

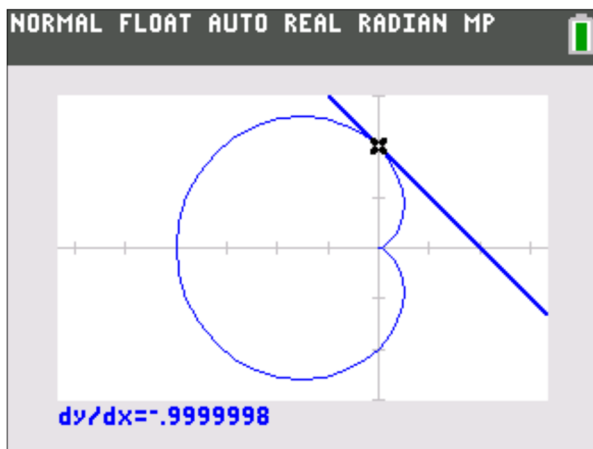
T³ VLAANDEREN

19^{de} T³ Vlaanderen Symposium Leuven

15 oktober 2016

Haal meer uit je TI-84

Philip Bogaert



NORMAL FLOAT AUTO $\alpha+bi$ DEGREE MP

```
PROGRAM: DRIEHOEK
: Menu("DRIEHOEK", "ZZZ", A, "
ZHZ", B, "HZH", C, "ZHH", D)
: Lbl A
: Input "ZIJDE A ", A
: Input "ZIJDE B ", B
: Input "ZIJDE C ", C
: (B2+C2-A2)/(2BC)→D
: (A2+C2-B2)/(2AC)→E
: (A2+B2-C2)/(2AB)→F
```

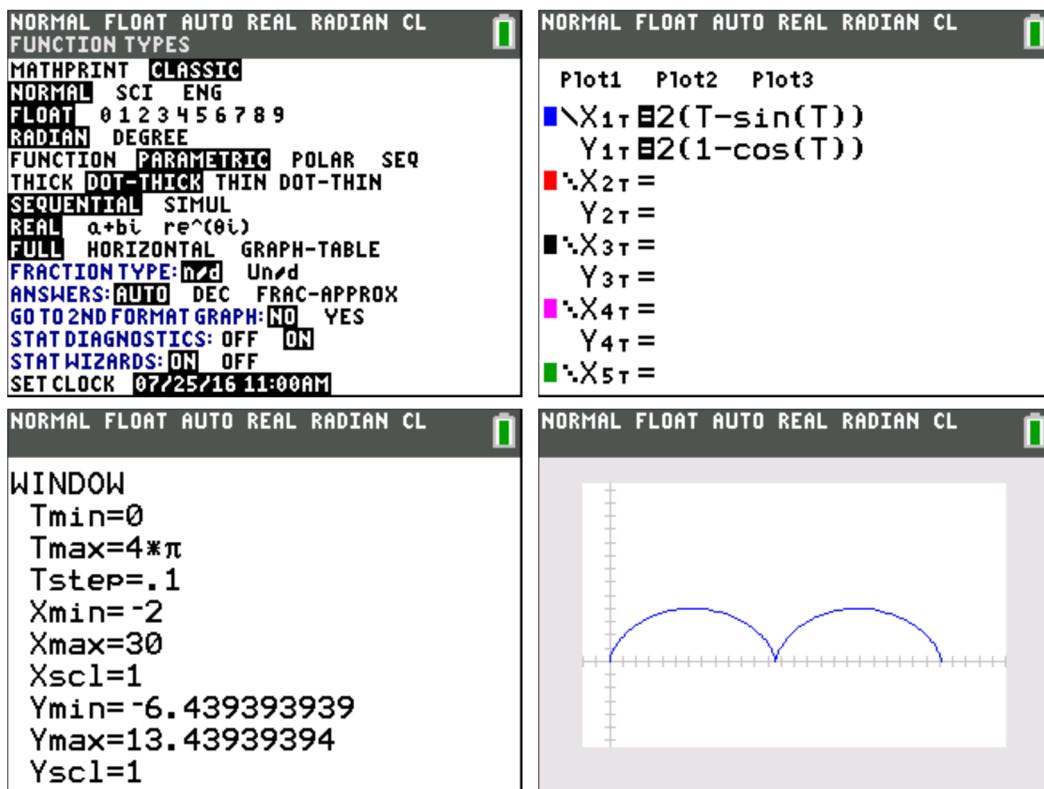
Haal meer uit je TI-84

1. parameterkrommen en poolcoördinaten

opgave 01

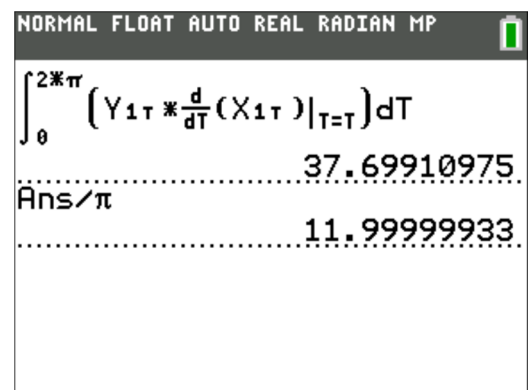
- (a) Bereken de oppervlakte van het deel van het vlak begrensd door de x-as en door een tak van de cycloïde met stelsel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



oppervlakte

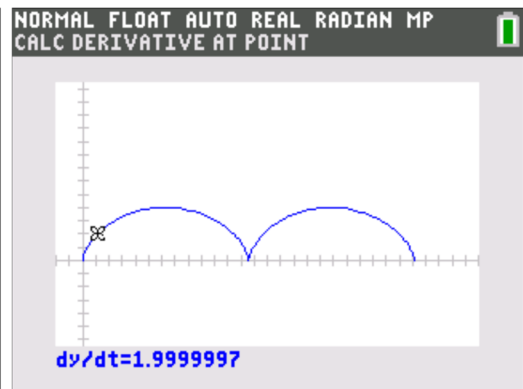
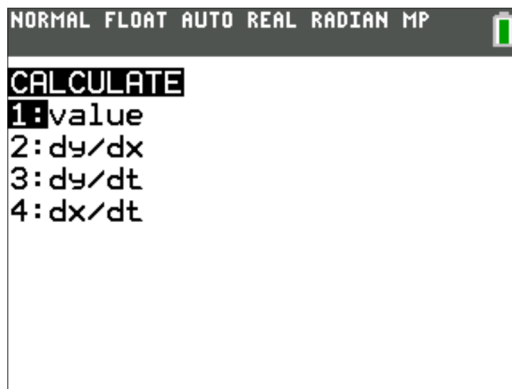
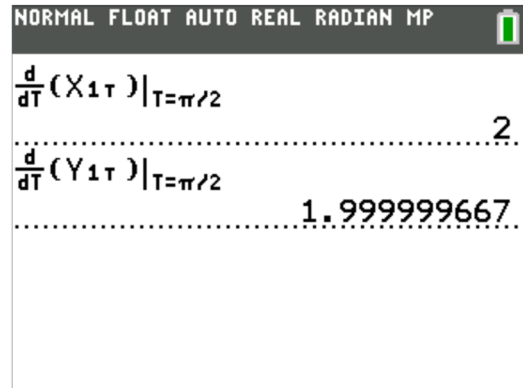
$$\begin{aligned} A &= \int_{x_1}^{x_2} y \, dx = \int_{x_1}^{x_2} 2(1 - \cos t) d(2(t - \sin t)) \\ &= 4 \int_{t_1}^{t_2} (1 - \cos t)^2 dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt \\ &= 12\pi \end{aligned}$$



(b) Bereken de afgeleide van x en y naar t voor $t = \pi/2$.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = (2(1 - \cos t))_{t=\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = (2 \sin t)_{t=\frac{\pi}{2}} = 2$$



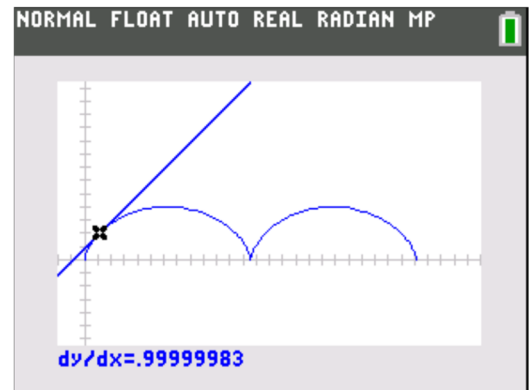
(c) Bepaal (en teken) de vergelijking van de raaklijn in het punt P voor $t = \pi/2$ aan deze cycloïde

$$x\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2(t - \sin t))_{t=\frac{\pi}{2}} = \pi - 2$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = (2(1 - \cos t))_{t=\frac{\pi}{2}} = 2$$

$$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{dy/dt}{dx/dt}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{2} = 1$$

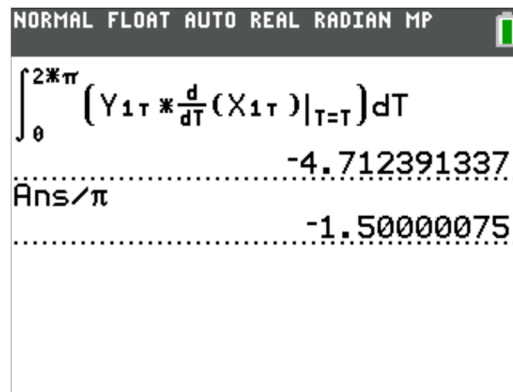
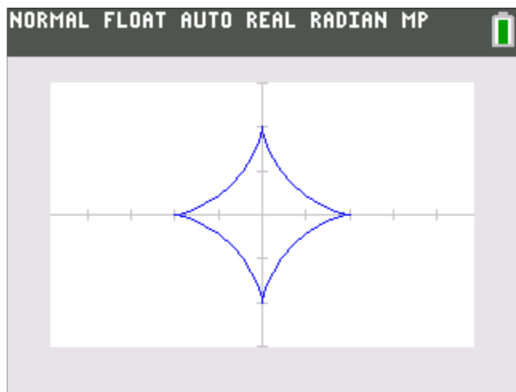
$$t \leftrightarrow y - 2 = 1(x - \pi + 2) \Leftrightarrow y = x - \pi + 4$$



opgave 02

Bereken de oppervlakte van het deel van het vlak begrensd door de regelmatige astroïde met stelsel parametervergelijkingen:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

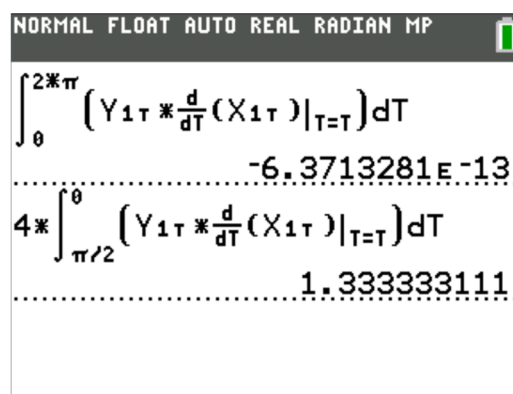
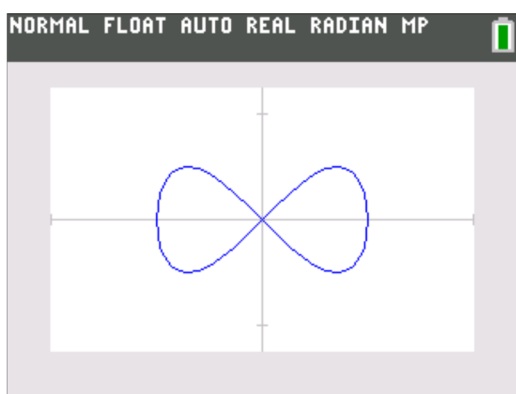


Hoe verklaar je het minteken?

opgave 03

Bereken de oppervlakte van het lemniscaat van Geronon met stelsel parametervergelijkingen:

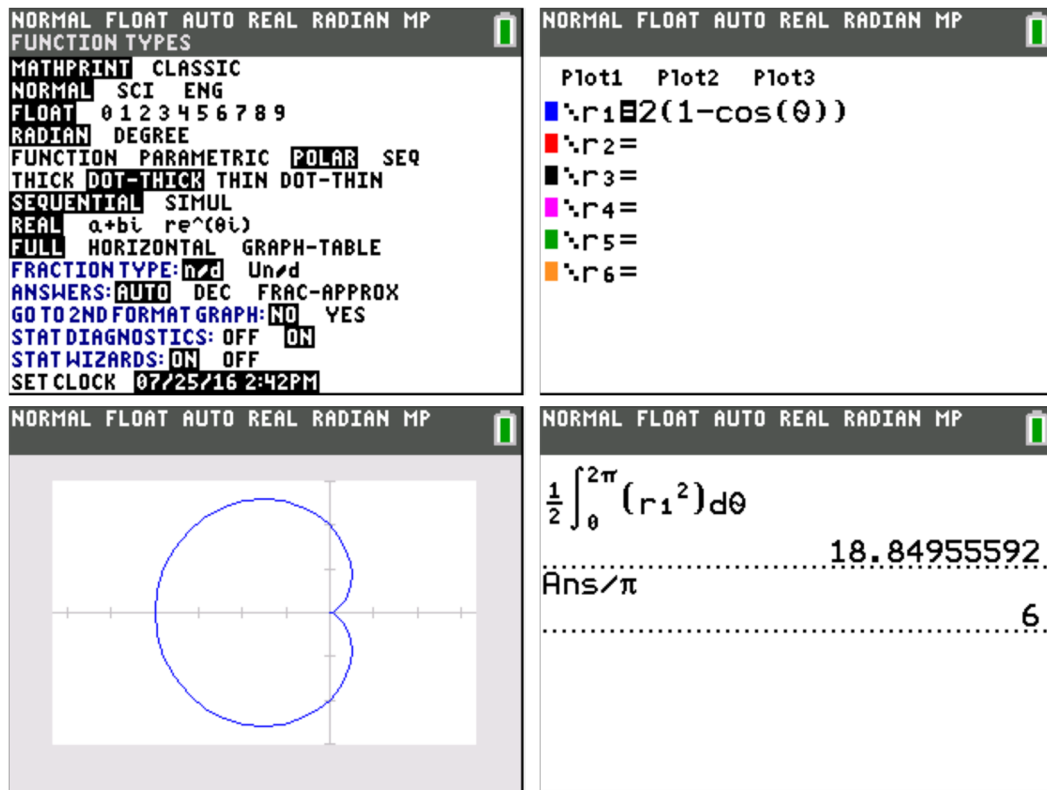
$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \cos t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$



Waarom is de eerste integraal nul?

opgave 04

- (a) Bereken de oppervlakte van het deel van het vlak begrensd door de kromme k (cardioïde) met poolvergelijking $r = 2(1 - \cos \theta)$



oppervlakte

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} r \, dr \, d\theta = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 \, d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2(1 - \cos \theta))^2 \, d\theta = 2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos \theta + \cos^2 \theta) \, d\theta \\
 &= 6\pi
 \end{aligned}$$

- (b) Zoek de cartesische vergelijking van de raaklijn aan de kromme k in het punt met poolhoek $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta} \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta}{\frac{dr}{d\theta} \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta} = \frac{r' \cdot \sin \theta + r \cdot \cos \theta}{r' \cdot \cos \theta - r \cdot \sin \theta}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$r = 2\left(1 - \cos\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

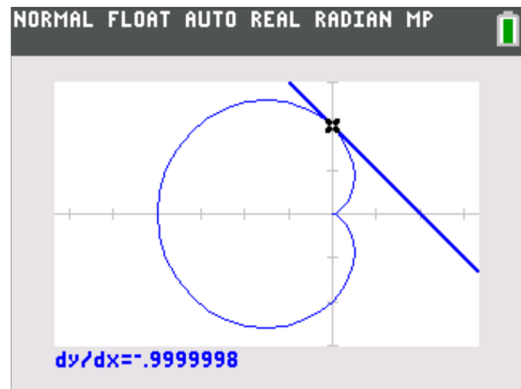
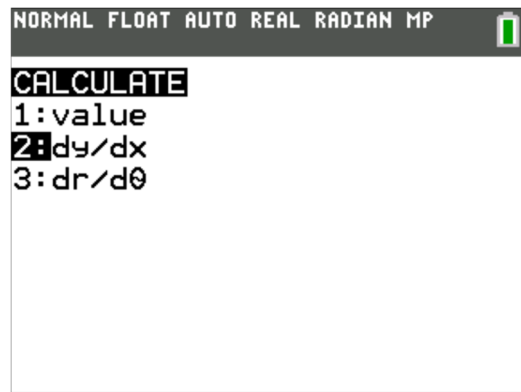
$$x = r \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$y = r \sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$r' = 2 \sin\frac{\pi}{2} = 2$$

$$y' = \frac{2.1 + 2.0}{2.0 - 2.1} = -1$$

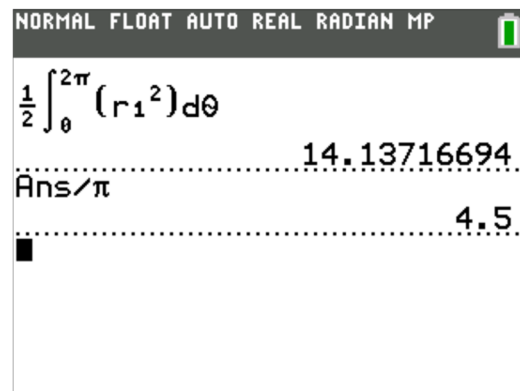
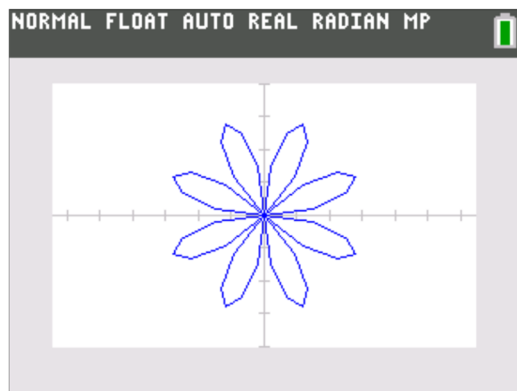
$$t \leftrightarrow y - 2 = -1(x - 0) \Leftrightarrow y = -x + 2$$



opgave 05

Bereken de oppervlakte van het achtbladige rozet met poolvergelijking

$$r = 3\sin(4\theta)$$




2. APP PlySmlt2

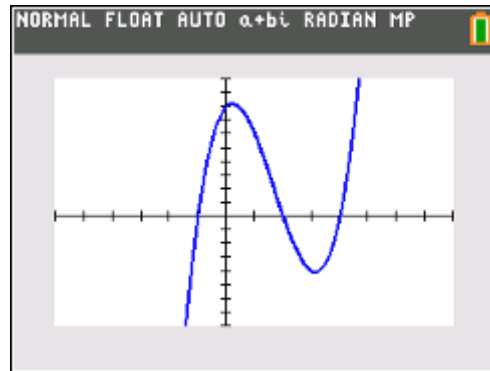
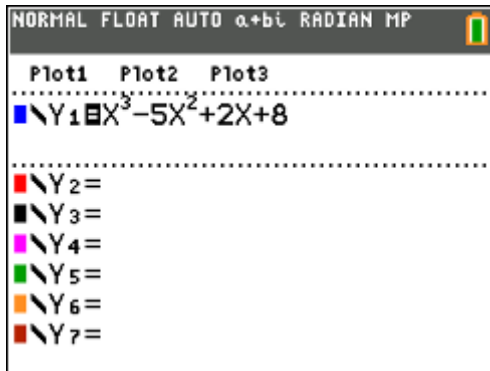
opgave 01

Splits volgende rationale breuk in partieelbreuken:

$$\frac{6x^2 - 2x - 38}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8}$$

noemer ontbinden:

<p>NORMAL FLOAT DEC a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p>  <p>TEXAS INSTRUMENTS</p> <p>POLYNOMIAL ROOT FINDER and SIMULTANEOUS EQUATION SOLVER 5.0.0.0089</p> <p>PRESS ANY KEY ©2006-2014 TEXAS INSTRUMENTS</p>	<p>NORMAL FLOAT DEC a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p> <p>MAIN MENU</p> <p>1: POLYNOMIAL ROOT FINDER 2: SIMULTANEOUS EQN SOLVER 3: ABOUT 4: POLY ROOT FINDER HELP 5: SIMULT EQN SOLVER HELP 6: QUIT APP</p>
<p>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p> <p>POLY ROOT FINDER MODE</p> <p>ORDER 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 REAL a+bi re^(θi) AUTO DEC NORMAL SCI ENG FLOAT 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 RADIAN DEGREE</p> <p>MAIN HELP NEXT</p>	<p>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p> <p>$ax^3+bx^2+cx+d=0$</p> <p>$1x^3- 5x^2+ 2x+ 8=0$</p> <p>a=1</p> <p>MAIN MODE CLEAR LOAD SOLVE</p>
<p>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p> <p>$1x^3- 5x^2+ 2x+ 8=0$</p> <p>x1=4 x2=2 x3=-1</p> <p>MAIN MODE COEFFSTORE F↔D</p>	<p>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PLYSMLT2 APP</p> <p>$1x^3- 5x^2+ 2x+ 8=0$</p> <p>STORE COEFF TO LIST STORE POLYNOMIAL TO Y= STORE ROOTS TO LIST x3=-1</p> <p>QUIT</p>



besluit:

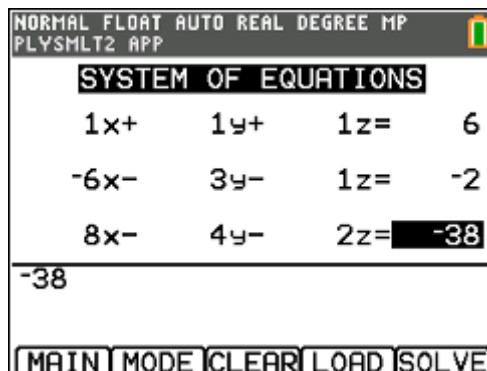
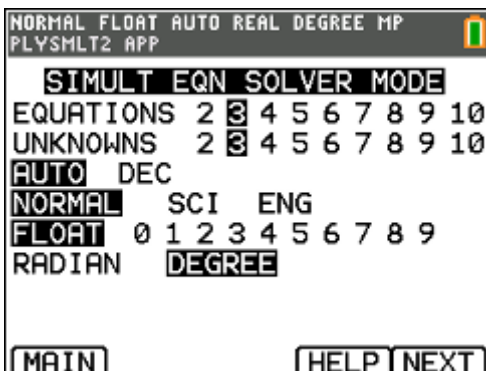
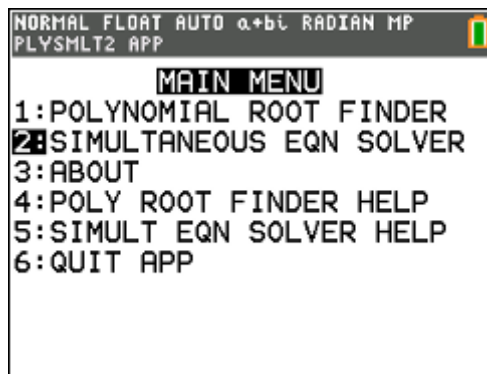
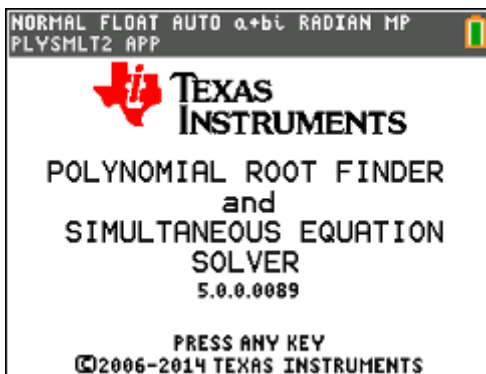
$$x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = (x+1)(x-2)(x-4)$$

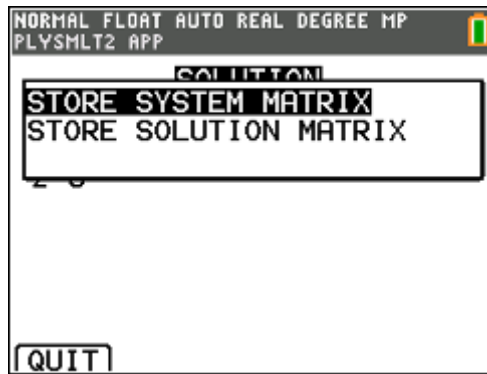
splitzen in partieelbreuken:

$$\begin{aligned} \frac{6x^2 - 2x - 38}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-4} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (-6A-3B-C)x + (8A-4B-2C)}{(x+1)(x-2)(x-4)} \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{cases} A+B+C=6 \\ -6A-3B-C=-2 \\ 8A-4B-2C=-38 \end{cases}$$





besluit:

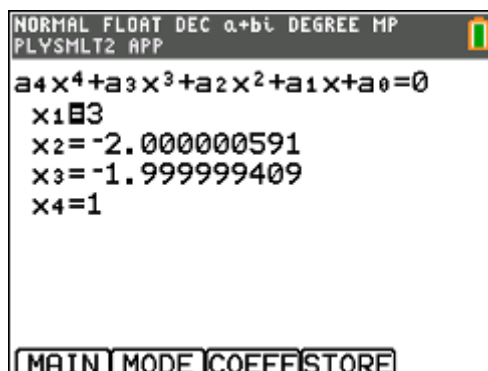
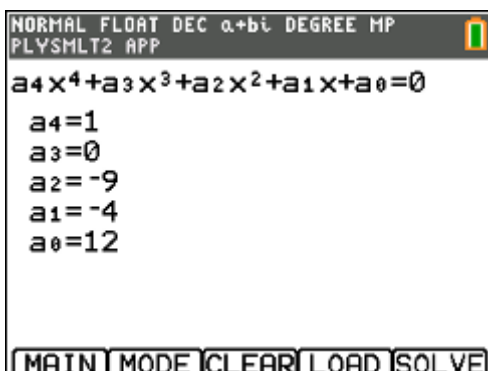
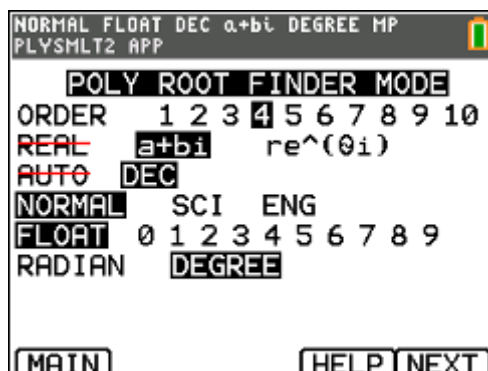
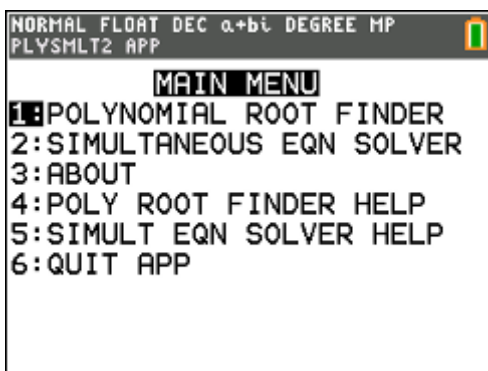
$$\frac{6x^2 - 2x - 38}{x^3 - 5x^2 + 2x + 8} = \frac{-2}{x+1} + \frac{3}{x-2} + \frac{5}{x-4}$$

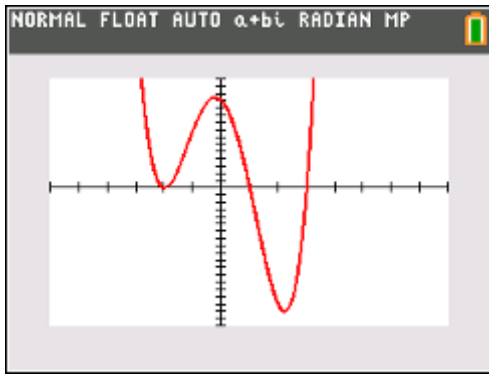
opgave 02

Splits volgende rationale breuk in partieelbreuken:

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + 11x}{x^4 - 9x^2 - 4x + 12}$$

noemer ontbinden:





besluit:

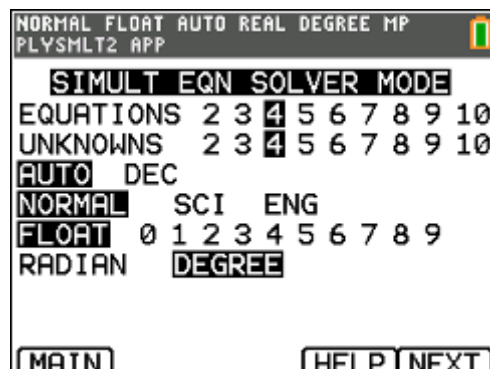
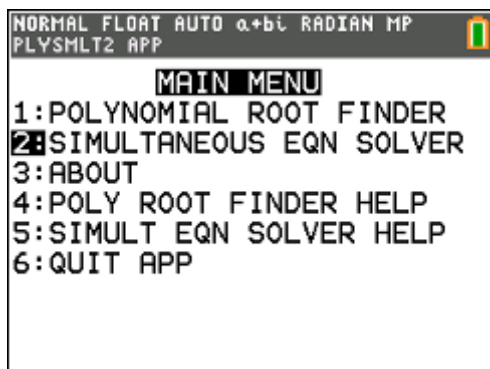
$$x^4 - 9x^2 - 4x + 12 = (x+2)^2(x-1)(x-3)$$

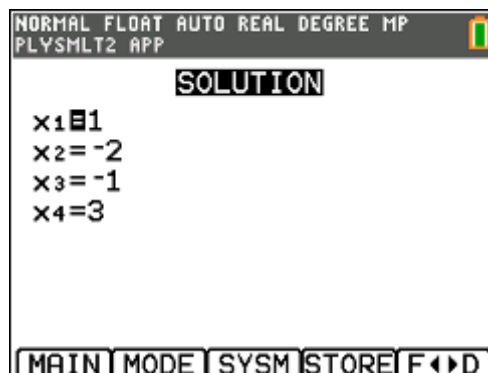
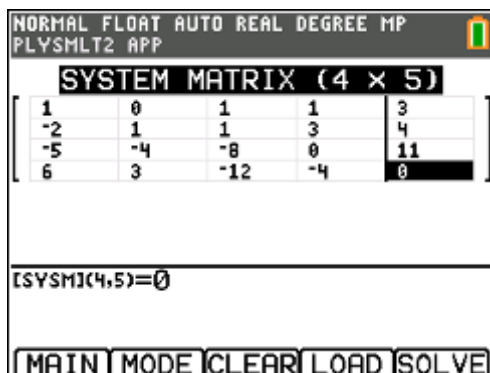
splitsen in partieelbreuken:

$$\begin{aligned} \frac{3x^3 + 4x^2 + 11x}{x^4 - 9x^2 - 4x + 12} &= \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x-3} \\ &= \frac{(A+C+D)x^3 + (-2A+B+C+3D)x^2 + (-5A-4B-8C)x + (6A+3B-12C-4D)}{(x+2)^2(x-1)(x-3)} \end{aligned}$$

waaruit:

$$\begin{cases} A + C + D = 3 \\ -2A + B + C + 3D = 4 \\ -5A - 4B - 8C = 11 \\ 6A + 3B - 12C - 4D = 0 \end{cases}$$





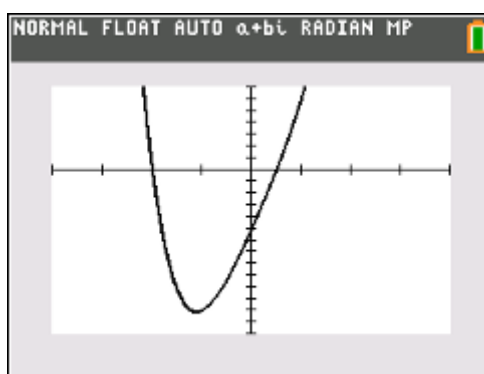
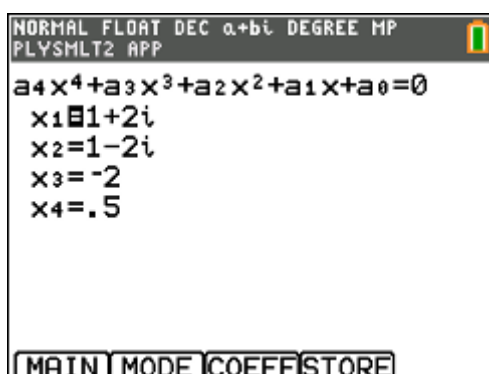
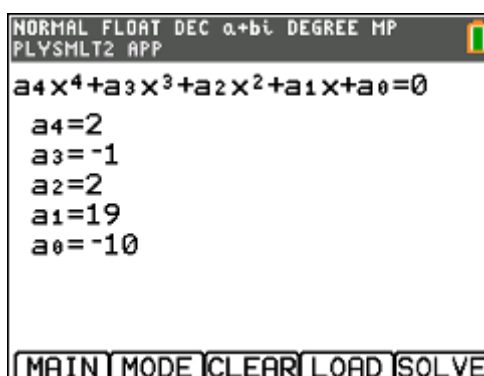
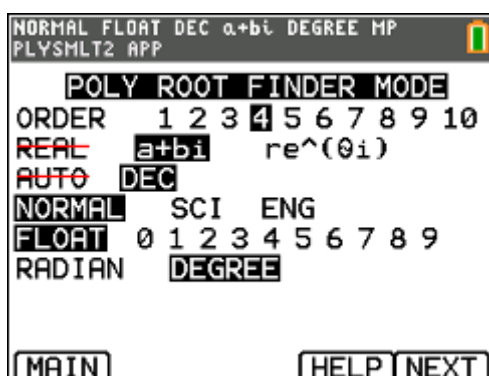
besluit:

$$\frac{3x^3 + 4x^2 + 11x}{x^4 - 9x^2 - 4x + 12} = \frac{1}{x+2} + \frac{-2}{(x+2)^2} + \frac{-1}{x-1} + \frac{3}{x-3}$$

opgave 03

Los op in \mathbb{C} :

$$2x^4 - x^3 + 2x^2 + 19x - 10 = 0$$

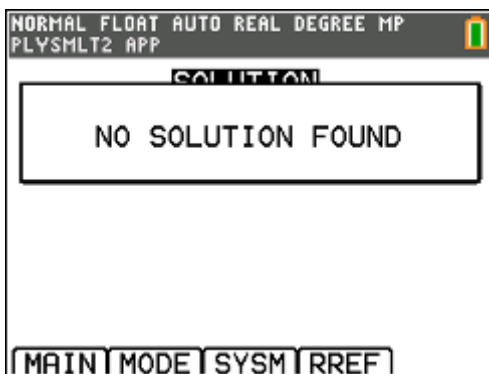
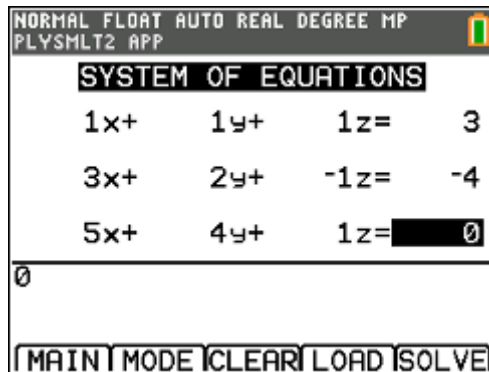
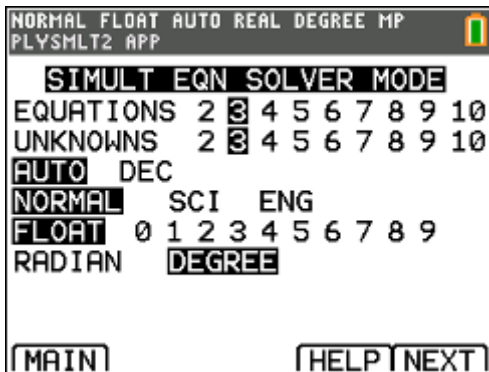


oplossing: $V = \left\{ -2, \frac{1}{2}, 1+2i, 1-2i \right\}$

opgave 04

Los op in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = -4 \\ 5x + 4y + z = 0 \end{cases}$$



oplossing: $V = \emptyset$

opgave 05

Los op in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ 3x + 2y - z = -4 \\ 5x + 4y + z = 2 \end{cases}$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP PLYSMLT2 APP				
SYSTEM OF EQUATIONS				
1x+	1y+	1z=	3	
3x+	2y+	-1z=	-4	
5x+	4y+	1z=	2	
2				
MAIN MODE CLEAR LOAD SOLVE				

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP PLYSMLT2 APP				
SOLUTION SET				
x = -10 + 3z				
y = 13 - 4z				
z = z				
MAIN MODE SYSM STORE RREF				

oplossing: $V = \{(-10 + 3\alpha, 13 - 4\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

opgave 06

Los op in \mathbb{R} :

$$\begin{cases} x + y + z + t = 4 \\ x + 2y + 3z - t = 11 \\ 2x + 3y + 4z = 15 \\ y + 2z - 2t = 7 \end{cases}$$

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP PLYSMLT2 APP					
SYSTEM MATRIX (4 × 5)					
1	1	1	1	4	
1	2	3	-1	11	
2	3	4	0	15	
0	1	2	-2	7	
[SYSM](1,1)=1					
MAIN MODE CLEAR LOAD SOLVE					

NORMAL FLOAT AUTO REAL DEGREE MP PLYSMLT2 APP					
SOLUTION SET					
x ₁ = -3 + x ₃ - 3x ₄					
x ₂ = 7 - 2x ₃ + 2x ₄					
x ₃ = x ₃					
x ₄ = x ₄					
MAIN MODE SYSM STORE RREF					

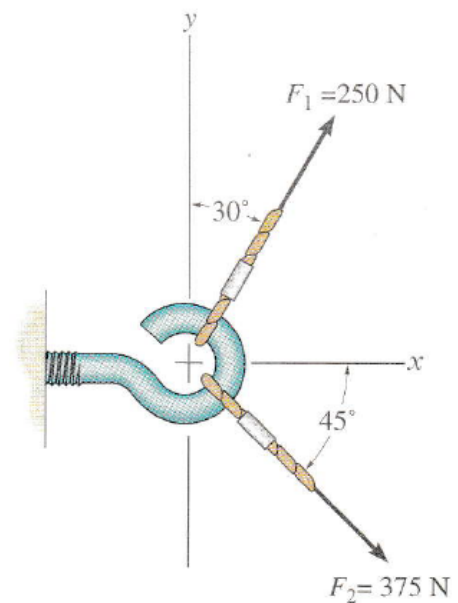
oplossing: $V = \{(-3 + \alpha - 3\beta, 7 - 2\alpha + 2\beta, \alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$

3. willekeurige driehoeken & krachten

opgave 01

Bepaal de grootte van de resultante $F_R = F_1 + F_2$ en zijn richting, gemeten tegen de wijzers van de klok in ten opzichte van de positieve x-as.

(opgave uit "Mechanica voor technici, Statica", Russell C. Hibbeler)



Omdat men bij het oplossen van toepassingen in de statica veelvuldig gebruik maakt van het oplossen van willekeurige driehoeken uit de wiskunde, kan het handig zijn om hiervoor een programma te schrijven.

Men kan zich dan ten volle concentreren op het probleem uit de mechanica zonder wiskundig rekenwerk.

Een programma voor de TI-84 voor het oplossen van willekeurige driehoeken (ZZZ, ZHZ, HZH & ZHH) kan er als volgt uitzien:

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βl DEGREE MP
PROGRAM: DRIEHOEK
:Menu("DRIEHOEK", "ZZZ", A, "
ZHZ", B, "HZH", C, "ZHH", D)
:Lbl A
:Input "ZIJDE A ", A
:Input "ZIJDE B ", B
:Input "ZIJDE C ", C
:(B²+C²-A²)/(2BC)→D
:(A²+C²-B²)/(2AC)→E
:(A²+B²-C²)/(2AB)→F
```

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βl DEGREE MP
PROGRAM: DRIEHOEK
:cos⁻¹(D)→I
:cos⁻¹(E)→J
:cos⁻¹(F)→K
:Disp "HOEK A", I>DMS
:Disp "HOEK B", J>DMS
:Disp "HOEK C", K>DMS
:Stop
:Lbl B
:Input "ZIJDE A ", A
```

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βl DEGREE MP
PROGRAM: DRIEHOEK
:Input "ZIJDE B ", B
:Input "HOEK C ", K
:√(A²+B²-2ABcos(K))→C
:(B²+C²-A²)/(2BC)→D
:(A²+C²-B²)/(2AC)→E
:cos⁻¹(D)→I
:cos⁻¹(E)→J
:Disp "ZIJDE C", C
:Disp "HOEK A", I>DMS
```

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βl DEGREE MP
PROGRAM: DRIEHOEK
:Disp "HOEK B", J>DMS
:Stop
:Lbl C
:Input "ZIJDE A ", A
:Input "HOEK B ", J
:Input "HOEK C ", K
:180°-J-K→I
:A sin(J)/sin(I)→B
:A sin(K)/sin(I)→C
```

```

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
PROGRAM:DRIEHOEK
:Disp "ZIJDE B",B
:Disp "ZIJDE C",C
:Disp "HOEK A",I>DMS
:Stop
:Lbl D
:Input "ZIJDE A ",A
:Input "HOEK A ",I
:Input "HOEK B ",J
:180°-I-J>K

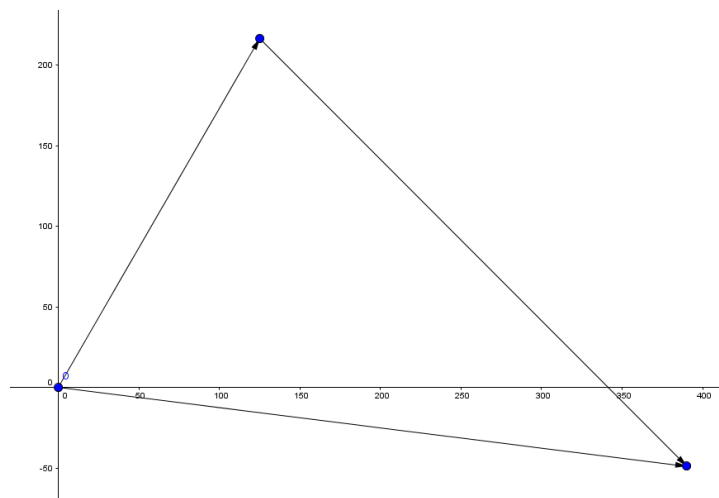
```

```

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
PROGRAM:DRIEHOEK
:Asin(J)/sin(I)>B
:Asin(K)/sin(I)>C
:Disp "ZIJDE B",B
:Disp "ZIJDE C",C
:Disp "HOEK C",K>DMS
:Stop
:
:
:

```

oplossen van de opgave:



```

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
DRIEHOEK
1:ZZZ
2:ZHZ
3:HZH
4:ZHH

```

```

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
prgmDRIEHOEK
ZIJDE A 250
ZIJDE B 375
HOEK C 75°

```

```

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
ZIJDE B 3/5
HOEK C 75°
ZIJDE C
HOEK A 393.187524
HOEK B 37°53'28.21"
HOEK C 67°6'31.79"
.....
Done

```

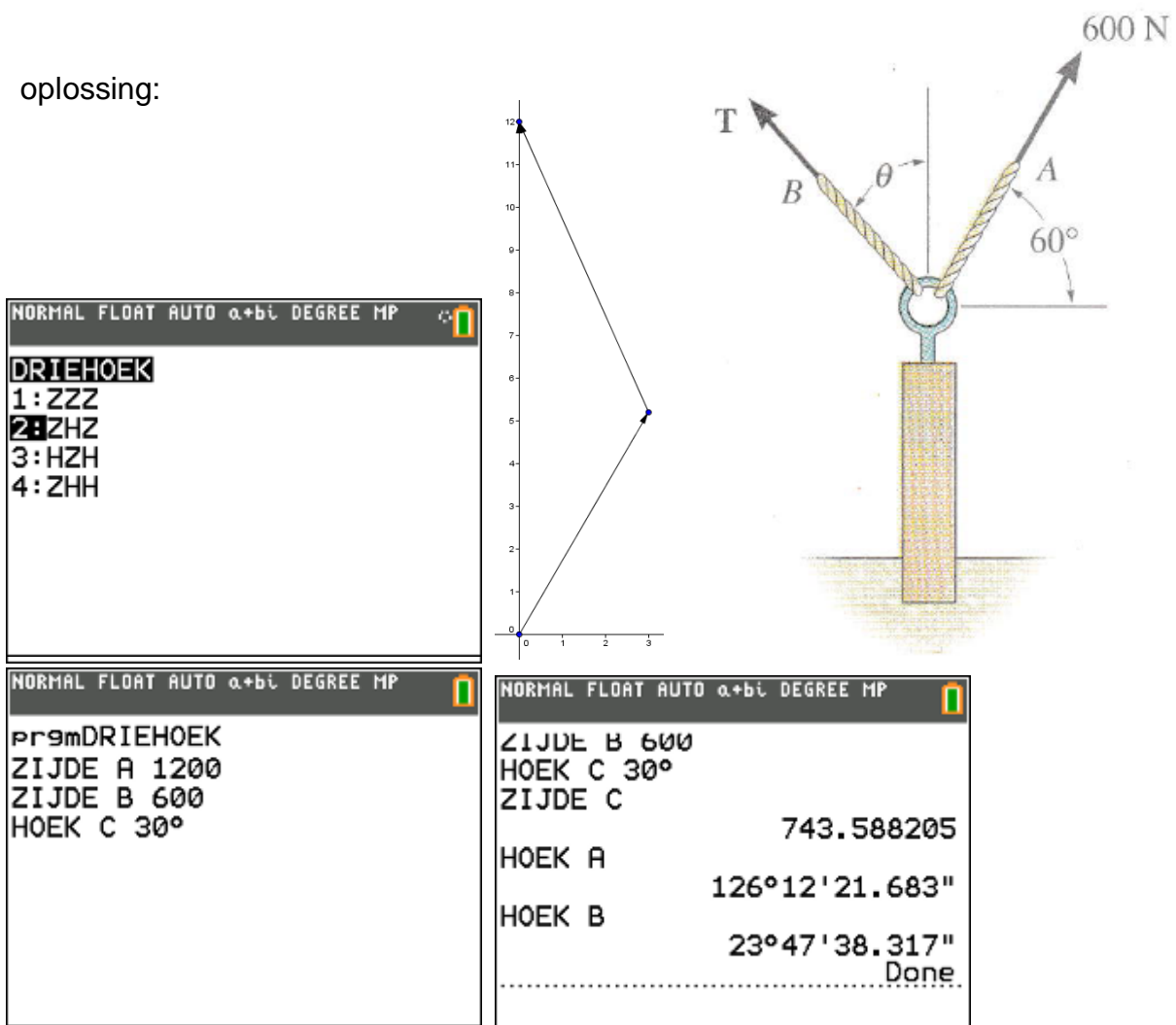
antwoord:

De grootte van F_R is 393,2 N en maakt een hoek van $(60^\circ - 67^\circ 06' 32'') = -7^\circ 06' 32''$ met de positieve x-as

opgave 02

Een paal wordt uit de grond getrokken met behulp van twee touwen A en B. Op touw A wordt een kracht van 600 N uitgeoefend en het touw maakt een hoek van 60° met de horizontale lijn. Bepaal de kracht T in touw B en de bijbehorende hoek θ als de verticale naar boven gerichte kracht die op de paal wordt uitgeoefend 1200 N moet zijn.

oplossing:



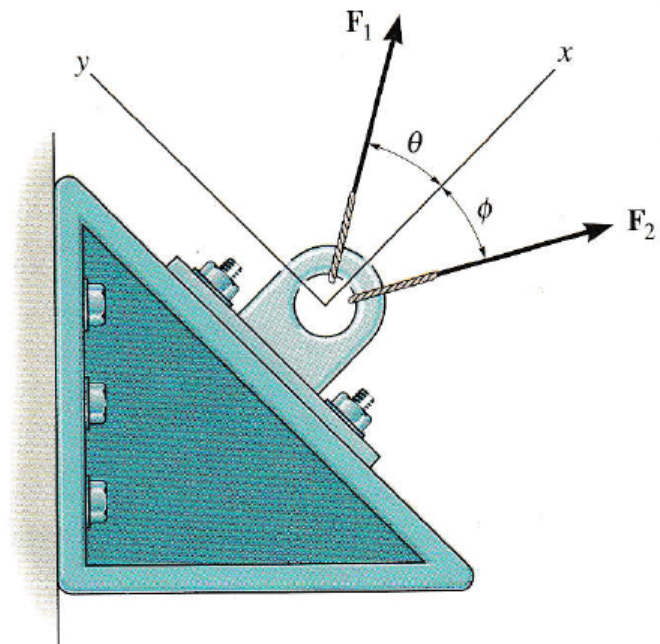
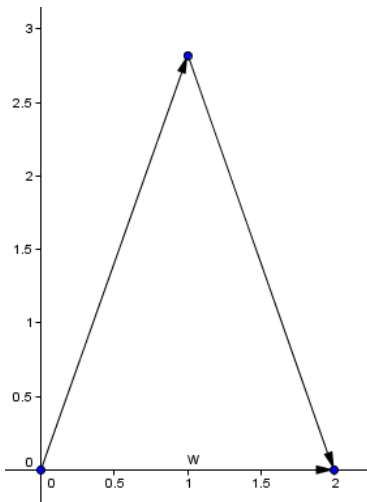
antwoord:

De grootte van de kracht T in B bedraagt 743,6 N en maakt een hoek $\theta = 23^\circ 47' 38''$ met de verticale as.

opgave 03

Bepaal de hoeken θ en ϕ als $F_1 = F_2 = 300\text{ N}$ en de resultante $F_R = 200\text{ N}$ de positieve x-as als werklijn heeft.

oplossing:



```
NORMAL FLOAT AUTO α+βγ DEGREE MP
DRIEHOEK
1:ZZZ
2:ZHZ
3:HZH
4:ZHH
```

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βγ DEGREE MP
prgmDRIEHOEK
ZIJDE A 300
ZIJDE B 300
ZIJDE C 200
```

```
NORMAL FLOAT AUTO α+βγ DEGREE MP
ZIJDE B 300
ZIJDE C 200
HOEK A
HOEK B 70°31'43.606"
HOEK C 70°31'43.606"
HOEK C 38°56'32.789"
.....
Done
```

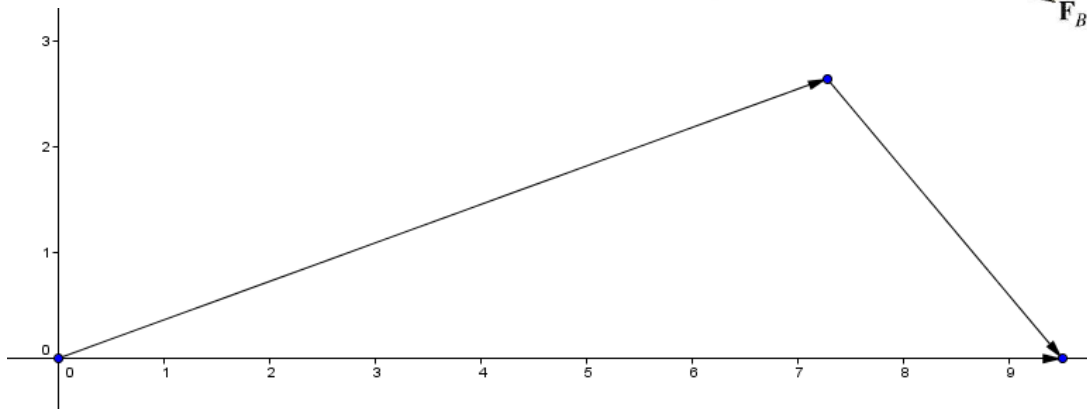
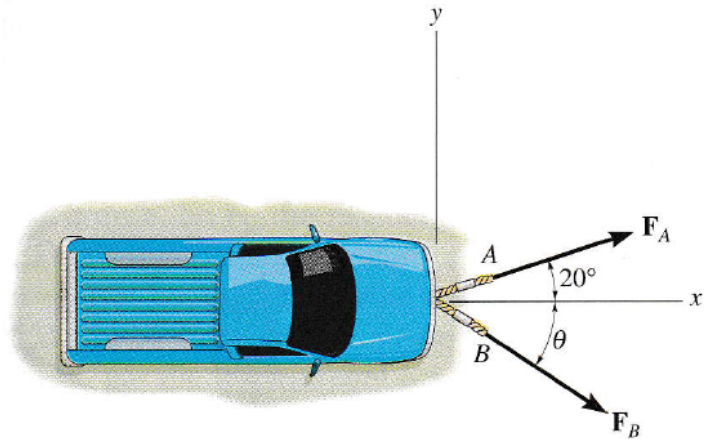
antwoord:

$$\theta = \phi = 70^{\circ}31'44''$$

opgave 04

De truck wordt weggesleept met behulp van twee touwen. Bepaal de grootte van de krachten F_A en F_B die op de touwen moeten worden uitgeoefend als een resultante van 950 N langs de positieve x-as moet worden verkregen. Gegeven is dat $\theta = 50^\circ$.

oplossing:



NORMAL FLOAT AUTO a+b\i	NORMAL FLOAT AUTO a+b\i	NORMAL FLOAT AUTO a+b\i DEGREE MP
DRIEHOEK	prgmDRIEHOEK	HOEK B 20
1:ZZZ	ZIJDE A 950	HOEK C 50
2:ZHZ	HOEK B 20	ZIJDE B
3:HZH	HOEK C 50	ZIJDE C
4:ZHH		774.4470956
		HOEK A
		110°0'0"
		Done

antwoord:

$$F_A = 774,4\text{ N} \text{ en } F_B = 345,8\text{ N}$$

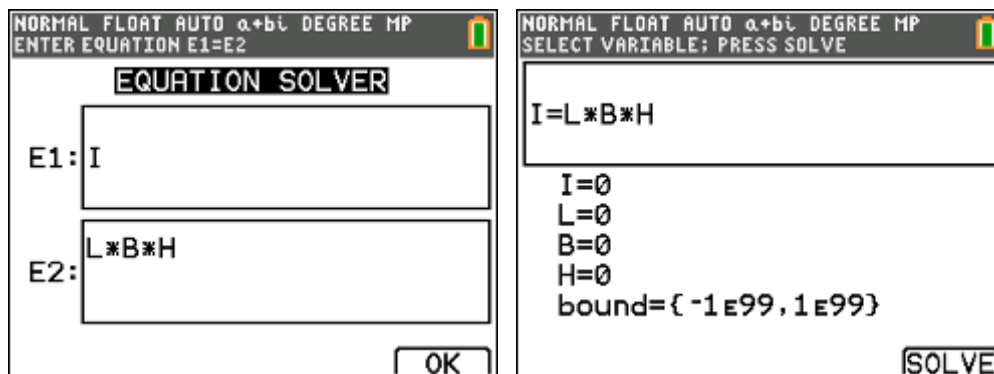
4. Equation Solver

De Equation Solver (“math” “B:Numeric Solver”) is een handig hulpmiddel voor leerlingen die last hebben bij het omvormen van formules.

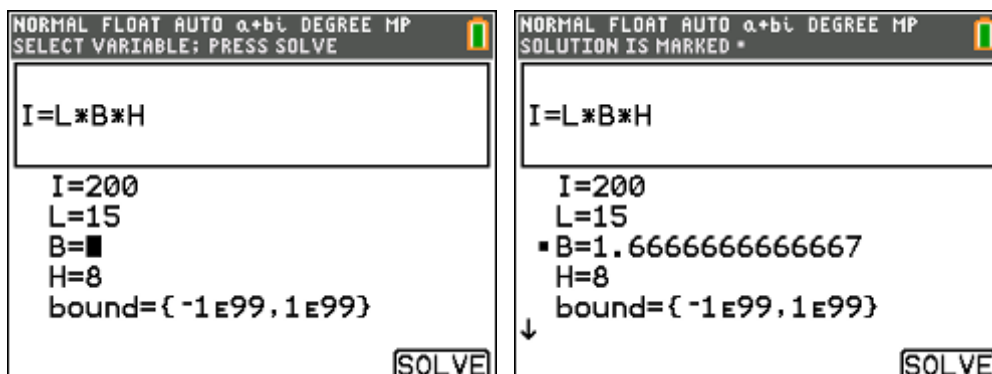
voorbeeld 01 : inhoud van een balk

Formule : $I = l.b.h$

waarbij I : de inhoud
 l : de lengte
 b : de breedte
 h : de hoogte



- vul drie van de vier grootheden in,
- ga op de ontbrekende grootheid staan,
- druk “Alpha solve” of “F5”



voorbeeld 02 : warmtewet van Newton

Experimenteel heeft men vastgesteld dat de snelheid waarmee de temperatuur van een voorwerp verandert (bij afkoeling of opwarming) evenredig is met het verschil tussen de constant veronderstelde omgevingstemperatuur A en de ogenblikkelijke temperatuur T van het voorwerp (warmtewet van Newton). Dit leidt tot een differentiaalvergelijking met als oplossing:

$$T(t) = A + (T_0 - A) \cdot e^{-kt}$$

met $T(t)$ de temperatuur van het voorwerp in functie van de tijd, A de omgevingstemperatuur en k een constante.

Stel dat de begintemperatuur van de koffie die men in de kantine schenkt 90°C is. De temperatuur in de kantine is 20°C en $k = 0,1$. Na hoeveel minuten bedraagt de temperatuur van de koffie dan 50°C ?

oplossing:

The image shows three screenshots of a calculator's equation solver interface. The first screenshot shows the 'EQUATION SOLVER' screen with two equations entered: E1: W and E2: $A + (B - A) * e^{-K * T}$. The second screenshot shows the same equation with the variables W=50, A=20, B=90, K=.1, and T= (blank) entered. The third screenshot shows the solution for T: $T = 8.4729786038721$.

Screenshot 1: EQUATION SOLVER
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
ENTER EQUATION E1=E2
E1: W
E2: $A + (B - A) * e^{-K * T}$
OK

Screenshot 2: SELECT VARIABLE: PRESS SOLVE
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
SELECT VARIABLE: PRESS SOLVE
 $W = A + (B - A) * e^{-K * T}$
W=50
A=20
B=90
K=.1
T=
↓
SOLVE

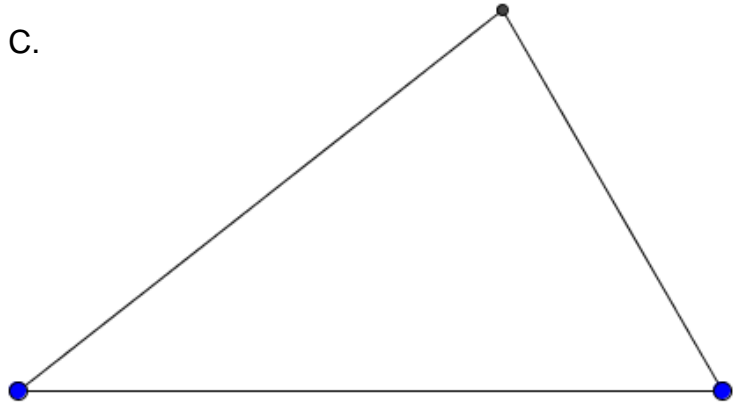
Screenshot 3: SOLUTION IS MARKED *
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
SOLUTION IS MARKED *
 $W = A + (B - A) * e^{-K * T}$
W=50
A=20
B=90
K=.1
T=8.4729786038721
↓
SOLVE

voorbeeld 03 : willekeurige driehoeken oplossen

Gegeven een driehoek ABC met lengte van de zijden

$$|AB| = 8, |AC| = 7 \text{ en } |BC| = 5.$$

Gevraagd : grootte van de hoek C.



NORMAL FLOAT AUTO $\alpha+bt$ DEGREE MP
ENTER EQUATION E1=E2

EQUATION SOLVER

E1: C^2

E2: $A^2+B^2-2AB\cos(K)$

OK

NORMAL FLOAT AUTO $\alpha+bt$ DEGREE MP
SELECT VARIABLE; PRESS SOLVE

$C^2=A^2+B^2-2AB\cos(K)$

C=8
A=5
B=7
K=■
bound={ -1E99, 1E99 }

SOLVE

NORMAL FLOAT AUTO $\alpha+bt$ DEGREE MP
SOLUTION IS MARKED *

$C^2=A^2+B^2-2AB\cos(K)$

C=8
A=5
B=7
▪ K=81.786789298261
bound={ -1E99, 1E99 }

↓

SOLVE

5. getaltheorie

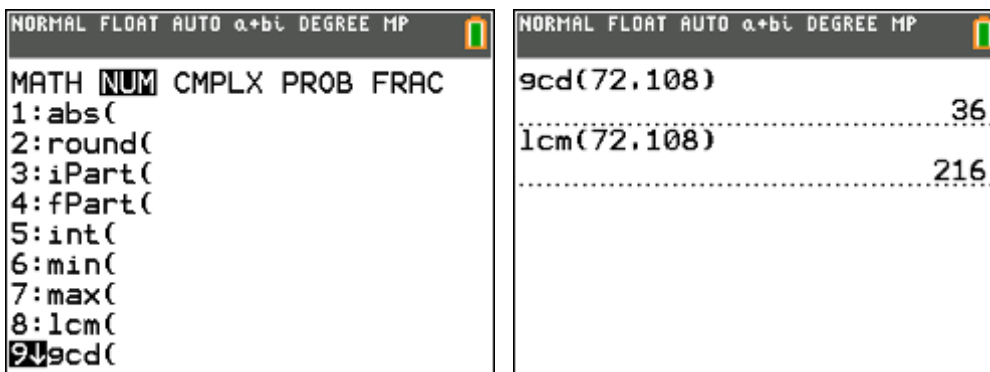
De studie van (gehele) getallen, de getaltheorie, is één van de oudste takken van de wiskunde. Reeds eeuwenlang is het een gebied met een grote aantrekkingskracht bij tal van wiskundigen die zich het hoofd breken over allerlei problemen met getallen.

Google maar even naar één van volgende items:

kleine stelling van Fermat, laatste stelling van Fermat, stelling van Wilson, stelling van Euler, stelling van Bézout, Chinese reststelling, perfecte & bevriende getallen, Mersennegetallen, Pythagorese drietallen, p-adische getallen, het vermoeden van Goldbach, het vermoeden van Collatz, het vermoeden van Legendre, het vermoeden van Gilbreath, het vermoeden van Erdős-Straus, het vermoeden van Andrica, diofantische vergelijkingen, vergelijking van Pell, RSA & cryptografie, ...

ggd en kgv

GGD vinden we bij “Math Num 9:gcd”, KGV bij “Math Num 8:lcm”.



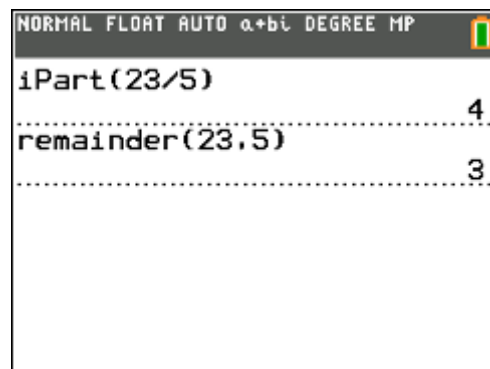
```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
MATH NUM Cmplx PRob FRAC
1: abs(
2: round(
3: iPart(
4: fPart(
5: int(
6: min(
7: max(
8: lcm(
9: gcd(

gcd(72,108)
-----
36
lcm(72,108)
-----
216
```

modulorekenen

De rest en het quotiënt na (euclidische) deling van a door n in \mathbb{Z} worden respectievelijk gegeven via “Math Num 0:remainder” en “Math Num 3:iPart”.

M.a.w. $a = q \cdot n + b$
Dan is $q = \text{iPart}(a / n)$
 $b = \text{remainder}(a, n)$
Voorbeeld: $23 = 4 \cdot 5 + 3$



```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
iPart(23/5)
-----
4
remainder(23,5)
-----
3
```

grote getallen modulo x

Modulorekenen wordt in het dagelijkse leven meer gebruikt dan we soms denken. De getallen waarmee gerekend wordt zijn echter cijferreeksen die soms meer dan 15 cijfers lang zijn.

$$779597\ 159619\ 111400 = ?? \pmod{97}$$

Dit probleem lossen we als volgt op:

$$10000 \equiv 9 \pmod{97}$$

En dus

$$10000^2 = 9^2 \pmod{97}$$

$$10000^3 = 9^3 \pmod{97}$$

$$10000^n = 9^n \pmod{97}$$

Zodat

$$\begin{aligned} &77\ 9597\ 1596\ 1911\ 1400 \pmod{97} \\ &= 77 \cdot 9^4 + 9597 \cdot 9^3 + 1596 \cdot 9^2 + 1911 \cdot 9 + 1400 \pmod{97} \\ &= 7649285 \pmod{97} \\ &= 59 \end{aligned}$$

p-tallige ontwikkeling

Herschrijf het getal 2200598363470021 in een 1019-tallige ontwikkeling

$$2200598363470021 = 2159566598106 \cdot 1019 + 7$$

$$21595666598106 = 2119299900 \cdot 1019 + 6$$

$$2119299900 = 2079784 \cdot 1019 + 4$$

$$2079784 = 2041 \cdot 1019 + 5$$

$$2041 = 2 \cdot 1019 + 3$$

En dus :

$$\begin{aligned} &2200598363470021 \\ &= 2(1019)^5 + 3(1019)^4 + 5(1019)^3 + 4(1019)^2 + 6(1019)^1 + 7(1019)^0 \\ &= (235467)_{1019} \end{aligned}$$

programma “ontbinden in priemfactoren”

<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PROGRAM:FACTOR :Prompt A :For(I,2,√(A)) :If fPart(A/I)=0 :Then :Disp I :A/I→A :I-1→I :End :If A=1</pre>	<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PROGRAM:FACTOR :Then :Stop :End :End :If A≠1 :Then :Disp A :End :Stop</pre>
<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP prgmFACTOR A=?41842505 5 29 59 67 73 Done</pre>	

programma “priemgetallen van A tot B”

<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PROGRAM:PRIEM :Prompt A,B :For(I,A,B) :1→P :For(J,2,√(I)) :If fPart(I/J)=0 :Then :0→P :End :End</pre>	<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP PROGRAM:PRIEM :End :End :If P=1 :Then :Disp I :End :Stop :█</pre>
<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP prgmPRIEM A=?900 B=?1000</pre>	<pre>NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP 94/ 953 967 971 977 983 991 997 Done</pre>

6. rekenen met lijsten

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
NAMES OPS MATH
1:SortA(
2:SortD(
3:dim(
4:Fill(
5:seq(
6:cumSum(
7:ΔList(
8:Select(
9↓augment(
```

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE MP
NAMES OPS MATH
1:min(
2:max(
3:mean(
4:median(
5:sum(
6:prod(
7:stdDev(
8:variance(
```

opgave 01

- getallen in een lijst steken

vul lijst L1 met de waarden : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

vul lijst L2 met de waarden : 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59

- lijsten samenvoegen

voeg lijst L1 en L2 samen tot L3

“2nd list, OPS, 9:augment”

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL
{2,3,5,7,11,13,17,19,23,29
}→L1
{2 3 5 7 11 13 17 19 23 2...
{31,37,41,43,47,53,59}→L2
.....
{31 37 41 43 47 53 59}
augment(L1,L2)→L3
{2 3 5 7 11 13 17 19 23 2...
```

L1	L2	L3	L4	L5	2
2	31	2	-----	-----	
3	37	3			
5	41	5			
7	43	7			
11	47	11			
13	53	13			
17	59	17			
19	-----	19			
23		23			
29		29			
-----		31			

L2(1)=31

- lijsten wissen

wis lijst L1 en L2

“stat, edit, 4:ClrList”

(alle lijsten wissen : “2nd mem, 4:ClrAllLists”)

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL
ClrList L1,L2
..... Done
```

- lijsten genereren

vul lijst L1 met de waarden 2, 4, 6, ..., 34.
 "2nd list, OPS, 5:seq"

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL

seq

Expr: I+2
 Variable: I
 start: 0
 end: 32
 step: 2
 Paste

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL

seq(I+2, I, 0, 32, 2) → L1
 {2 4 6 8 10 12 14 16 18 20...}

- cumulatieve som

vul lijst L2 met de cumulatieve som van de waarden uit lijst L1
 "2nd list, OPS, 6:cumSum"

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL

cumSum(L1) → L2
 {2 6 12 20 30 42 56 72 90...}

L1	L2	L3	L4	L5	1
2	2	2	-----	-----	
4	6	3			
6	12	5			
8	20	7			
10	30	11			
12	42	13			
14	56	17			
16	72	19			
18	90	23			
20	110	29			
22	132	31			

L1(1)=2

- rekenen met lijsten

vervang lijst L1 door het verschil van lijst L2 met L3
 "L2 - L3 → L1"

NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL

L2 - L3 → L1
 {0 3 7 13 19 29 39 53 67 ...}

L1	L2	L3	L4	L5	1
0	2	2	-----	-----	
3	6	3			
7	12	5			
13	20	7			
19	30	11			
29	42	13			
39	56	17			
53	72	19			
67	90	23			
81	110	29			
101	132	31			

L1(1)=0

- berekenen van toenames/afnames

wis lijst L2 en L3 en zet de toenames van lijst L1 in lijst L2

The first screenshot shows the command `ClrList L2,L3` being entered, with `Done` appearing on the right. Below it, the command `ΔList(L1)→L2` is shown, followed by the list contents: `{3 4 6 6 10 10 14 14 14 2...`.

The second screenshot shows a list editor with columns L1 through L5 and a cursor at L1(1)=0. The data in L1 is as follows:

L1	L2	L3	L4	L5	1
0	3				
3	4				
7	6				
13	6				
19	10				
29	10				
39	14				
53	14				
67	14				
81	20				
101	18				

- gemiddelde, som, product

tel het aantal waarden in lijst L1 en bereken het gemiddelde, de som en het product van alle waarden van lijst L1

The screenshot shows the following statistics for list L1:

```

dim(L1) ..... 17
mean(L1) ..... 88.11764706
sum(L1) ..... 1498
Prod(L1) ..... 0
  
```

- een deel van een lijst

zet in lijst L3 het derde t.e.m. het twaalfde element uit lijst L1

The first screenshot shows the `seq` command menu with the following options: `Expr:L1(I)`, `Variable:I`, `start:3`, `end:12`, `step:1`, and `Paste`.

The second screenshot shows the command `seq(L1(I),I,3,12,1)→L3` being entered, followed by the list contents: `{7 13 19 29 39 53 67 81 1...`

opgave 02

Van een bepaalde appelsoort neemt men een steekproef van 36 appels. Hiervan worden het gewicht (in gram) en het volume (in cl) bepaald. De resultaten zijn :

gram	cl
268	36
229	30
290	31
331	42
328	45
349	57
193	26
271	45
324	34
237	36
252	32
212	30

gram	cl
257	34
264	28
285	39
265	32
267	32
265	28
334	37
277	36
273	35
259	39
359	47
315	36

gram	cl
216	40
302	40
316	46
357	47
277	40
259	36
307	43
265	33
310	40
222	30
246	29
219	29

Bereken a.d.h. van formules uit de statistiek (en niet via voorgeprogrammeerde functies van je GRM) :

- Het gemiddeld gewicht van de steekproef.
- De standaardafwijking van het gemeten volume.
- De covariantie tussen beide grootheden.
- De correlatie tussen beide grootheden.

(Via “stat calc 1-var stats” en “stat calc linreg(ax + b) kan je gemiddelde, standaardafwijking en correlatie (op voorwaarde dat via “catalog diagnosticon” staat) berekenen).

L1	L2	L3	L4	L5	2
268	36	-----	-----	-----	
229	30				
290	31				
331	42				
328	45				
349	57				
193	26				
271	45				
324	34				
237	36				
252	32				

L2(1)=36

Steekproefgemiddelde (van het gewicht)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bI DEGREE CL
sum(L1)/36
.....277.7777778
mean(L1)
.....277.7777778
```

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bI DEGREE CL
1-Var Stats
x̄=277.7777778
Σx=10000
Σx²=2841614
Sx=42.70704934
σx=42.10971853
n=36
minX=193
↓Q1=254.5
```

Standaardafwijking van een steekproef (van het volume)

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{x=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$s = \sqrt{s^2}$$

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bI DEGREE CL
sum((L2-mean(L2))²)/35
.....46.34285714
√(Ans)
.....6.807558824
stdDev(L2)
.....6.807558824
```

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bI DEGREE CL
1-Var Stats
x̄=36.66666667
Σx=1320
Σx²=50022
Sx=6.807558824
σx=6.712343522
n=36
minX=26
↓Q1=31.5
```

De covariantie tussen twee grootheden

$$\text{cov}(x, y) = s_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bI DEGREE CL
sum((L1-mean(L1))*(L2-mean(L2)))/35
.....211.4095238
```

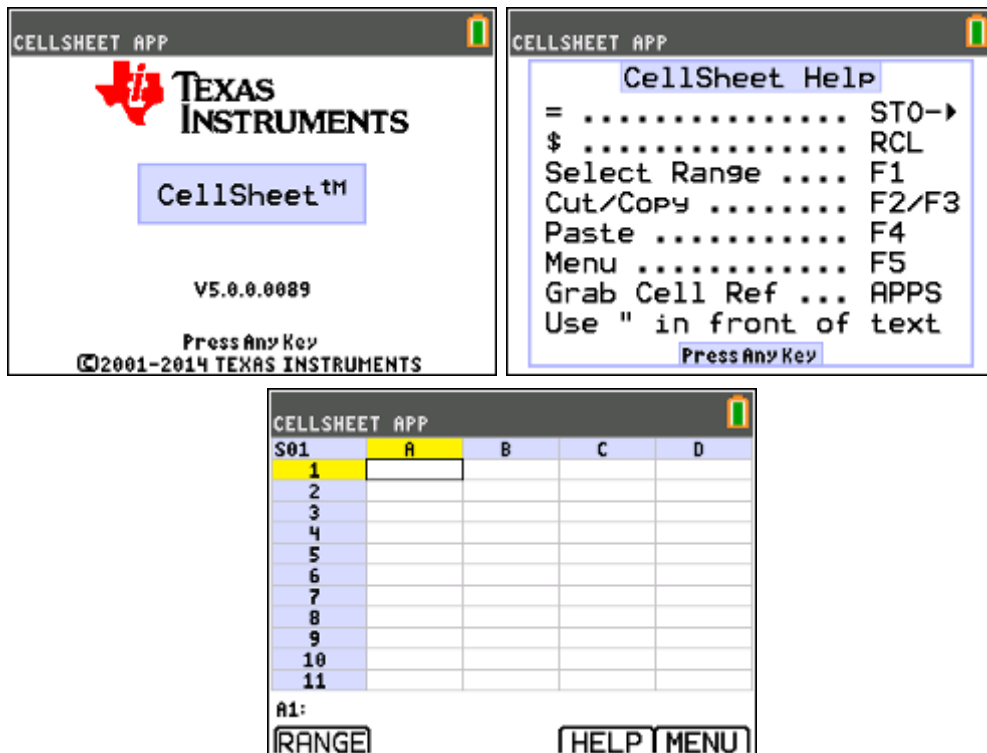
De correlatie tussen twee grootheden

$$r(x, y) = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL
sum((L1-mean(L1))*(L2-mean(L2)))→A
.....7399.333333
sum((L1-mean(L1))^2)→B
.....63836.22222
sum((L2-mean(L2))^2)→C
.....1622
A/√(B*C)
......7271660235
```

```
NORMAL FLOAT AUTO a+bi DEGREE CL
LinReg
y=ax+b
a=.1159112033
b=4.469110188
r^2=.5287704257
r=.7271660235
```

7. APP CellSheet



voorbeeld 01 : het getal e

Bereken volgende reeks voor verschillende waarden van n

$$s_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

- typ in A1 : 0
- typ in A2 := A1 + 1
- F3 (Copy)
- F1 (Select Range, A3:A21)
- F4 (Paste)
- typ in B1 := 1 / A1!
- F3 (Copy)
- F1 (Select Range, B2:B21)
- F4 (Paste)

S01	A	B	C	D
12	11			
13	12			
14	13			
15	14			
16	15			
17	16			
18	17			
19	18			
20	19			
21	20			
22				

A22: [RANGE] [HELP] [MENU]

S01	A	B	C	D
1	0	1		
2	1	1		
3	2	.5		
4	3	.16667		
5	4	.04167		
6	5	.00833		
7	6	.00139		
8	7	2E-4		
9	8	2.5E-5		
10	9	2.8E-6		
11	10	2.8E-7		

B1: =1/A1! [RANGE] [HELP] [MENU]

- typ in C1 := B1
- typ in C2 := C1 + B2
- F3 (Copy)
- F1 (Select Range, B2:B21)
- F4 (Paste)
- F5 (menu)
- 1: File
- 5: Format
- Show Value

S01	A	B	C	D
1	0	1	1	
2	1	1	2	
3	2	.5	2.5	
4	3	.16667	2.6667	
5	4	.04167	2.7083	
6	5	.00833	2.7167	
7	6	.00139	2.7181	
8	7	2E-4	2.7183	
9	8	2.5E-5	2.7183	
10	9	2.8E-6	2.7183	
11	10	2.8E-7	2.7183	

C1: =B1

RANGE HELP MENU

S01	A	B	C	D
10	9	2.8E-6	2.7183	
11	10	2.8E-7	2.7183	
12	11	2.5E-8	2.7183	
13	12	2.1E-9	2.7183	
14	13	2E-10	2.7183	
15	14	1E-11	2.7183	
16	15	8E-13	2.7183	
17	16	5E-14	2.7183	
18	17	3E-15	2.7183	
19	18	2E-16	2.7183	
20	19	8E-18	2.7183	

C20: 2.7182818284591

RANGE HELP MENU

voorbeeld 02 : methode van Newton

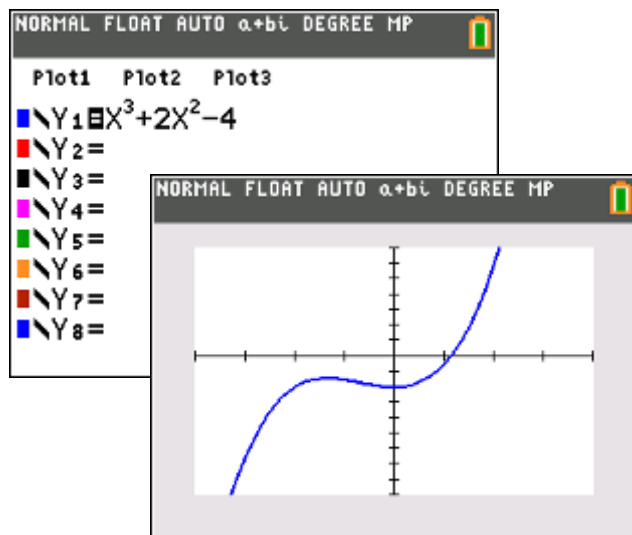
Bepaal (benader) de nulwaarde van de functie f met $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$ tot op 6 decimalen nauwkeurig m.b.v. de benaderingsmethode van Newton.

methode van Newton:

Gegeven een afleidbare functie f en een startwaarde $x = a_1$ die een ruwe benadering is voor de nulwaarde a , dan geeft volgende recursieformule opeenvolgende benaderingen van een nulwaarde van f :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$$

uitwerking:



X	Y1			
0	-4			
1	-1			
2	12			
3	41			
4	92			
5	171			
6	284			
7	437			
8	636			
9	887			
10	1196			

X=0

We nemen als startwaarde $a_1 = 2$.

- typ in A1 : "A" startwaarde van a in de recursieformule
- typ in B1 : "F(A)" functiewaarde van de startwaarde
- typ in C1 : "DF(A)" de afgeleide van f(x) in de startwaarde
- typ in D1 : "A2" de volgende benadering voor a

- typ in A2 : 2
- typ in B2 : = Y1(A2)
- typ in C2 : = nDeriv(Y1,X,A2)
- typ in D2 : = A2 – B2 / C2

- typ in A3 : = D2

- kopieer de vier kolommen naar beneden

CELLSHEET APP				
S01	A	B	C	D
1	A	F(A)	DF(A)	A2
2	2	12	20	1.4
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

D2: =A2-B2/C2

RANGE HELP MENU

antwoord:

$$a \approx 1,130395$$

CELLSHEET APP				
S01	A	B	C	D
1	A	F(A)	DF(A)	A2
2	2	12	20	1.4
3	1.4	2.664	11.48	1.1679
4	1.1679	.32137	8.7641	1.1313
5	1.1313	.00735	8.3644	1.1304
6	1.1304	4.2E-6	8.355	1.1304
7	1.1304	2E-12	8.355	1.1304
8	1.1304	0	8.355	1.1304
9				
10				
11				

A8: 1.1303954347673

RANGE HELP MENU

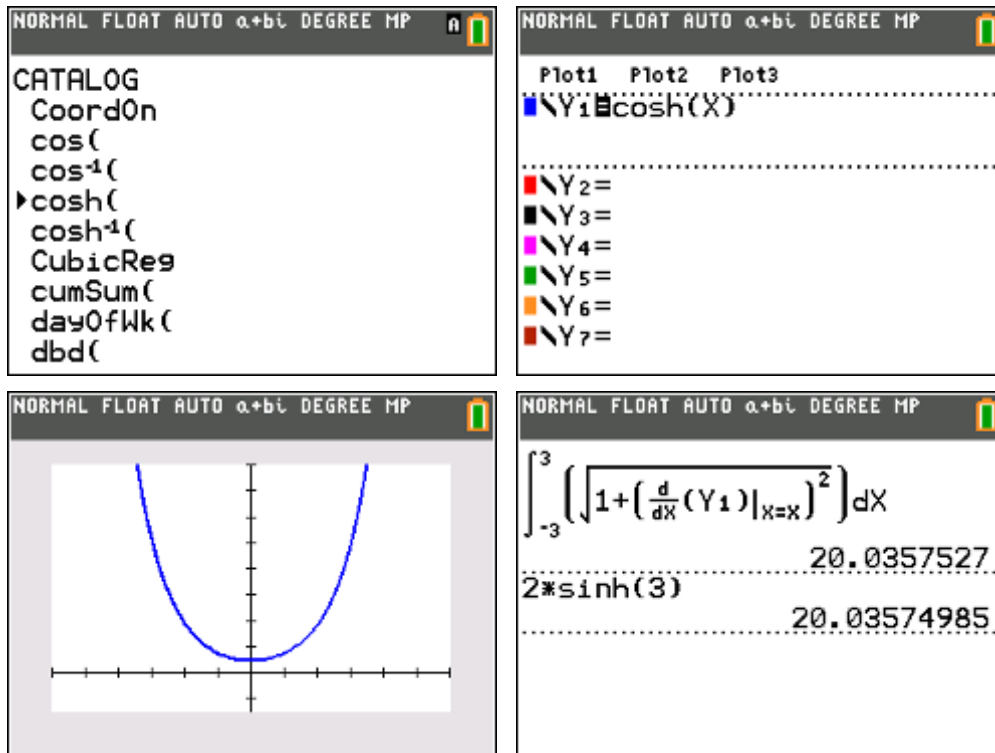
8. hyperbolische functies (Catalog)

opgave

Bereken de booglengte van de grafiek van f als $f(x) = \cosh(x)$ met $x \in [-3, 3]$.

oplossing:

De functie cosinushyperbolicus (cosh) vind je op de TI-84 via "2nd catalog".



$$s = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{-3}^3 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_{-3}^3 \cosh x dx = [\sinh x]_{-3}^3 \approx 20$$