T³ VLAANDEREN

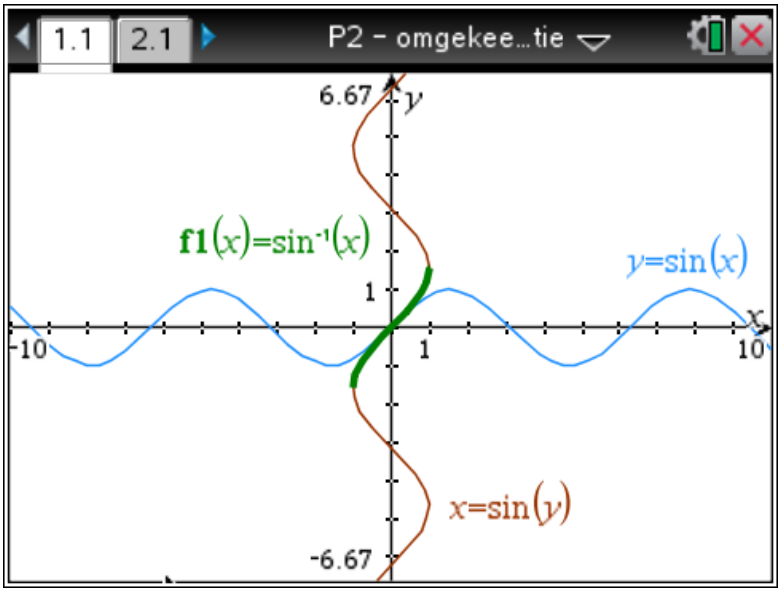
18de T³ Vlaanderen Symposium Oostende

24 & 25 augustus 2015

CAS in Europese scholen: “work in progress”

Vijf jaar ervaring in de klas en met examens

Luc Blomme



Texas Instruments

Katholieke Universiteit Leuven

CAS in de Europese Scholen: "*Work in Progress*": Vijf jaar ervaring in de klas en met examens

Luc Blomme – Europese School Brussel III

Abstract:

Met de hervorming van het wiskundeprogramma hebben de Europese Scholen resoluut gekozen voor de introductie van CAS technologie in het wiskundeonderwijs in de laatste 4 jaar van de middelbare school. Het programma bestaat voor elk wiskunde-niveau en jaar uit een gedetailleerde lijst van mathematische competenties met en zonder rekenmachine.

De introductie van dezelfde rekenmachine voor alle leerlingen zet de deur op een kier voor een schat aan nieuwe pedagogische en didactische mogelijkheden bij het introduceren, toepassen en verdiepen van wiskundige begrippen. De bedoeling is om meer wiskunde te doen en minder repetitief rekenwerk.

Als gevolg hiervan is ook het Europees Baccalaureaat (centraal eindexamen) aangepast in een deel met en een deel zonder rekenmachine.

Deze hervorming is niet zonder slag of stoot verlopen: toepassen van de nieuwe filosofie, training van de leraren, opstellen van examenvragen, harmonisering van testen en correcties, reacties van collega's, ouders en leerlingen, etc. vandaar "Work in Progress".

1. Inleiding

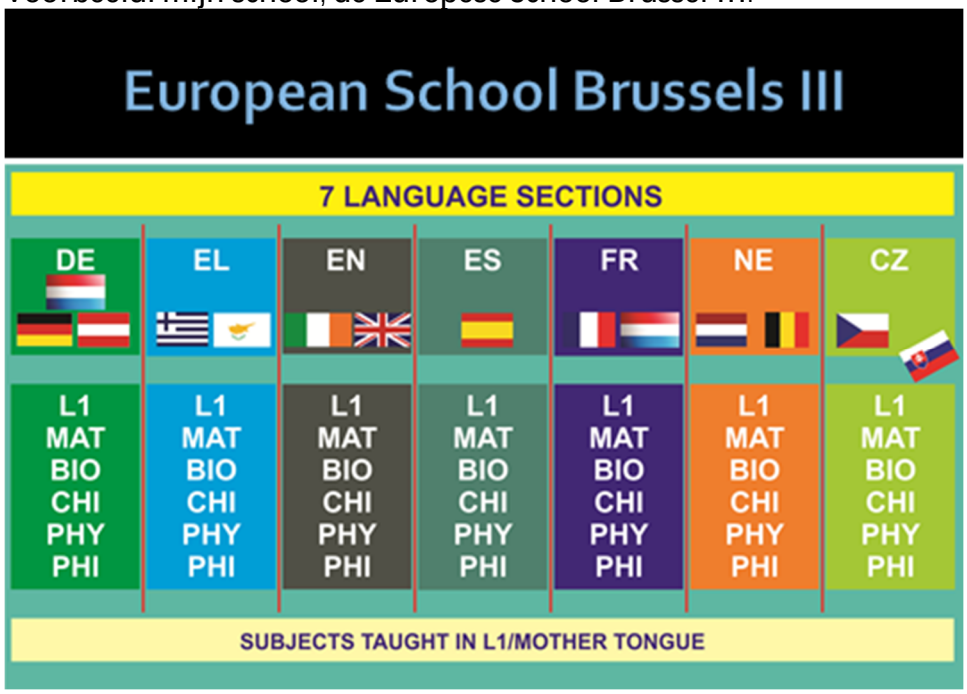
1. Wie zijn wij ?

2. Wat gaan we doen ?
   Deze lezing is niet gestoeld op gedegen pedagogisch verantwoord wetenschappelijk onderzoek. Het gaat meer om ervaring en buikgevoel. Het is een persoonlijke benadering vanuit de dagelijkse praktijk in de klas, met de lerarentrainingen en een aantal eindexamens op de Europese Scholen. Deze caleidoscoop van ervaringen en observaties willen we graag delen.
   Er zijn in de EU maar weinig nationale systemen die resoluut gekozen hebben voor de introductie van CAS in het wiskundeonderwijs op de middelbare school en dat maakt onze situatie toch een beetje uniek.

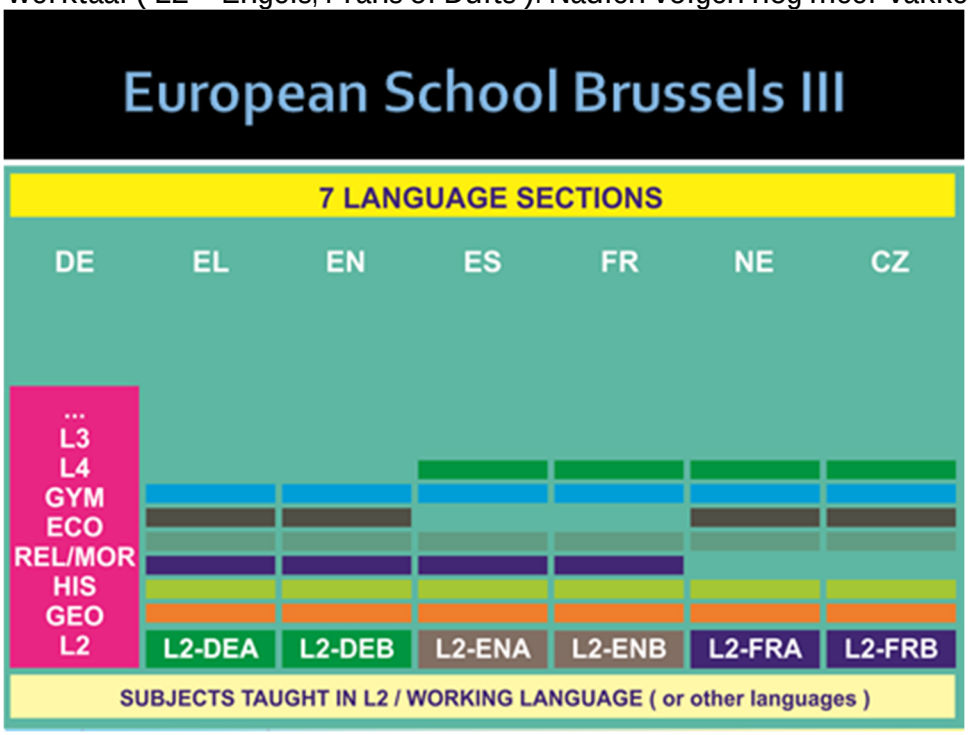
3. Waar komen we vandaan?
   De Europese Scholen
   - De officiële scholen van de Europese Unie (sinds 1953).
   - BOG: alle lidstaten van de EU zijn vertegenwoordigd door hun minister van onderwijs.
     - Pedagogische beslissingen alleen met unanimiteit mogelijk.
     - OGES is verantwoordelijk voor de dagelijkse leiding.
   - Opbouw van de school: 2 jaar kleuterschool, 5 jaar lagere school en 7 jaar middelbare school; van de leeftijd van 4 tot 18 jaar.

- Er zijn ongeveer 30000 leerlingen.

- Type I en geaccrediteerde scholen (type II en type III)
  - Dunshauglin (*Ireland*), Parma (*Italy*), Heraklion (*Greece)* ; Strasbourg and Manosque (*France*), Helsinki (*Finland*), Den Haag (*Nederland*), Bad Vilbel (*Germany*), Tallinn (*Estonia*), Culham (UK), Copenhagen (*Denmark), etc.*
- Wat is er speciaal aan een Europese School ?
  Voorbeeld: mijn school, de Europese School Brussel III.

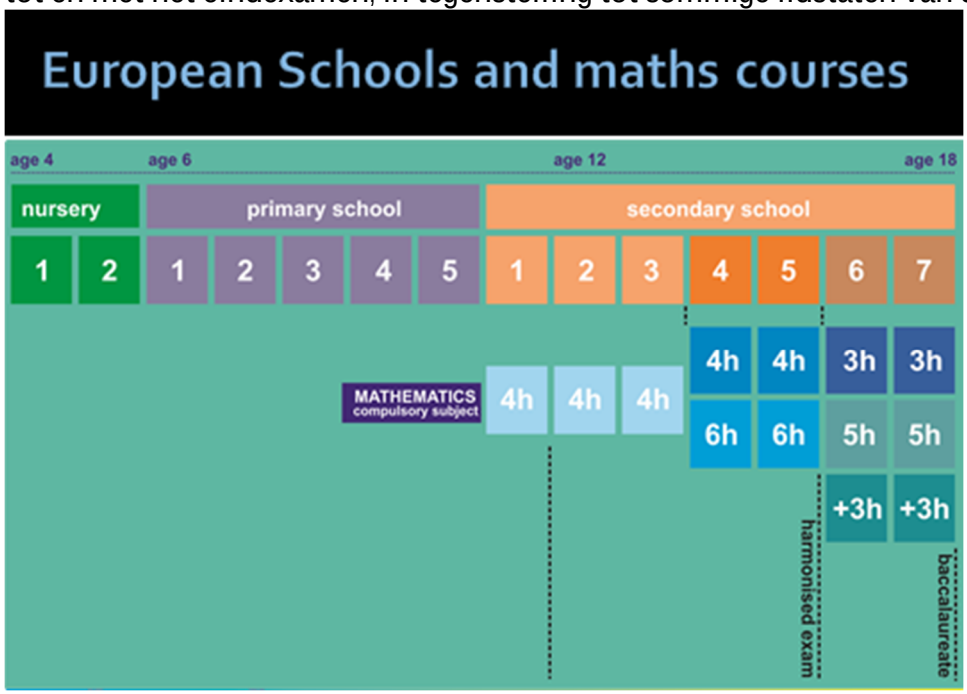


- Een eerste reeks vakken worden uitsluitend in de moedertaal (= de taal van de sectie) gegeven.
- Voor alle andere vakken worden de leerlingen ingedeeld in groepen met leerlingen uit meerdere taalsecties.
- Alle talen worden onderwezen door “native speakers”.
- Vanaf klas 3 worden geschiedenis en aardrijkskunde onderwezen in de werktaal (L2 = Engels, Frans of Duits). Nadien volgen nog meer vakken.

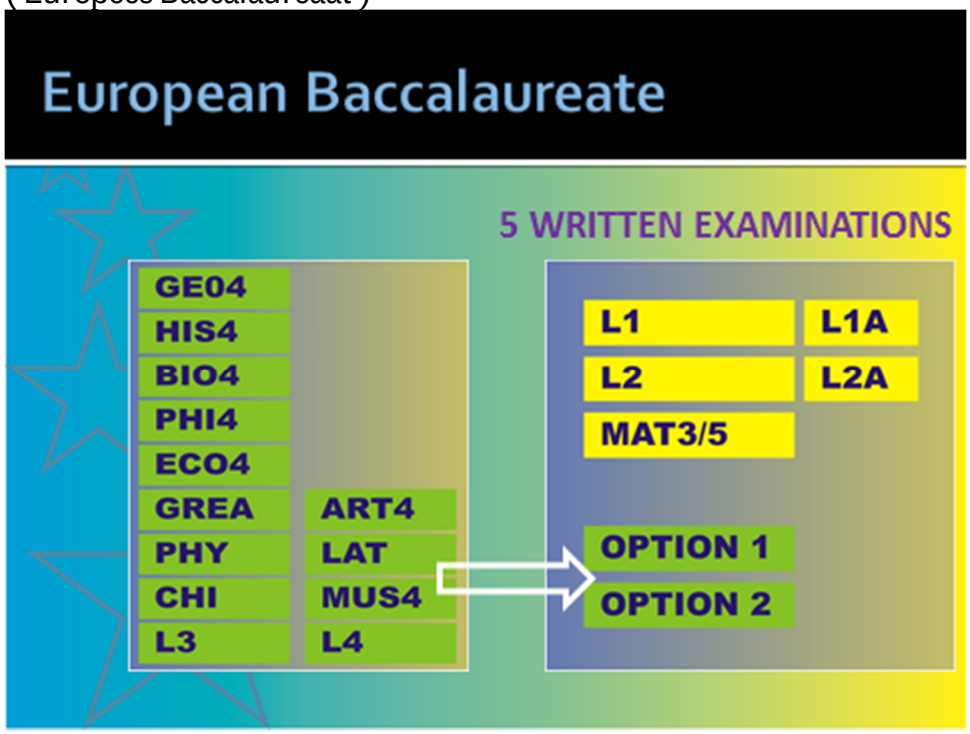


2. Het vak Wiskunde op de Europese Scholen

- Wiskunde is een verplicht vak voor alle leerlingen op de middelbare school, tot en met het eindexamen, in tegenstelling tot sommige lidstaten van de EU.



- Wiskunde is een verplicht schriftelijk eindexamen - een van de vijf.
  (Europees Baccalaureaat)

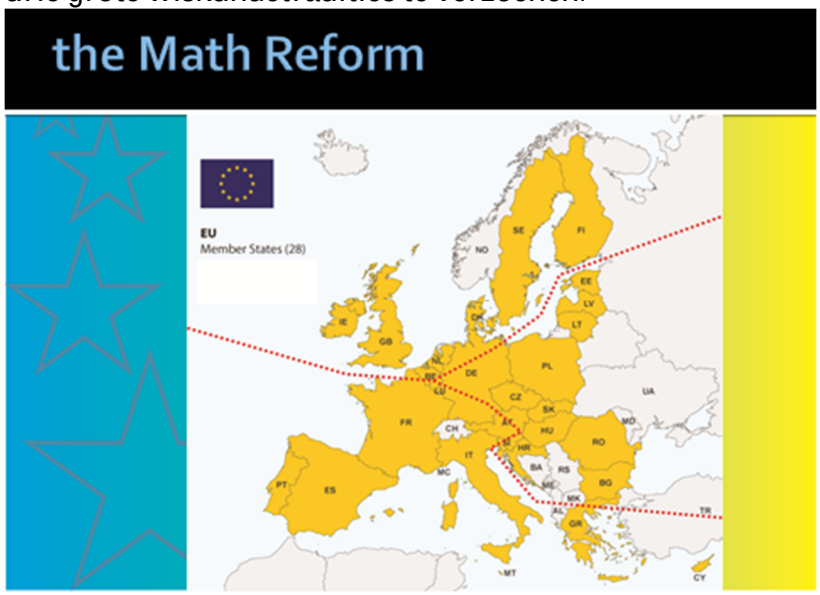


3. De wiskundehervorming

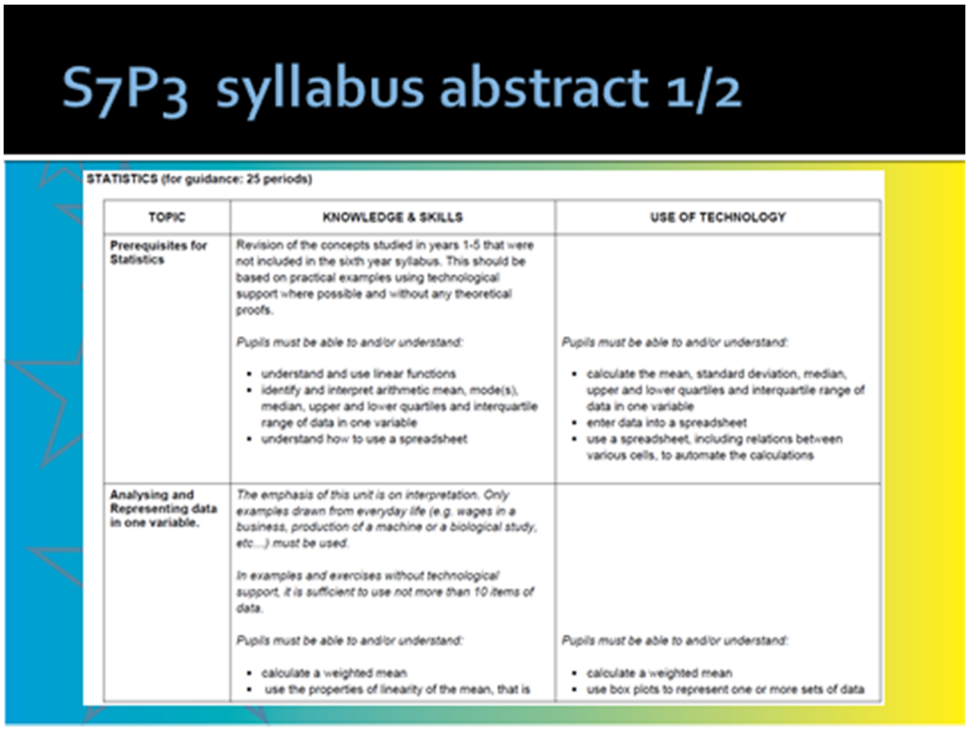
1. <u>Waarom een hervorming ?</u>
   Het diploma van de Europese Scholen is gelijkwaardig met dat van het nationale onderwijssysteem en verleent – in principe – toegang tot elke Europese universiteit. Veel docenten en ook academici en politici hadden kritiek op de vorige syllabus, die 30 jaar onveranderd was gebleven, en op de eindexamens wiskunde (Europees Baccalaureaat).
   Zodoende werd een lang proces van hervorming van het wiskundeonderwijs op de Europese Scholen ingezet.
   - Om de ontwikkelingen in de lidstaten van de EU bij te houden.
   - Om iets te doen aan repetitieve karakter en de voorspelbaarheid van de examenvragen.
   - Een aantal universiteiten hadden, naar aanleiding van het selectieproces voor onze leerlingen, opmerkingen bij het principe van keuzevragen en de gelijkwaardigheid van de examens en cijfers.
   - Niet alle onderwerpen van het programma van de eindexamenklas kwamen voor op het examen.

2. <u>Basisprincipes van de hervorming</u>
   Elke verandering aan de syllabus van een vak moet unaniem door alle lidstaten goedgekeurd worden.
   - Uitgangspunt is een nieuwe filosofie: beter begrip van de wiskunde en minder focus op puur technisch rekenwerk door gebruik te maken van CAS technologie. Meer wiskunde, minder rekenen.
   - Kwantumsprong van niet-grafische rekenmachine naar CAS technologie.

- De basisrekenvaardigheden versterken door een gedeelte zonder rekenmachine in te voeren.
- Meer gericht op vervolgstudie: Wisk-3 is niet langer Wisk-5-light maar bereidt voor op studierichtingen met o.a. veel statistiek (psychologie, criminologie, etc.).
- Keuze-onderwerpen behouden in Wisk-8 om in te kunnen spelen op speciale eisen van universiteiten en nationale tradities. Voorbeeld: toelatingsexamen burgerlijk ingenieur in Wallonië, vereist kennis van kegelsneden (= een keuzeonderwerp).
- De grote uitdaging was een Europees "compromis" te bereiken: proberen om drie grote wiskundetradities te verzoenen.



3. <u>De nieuwe syllabus: mathematische competenties met en zonder technologisch hulpmiddel</u>



S7P3 syllabus abstract 1/2

STATISTICS (for guidance: 25 periods)

TOPIC	KNOWLEDGE & SKILLS	USE OF TECHNOLOGY
Prerequisites for Statistics	Revision of the concepts studied in years 1-5 that were not included in the sixth year syllabus. This should be based on practical examples using technological support where possible and without any theoretical proofs. *Pupils must be able to and/or understand:* • understand and use linear functions • identify and interpret arithmetic mean, mode(s), median, upper and lower quartiles and interquartile range of data in one variable • understand how to use a spreadsheet	*Pupils must be able to and/or understand:* • calculate the mean, standard deviation, median, upper and lower quartiles and interquartile range of data in one variable • enter data into a spreadsheet • use a spreadsheet, including relations between various cells, to automate the calculations
Analysing and Representing data in one variable.	*The emphasis of this unit is on interpretation. Only examples drawn from everyday life (e.g. wages in a business, production of a machine or a biological study, etc...) must be used.* *In examples and exercises without technological support, it is sufficient to use not more than 10 items of data.* *Pupils must be able to and/or understand:* • calculate a weighted mean • use the properties of linearity of the mean, that is	*Pupils must be able to and/or understand:* • calculate a weighted mean • use box plots to represent one or more sets of data

Een voorbeeld uit de syllabus van Wisk-3: er wordt in detail aangegeven welke competenties er van een leerling verwacht worden, duidelijk gescheiden in twee categorieën: met en zonder technologisch hulpmiddel (rekenmachine).

S7P3 syllabus abstract 2/2

KNOWLEDGE & SKILLS	USE OF TECHNOLOGY
and mark it on a scatter diagram • organise in ascending order the data by the independent variable x, then split them by putting the first half in one group and the second in another. Find the mean point of each of these subset and connect the two points with a straight line (called line of Mayer) to create an estimate of the linear relationship between the data • understand the method of least squares when calculating the least square regression line (regression of y on x) • on a scatter diagram by using trial and error, find an appropriate regression model (linear, logarithmic or exponential), taking care to identify and eliminate outliers where necessary. • examine the suitability of a linear regression model by calculating and interpreting Pearsons' product moment correlation coefficient • appreciate that the line of Mayer and the line of regression of y on x passes through the mean point of the data on a scatter diagram • use a regression model to make interpolations, extrapolations and forecasts • use all of the concepts and results given above to practical applications	• calculate the mean point and add it to the scatter diagram • show graphically the idea that the linear regression model will best fit the data when the sum of the least squares is minimised.(y on x) • calculate Pearsons' product-moment correlation coefficient • find the equation of the line of Mayer and the line of linear regression of y on x • draw the line of Mayer and the line of linear regression of y on x • for given bivariate data which is either exponential or logarithmic apply a given (by the teacher) change of variable and observe from the scatter diagram that a linear regression model would be appropriate. From this conclude that the original data is exponential or logarithmic: ○ $(\ln y = a \cdot x + b) \Rightarrow (y = c \cdot d^x)$ ○ $y = a \cdot \ln x + b$ • find a linear, exponential or logarithmic regression equation for bivariate data by using the regression tools.

Hetzelfde basisprincipe is toegepast op alle syllabi voor alle jaren. Hieronder een voorbeeld van Wisk-5.

S7P5 syllabus abstract 1/2

TOPIC	KNOWLEDGE & SKILLS	USE OF TECHNOLOGY
Sequences (10 periods)	*In addition to the concepts met in the 6th year pupils must be able to and/or understand:* • observe the behaviour of a sequence graphically as the relation (n, u_n) (time plot) • determine whether a sequence is increasing or decreasing ○ Given the explicit nth term then let $u_n = f(n)$ and study f' ○ Given a recurrence relation u_n then let $u_n = f(u_{n-1})$ and study the sign of $u_{n+1} - u_n$ • find M an upper and m a lower bound of a sequence: $u_n \leq M$ and $u_n \geq m$ • apply the theorem of convergence/divergence : ○ an increasing sequence bounded by M converges ○ a decreasing sequence bounded by m converges • for the basic set of recurrence relations in the form $u_n = f(u_{n-1}), n \in \mathbb{N}$ where ○ $f : x \mapsto ax + b$ ○ $f : x \mapsto \sqrt{ax + b}$ ○ $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}, c \neq 0$	*Pupils must be able to and/or understand:* • enter a sequence both explicit and recurrence relation in an appropriate application (spreadsheet, CAS, graph etc.) • given the explicit nth term or a recurrence relation calculate a particular term • given the first terms of a sequence find the explicit nth term and or the recurrence relation where appropriate • investigate the behaviour of a sequence graphically as the relation (n, u_n) (time plot) • create a web diagram of a sequence of the form $u_n = f(u_{n-1}), n \in \mathbb{N}$ and find from the diagram possible limits • investigate the behaviour of a sequence by manipulating the initial term • find by solving the equation $f(L) = L$, the limit L of a convergent sequence

S7P5 syllabus abstract 2/2

Unless further specified, students must be able to apply, without a technological tool, the concepts referred to in the second column 'knowledge and skills', for the following basic functions where $a, b, c \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{Z}$:

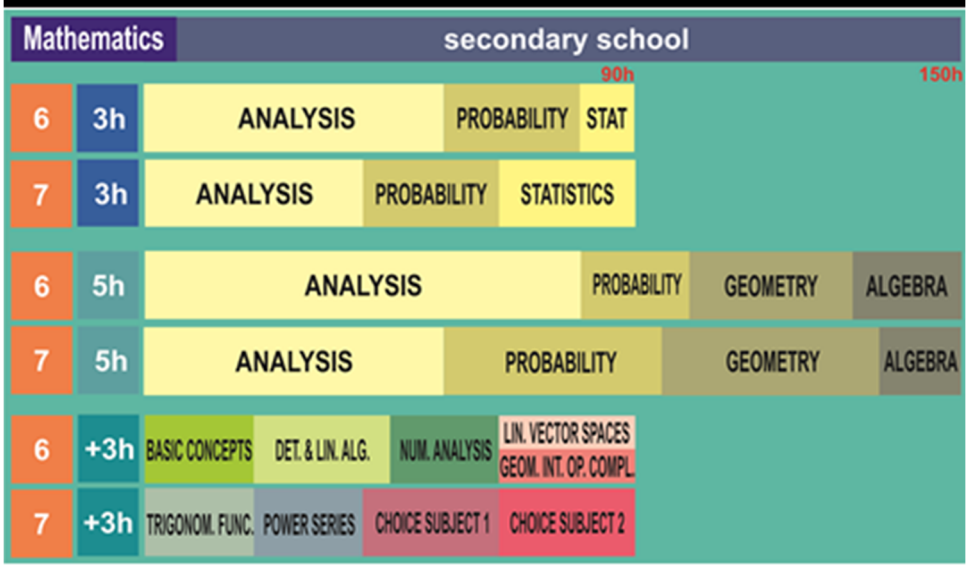
- polynomials functions $P(x)$ of degree ≤ 3
- $\frac{P(x)}{Q(x)}$ where $P(x)$ and $Q(x)$ are polynomial functions of degree ≤ 2
- $a + \lambda\sqrt{bx+c}; \sqrt{ax^2+bx+c}$
- $a + \lambda\cos(bx+c)$; $a + \lambda\sin(bx+c)$; $\tan x$
- $c + \lambda\ln(ax+b)$; $\lambda x^a \ln x$ for $a \in \{-2,-1,0,1,2\}$
- λe^{ax+b}; $ce^{bx} + de^x + f$; $c \cdot (e^{ax} + e^{-ax})$; $e^{ax}(ax^2+bx+c)$

The technological tool in following analysis can be used to not only confirm what has been studied without a calculator but also to mirror, step by step, this process for a function which is not limited to only the basic ones. It may also be appropriate at times to use the tool to immediately give a solution.

TOPIC	KNOWLEDGE & SKILLS	USE OF TECHNOLOGY
Study of Real Functions of One Real Variable	*In addition to the concepts met in the 6th year pupils must be able to and/or understand:* • the concept of an inverse function • study the natural logarithmic and the exponential function of base *e* • examine the following characteristics for all the basic functions given above: ○ domain ○ intersection with the coordinate axes ○ limits ○ asymptotes ○ derivative and how it may vary ○ tangent at a point ○ extrema	*Pupils must be able to and/or understand:* • draw the graph of a function • choose appropriate units and a window so that the essential characteristics of a graph can be viewed and studied • use the technological tool to perform, step by step, the calculations needed for examining the characteristics referred to in the second column • manipulate by grabbing and moving the graphs of natural logarithms and the exponential to be able to observe the essential characteristics • use sliders to investigate a family of functions with one or more parameters

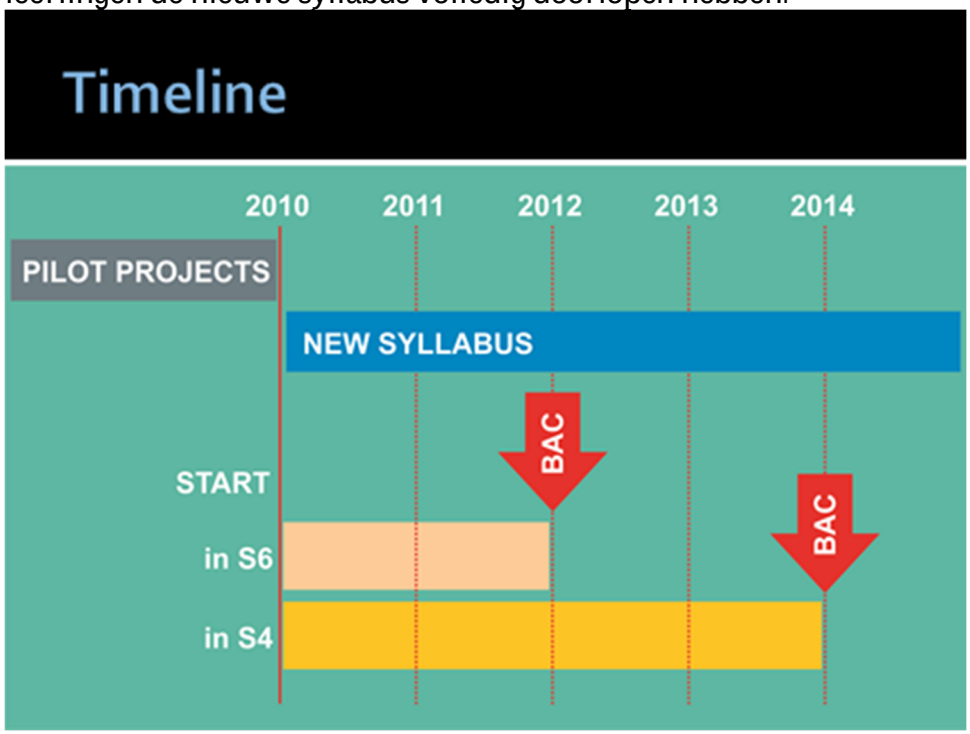
De syllabus suggereert ook (vrijblijvend) het aantal lesuren per onderwerp.

Guidelines for teachers



4. <u>Tijdslijn</u>
   - De nieuwe syllabus wordt officieel ingevoerd in 2010, simultaan in klas 4 en klas 6.
   - Het eerste Baccalaureaat “nieuwe stijl” vindt plaats in juni 2012.

- Pas twee jaar later, in juni 2014 is er het eerste eindexamen waarbij de leerlingen de nieuwe syllabus volledig doorlopen hebben.



4. Het technologisch hulpmiddel - CAS

1. <u>Omschrijving</u>
   - Vanaf klas 4 tot en met klas 7 van de middelbare school (±7500 - 8000 leerlingen/jaar) gebruiken alle leerlingen en leraren een technologisch hulpmiddel in het vak wiskunde, zoals voorgeschreven in de syllabus.
   - Om elke leerling dezelfde kansen te geven moet dit hulpmiddel:
     - Hetzelfde zijn voor iedereen.
     - Het enige toegelaten hulpmiddel zijn.
     - Beschikken over een speciale test-modus ("Press-to-Test" mode).
   - Het gebruik wordt later uitgebreid naar andere vakken: natuurkunde, scheikunde, biologie, aardrijkskunde en economie.
   - Het technologisch hulpmiddel moet beschikken over de nodige CAS functionaliteit zoals omschreven in de syllabus.

2. <u>Waarom de keuze voor TI-Nspire CAS CX ?</u>
   - Het technologisch hulpmiddel zoals voorzien in de syllabus is niet gebonden aan een bepaald merk of een platform (rekenmachine, laptop, tablet, etc.).
   - De "European Schools Experts Group" beslist elk jaar – na een grondige analyse van de markt - welk technologisch hulpmiddel / software versie vereist is voor het volgende schooljaar.
   - Sinds de officiële start hebben we gewerkt met de TI-Nspire CAS.
   - Voor volgend schooljaar 2015-16 is beslist enkel nog de TI-Nspire CAS CX met software versie 4.xx toe te laten.

4. In-service training voor de leraren

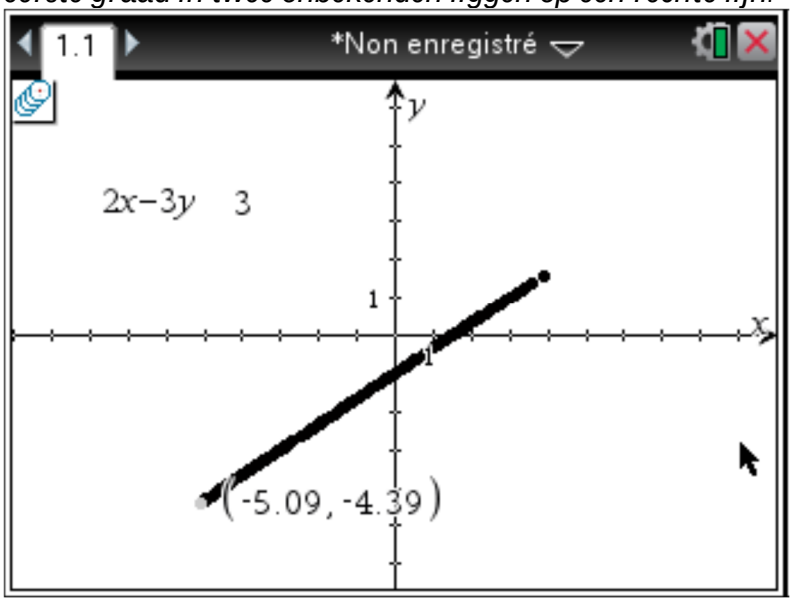
1. Organisatie van de training
   - Sinds de invoering van de nieuwe syllabus wordt een jaarlijkse opleiding voor de wiskundeleraren georganiseerd door de “experts group”. Twee trainers gaan naar elke school voor een training van één dag.
   - Alle trainingen verlopen simultaan in het Frans en het Engels. Alle trainingsmateriaal is in meerdere talen beschikbaar.
   - Training was niet enkel een conditio sine qua non om het project op de rails te krijgen. Door de beperking van het contract van de leraren tot een maximale duur van 9 jaar is er een groot verloop. Elk jaar verlaten een groep ervaren, goed getrainde leraren het systeem en start een aantal nieuwe leraren. De grote meerderheid is totaal onbekend met de TI-Nspire CAS. Permanente vorming is een absolute noodzaak.
   - De basisvorming CAS wordt in elke school verzorgd door de wiskunde-coördinator.
   - Het gebruik van de technologie in de wiskundeles vereist een grote investering qua tijd en energie van de docent.

2. Inhoud van de training

   In de training komen vooral de volgende twee aspecten aan bod:

   a. Het gebruik van de TI-Nspire CAS in de klas
   Aan de hand van praktische voorbeelden en toepassingen. Sommige kant-en-klare toepassingen worden enkel gedemonstreerd en andere worden stap voor stap gebouwd en uitgewerkt.

   Voorbeeld: in-service training 2014-15
   de punten waarvan de coördinaten voldoen aan een vergelijking van de eerste graad in twee onbekenden liggen op een rechte lijn.



   b. Het Europees Baccalaureaat Wisk-3 en Wisk-5.

In 2013-14 was het centrale thema, het opstellen en exact formuleren van relevante examenvragen.

- Welke competentie(s) worden geëvalueerd ?
- Voldoet de vraag aan de nieuwe filosofie ?
- Geen vragen die met Ja of Nee beantwoord kunnen worden.
- Hoe weet de leerling wat er precies verwacht wordt ?
- Hoe gedetailleerd moet de uitwerking zijn ?
- Meer open vragen/ problem solving ?
- Een vraag in het deel met rekenmachine vereist niet noodzakelijk het gebruik ervan.
- Het examen is een wiskunde examen, geen TI examen.
- Hoe vermijden we recycling van vragen ?
- Een bijkomend probleem is de exacte vertaling van de opgave in vele Europese talen. Niet altijd vanzelfsprekend.

Het afgelopen jaar is er gewerkt rond het harmoniseren van de correctie van de examens.

- Is enkel het antwoord voldoende ?
- Gaan er punten af, of worden er juist punten 'verdiend' ?
- Wat is 'voldoende' (in ons systeem een 6) ?

Bij de training van het afgelopen jaar is er ook uitgebreid gebruik gemaakt van Ti-Navigator. Het aantal Europese Scholen dat deze technologie gebruikt neemt snel toe.

5. Evaluatie: Examens / testen

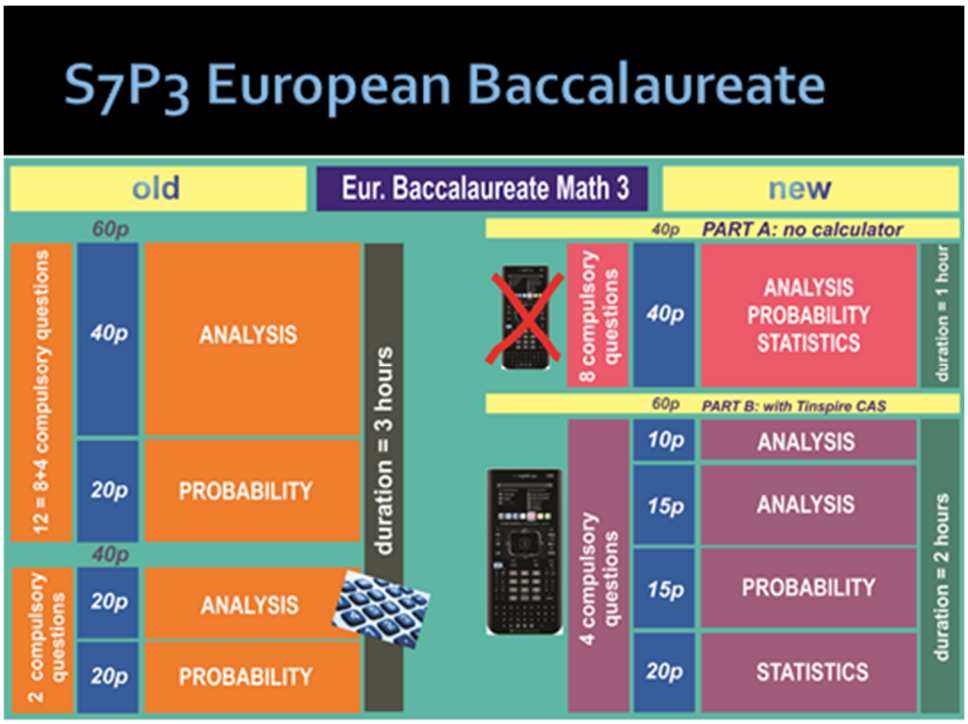
Overzicht van de voorziene tijd en het aantal testen/examens per semester en per klas, afhankelijk van het niveau van de cursus.

1. <u>De vernieuwde evaluatie in het vak wiskunde</u>

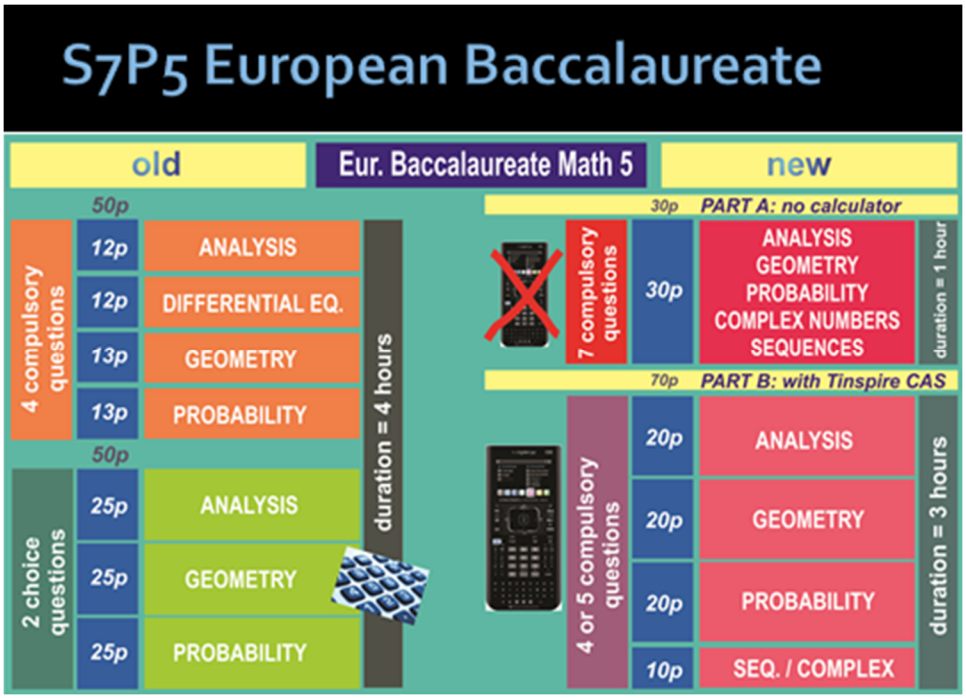
Assessment in Year 4 to Year 7

Year	*Assessments for the B-mark*	*Detail of the assessments*
4th class (4p and 6p/week)	Each semester two B-tests	• 1st B-test without a tool • 2nd B-test with a tool
5th class (4p and 6p/week)	December and June harmonised exams	• 1 period without a tool • 1 period (4p/week) or 2 periods (6p/week) with a tool
6th class (3p and 5p/week)	December and June exams	• 1 period without a tool • 2 periods (3p/week) or 3 periods (5p/week) with a tool
7th class (3p and 5p/week)	Prebac and Baccalaureate	• 1 hour without a tool • 2 hours (3p/week) or 3 hours (5p/week) with a tool
6th and 7th class (further level 3p/week)	Each semester one B-test over 2 periods	• minimum 1 period without a tool (1st semester) or with a tool (2nd semester)
	Baccalaureate	• oral exam with or without a tool (the indication is given by the teacher separately on each subject)

2. <u>Europees Baccalaureaat: eindexamen Wisk-3</u>



3. <u>Europees Baccalaureaat: eindexamen Wisk-5</u>



- Voorbeeld met rekenmachine:
  Een klassieke type-vraag, maak een volledig functieonderzoek is vervangen door een reeks vragen i.v.m. een familie van functies.

EUROPEES BACCALAUREAAT 2012: WISKUNDE 5 PERIODEN

DEEL B		
VRAAG B1 ANALYSE	**Blz. 1/5**	**Punten**
Gegeven is de familie van functies g_n, gedefinieerd door $$g_n(x) = \frac{e^{nx}}{1+e^x}$$, voor alle gehele getallen $n \geq 0$.		
a) Schets de grafiek van g_0.		2 punten
b) Toon aan dat $g_0(x) = g_1(-x)$ voor alle reële getallen x.		
Geef de meetkundige betekenis van deze betrekking en schets de grafiek van g_1 in hetzelfde assenstelsel als de grafiek van g_0.		2 punten
c) Toon aan dat de krommen $y = g_n(x)$ een gemeenschappelijk punt hebben en geef de coördinaten van dat punt.		2 punten
d) Onderzoek, voor $n \geq 2$, het verloop van de functie $g_n(x)$ als $x \to -\infty$ en als $x \to +\infty$, en geef de vergelijking van de asymptoot.		3 punten
e) Bereken, voor $n \geq 2$, de afgeleide $g_n'(x)$ en geef aan of g_n stijgend of dalend is.		3 punten
f) In het punt met $x = 0$ heeft de grafiek van g_n een raaklijn die parallel is met de lijn $9x - 4y - 1 = 0$.		
Bereken n en geef een vergelijking van deze raaklijn.		3 punten
g) Bereken de oppervlakte van het vlakdeel ingesloten door de grafieken van g_0 en g_1 tussen de lijnen met vergelijkingen $x = -1$ en $x = 1$.		3 punten
h) Voor de gehele getallen $n \geq 0$ is gegeven een rij I_n gedefinieerd door $I_n = \int_{-1}^{0} g_n(x)\, dx$.		
Bereken met de rekenmachine de kleinste waarde van n waarvoor $I_n \leq 0{,}11$.		2 punten

- Voorbeeld: basiscompetenties (zonder rekenmachine)

EUROPEES BACCALAUREAAT 2015: WISKUNDE 5 PERIODEN

DEEL A		
	Blz. 1/2	**Punten**
1) Bereken $\int_1^e 2 \cdot \frac{\ln(x)}{x}\, dx$.		4 punten
2) In een driedimensionale ruimte zijn gegeven de bol S: $(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = \frac{1}{3}$ en het vlak π: $x - y + 5z = 1$.		
Toon aan dat π een raakvlak is van bol S.		4 punten

3) In een bepaald land wordt 80 % van de mannen tenminste 70 jaar oud en 50% van de mannen tenminste 80 jaar oud. Bereken de kans dat een man die zojuist zijn 70ste verjaardag heeft gevierd tenminste 80 jaar oud zal worden.	4 punten
4) De rij u_n is gegeven door $u_n = 3 \cdot n + (-1)^n$, met $n \geq 1$. Is deze rij stijgend?	4 punten

4. <u>Europees Baccalaureaat: Eindexamen Wiskunde Verdieping (Wisk 8)</u>

- Verdieping Wiskunde (Wisk 8) is een verplicht en een van de drie mondelinge examens.
- De duur van het examen bedraagt 20 minuten evenals de voorbereidingstijd.
- De vragen worden door de leraar opgesteld.
- Het cijfer wordt bepaald door de leraar samen met de aanwezige externe examinator.
- Voorbeeld: Mondeling Bac Wisk-8 / 2015 (met rekenmachine).

1. GONIOMETRIE

a. Geef de **definitie** van Bgsin(x) en leg het verband uit met de sinus-functie.
Leg uit m.b.v. de grafieken van de functies.

b. Gebruik een eigenschap van **cyclometrische functies** en los stap voor stap de volgende vergelijking op in $\mathbb{R}$:
$Bg\tan x + Bg\cot x = Bg\cos x + Bg\cos\left(x\sqrt{3}\right)$

2. ALTERNERENDE REEKSEN

a. Formuleer de **Stelling van Leibniz** voor *alternerende* reeksen.

b. Welke van de volgende reeksen **voldoet** aan de voorwaarden van de stelling ?

- $\sum \frac{(-e)^{n+1}}{9^{n/2}}$
- $\sum \frac{(-1)^n \pi^{n+1}}{e^n}$
- $\sum \frac{e^{n+1}}{-\pi^n}$

c. Als je de reeks (waarop de stelling van toepassing is) afbreekt na de term met n = 4
bereken dan een **bovengrens** van de gemaakte **fout**.

5. <u>Voorbereiden en opstellen van de examenvragen</u>

- September-November: een aantal scholen krijgt de taak om een compleet schriftelijk examen voor te bereiden, compleet met modeloplossingen, zowel voor Wisk-3 als Wisk-5.

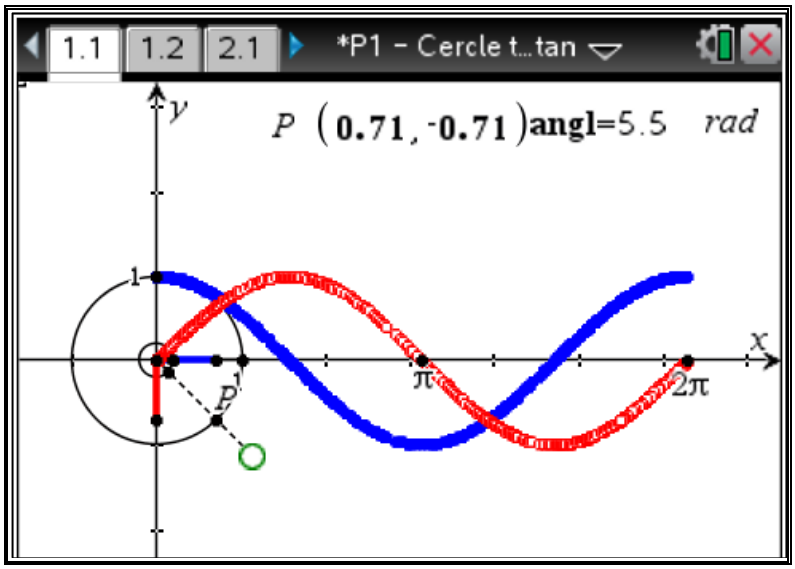
- Het examen moet door de leraren vertaald worden in de drie werktalen: Engels, Frans en Duits.
- December – Februari : keuze van de vragen door externe experts.
- Juni: Volledig 100 % geharmoniseerd centraal eindexamen = Europees Baccalaureaat. Alle leerlingen krijgen op hetzelfde moment op alle Europese Scholen dezelfde vragen, vertaald in alle talen van de EU.

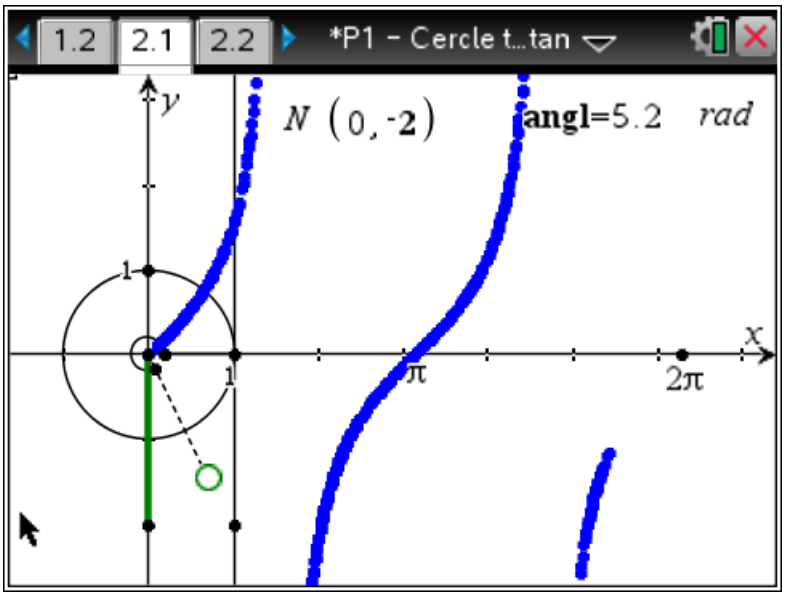
6. <u>Correctie van het examen</u>
   - En eerste correctie door de leraar en een tweede correctie door een externe examinator.
   - Het eindcijfer is het gemiddelde van deze twee cijfers.
   - Er is een derde correctie indien het verschil meer dan 2 punten op 10 bedraagt.

7. <u>Het eerste vernieuwde wiskunde BAC – 2012</u>
   - Probleem: het gemiddeld cijfer was 1.4 lager (op een schaal van 10) dan het gemiddelde van de 5 vorige jaren.
   - Probleemanalyse:
     - De invoering van de rekenmachine en de korte tijd om er mee te leren omgaan (2 jaar) worden als belangrijkste reden aangegeven om het lagere gemiddelde cijfer te verklaren.
     - Maar er zijn zeker ook andere factoren die een rol gespeeld hebben.
       - geen keuzevragen meer
       - deel zonder rekenmachine
   - Oplossing: + 1.4 /10 extra voor elke leerling in Wisk-5.

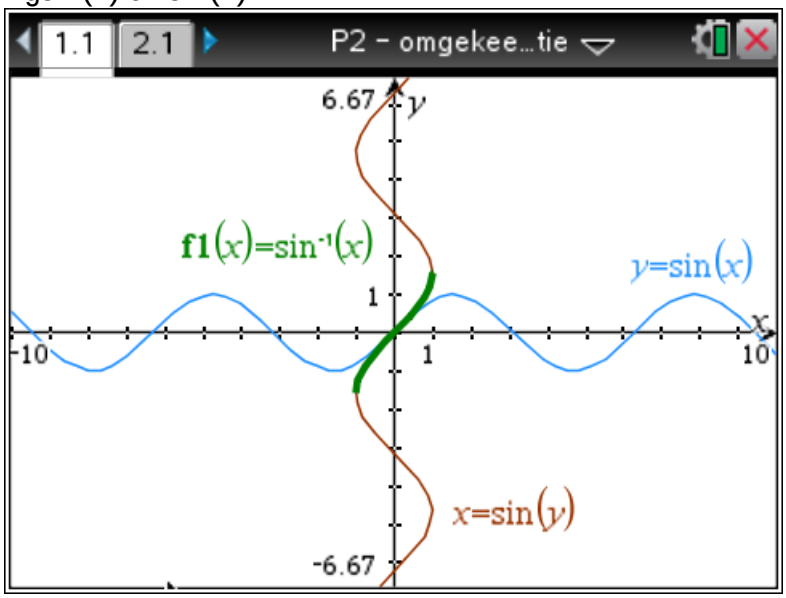
6. Didactisch : voorbeelden en ervaringen met CAS in de klas

1. <u>Introduceren, onderzoeken, ontdekken en illustreren van (nieuwe) begrippen</u>
   De leefwereld van de leerlingen is sterk visueel georiënteerd. Bestaat er niet voor zowat alles een Youtube filmpje? De kracht van CAS gebruiken om het wiskundeonderwijs interessanter te maken en de leerlingen beter te motiveren.
   - Goniometrie: *de goniometrische cirkel en de goniometrische functies*

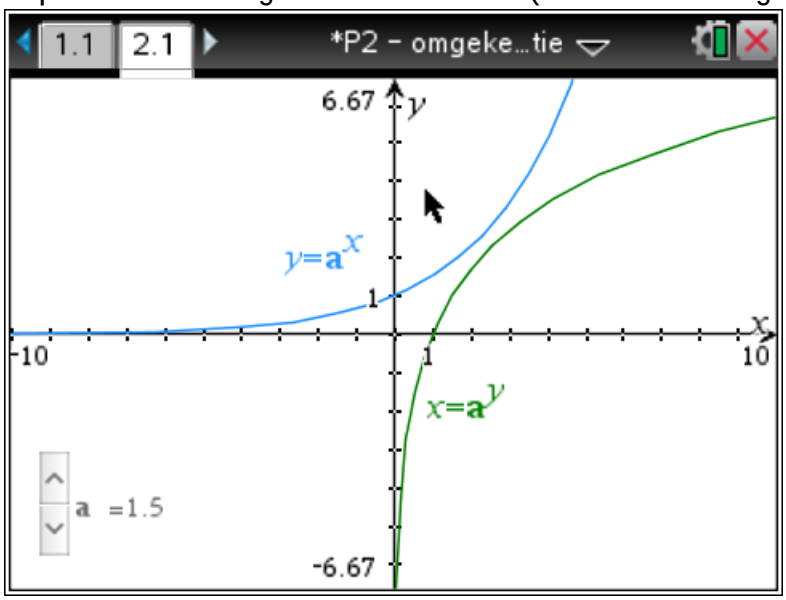




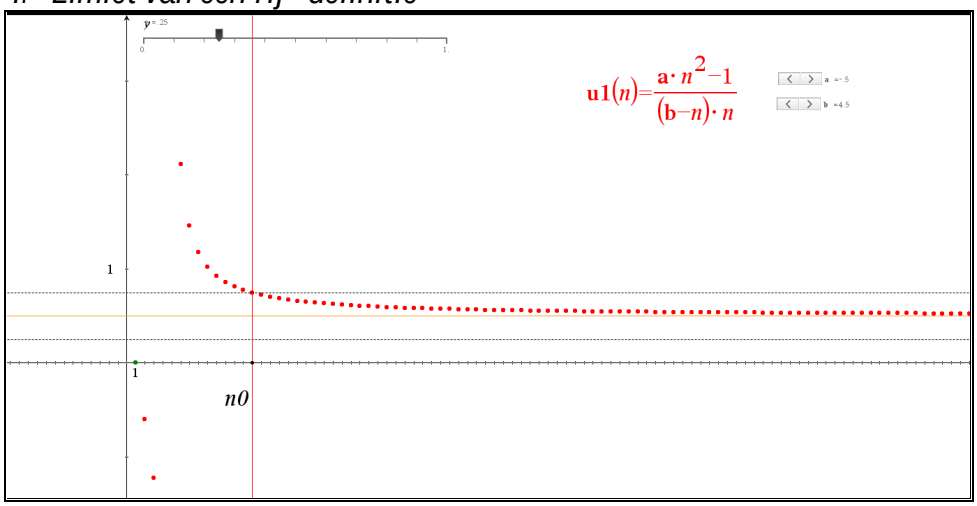
- *Omgekeerde functie*:
  i. Bgsin(x) en sin(x)



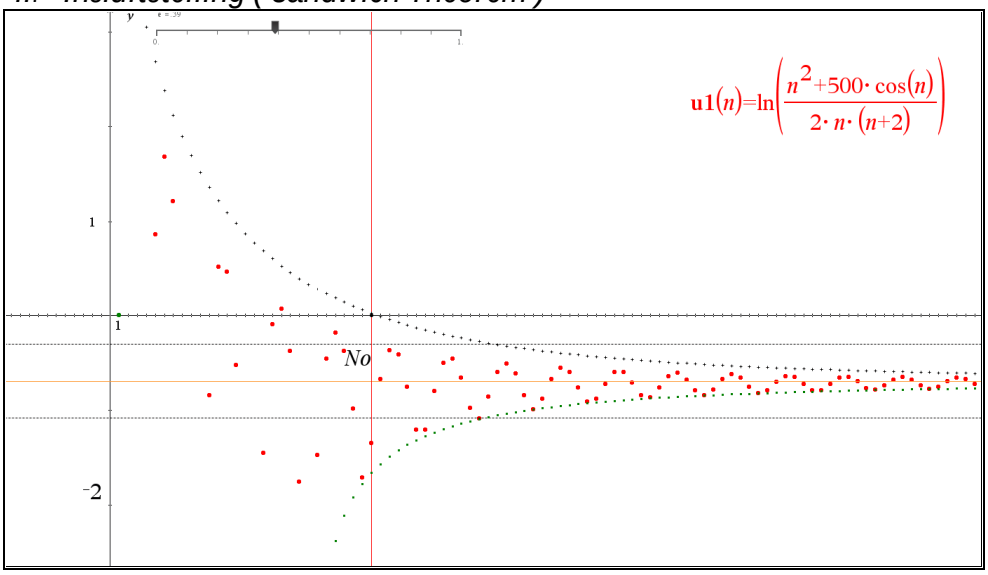
  ii. Exponentiële en logaritmische functie (met slider voor grondtal).



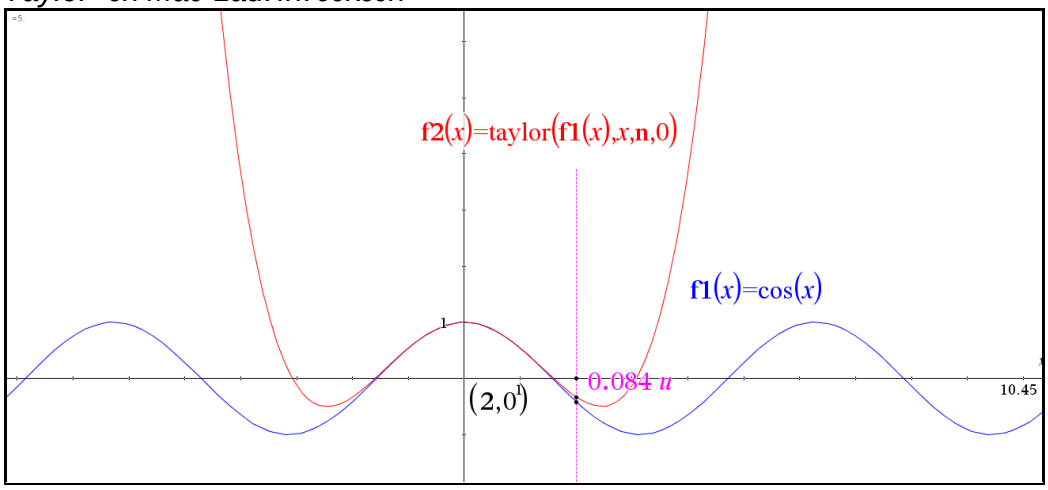
- *Rijen:*
  - *i. Limiet van een rij - definitie*



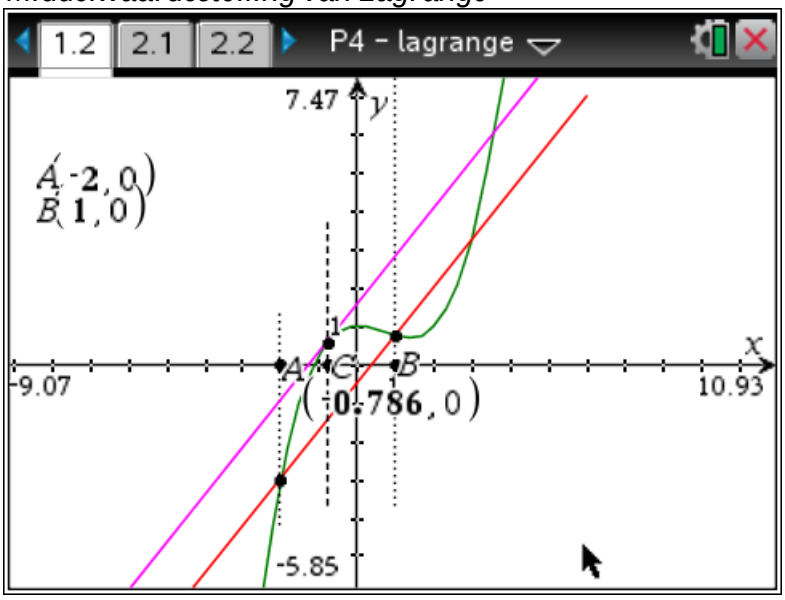
  - *ii. Insluitstelling (Sandwich Theorem)*



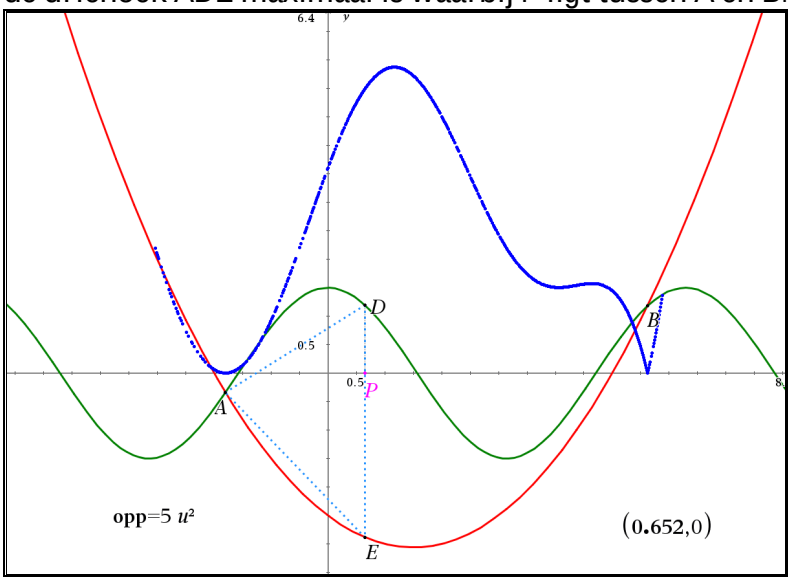
- *Taylor- en Mac-Laurinreeksen*



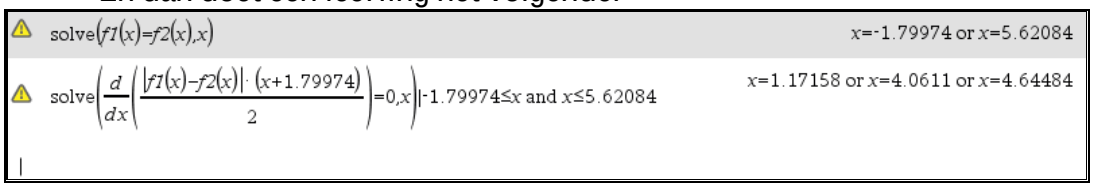
- *Middelwaardestelling van Lagrange*



- *Minimum en Maximum problemen*
  Bepaal de coördinaten van het punt P op de X-as, zodat de oppervlakte van de driehoek ADE maximaal is waarbij P ligt tussen A en B.



En dan doet een leerling het volgende:



Dit levert meteen een aantal interessante vragen op:

a. *Hoe interpreteer je de resultaten gegeven door de rekenmachine ?*
b. *Wat als je geen grafische voorstelling gemaakt hebt ?*
c. *Is de redenering correct ?*
d. *Je zou kunnen zeggen dat deze leerling het probleem begrepen heeft en het kan oplossen. Klopt dat ?*

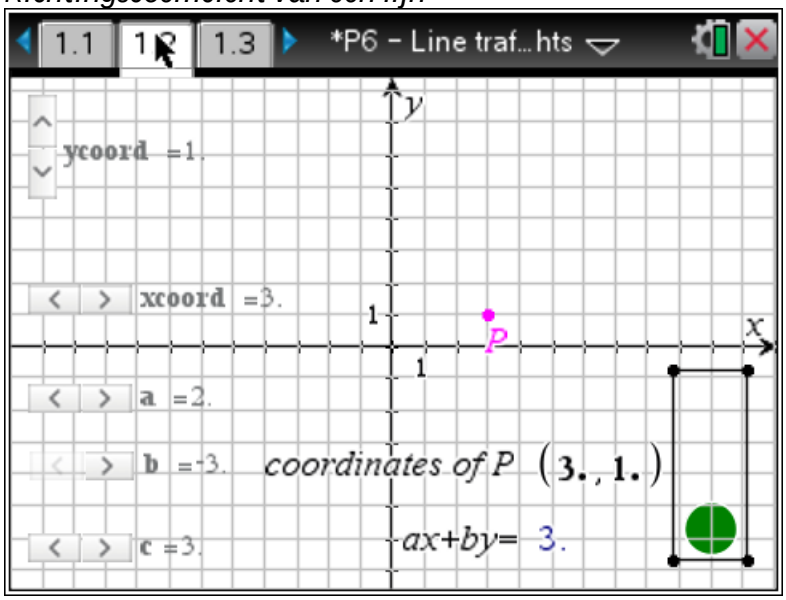
e. *Is het compleet ? Is dit voldoende als probleemoplossing, als mathematische redenering ?*
f. *Is één enkele goed doordachte CAS-opdracht voldoende als mathematische oplossing van een probleem ?*
g. *In hoeverre mogen leerlingen gebruik maken van "TI-language" bij het noteren van een mathematische oplossing ?*
h. *Een probleem kan m.b.v. CAS vaak op meerdere manieren opgelost worden. In dit geval zou het ook puur grafisch kunnen (zie voorbeeld). Hoe de vraag goed en duidelijk formuleren ?*

Tijdens trainingssessies voor collega's wordt uitgebreid aandacht besteed aan dit soort vragen. Het is verre van vanzelfsprekend om alle neuzen in dezelfde richting te krijgen. Opleiding en nationale tradities spelen een belangrijke rol. Ook hier "Work in Progress".

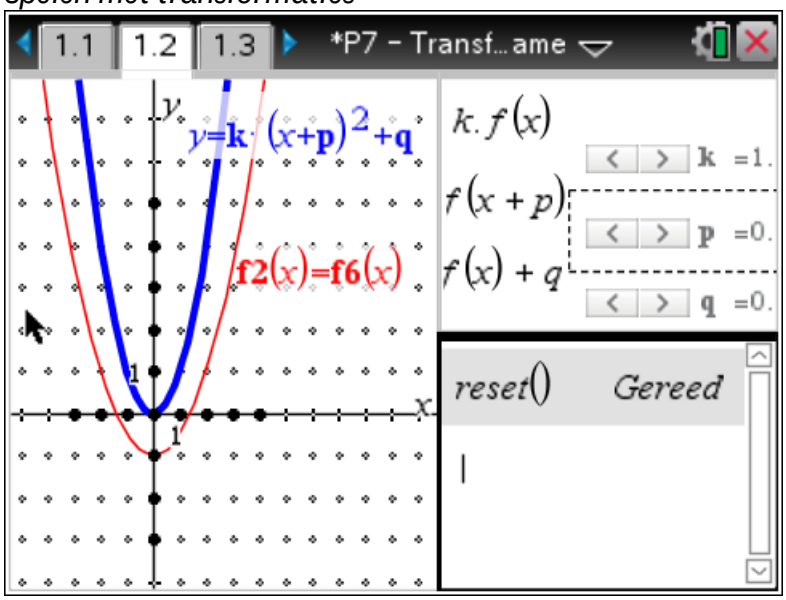
2. <u>Oefenen met CAS</u>

Eerst de eigenschappen ontdekken, daarna toepassen en inoefenen.

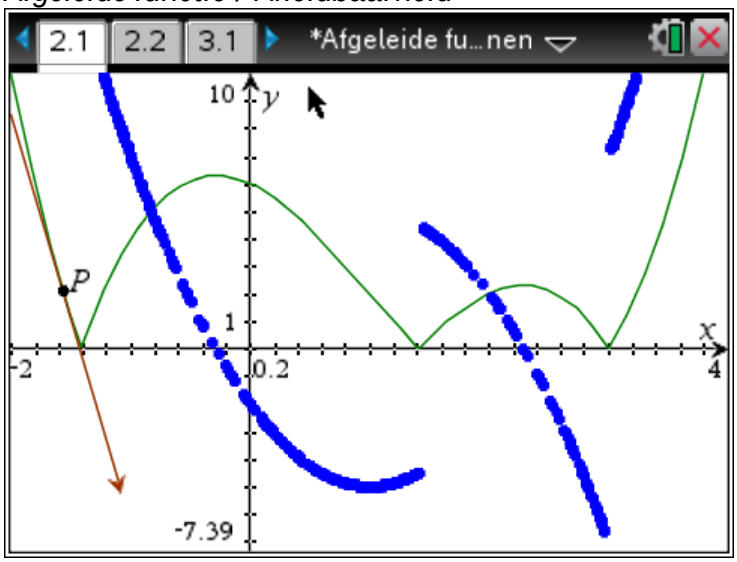
- *Richtingscoëfficiënt van een lijn*



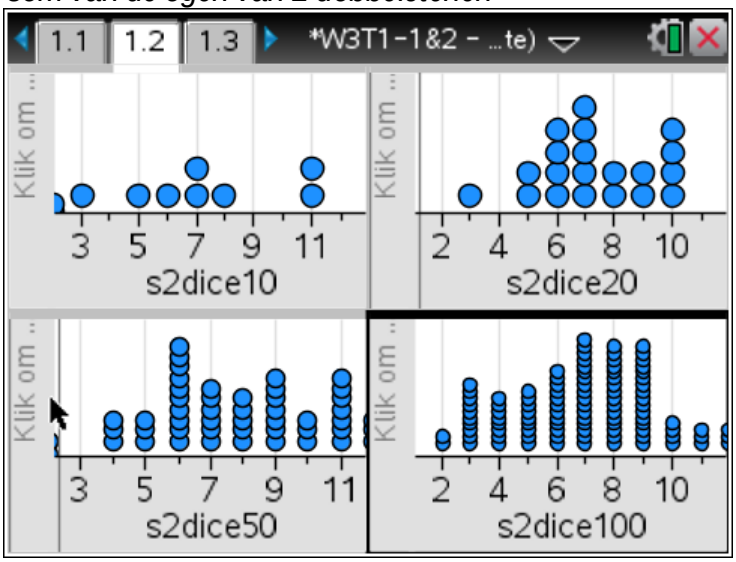
- *Spelen met transformaties*



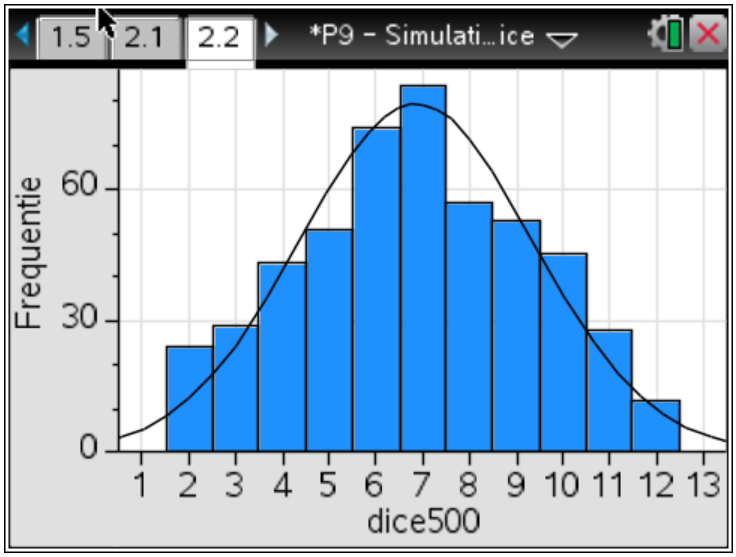
- *Afgeleide functie / Afleidbaarheid*



3. <u>Simulaties</u>
   - *Som van de ogen van 2 dobbelstenen*



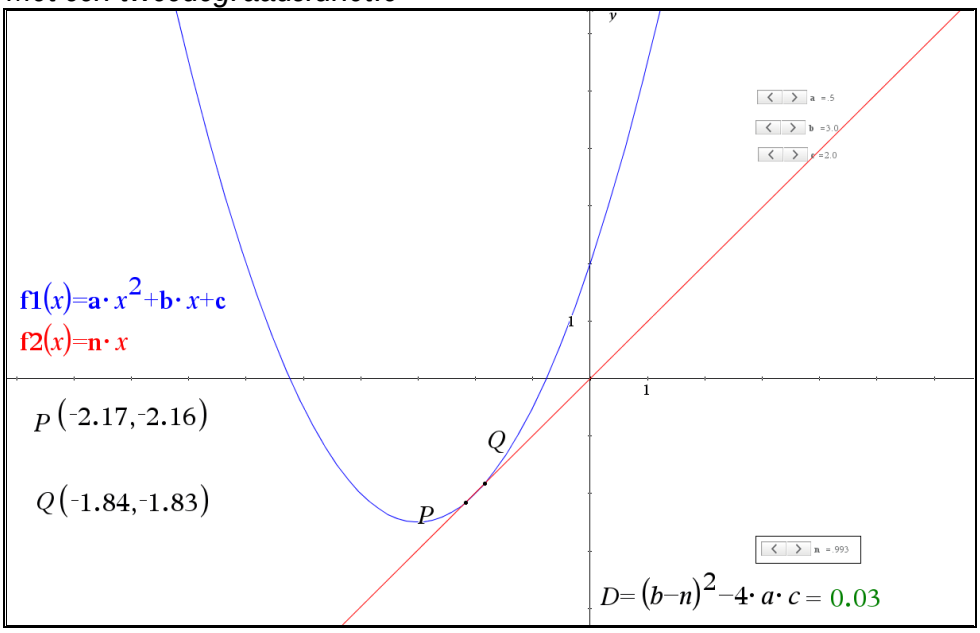
   - *Som van de ogen van 2 dobbelstenen en de normale verdeling*



4. <u>Problem solving</u>

Probleem: *bepaal een vergelijking van alle raaklijnen aan een gegeven functie die door de oorsprong gaan evenals de raakpunten.*

- *Met een tweedegraadsfunctie*



– find the x–coordinate of the points of intersection

$p(x)=l(x) \blacktriangleright 0.5\cdot x^2+3.\cdot x+2.=x$

$\text{solve}(p(x)=l(x),x) \blacktriangleright x=-2.$

– abscisses of the contact points

$\frac{-b+n}{2\cdot a}|n=-(2\cdot\sqrt{a\cdot c}-b) \blacktriangleright -2.$

and

$\frac{-b+n}{2\cdot a}|n=2\cdot\sqrt{a\cdot c}+b \blacktriangleright 2.$

–ordinates of the contact points

$n\cdot x|n=-(2\cdot\sqrt{a\cdot c}-b)$ and $x=\frac{-\sqrt{a\cdot c}}{a} \blacktriangleright -2.$

and

$n\cdot x|n=2\cdot\sqrt{a\cdot c}+b$ and $x=\frac{\sqrt{a\cdot c}}{a} \blacktriangleright 10.$

- *Met een sinusfunctie*
  De vorige methode met twee samenvallende snijpunten is hier uiteraard niet bruikbaar.
  Het probleem kan echter vrij eenvoudig herleid worden tot een “fixed-point problem”.

Problem 2 – tangent line to y=sin(x) through the origin

$f(x):=\sin(x)$

tangent line in x=a to sin(x)

$y:=\text{tangentLine}(f(x),x,a) \blacktriangleright \cos(a)\cdot x-a\cdot\cos(a)+\sin(a)$

tangent in x=a goes through the origin (0,0)

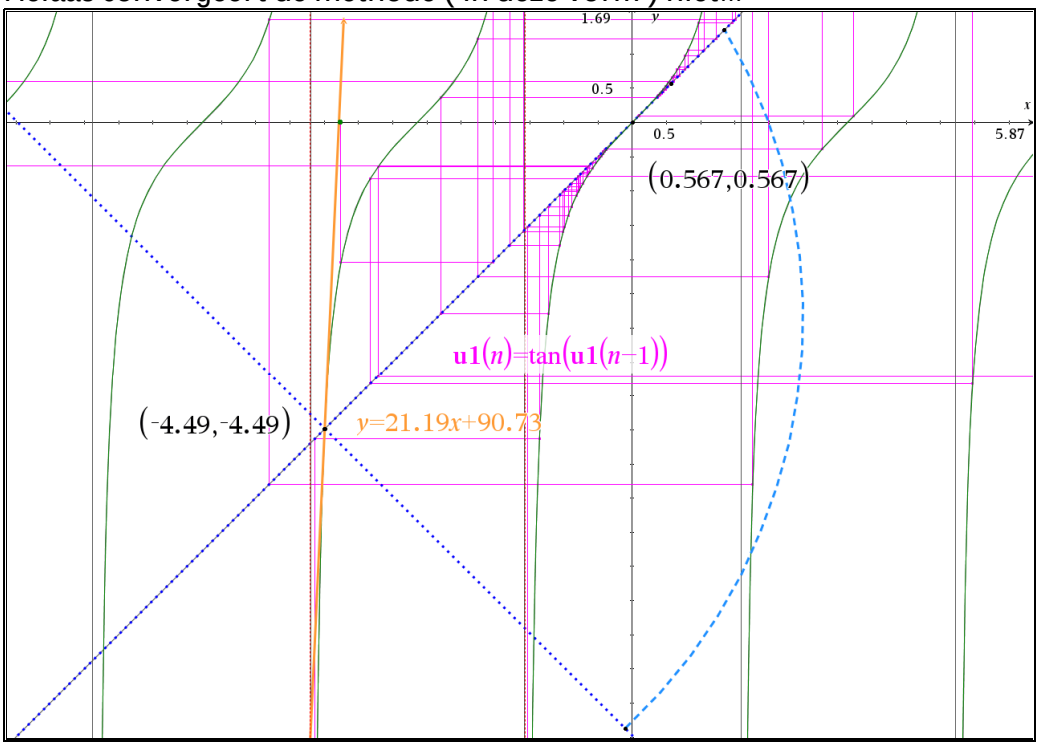
$\textbf{condition1}:=y=0|x=0 \blacktriangleright \sin(a)-a\cdot\cos(a)=0$

$-a\cdot\cos(a)=-\sin(a)$

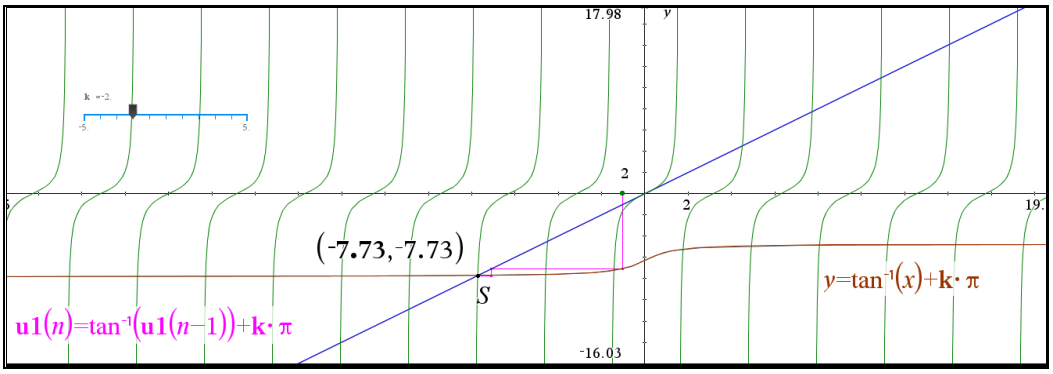
$a=\tan(a)$ ⚠

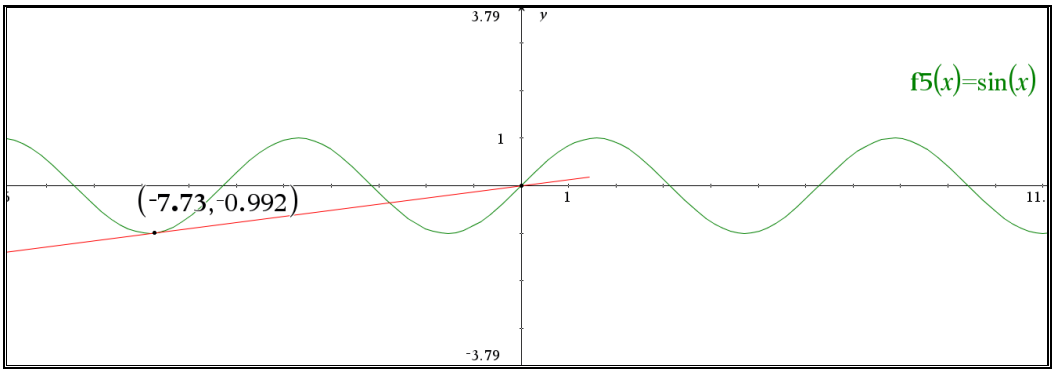
to find a we need to solve the equation $\tan(a)=a$

Helaas convergeert de methode (in deze vorm) niet...



Na omzetting naar een Bgtan(x) vinden we wel alle oplossingen.





5. <u>Meerdere applicaties</u>
    - Een niet te onderschatten eerste stap is het zorgvuldig uitleggen van het verschil tussen een TNS bestand, een opgave, een pagina en een variabele. Dat verklaart het gedrag van de variabelen en hoe de interactiviteit van de applicaties werkt.
    - De kracht van de CAS rekenmachine of software laat zich pas ten volle zien bij het integreren van de verschillende applicaties. Zie voorbeelden hierboven: de applicatie Notities en Grafieken of Spreadsheet en grafieken, etc.
    - Een klassiek functie-onderzoek kan één keer in de applicatie notities gemaakt worden en daarna volstaat het om het functievoorschrift te wijzigen en klaar is kees.
    - De applicatie Notities is bijzonder handig bij het ontwikkelen van oefenmateriaal en het bedenken van examenvragen.
    - Numerieke methodes: spreadsheet en/of zelf een programma schrijven.
      Dit onderwerp maakt deel uit van de wisk-8 syllabus. De TI-Nspire CAS CX leent zich ook uitstekend tot het zelf programmeren van numerieke algoritmes.
    - The sky is the limit…

7. Valkuilen en pijnpunten bij het gebruik van CAS in de Europese Scholen

1. <u>Press-to-Test</u>
    - Is een essentieel eigenschap van de gekozen rekenmachine om gelijk omstandigheden voor alle leerlingen te garanderen.
    - Ook dit aspect moet voldoende geoefend worden in klas, bijvoorbeeld bij kleine testen.
    - In de Europese Scholen is er een voorgeschreven procedure voor het gebruik van de TI-Nspire CAS bij examens:
        1. Controle van de rekenmachines bij het binnenkomen van het examenlokaal: rekenmachine moet aan staan en in de normale modus.
        2. Leerlingen activeren de Press-to-Test modus.
        3. Controle of alle machines effectief in die modus staan.
    - Elke school beschikt over een flink aantal reserve machines.
2. <u>Perceptie</u> van ouders en leerlingen: als er een probleem is met het examen, dan is het altijd de schuld van de rekenmachine.

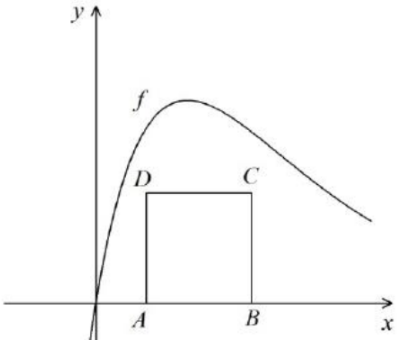
3. <u>De kwaliteit van de examenvragen en de exacte formulering van de opgave</u>

B3 – 5 points **S7P5 – BAC 2013 – B1 c)**

DE – Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 6x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
Das Quadrat $ABCD$ liegt im ersten Quadrant.

Dabei liegen die Ecken A und B auf der x-Achse und jede der Ecken C und D liegt auf dem Schaubild oder unterhalb des Schaubilds von f.
Untersuchen Sie mit Hilfe Ihres Rechners, ob ein solches Quadrat mit der Seitenlänge 3 existiert.

EN – Consider the function $f(x)$ defined by $f(x) = 6x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.
A square $ABCD$ is in the first quadrant
The vertices A and B are on the x axis and each of the vertices C and D are found on or below the graph of f.
Use the calculator to determine if a square of side length 3 exists.



Welk cijfer geef je een leerling die antwoordt: ja, hij bestaat ?

4. <u>De afhankelijkheid van één bedrijf</u>
   - Dat alle leerlingen dezelfde rekenmachine met dezelfde softwareversie hebben is een conditio sine qua non voor een beheersbaar gebruik van CAS in de klas.
   - Een keer een bepaald merk ingeburgerd is, is veranderen niet zo eenvoudig.
   - Sommige ouders vinden de rekenmachine te duur.
   - Inclusief de periode van het pilootproject hebben we drie verschillende versies van de rekenmachine gebruikt. Gelukkig is het nu stabieler.
   - Alle software bevat bugs, ook die van TI. Daar moeten we leren mee leven. Het wordt wel heel vervelend als dit consequenties heeft voor het eindexamen, zoals dit jaar.
     Europees Baccalaureaat Wisk-3 - 2015

À 22h00, la température d'une pièce est de 20°C. À cette heure, on éteint le chauffage dans la pièce.

La température $f(t)$ de la pièce après 22h00 est donnée par

$$f(t) = 9\mathrm{e}^{-0{,}12t} + 11$$

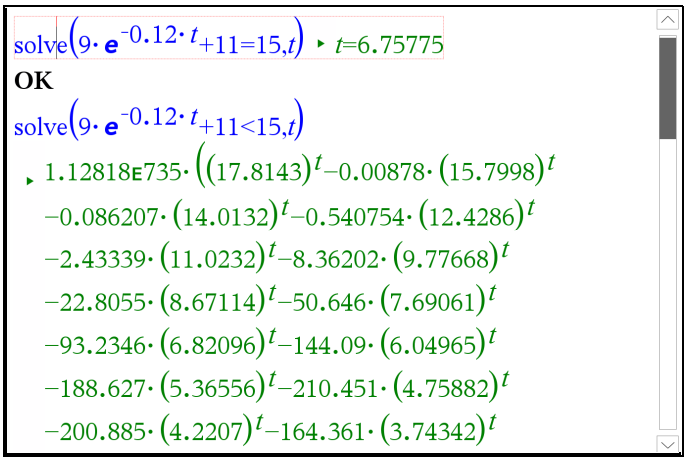
où t est le nombre d'heures après 22h00 et $f(t)$ est exprimée en °C.

a) Calculer la température à minuit et à 7h00 le lendemain matin.

b) Déterminer $f'(t)$ et démontrer que f est une fonction décroissante.

c) Déterminer $f'(2)$.
Que nous révèle ce résultat à propos de la température de la pièce ?

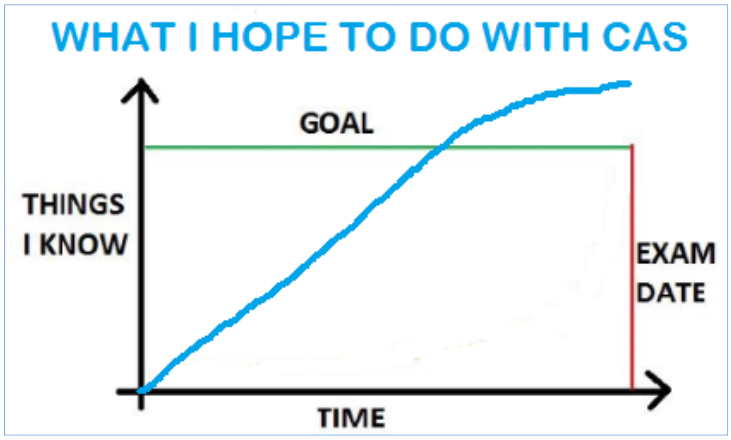
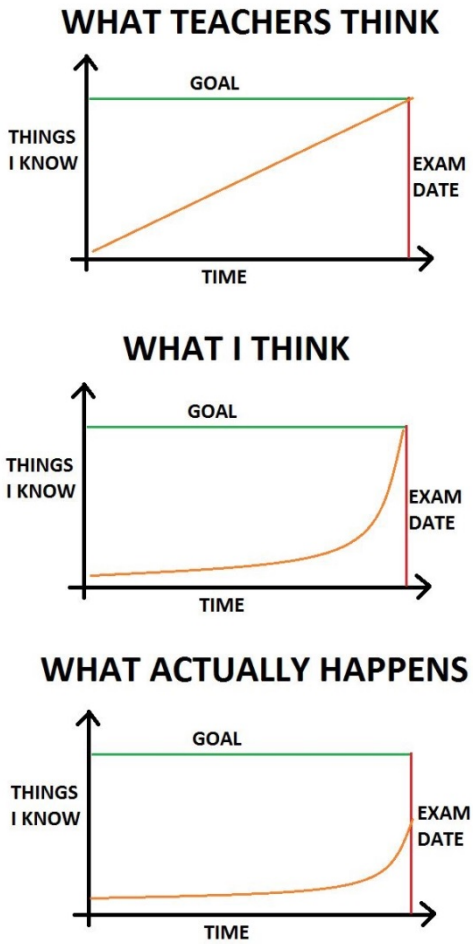
d) À quelle heure de la matinée la température tombera-t-elle sous 15°C ?



5. <u>Voorbeelden, toepassingen en oefeningen</u>
   - In veel talen zijn er geen goede handboeken en wiskundemethodes voorhanden voor het gebruik van CAS in het wiskundeonderwijs.
   - Veel materiaal moet je zelf ontwikkelen of vertalen.
   - Er is heel veel beschikbaar online, maar het kaf van het koren scheiden is monnikenwerk.
6. <u>Vorming</u>
   - Permanente vorming van de leraren is een noodzaak. De 9-jaarsregel in de Europese Scholen maakt dat nog een stuk lastiger.
   - Leerlingen moeten voldoende vertrouwd zijn met het technologisch hulpmiddel. Dat kan enkel bij regelmatig gebruik in de klas. Er is ook hier sprake van grote diversiteit.
7. <u>De 'lelijke' getallen</u>
   Het kan niet de bedoeling van het gebruik van CAS zijn om te pas en te onpas gebruik te maken van grote irrationale getallen of getallen met heel veel cijfers na de komma. Evenzeer moet het gebruik van reële data ('lelijke getallen', zoals een van mijn leerlingen ze omschreef) ons niet afschrikken.
8. <u>Aansluiting bij het vervolgonderwijs</u>
   Niet vanzelfsprekend. Lang niet alle universiteiten in alle landen van de EU omarmen CAS.
   Voorbeeld: Heeft het nog zin om de omzetting van een willekeurige normale verdeling naar een standaard normale te behandelen ? CAS weet er wel raad mee. Maar veel universiteiten houden het bij de tabellen en de klassieke benadering.
9. <u>De unieke modeloplossing</u>
   Het gebruik van CAS veronderstelt een andere opstelling van de docent t.o.v. de toepassing ervan door de leerling. Het idee van de enig mogelijke, klassieke oplossingsmethode moet verlaten worden. Heel vaak zijn er door de beschikbare rekenkracht en applicaties, meerdere en heel verschillende oplossingsmethodes voorhanden.
   Voorbeeld: *Ruimtemeetkunde – de afstand van een punt tot een lijn berekenen.*
   - Je gebruikt gewoon de formule.
   - Of via de loodrechte projectie van het punt op de lijn.
   - Of je zoekt het minimum van de afstandsfunctie tussen het gegeven punt en een willekeurig punt op de lijn. Etc.
10. <u>CAS is een hulpmiddel, geen doel op zich.</u>

8. “Meer wiskunde, minder rekenwerk” – halen we de doelstelling ?

- De tijd (en wetenschappelijk onderzoek ?) zal het uitwijzen.
- Leerlingen moeten weer zelfstandig, zonder rekenmachine leren rekenen: werken met breuken, machten, etc. en dat is een goede zaak. Dat het lastig is bewijzen de relatief lage gemiddelde cijfers bij het gedeelte van het eindexamen zonder rekenmachine.
- Het omschakelen van een heel klassieke syllabus waar zelfs het gebruik van een grafische rekenmachine verboden was, naar een syllabus waar CAS een essentiële hoeksteen vormt, is een boeiend en verrijkend proces.
- Er zijn al veel stappen in de goede richting gezet maar het blijft “Work in Progress”.

Tenslotte…

Het plaatje hiernaast tref je tijdens examenperiodes vaak aan op social network sites. Zelf heb ik de ambitie – en dat hou ik ook mijn studenten voor – om het anders te doen.