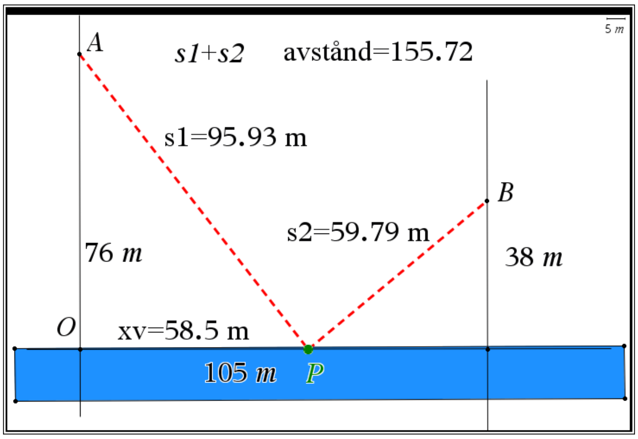
Avstånd mellan två punkter via en tredje

Du befinner dig i en punkt *A* och ska till en punkt B, men måste på vägen komma ner till en flod vid en punkt *P*. Punkten *A* befinner sig 76 meter från floden och punkten *B* 38 meter från den. Längs floden är avståndet mellan A och *B* 105 meter. På denna sträcka finns punkten *P*. Beroende på läget av *P* kommer avståndet *APB* att vara olika långt. Undersök hur det varierar beroende på läget av *P*!
Öppna filen *Avstånd mellan två punkter via en tredje.tns* där det finns en konstruktion att utgå ifrån. Se bilderna nedan!

I konstruktionen har vi mätt de rödstreckade sträckorna *AP* och *PB*, den sammanlagda sträckan *APB* och avståndet *OP*. Dessa mätningar är alltså *lagrade* i variablerna *s1*, *s2*, *avstånd* och *xv*.



- Om du drar i punkten P kan du se hur avståndet xv och sträckan avstånd varierar. Vilket verkar vara det kortaste avståndet?
- Placera nu punkten *P* ganska nära Punkten *O*. Öppna sedan en ny sida med appen Listor & kalkylblad och skriv enligt skärmbilden nedan. Du ska alltså använda kommandot *capture*, som automatiskt infångar mätvärden.

	A xkoord	B ykoord	C	D	E	F	G
=	=capture(xv,1)	=capture(avstånd,1)					
1	8.27525	180.091					
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

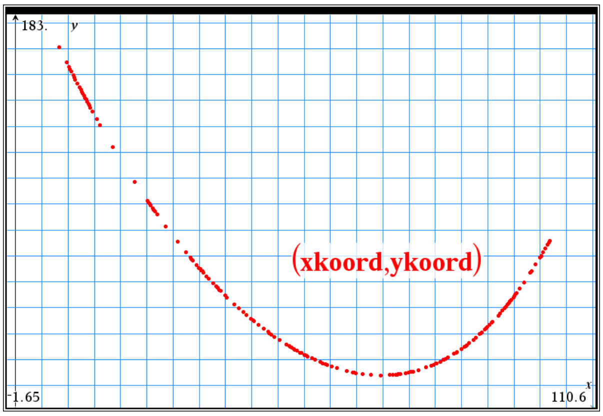
B ykoord:=capture(avstånd,1)

- Gå nu tillbaka till konstruktionen och dra punkten *P* åt höger längs linjen som representerar flodstranden.

	A xkoord	B ykoord	C	D	E	F	G
=	=capture(xv,1)	=capture(avstånd,1)					
1	8.27525	180.091					
2	9.71362	178.923					
3	10.1239	178.595					
4	10.329	178.432					
5	10.5341	178.27					
6	10.9447	177.947					
7	11.1499	177.786					
8	11.355	177.626					
9	11.7652	177.308					
10	12.1755	176.992					
11	12.3806	176.835					
12	12.5858	176.679					

C1

- Nu fångas ett stort antal mätvärden in i kolumnerna A och B, dvs. i variablerna *xkoord* och *ykoord*.
- Öppna en ny sida med appen Grafer. Gå till Grafinmatning/Redigera och sedan Spridningsdiagram. Skriv in variablerna för *x*- och *y*-koordinaten och rita diagrammet. För att få ett bra fönster så kan du välja *Zooma data.* Nu kan du se hur det totala avståndet *APB* beror av sträckan *xv*.
- Om du spårar i diagrammet kan du se ungefär när avståndet är minst.



- Din uppgift är nu att hitta ett uttryck för hur det totala avståndet *APB* beror av sträckan *OP*. Inför variabeln *x* för sträckan *OP*. När du är klar ska du ha ett en funktion f1(x) som du matar in i samma fönster som spridningsdiagrammet. Du kan då jämföra den experimentella geometriska modellen med den algebraiska.

Läraranvisning

Nedan visar vi hur man kan komma fram till ett uttryck för hur det sammanlagda avståndet beror av sträckan OP. När man definierar variabler så skriver man **:=**. Längst ner ser vi det funktionsuttryck som vi matar in och ritar i samma graffönster som spridningsdiagrammet.

Nu ska vi teckna ett uttryck för det totala avståndet. Det är summan av längden hos två hypotenusor:

Definition av y1(x): $\mathbf{y1}(x):=\sqrt{76^2+x^2}$ ▸ *Klar*

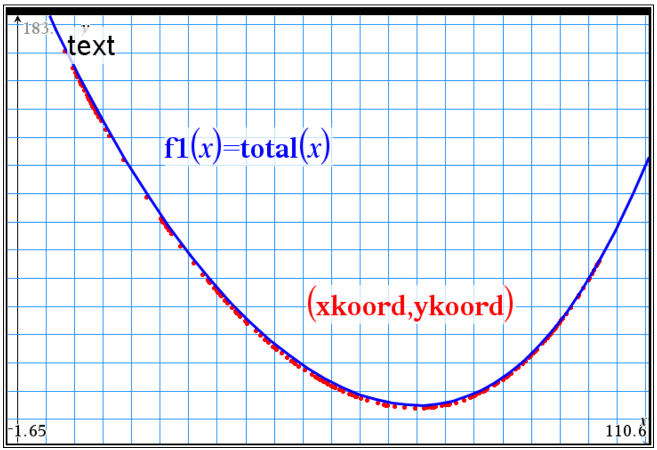
Definition av y2(x): $\mathbf{y2}(x):=\sqrt{38^2+(105-x)^2}$ ▸ *Klar*

Definition av totala avståndet:

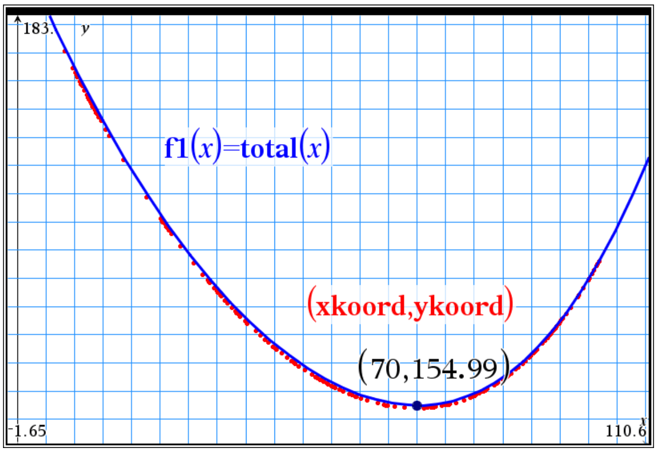
$\mathbf{total}(x):=\mathbf{y1}(x)+\mathbf{y2}(x)$ ▸ *Klar*

Vi tittar hur uttrycket ser ut. Det utvecklas då:

$\mathbf{total}(x)$ ▸ $\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}+\sqrt{x^2+5776}$



Här har grafiskt/numeriskt bestämt det minsta värdet. Vi får att det minsta värdet erhålls när $x = 70$.



$\frac{d}{dx}(\mathbf{total}(x))$ ▸ $\frac{x-105}{\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+5776}}$

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{total}(x))=0,x\right)$ ▸ $x=70$

$\mathbf{total}(70)$ ▸ $3\cdot\sqrt{2669}$

$\mathbf{total}(70)$ ▸ 154.987

Ovan har vi nu använt CAS-verktyget för derivata och beräknar derivatans nollställe. Sedan få vi det minsta avståndet som **total(70)**. Vi ser både en exakt beräkning och en beräkning med närmevärde. Man får det ungefärliga beräkningsresultatet om man håller ned Ctrl samtidigt som man trycker på enter.

Med hjälp av CAS.-verktyg har vi också gjort en stegvis beräkning.

$\frac{x-105}{\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+5776}}=0$

Vi skriver om ekvationen så här:

$\frac{x-105}{\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2+5776}}$

Vi ser till att få samma nämnare i båda leden. Detta ger

$(x-105)\cdot\sqrt{x^2+5776}=-x\cdot\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}$

Vi *kvadrerar* bägge leden:

$\left((x-105)\cdot\sqrt{x^2+5776}\right)^2$ ▸ $(x-105)^2\cdot(x^2+5776)$

$\left(-x\cdot\sqrt{x^2-210\cdot x+12469}\right)^2$ ▸ $x^2\cdot(x^2-210\cdot x+12469)$

Vi utvecklar bägge leden:

$\text{expand}\left((x-105)^2\cdot(x^2+5776)\right)$

▸ $x^4-210\cdot x^3+16801\cdot x^2-1212960\cdot x+63680400$

$\text{expand}\left(x^2\cdot(x^2-210\cdot x+12469)\right)$ ▸ $x^4-210\cdot x^3+12469\cdot x^2$

Nu får vi efter förenkling: $16801\cdot x^2-1212960\cdot x+63680400=12469\cdot x^2$

$\Rightarrow\ 4332x^2-1212960x+63680400=0$

Vi dividerar alla termer med 4332:

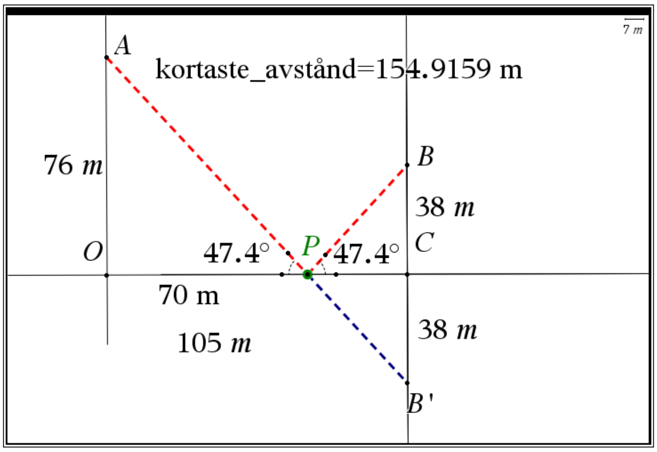
$\frac{4332\cdot x^2}{4332}-\frac{1212960\cdot x}{4332}+\frac{63680400}{4332}=0$ ▸ $x^2-280\cdot x+14700=0$

Nu löser vi denna ekvation:

$\text{solve}(x^2-280\cdot x+14700=0,x)$ ▸ $x=70$ or $x=210$

Vi har nu visat en grafisk/geometrisk, en algebra-isk/analytisk lösning. Det finns nu en riktigt smart lösning som är helt geometrisk.

Spegla punkten *B* i den linje som definierar flodfåran från menyn Transformation och välj sedan verktyget *Reflektion*). Spegelbilden av *B* kallas *B´*. Det kortaste avståndet mellan *A* och *B´* är en *rät* linje. Mät längden av sträckan *AB´*.



Trianglarna *PCB* och *PCB´* är kongruenta och trianglarna *OPA* och *PCB* är likformiga.