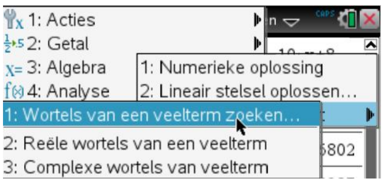
“Algebra”

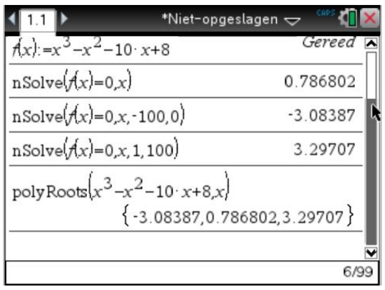
- Nulwaarden van een veeltermfunctie



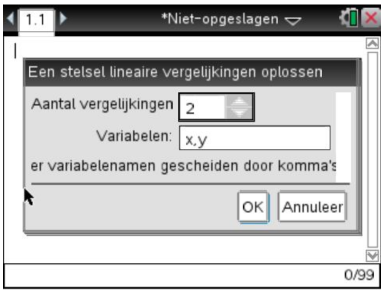


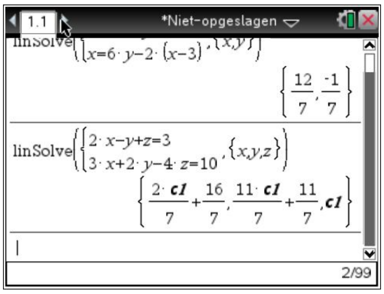
Je kan ook ineens de gehele verzameling nulwaarden genereren via de Veeltermen-Werkset.



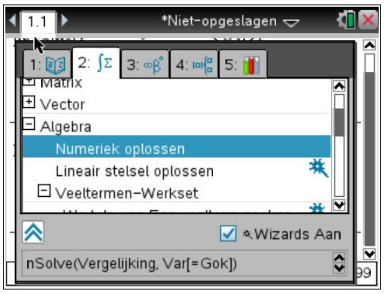


- Een stelsel lineaire vergelijkingen

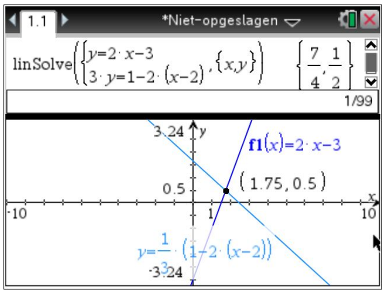




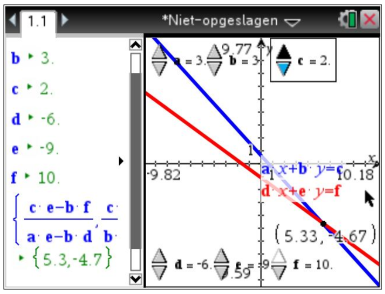
Om bepaalde bepaalde functies (zoals nSolve of polyRoots) te gebruiken moeten soms uitdrukkingen, veranderlijken en getallen ingevuld worden.
Als je niet echt weet wat juist vereist is om bepaalde functies te kunnen gebruiken, neem je door te drukken een kijkje in "Catalogus" of "Wiskundige operatoren".



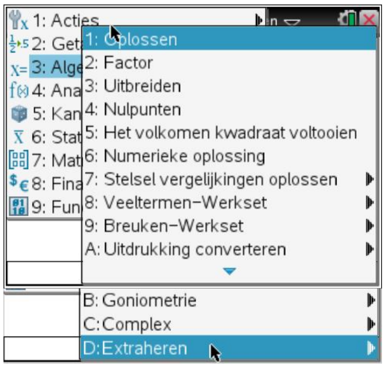
Bij (2x2)-stelsels staan we graag ook eens stil bij de grafische interpretatie van de oplossing.
Door het venster op te splitsen en een grafiek toepassing toe te voegen kan dit perfect samengaan.

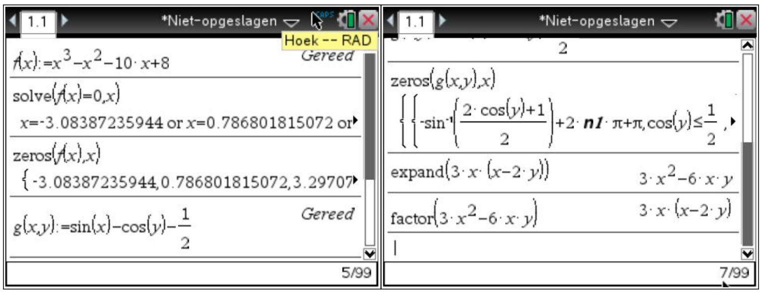


Heel handig bij de Nspire software is de "Notities-toepassing".
Hier kun je werkelijk heel dynamisch bepaalde zaken gaan illustreren en zie je de veranderingen simultaan gebeuren.



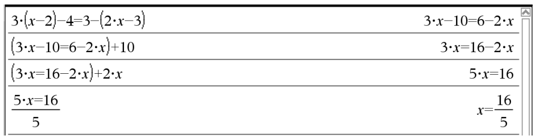
Wie over de CAS-versie beschikt, heeft hier heel wat meer mogelijkheden.



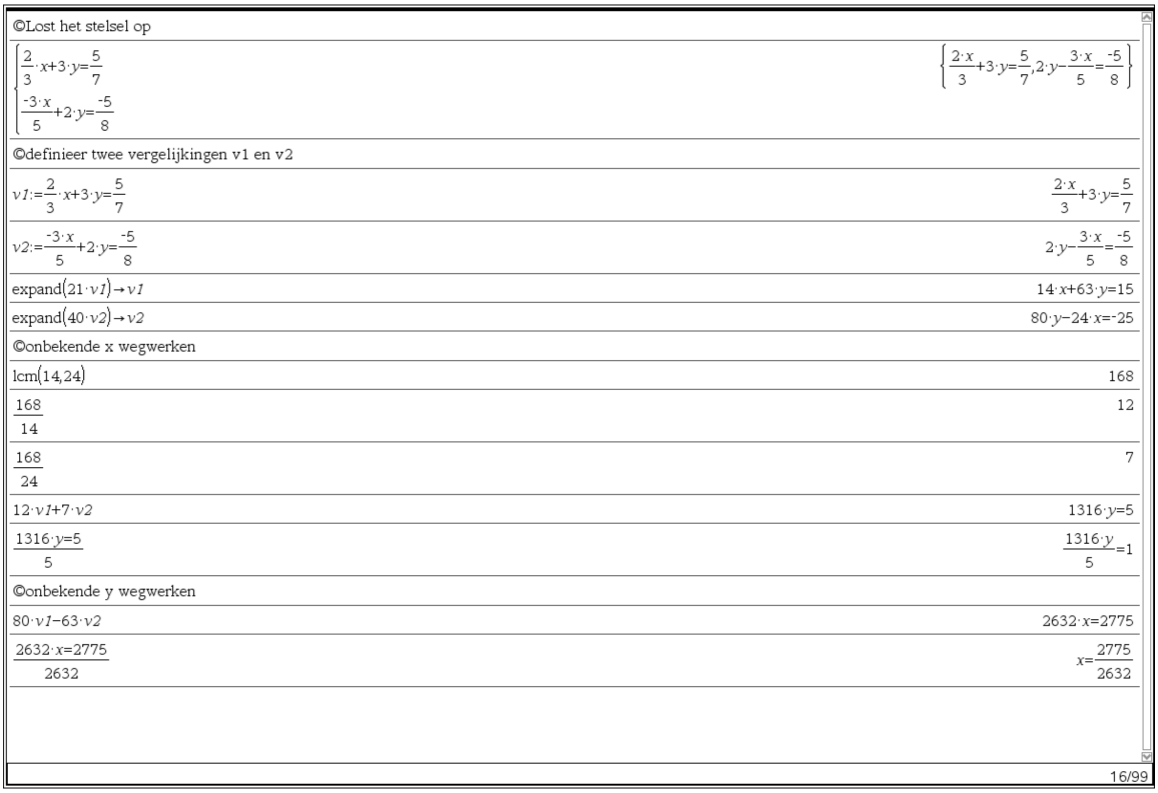


Ook interessant bij de CAS-versie is dat je

- vergelijkingen kunt oplossen met de balansmethode.

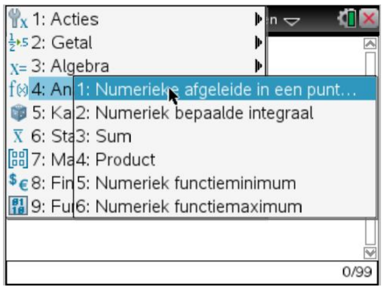


- stelsels stap voor stap kunt oplossen met de combinatiemethode



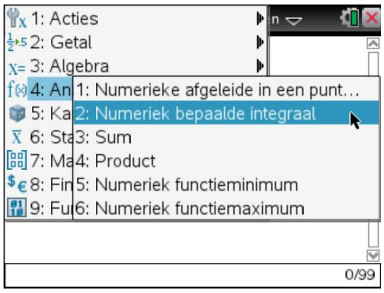
"Analyse"

- De afgeleide van een functie in een getal berekenen



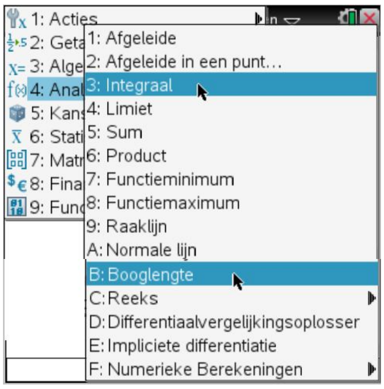
Bereken Df(1) en Df(2) voor $f: x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^2-4}$

- Een bepaalde integraal berekenen.



Bereken $\displaystyle\int_{-2}^{2}\left(x^2-6x+1\right)dx$ $\qquad \displaystyle\int_{-2}^{4}\frac{2x}{x^3-8}dx$ $\qquad \displaystyle\int_{-10}^{10}\frac{2x^2}{x^2-4}dx$

Wie over de Cas-versie beschikt, heeft ook hier heel wat meer mogelijkheden.

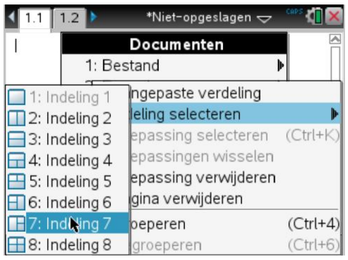


"Kansen"

Wis de geschiedenis in de rekenmachinetoepassing (1.Acties 5.Geschiedenis wissen).

Deel de pagina waar je aan het werken bent in 3 delen.

(druk doc▾ , kies 5.Pagina-indeling, kies 2.Indeling selecteren en selecteer indeling 7)



Kies 60 keer een geheel getal tussen 1 en 6:

- tik randInt(1,6,60) of
- kies 5.Kansen 4.Willekeurig 2. Geheel getal
  en tik 1,6,60)

Sla het resultaat op als de variabele a. (dus ctrl var)

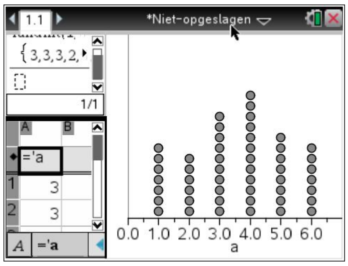
Doe

Voeg links onder een Lijsten en Spreadsheet toe:

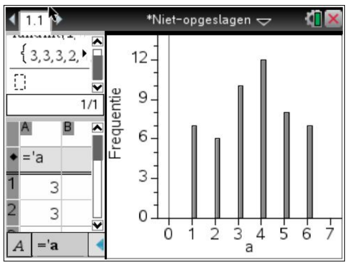
druk ctrl tab, druk ⌂on en kies voo het 4de icoontje (Spreadsheet)

Tik in het formulevak "=a en kies voor Variabeleverwijzing.

Voeg rechts een Gegevensverwerking & Statistiek toe en beweeg de cursor naar onder en druk twee maal enter om de variabele a in te voegen.

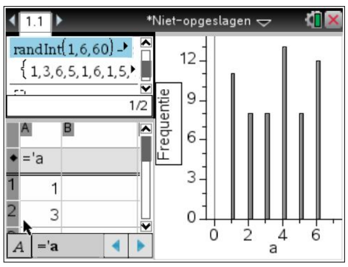


Via menu kan je het plottype veranderen naar histogram.
Door de klasseinstellingen (Breedte 0.2 en Uitlijning 0.2) aan te passen kan je de idee van een staafdiagram wekken waar de frequenties af te lezen zijn.



Als je nu in de rekenmachinetoepassing de variabele a opnieuw definieert, zie je dat in de andere toepassingen dit ook gebeurt.

Binnen eenzelfde opgave gelden de variabelen over alle pagina's en toepassingen.



"Statistieken"

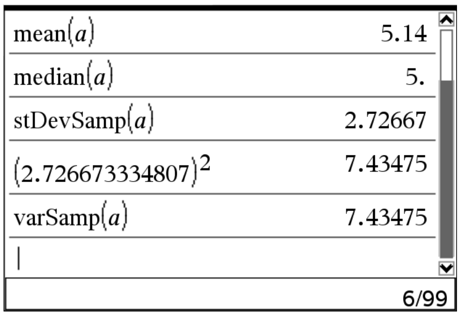
Wat hier allemaal mogelijk is, is teveel om in één nascholing te kunnen overlopen.

Daarom een greep uit een aantal mogelijkheden:

Statistische parameters:

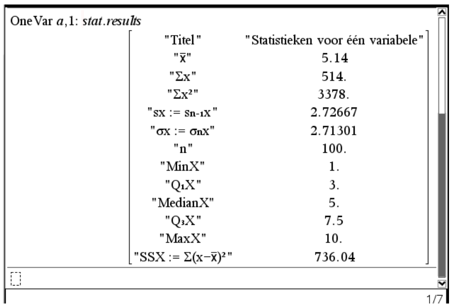
Als je in de gesplitse pagina van daarnet de rekenmachine selecteert, dan kan je het gemiddelde, de mediaan, … , van de lijst a berekenen:

6.Statistieken 3.Lijstenwiskunde 3.Gemiddelde
4.Mediaan
…



Je kan uiteraard ook alle belanrijke statistische parameters ineens laten berekenen:

6.Statistieken, 1.Statistiekberekeningen, 1.Statistieken voor één variabele

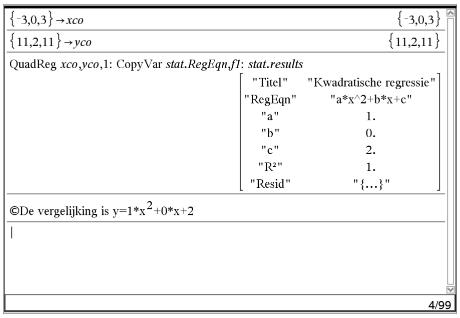


Regressie:

Stel dat je de vergelijking van de parabool wil die door de punten $(-3,11)$, $(0,2)$ en $(3,11)$ wil.

Sla de x-coördinaten op als de lijst xco, de y coördinaten als de lijst yco.

Kies:
6.Statistieken, 1.Statistiekberekeningen, 6.Kwadratische regressie

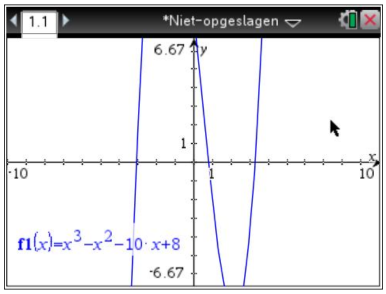


De andere onderdelen van de Rekenmachine (Matrices, Financiën en Functies en programma's) zullen we vandaag niet bekijken.

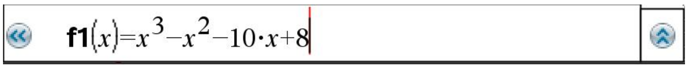
b) *De grafiektoepassing*

Druk [on] en selecteer de Rekenmachinetoepassing.

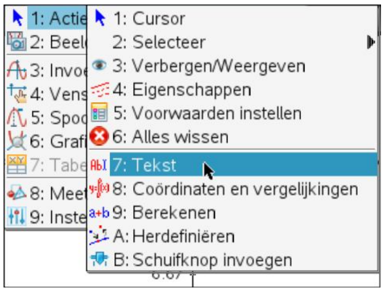
1. De grafiek van een functie

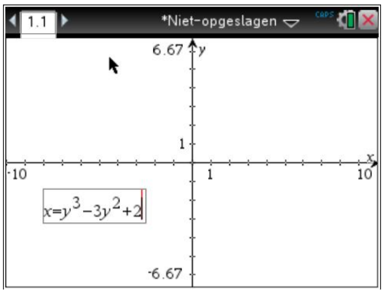


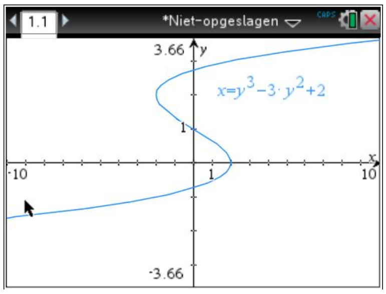
Om de grafiek van een functie te verkrijgen, volstaat het zoals in het scratchpad in de invoerregel achter f1 (f2, f3, …) een functievoorschrift te noteren en enter te drukken.
Bijvoorbeeld $f1(x) = x^3 - x^2 - 10x + 8$



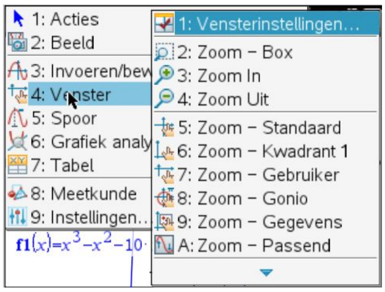
Een andere manier is via [menu] [1] [7] een vergelijking van de vorm y = f(x) of x=f(y) in te tikken en die over de assen te slepen.





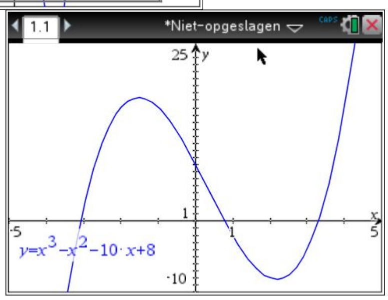


Het eerste beeld is misschien niet altijd wat we wensen.
Klik je [menu] , dan verschijnt een menu waar je onder 4 de vensterinstellingen kunt aanpassen.



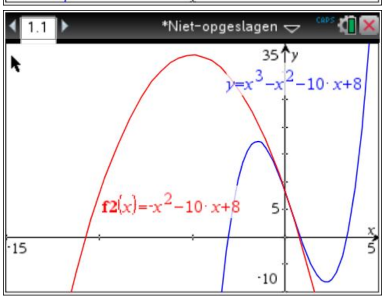
Je kan ook rechtstreeks in het venster zelf ingrijpen door :

- met de cursor de assen aan te wijzen (er verschijnt een handje) , die vast te pakken door de muisknop ingedrukt te houden (het handje sluit zich) en op of neer te bewegen.
  Heel interessant daarbij is dat als je dit doet met de shift-toets ingedrukt, je wijzigingen op één as kunt doen,
- de getallen op een asseneinde aan te wijzen, tweemaal enter te drukken en de gewenste waarde in te tikken



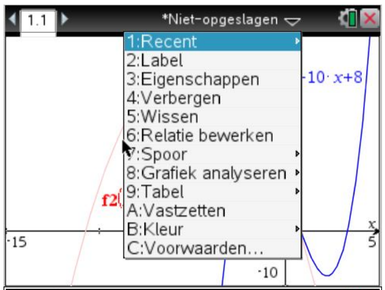
Bemerk dat op de schermen de invoerregel verdwenen is.
Die haal je terug tevoorschijn door

- » aan te klikken of
- Ctrl G te tikken.



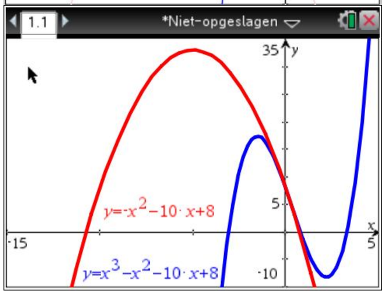
Maak van de gelegenheid gebruik om de functie $f2(x) = -x^2 - 10x + 8$

Wijs je met de cursor een van de functies aan en druk je ctrl menu, dan verschijnt een popupvenster met een aantal onderdelen.



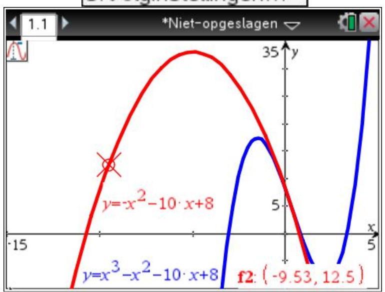
Bij “3.Eigenschappen” kan je

- de lijndikte aanpassen,
- de lijnstijl aanpassen,
- de weergave van de functievergelijking en
- de functie laten tekenen door een zelf het aantal punten of een stapgrootte in te geven.

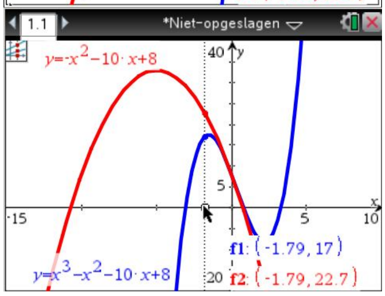


Bij “7. Spoor” kan je

- de functie die aangewezen was traceren
  (tik een x-waarde in of
  beweeg de cursor en let op het aangeven van nulwaarden en extrema),

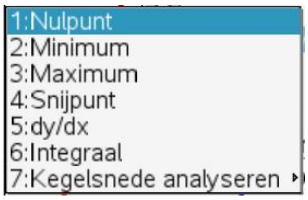


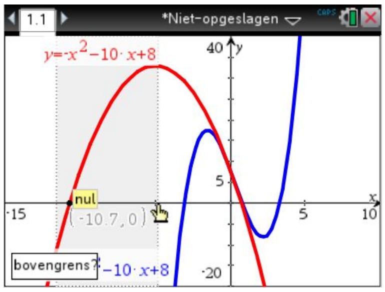
- kan je alle getekende functies terzelfdertijd traceren



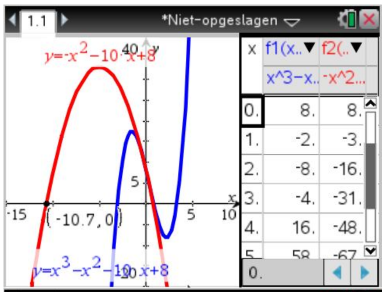
- kan je de volginstellingen aanpassen.
  Dit is handig als je zelf eerst een waarde intikt en vervolgens het traceren doet met de pijltoetsen.

Druk je “8.Functie analyseren dan kan je voor de geselecteerde functie in een aan te duiden interval nulwaarden, extrema, snijpunten, … zoeken.

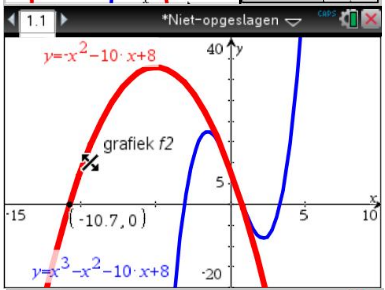




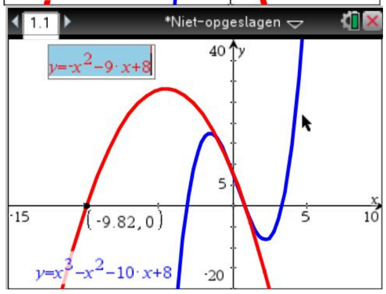
Druk je “9.Tabel weergeven”, dan wordt het scherm opgesplitst in een grafiekgedeelte en een spreadsheet waar je functiewaardes afleest van gehele x-waarden.



Als je de eerste- of tweedegraadsfunctie aanwijst dan verschijnt soms het symbool . Druk je op dat moment op het handje tot het zich sluit, dan kun je de functie veranderen.



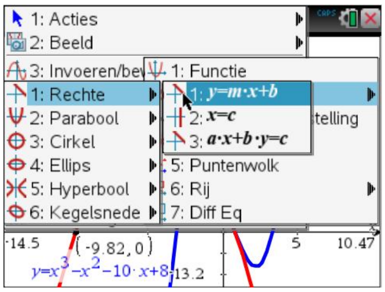
Je kan de functievergelijking ook veranderen door het label aan te klikken en getallen te veranderen.

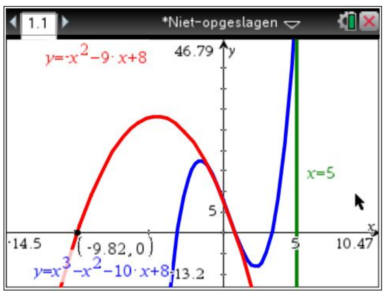


Met “A.Vastzetten kan je voorkomen dat de functievergelijking veranderd. Met “B.Kleur” kan je tenslotte de kleur van een grafiek of arcering veranderen.

In het menu zie je nog heel wat onderdelen.

Zo zie je bij het invoeren van vergelijkingen van rechte zelfs de optie een rechte // y-as getekend te krijgen

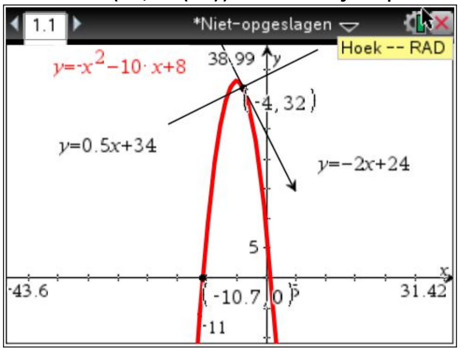




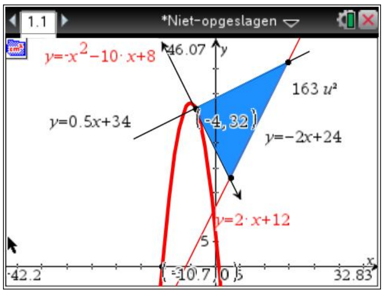
We gaan even de derdegraads kromme en de verticale verbergen:

- wijs met de cursor de kromme aan
- druk ctrl menu 4

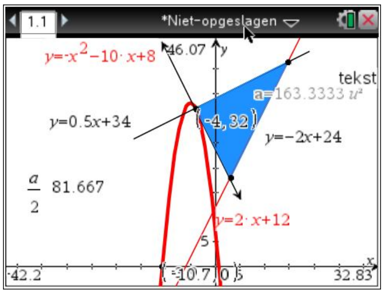
Kies een punt op de parabool, zorg dat de x-coördinaat -4 is, teken in het punt (-4, f2(-4)) de raaklijn en bepaal de vergelijking van die raaklijn.
Teken in (-4, f2(-4)) de loodlijn op die raaklijn en bepaal de vergelijking.

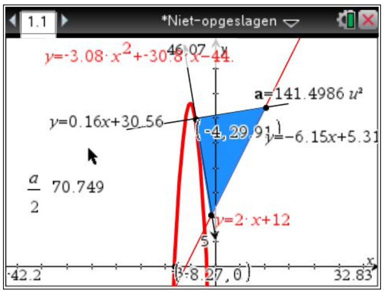


Laat de rechte met vergelijking y = 2x+12 tekenen en zoek de snijpunten van deze rechte met de raaklijn en haar loodlijn van daarnet.
Teken een driehoek door deze snijpunten en (-4, f2(-4)) en bepaal de omtrek en de oppervlakte van deze driehoek.



Wijs deze oppervlakte toe aan de variabele a, geef de tekst a/2 in en laat dit uitrekenen.
Neem nu de parabool vast en verander het voorschrift.



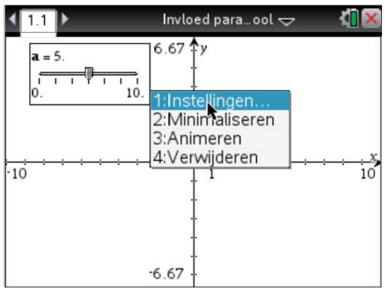


Heel handig bij illustrie materiaal is de mogelijkheid om **schuifknoppen** te definieren.

We maken een document aan waarin we de invloed illustreren van de parameters a, α en β in de vergelijking $y = a \cdot (x-\alpha)^2 + \beta$.

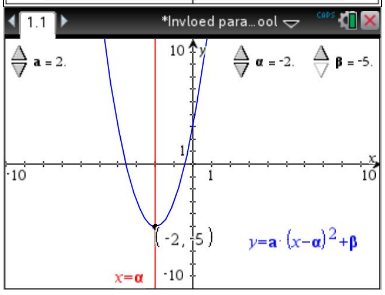
We maken een nieuw document aan (druk Ctrl N en antwoord negatief op de suggestie tot opslaan) en kies voor de grafiektoepassing.

Definieer via 1.Acties drie schuifknoppen voor de parameters a, α en β.

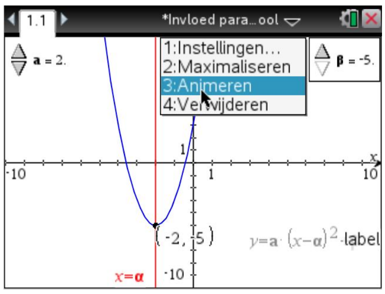


Wijs je een schuifknop aan dan kun instellingen ervoor kiezen en hem ook minimaliseren.

Je kan nu de waarde van een parameter veranderen door op de de driehoekjes te klikken in .

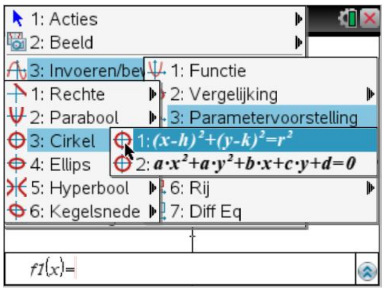


Wijs je een parameterbox aan en druk je op het handje om de box te selecteren (de stippellijnrand wordt een volle lijn), dan kun je via Ctrl Menu een animatie laten afspelen.
Langs dezelfde weg kun je de animatie stoppen.

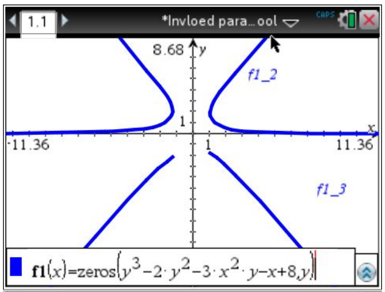


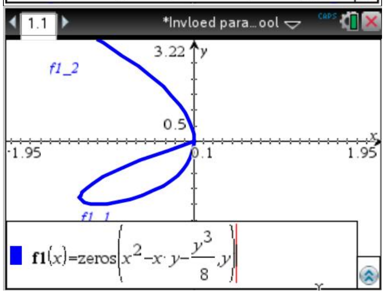
Om ons eindresultaat op te slaan druk je Ctrl S.

In de nieuwste versie kun je ook een aantal standaardrelaties laten tekenen: cirkel, ellips, kegelsneden, ….



Andere impliciete verbanden en relaties kun je in de CAS-versie via een omweg (**zeros(relatie,y)**) laten tekenen



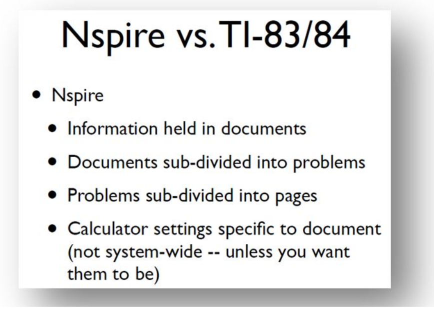


Wie iets wenst te weten over de meetkundetoepassing kan terecht op het einde van de syllabus.

Eerst wil ik iets kwijt over een van de belangrijkste vernieuwingen ten opzichte van de vroegere generatie rekentoestellen van Texas Instruments: **het werken met documenten**

3. WERKEN MET DOCUMENTEN

Op de Nspiration Conference van February 2010 in Meadow liet Russell Gordon in zijn powerpointpresentatie betreffende **Nspire versus TI84** o.a. de volgende dia zien.



Hierin benadrukt hij een van de grootste stappen voorwaarts die er met de Nspire gekomen is: de documentstructuur

- Informatie wordt bewaard in documenten.
- Documenten zijn onderverdeeld in opgaven.
- Opgaven bestaan uit verschillende pagina's.
- De instellingen van de rekenmachine kunnen, tenzij je het anders wil, verbonden worden aan een document.

2.1. Een bestaand document openen

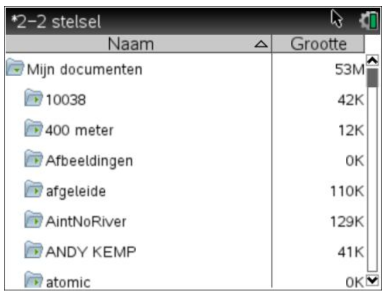
2.1.1. Home-scherm

Start je de handheld op of druk je [on] , dan kom je in het Home-scherm dat zoals reeds aangehaald uit 3 grote delen bestaat: het scratchpad, het toepassingenmenu en tenslotte het documentencentrum.

2.1.2. Een nieuw document maken

Een nieuw document kun je aanmaken door
- [on] [1] te drukken of
- [ctrl] [N] te drukken.

2.1.3. Een bestaand document openen

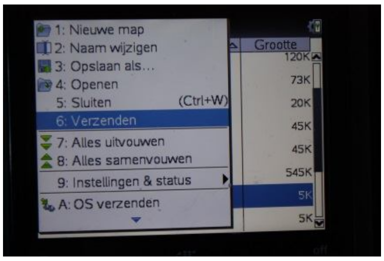


- Een bestaand document openen via Mijn documenten.
- Een bestaand document openen te kiezen uit deze waar je recent mee bezig was.
- Het huidig bestand dat geopend is, selecteren

Via menu kan je nieuwe mappen definiëren en in je mappen kan je via doc▾ bestanden kopiëren (of ook Ctrl C) en plakken (Ctrl V).

2.1.4. Documenten uitwisselen tussen 2 handhelds

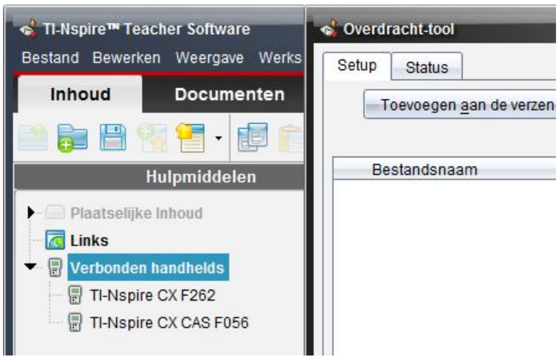
Selecteer je in de documentstructuur van de ene handheld een bestand of een map, dan kan je via menu een bestand of een map verzenden. De andere handheld dient wel toestemming te geven door op OK te klikken.



2.1.5. <u>Verzenden van documenten via de computer</u>

Een eerste mogelijkheid om documenten uit te wisselen tussen computer en handheld is via het welkomstscherm.
(altijd te genereren door in de werkbalk “Help” aan te klikken en vervolgens “Welkomstscherm”)

Klik je in het “Welkomstscherm” op “Verzend documenten” dan open zich een “Overdracht-tool”. Wie aandachtig kijkt zal ook bemerken dat zich het tabblad “Inhoud” geopend heeft (tenzij je je daar al bevond).



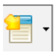
Met de “Overdracht-tool”

Klik op de 

. selecteer in het tabblad bestanden of mappen bestand en klik achtereenvolgens “Selecteer” en “Overdracht starten”.
Deze tool is alleen handig voor de overdracht van de computer naar handheld.

Vanuit het tabblad “Inhoud”

Een andere mogelijkheid om documenten te verzenden op het tabblad inhoud.
Onder plaatselijke inhoud klik je op “Documents” of een andere zelf aangemaakte map met bestanden. In het rechterscherm waar je de aanwezige bestanden ziet selecteer je een of meerdere bestanden en om te verzenden:

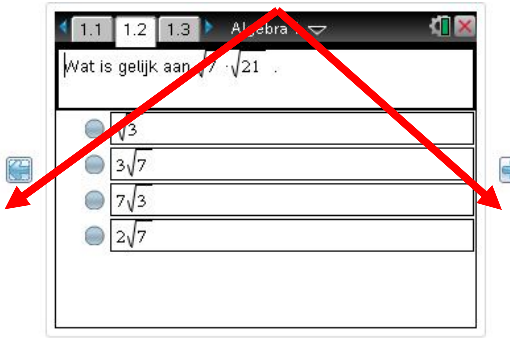
- klik je rechts op de muis en kies je voor “Versturen naar verbonden handhelds” of
- klik je op het icoontje  en kies je voor “Versturen naar verbonden handhelds” of
- druk je “Bestand” en vervolgens “Versturen naar verbonden handhelds” of
- sleep je het bestand naar een verbonden handhelds.

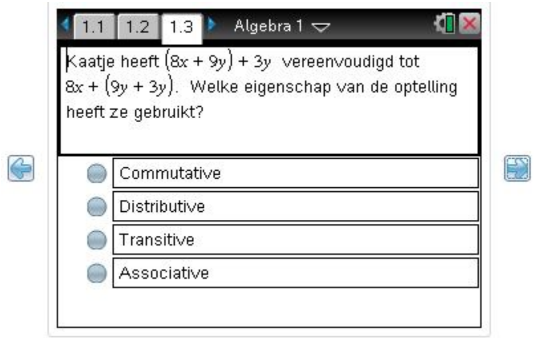
Klik je vervolgens de handheld aan dan zal het overgezette bestand zich in een map bevinden met de datum van de overdracht.

Een naam die je via de computer direct kan veranderen door rechts te klikken en te kiezen voor “Naam wijzigen”.

Wil je een overdracht van handheld naar een van de mappen onder plaatselijke inhoud, dan ga je uiteraard omgekeerd te werk.

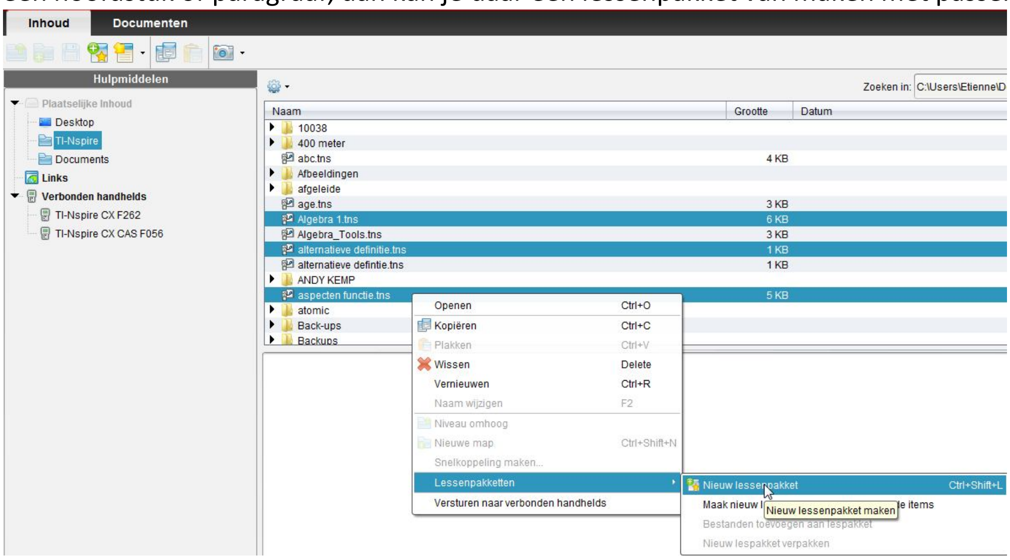
Handig hierbij is dat als je slechts één bestand selecteert, je een preview krijgt van dat bestand en dat je kan navigeren tussen de verschillende opgaves en/of pagina's van het bestand.





Ook interessant is de mogelijkheid tot het aanmaken van lespakketten.

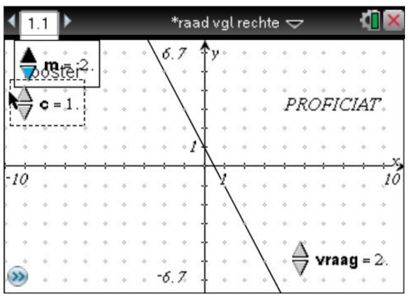
Ga je naar het tabblad "Inhoud" en selecteer je een aantal bestanden die bijvoorbeeld samenhoren in één hoofdstuk of paragraaf, dan kan je daar een lessenpakket van maken met passende naam.

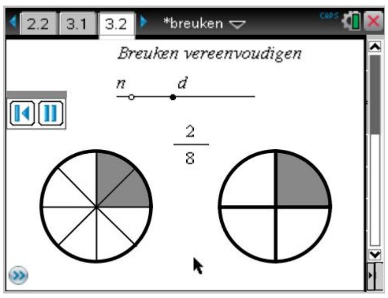


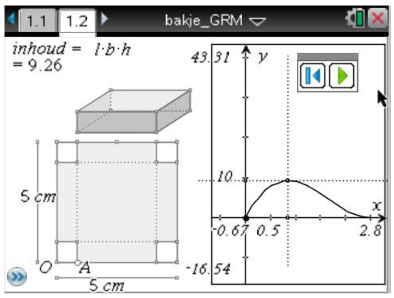
2.1.6. Documenten op het net

Er is een hele schat aan documenten klaar voor persoonlijk gebruik op het internet. Uitgebreide databanken met documenten vind je op
http://education.ti.com/calculators/downloads/US/Activities/

Wie iets meer wil weten over documenten op internet kan er Cahier 26 raadplegen op http://www.t3vlaanderen.be/ .
Je vind er een pak bruikbare tns-bestanden geïnspireerd op buitenlands materiaal.



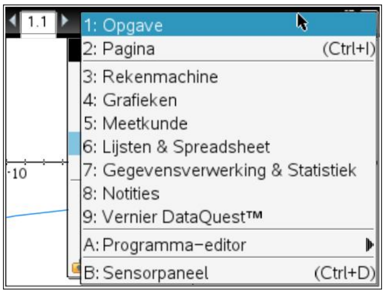


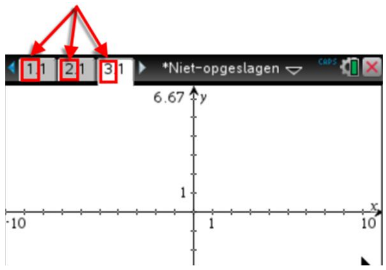


2.1.7. **Documentstructuur**

<u>Een document kan verschillende opgaven bevatten</u>.

Een opgave toevoegen kan door doc▾ 4 1 te drukken en
voor je eerste pagina in de nieuwe opgave de gewenste toepassing te kiezen.
Standaard krijgen opgaven de naam Opgave 1, Opgave 2, … mee.
De naam van de opgave zie je als eerste deel in de lip van een tabblad verschijnen.

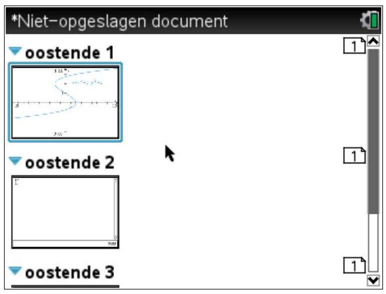




De naam Opgave 1, Opgave 2, … kan probleemloos aangepast worden:

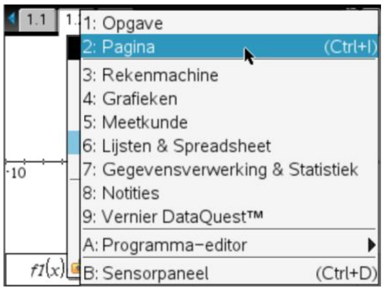
- ga met ctrl ▲ naar de documentstructuur,
- selecteer je eerst met de opwaartse (▲) of neerwaartse pijltoets (▼) de naam van de opgave,
- druk menu 5 en
- tik je een passende naam in.

Voeg zo 2 opgaves toe en verander de namen in “oostende 1” , “oostende 2”, “oostende 3”.



Bemerk dat in het werkgedeelte de naam van je opgaven 1,2, … blijft.

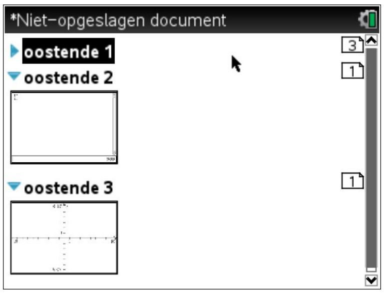
<u>Een document kan verschillende bladzijden bevatten</u>.



Een bladzijde toevoegen kan door doc▾ 4 2 of ctrl doc▾ (= +page) te drukken en voor je nieuwe pagina de gewenste toepassing te kiezen.

Standaard krijgen pagina's een nummering mee die niet aan te passen is.

Bemerk dat documentstructuur structuur een opgave kan uitvouwen of samenvouwen zodat de verschillende bladzijde zichtbaar of onzichtbaar zijn. Hiervoor selecteer je een opgave en druk je op de zijwaartse pijltoetsen.

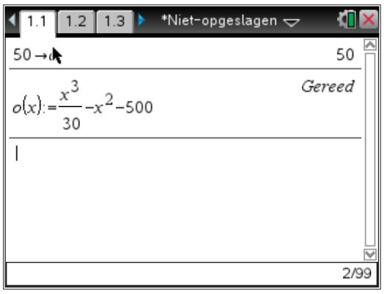


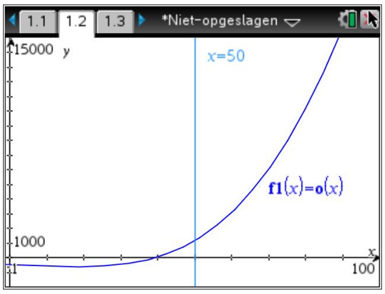
Heel belangrijk om weten is dat variabelen, functies gedefinieerd in de ene opgave niet meegenomen worden naar een andere opgave.

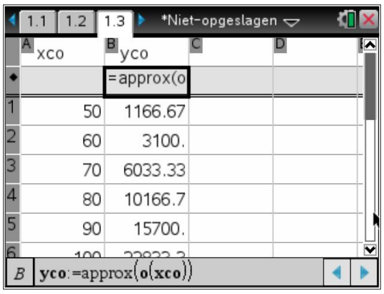
Definieer in de rekenmachinetoepassing de veranderlijke a als zijnde 50 en de functie met voorschrift

$$O(x)=\frac{x^3}{30}-x^2+500\,.$$

Laat in het grafisch scherm de functie O tekenen alsook de rechte x=a.

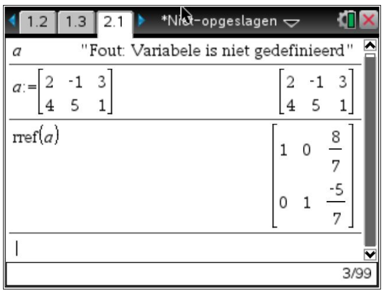






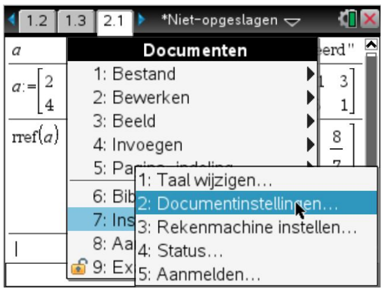
Door te drukken Ctrl pijltoets naar rechts kun je naar de volgende opgave gaan. Tik je daar a of o in dan bemerk je dat die niet gedefinieerd zijn voor het moment.

Die variabelen kan je hier opnieuw gebruiken voor iets totaal anders.

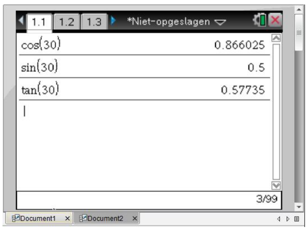


Documentinstellingen

Via kan men elk document zijn eigen instellingen meegeven.



Zo kun je in het ene document werken met graden en vervolgens een nieuw document openen waar de instelling voor de hoeken weer standaard radialen is (tenzij je graden als systeeminstelling zou hebben uiteraard).

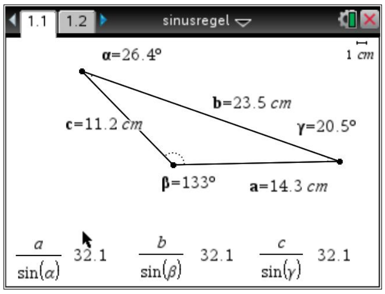


.

Meetkundetoepassing

1. Meetkundige eigenschappen ontdekken (sinusregel.tns)

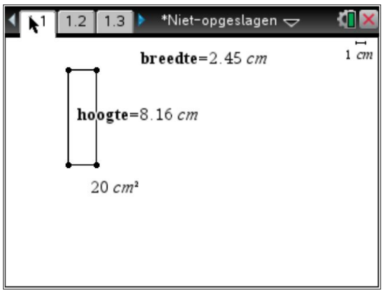
Je kan met TI-Nspire ook meetkundige eigenschappen ontdekken, zoals bijvoorbeeld de sinusregel.
Hiervoor teken je een willekeurige driehoek, meet je zijden en hoeken, laat je deze waarden corresponderen met een variabele, geef je de formule in en laat je ze berekenen.
Nadien kan je de hoekpunten van de driehoek verslepen en zal je merken dat de waarden mee veranderen maar onderling gelijk blijven.

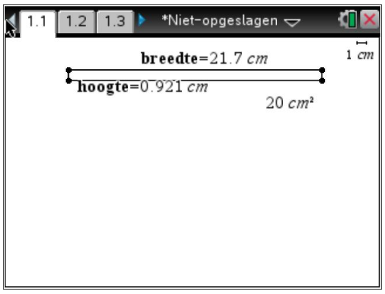


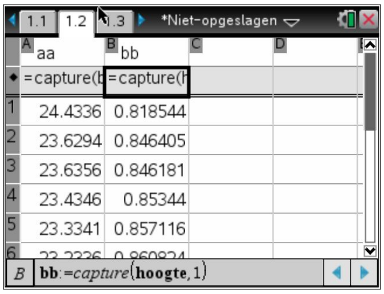
2. Dynamisch meetwaarden opslaan in een lijst

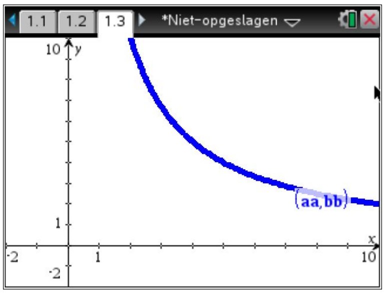
Met TI-Nspire kunnen we een verband tussen twee grootheden onderzoeken.
Bekijk het verband tussen de breedte en hoogte van een rechthoek met constante oppervlakte 20.

(cahier 21 pag 63 ; verband hoogte breedte.tns)









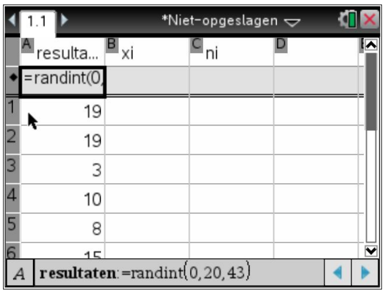
Lijsten & Spreadsheet | **Gegevensverwerking & Statistiek**

Om aan statistiek te doen ga je meestal eerst uw gegevens ingeven in een spreadsheettoepassing.

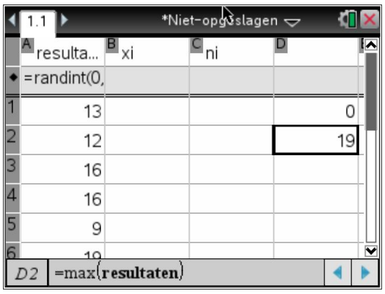
Niet gegroepeerde gegevens.

Maak een nieuw bestand “overhoring” .

Noem de eerste 3 kolommen resultaten, xi en ni en tik in het formulevak van de eerste kolom “randInt(0,20,43)”.

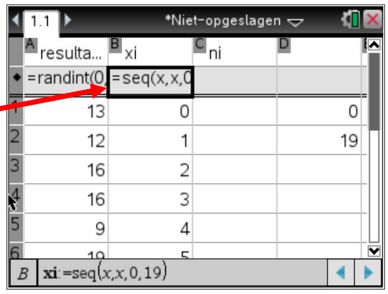


Om vlug te weten tussen welke grenzen de resultaten variëren bereken je het maximum en het minimum van uw lijst in de rekentoepassing.

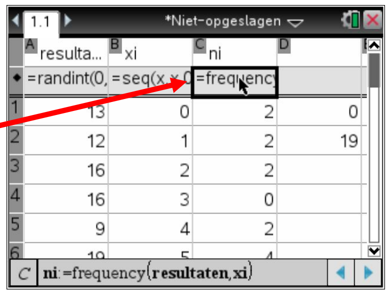


In de tweede kolom tik je vervolgens alle resultaten in variërend van minimum tot en maximum.

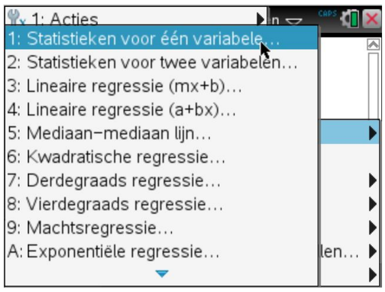
Je kan ook in het formulevak seq(X,X,min,max) tikken.



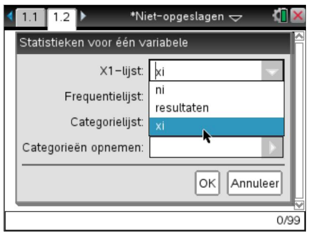
Om te weten hoeveel keer de verschillende resultaten voorkomen, dus wat de absolute frequentie is, tik je in het formulevak van de derde kolom achter “**ni:=**” “**frequency(resultaten,xi)**”



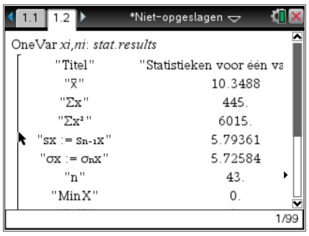
Om de gegevenste analyseren gebruik je in de rekenmachinetoepassing (het kan ook in de spreadssheettoepassing), de functie “**Statistieken voor één variabele”**: hiervoor druk je menu 6 1 1 1.



en vul je bij X1-lijst en Frequentielijst de gepaste lijstennamen in

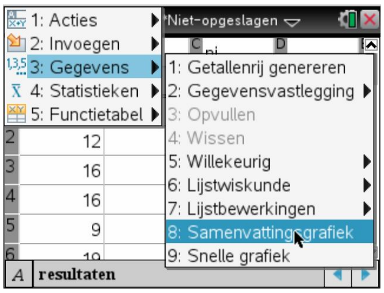


Kies je voor X1-lijst=xi en Frequentielijst=ni, dan zal je eerst de formule uit het formulevak moeten verwijderen en dan de laatste frequentie.

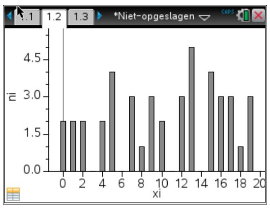


Om de gegevens voor te stellen kun je ofwel gebruik maken van de kolom met de ruwe gegevens ofwel van de frequentietabel.

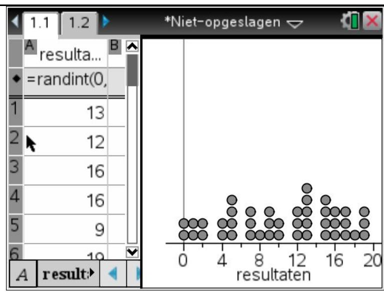
Wil je je gegevens voorstellen, dan kun je kiezen tussen een samenvattingsgrafiek of een snelle grafiek (menu 3 8 of menu 3 9).



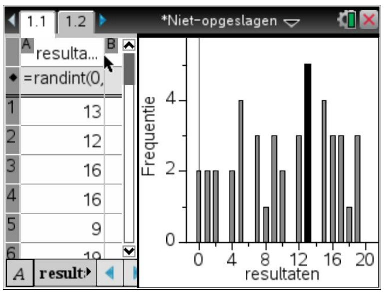
Een samenvattingsgrafiek maak je niet voor de ruwe gegevens, maar voor de verschillende uitkomsten en hun frequentie



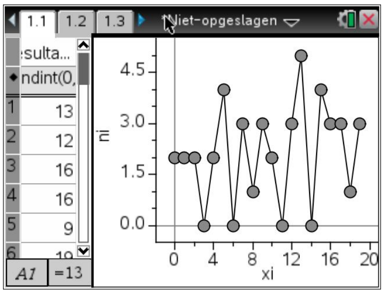
Een snelle grafiek kan getekend worden voor zowel de ruwe gegevens als voor de frequentietabel.
Voor dat laatste druk je tab en kies je de juiste variabelen.



Het puntenplot voor de ruwe gegevenslijst kan je omzetten naar een histogram (staafdiagram) of boxplot maar niet naar een lijndiagram.

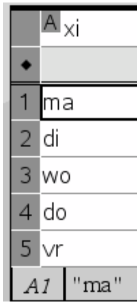


Het puntenplot voor de lijsten xi en ni kun je omzetten naar een lijndiagram maar niet naar een boxplot of histogram (staafdiagram).



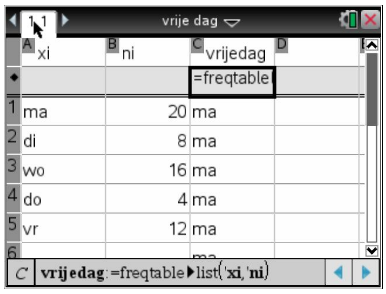
Vanwege de beperkingen bij het werken met een frequentietabel, is het goed om weten dat je vanuit een frequentietabel ook een lijst met ruwe gegevens kun genereren met de functie **freqTable ▸list(lijst, freqlijst).**

Maak een bestand **"vrije dag"** aan en vul in een spreadsheettoepassing de gegevens in zoals hiernaast.

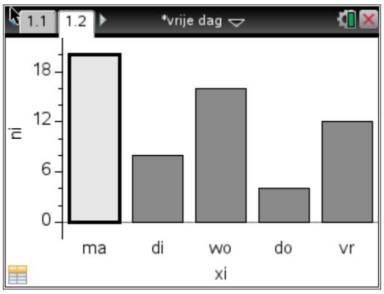


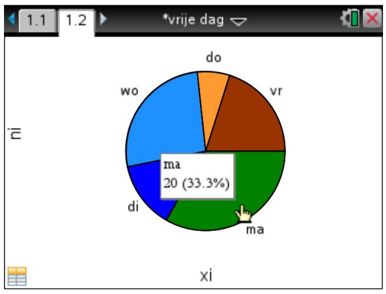
Opmerking

Als je kwantitatieve gegevens wilt ingeven moet je de tekst tussen aanhalingstekens ingeven (dus "ma" , "di" …).



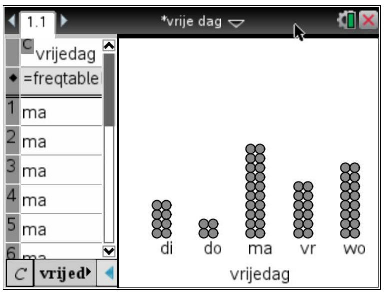
Ook een staafdiagram of een cirkeldiagram ondergaan hetzelfde lot.

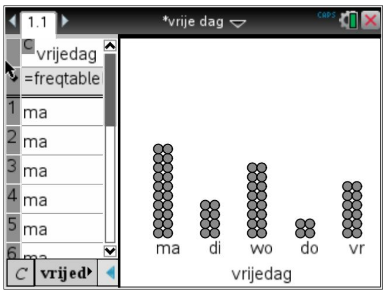




Kies je bij kwantitatieve gegevens gegeven via een frequentietabel (xi, ni, …) voor "Snelle grafiek" , dan worden de kwantitatieve gegevens standaard alfabetisch gerangschikt.

Maar dit kan je via menu aanpassen.





Gegroepeerde gegevens.

Maak een bestand “**examenresultaten**” waar je de gegevens ingeeft van een klas voor een examen wiskunde.

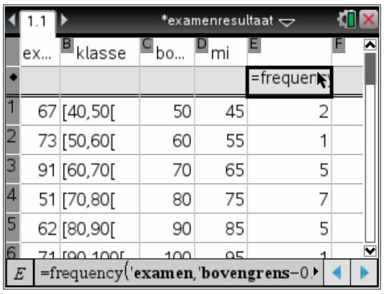
67	73	91	51	62	71	85
89	75	83	41	84	64	73
79	79	68	67	80	49	70

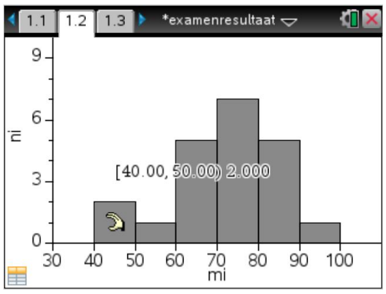
Om deze data in klassen van 10 breed en met als eerste klasse [40,50[onder te brengen ga je als volgt te werk:

- voor in een kolom de naam bovengrens in en tik er de bovengrenzen van de intervallen,

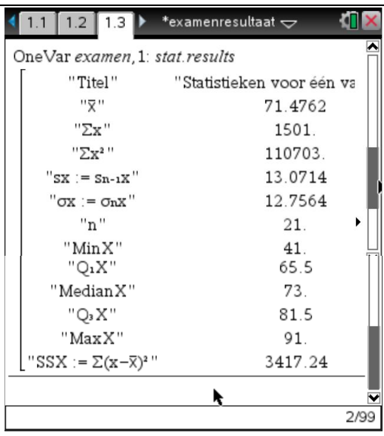
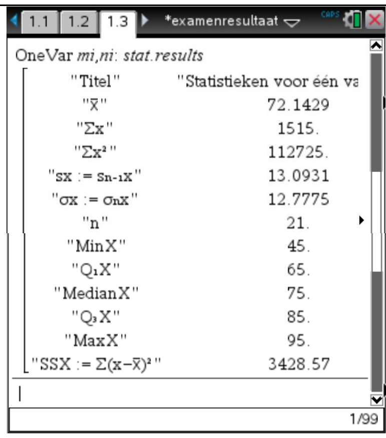
voer in het formule vak van de kolom ni de formule **“frequency(examenresultaten,bovengrens-0.5)”** in.

(De -0,5 staat er omdat de spreadsheet werkt met intervallen]a,b] en als je dus bijvoorbeeld]50 ; 60]-0,5 neemt is dat]49,5 ; 59,5]. Dit interval bevat dus 50 en niet 60 dus zoals [50,60[.)

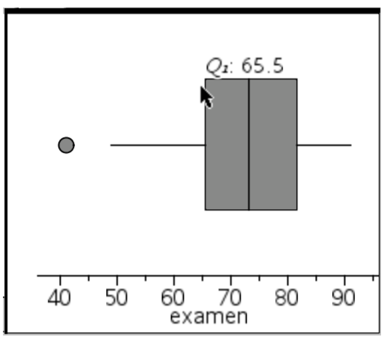


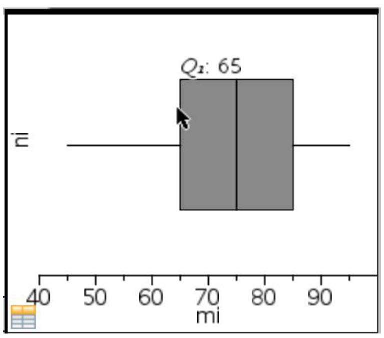


Kijk je bij gegroepeerde gegevens naar een analyse van de ruwe gegevens tegenover een analyse van de gegevens vanuit een frequentietabel, dan moet je weten dat er een serieus verschil kan zijn wat de waarde van de kwartielen betreft en maar dat dit bij gemiddelde en standaardafwijking relatief meevalt.

ruwe gegevens	frequentietabel (mi,ni)
	

Die resultaten zullen dan ook zichtbaar zijn bij de respectievelijke boxplots.



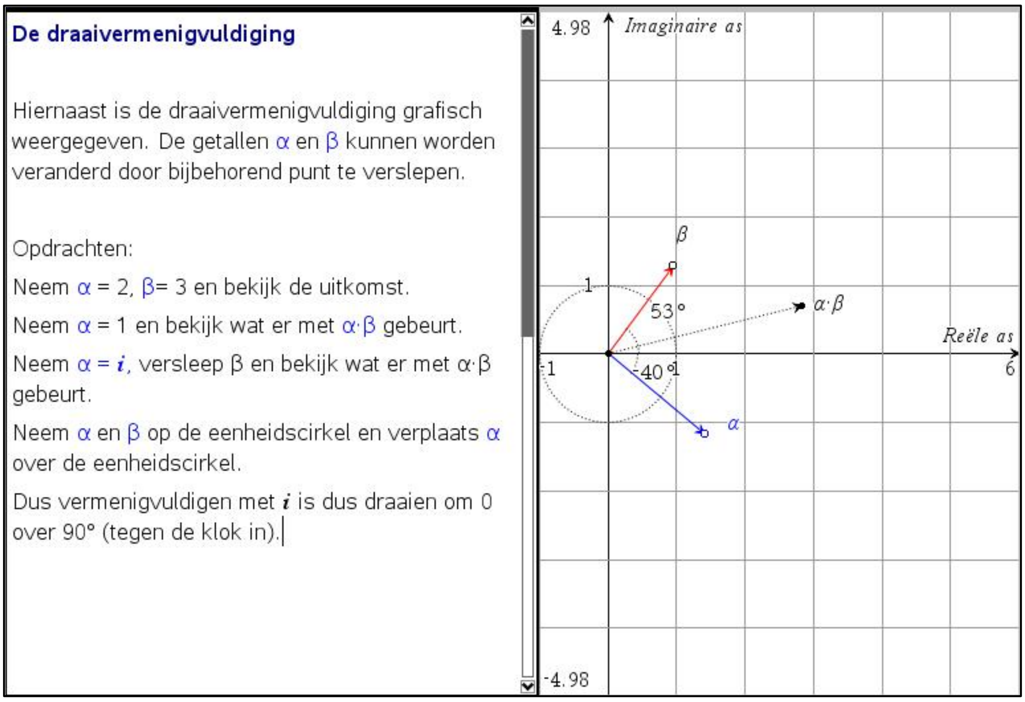


16^{de} T^3 Europe Symposium Oostende

19 & 20 augustus 2013

Negatieve kwadraten: Een positieve verrassing voor leerlingen

Gert Treurniet



Texas Instruments

Katholieke Universiteit Leuven

Complexe getallen en Meetkunde

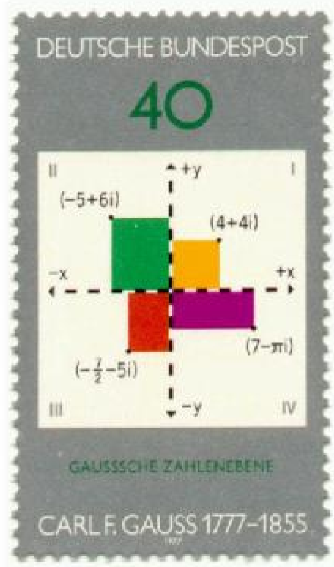
Gert Treurniet

met dank aan

Bert Boon en

Jurjen Feitsma

voor toestemming voor gebruik van hun "syllabus complexe getallen"



Het ontstaan van de complexe getallen

De vergelijking $x^2=-1$ heeft geen reële getallen als oplossing.

Daarom is $\mathbb{R}$ uitgebreid met nieuwe getallen: de oplossingen van de vergelijking $x^2=-1$ zijn $\boldsymbol{i}$ en $-\boldsymbol{i}$ genoemd. Er geldt dus: $\boldsymbol{i}^2=-1$.

Getallen van de vorm $b\cdot\boldsymbol{i}$, met $b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, heten **imaginaire getallen**.
Samen met de reële getallen vormen ze de **complexe getallen**, aangegeven met $\mathbb{C}$.

Een complex getal α is van de vorm
$a+b\cdot\boldsymbol{i}$, met $a \in \mathbb{R}$ en $b \in \mathbb{R}$.
a heet het **reële deel** van α, $\text{Real}(\alpha)$
b heet het **imaginaire deel** van α, $\text{Imag}(\alpha)$.
Opmerking: Het imaginaire deel is dus een reëel getal.

Het rekenen met complexe getallen

Je rekent met complexe getallen net zoals met reële getallen.

Optellen:

$a+b\cdot \boldsymbol{i}+c+d\cdot \boldsymbol{i}=a+c+(b+d)\cdot \boldsymbol{i}$

Aftrekken:

$a+b\cdot \boldsymbol{i}-(c+d\cdot \boldsymbol{i})=a-c+(b-d)\cdot \boldsymbol{i}$

Vermenigvuldigen:

$(a+b\cdot \boldsymbol{i})\cdot (c+d\cdot \boldsymbol{i})=a\cdot c+(b+d)\cdot \boldsymbol{i}-b\cdot d$

Delen:

$$\frac{a+b\cdot \boldsymbol{i}}{c+d\cdot \boldsymbol{i}}=\frac{a+b\cdot \boldsymbol{i}}{c+d\cdot \boldsymbol{i}}\cdot \frac{c-d\cdot \boldsymbol{i}}{c-d\cdot \boldsymbol{i}}=\frac{a\cdot c+b\cdot d}{c^2+d^2}+\frac{b\cdot c-a\cdot d}{c^2+d^2}\cdot \boldsymbol{i}$$

Opdracht: rekenen met complexe getallen

Bereken de volgende opgaven zonder rekenmachine. Maak gebruik van $\boldsymbol{i}^2=-1$. Schrijf de antwoorden in de vorm $a+b\cdot \boldsymbol{i}$

$(2-3\cdot \boldsymbol{i})+(5+4\cdot \boldsymbol{i})$

$(2-3\cdot \boldsymbol{i})-(5+4\cdot \boldsymbol{i})$

$(2-3\cdot \boldsymbol{i})\cdot (5+4\cdot \boldsymbol{i})$

$$\frac{24-10\cdot \boldsymbol{i}}{3-2\cdot \boldsymbol{i}}$$

Controleer de uitkomsten met de rekenmachine.

Het complexe vlak

Met de reële getallen zit de getallenlijn vol.

Vermenigvuldig je elk reëel getal met i, dan vind je alle imaginaire getallen. Die kun je op een tweede lijn zetten.

Zet je beide getallenlijnen loodrecht op elkaar, dan krijg je een assenstelsel:

het complexe vlak of **Gauss–vlak**.

De horizontale as heet de **reële as**; de verticale as heet de **imaginaire as**.

Opmerking: Op de kruising van de assen ligt het getal 0, niet het getallenpaar (0,0).

Getallen in het complexe vlak

Hiernaast is het complexe vlak afgebeeld. Beweeg het getal α door het open punt te verslepen.

Let daarbij op de de waarde van α.

Opdracht:

Plaats het punt achtereenvolgens op de volgende getallen:

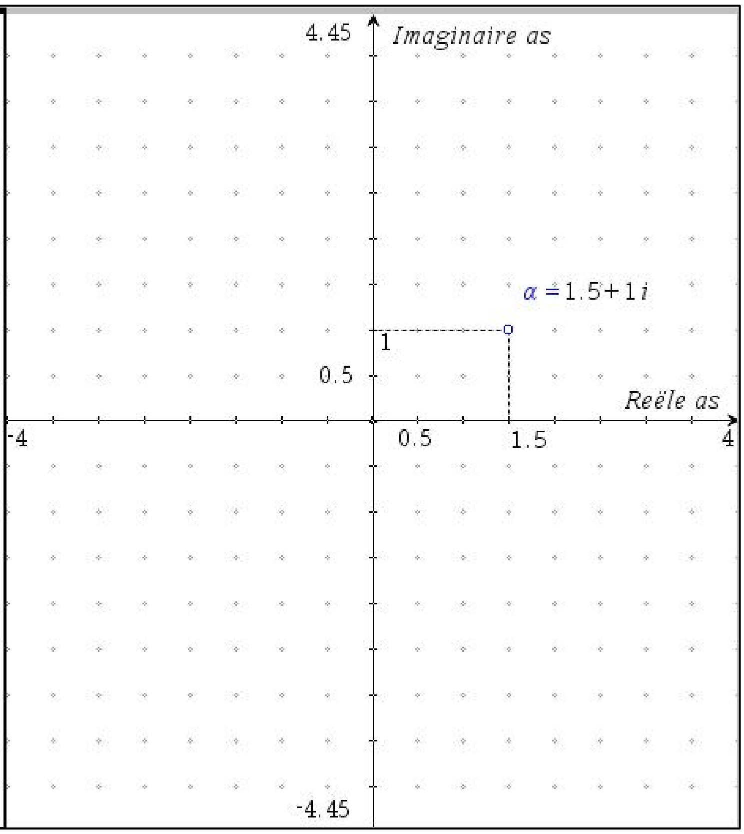
0

1

i

$1+i$

$-1-3i$



De afstand van een complex getal tot 0

$\alpha = a + b \cdot i$, notatie $|\alpha|$, is de afstand van α tot 0.

We noemen dat de **absolute waarde** of **modulus** van een complex getal

Voorbeeld:

Als $\alpha = 1.4+1.3 \cdot i$, dan geldt

$|\alpha| = |a+b \cdot i| = \sqrt{a^2+b^2} \approx 1.89$

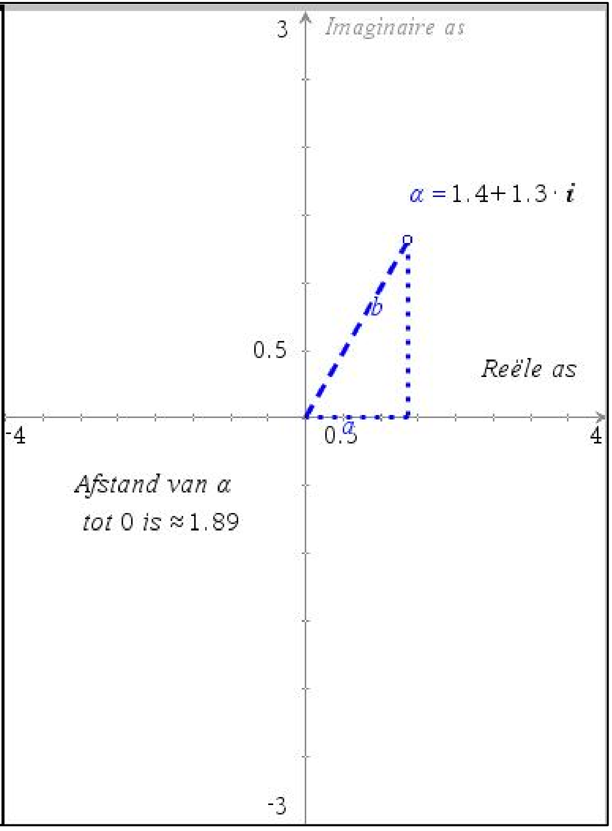
Opdracht 1:

Versleep α en bekijk de afstand van α tot 0.

Opdracht 2:

Waar kan α liggen als $|\alpha| = 2$?

Opdracht 3: Verklaar dat deze formule klopt met de bekende absolute waarde van reële getallen.



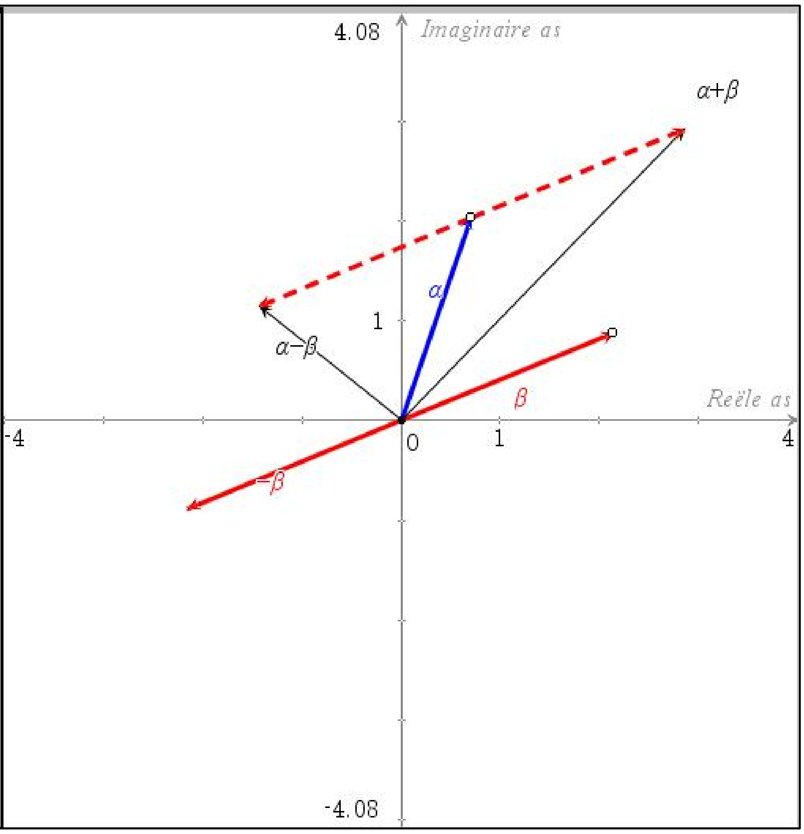
Het grafisch optellen van complexe getallen

Het optellen van complexe getallen ziet er in het Gaussvlak uit als een verschuiving.

De plaats van $\alpha + \beta$ is gelijk aan de over β verschoven plaats van α (of andersom).

De plaats van $\alpha - \beta$ is gelijk aan de over $-\beta$ verschoven plaats van α.

Opmerking: Bedenk dat de optelling van reële getallen ook past binnen deze uitbreiding.



Poolcoördinaten

De plaats van een complex getal α ligt op een andere manier vast door

− zijn afstand $r = |\alpha|$ tot 0 **en**

− de hoek ϕ die de plaatsvector van α maakt met de positieve reële as.

Deze hoek wordt **argument** van α

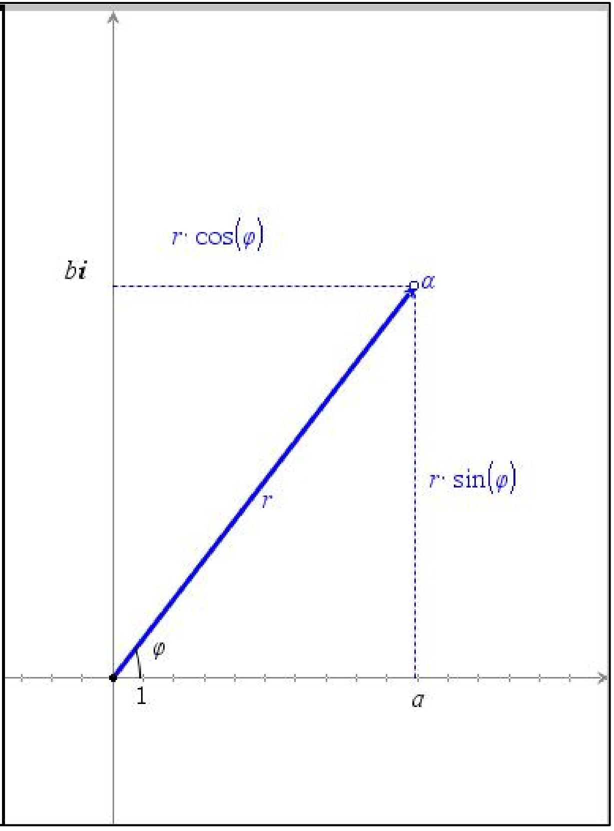
(**arg**(α)) genoemd.

Afstand en hoek van een complex getal worden de **poolcoördinaten** genoemd.

Voor $\alpha = a+b\cdot \boldsymbol{i}$ geldt

$a = r\cdot\cos\phi$ en $b = r\cdot\sin\phi$.

$\alpha = r\cdot(\cos\phi + \boldsymbol{i}\cdot\sin\phi)$ is de **poolvoorstelling** van α.



Het rekenen met poolcoördinaten

Voor het product van twee complexe getallen α en β geldt:

$|\alpha\beta| = |\alpha|\cdot|\beta|$ en $\arg(\alpha) = \arg(\alpha) + \arg(\beta)$.

Voor het quotiënt van twee complexe getallen α en β geldt:

$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ en $\arg(\alpha) = \arg(\alpha) - \arg(\beta)$.

In woorden staat hier: De afstanden tot 0 worden vermenigvuldigd/gedeeld, de hoeken worden opgeteld/afgetrokken.

Meetkunde met complexe getallen beschreven

Om meetkunde te beschrijven met complexe getallen plaats je een figuur in een complex vlak.

Dan hoort bij een punt A een getal $\alpha = a + b \cdot \boldsymbol{i}$ uit het complexe vlak. Meetkundige begrippen/bewerkingen worden vertaald in complexe getallen en/of bewerkingen met complexe getallen.

Hierna volgen enkele begrippen uit het 'woordenboek'.

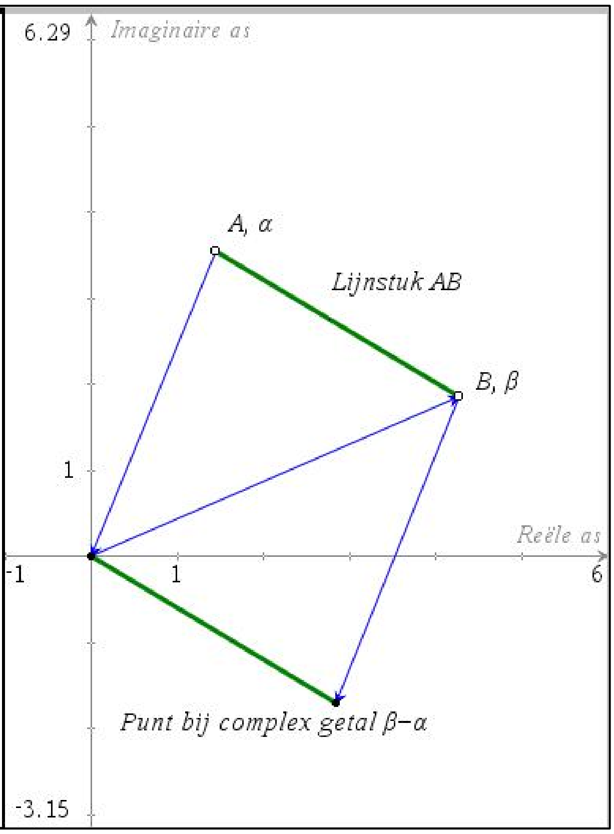
De afstand tussen 2 punten en de lengte van een lijnstuk

Een lijnstuk AB is even lang als de afstand tussen de complexe getallen α en β.

Deze lengte kan worden berekend als

$|\beta - \alpha|$ (of $|\alpha - \beta|$)

Hiernaast staat een grafische toelichting. Daarbij is AB verschoven over – α.

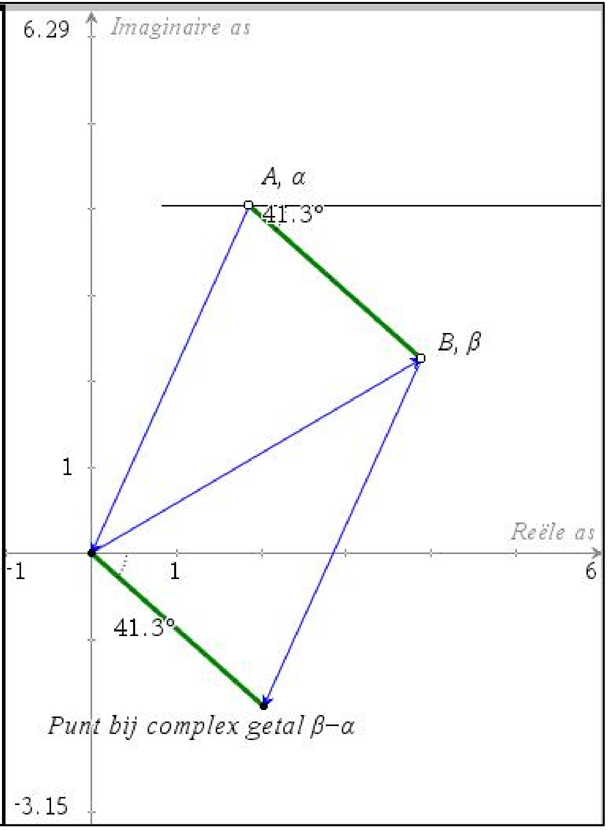


De richting van een lijnstuk

Een lijnstuk AB heeft dezelfde richting als het complexe getal $\beta - \alpha$ en tegengestelde richting als het complexe getal $\alpha - \beta$.

Hiernaast staat een grafische toelichting. Daarbij is AB verschoven over $-\alpha$.

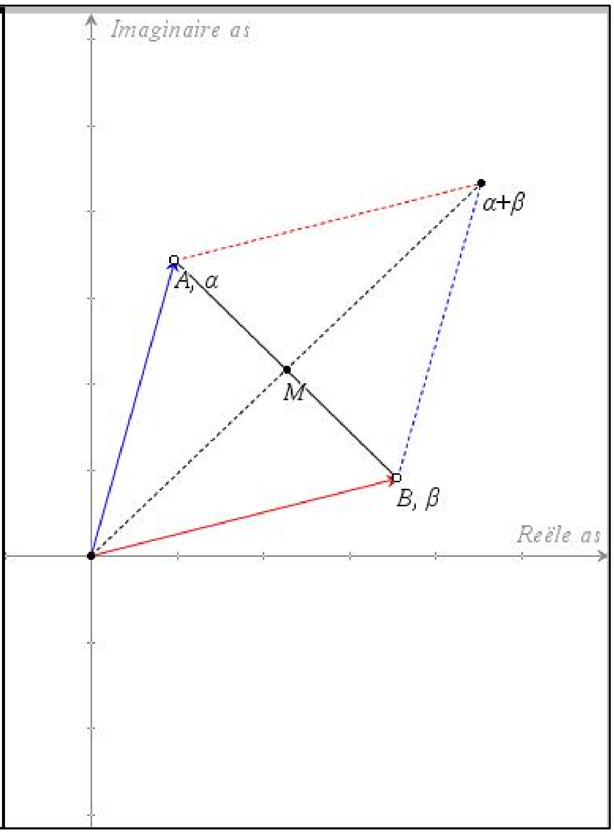
De lijnstukken AB en CD zijn dus evenwijdig als $\beta - \alpha$ en $\delta - \gamma$ een reëel veelvoud van elkaar zijn.



Het midden van een lijnstuk

Bij het midden van het lijnstuk AB hoort het getal $\frac{1}{2} \cdot (\alpha+\beta)$.

Zie hiernaast voor een toelichting.



Spiegelen in de reële as

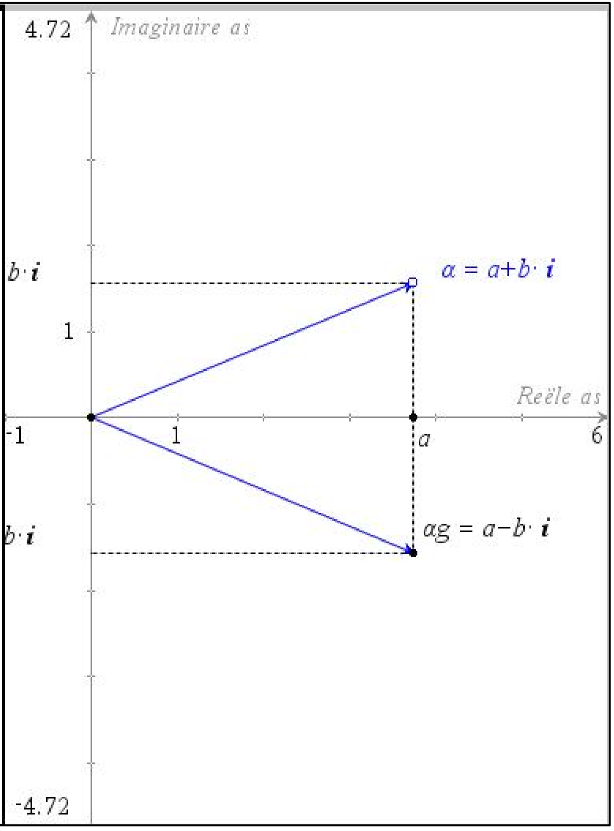
Spiegelen van *A* in de reële as, betekent dat het imaginaire deel van α tegengesteld wordt.

Deze bewerking heet de geconjugeerde nemen van α.

De geconjugeerde van

$\alpha = a + b \cdot \boldsymbol{i}$ is $\alpha_g = a - b \cdot \boldsymbol{i}$.

Zie hiernaast voor een toelichting.



Verschuiven

Verschuiven is optellen. Eerder in dit document is daarop al een toelichting gegeven.

Vergroten/verkleinen en draaien

Deze meetkundige draaivermenigvuldiging is de complexe vermenigvuldiging.

Er gebeurt dus het volgende:

− Er wordt vermenigvuldigd met de modulus ten opzichte van 0 EN

− Er wordt gedraaid over het argument (de hoek) om 0.

De draaivermenigvuldiging

Hiernaast is de draaivermenigvuldiging grafisch weergegeven. De getallen α en β kunnen worden veranderd door bijbehorend punt te verslepen.

Opdrachten:

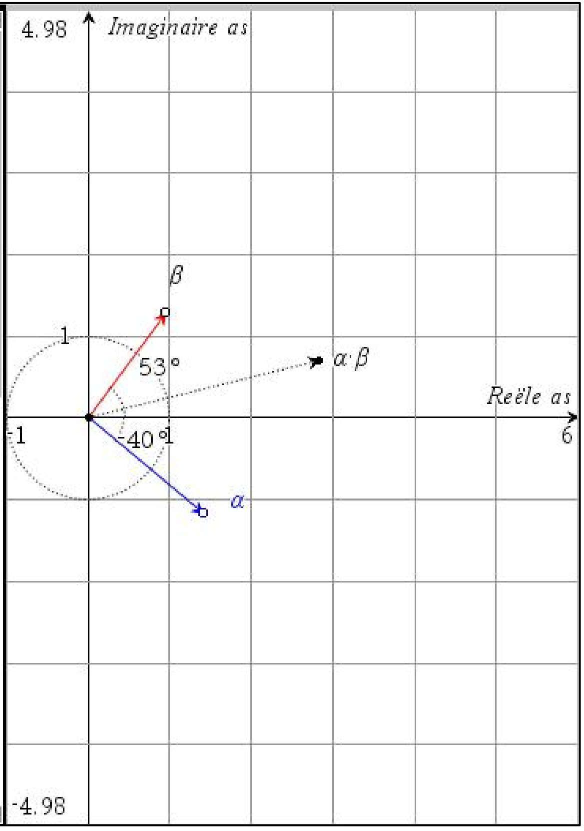
Neem $\alpha = 2$, $\beta = 3$ en bekijk de uitkomst.

Neem $\alpha = 1$ en bekijk wat er met $\alpha \cdot \beta$ gebeurt.

Neem $\alpha = i$, versleep β en bekijk wat er met $\alpha \cdot \beta$ gebeurt.

Neem α en β op de eenheidscirkel en verplaats α over de eenheidscirkel.

Dus vermenigvuldigen met i is dus draaien om 0 over 90° (tegen de klok in).



1. Enkele meetkundige bewerkingen

Vertaal naar bewerkingen met complexe getallen.

a Spiegelen in de y−as.

b Spiegelen in 0.

c Draaien om 0 over 45°.

d Draaien om 0 over 60° (aangegeven met Griekse letter ρ (rho)).

e Draaien om 0 over 120°. Laat zien dat $\rho^2 = \rho - 1$.

2. Een lijnstuk in drie delen

Op lijnstuk *AB* liggen de punten *C* en *D*, zo dat *AC* = *CD* = *DB*.

Welke complexe getallen horen bij *C* en *D*?

3. Zwaartelijnen in een driehoek

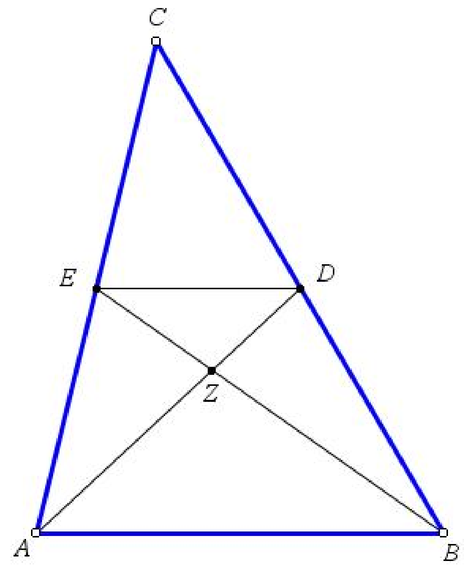
In ΔABC is D het midden van BC en E het midden van AC.

Bij A, B en C horen de complexe getallen α, β en γ.

a. Bewijs dat $DE \,//\, AB$ en $DE = ½ \cdot AB$.

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken AZB en DZE volgt $AZ = 2 \cdot ZD$.

b Welk complex getal hoort bij Z?

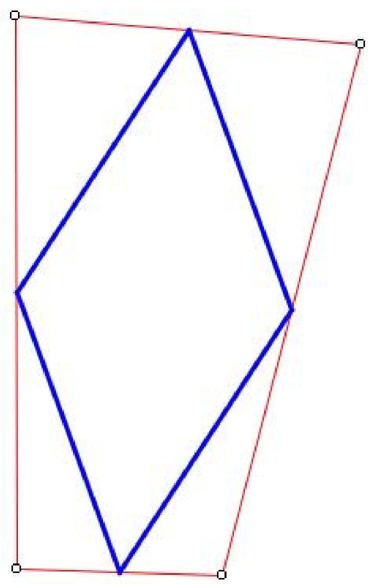


4. Vierhoek met parallellogram

Vier complexe getallen α, β, γ en δ horen bij de hoekpunten van een vierhoek $ABCD$.

P, Q, R en S zijn de middens van de zijden.

Bewijs dat vierhoek $PQRS$ een parallellogram is.



5. Parallellogram

A, B en C zijn hoekpunten van een parallellogram.

Bewijs dat voor het vierde hoekpunt D geldt: $\delta = \alpha + \gamma - \beta$.

6. Draaien om een punt

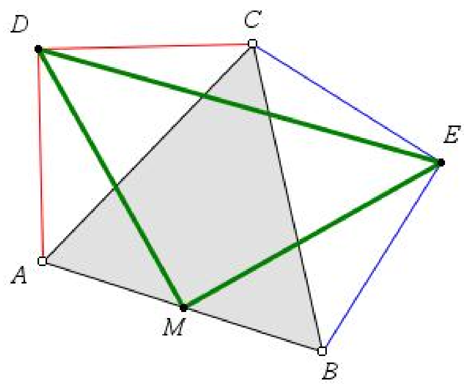
Gegeven zijn twee punten A en B met bijbehorende complexe getallen α en β. B wordt 90° om A gedraaid.

Welk complex getal hoort bij het beeldpunt B'?

7. Gelijkbenige driehoek

Op twee zijden van $\triangle ABC$ zijn gelijkbenige rechthoekige driehoeken geplaatst. Het punt M is het midden van zijde AB.

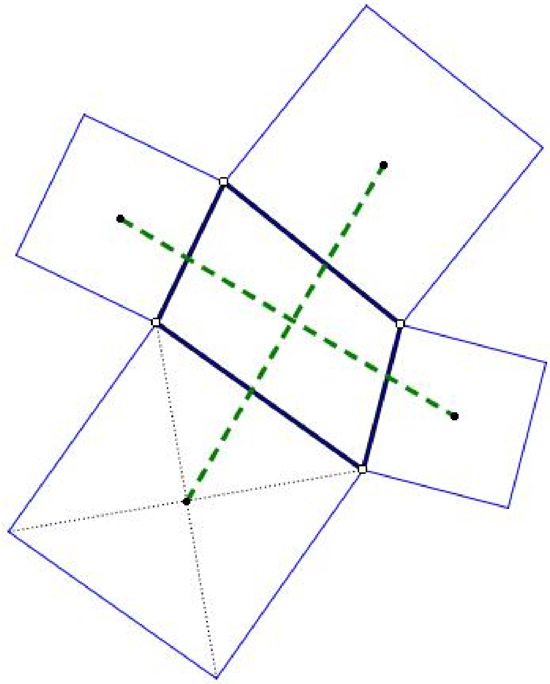
Bewijs dat $\triangle MDE$ ook gelijkbenig rechthoekig is.



De stelling van Van Aubel – vermoeden

Gegeven is een vierhoek *ABCD* . Op elke zijde wordt een vierkant geplaatst.

Ontwikkel een vermoeden over de onderbroken groene lijnen.



8. De stelling van Van Aubel – bewijzen

Bewijs dat de verbindingslijnstukken van de middelpunten van de overstaande vierkanten staan loodrecht op elkaar staan en even lang zijn (in de figuur: $PR \perp QS$ en $PR = QS$).

Van Aubel

De stelling is genoemd naar H. H. van Aubel, geboren in 1830 te Maastricht en overleden in 1906 te Antwerpen. Van Aubel was leraar wiskunde aan het Koninklijk Atheneum te Antwerpen.

9. Stelling van Napoleon

Op de zijden van ΔABC zijn naar buiten toe gelijkzijdige driehoeken getekend.

Bewijs dat de zwaartepunten van die driehoeken de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek.