

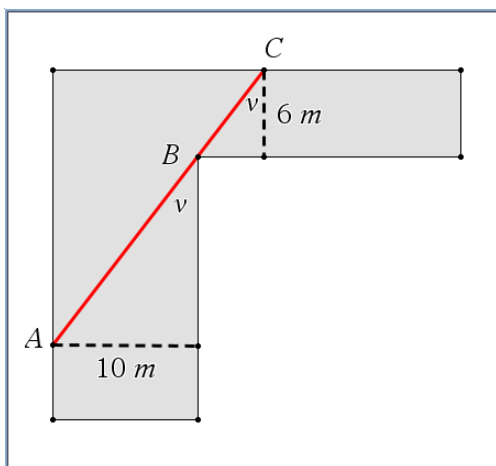
Den svängande bussen

Här tar vi upp ett problem från en lärobok i matematik från år 2000:

En lång buss ska svänga in på en smal gränd från gata. Gatans bredd är 10 m och grändens 6 m. Frågan är hur lång bussen högst får vara för att man ska lyckas svänga in på gränden?



Om det ska gå att svänga in i gränden beror inte bara på bussens längd utan också på dess bredd. Vi tar upp det senare i problemet! Nu tänker vi oss först att bussen representeras av linjen AC. Detta linjesegment får inte vara längre än som det visas i figuren.



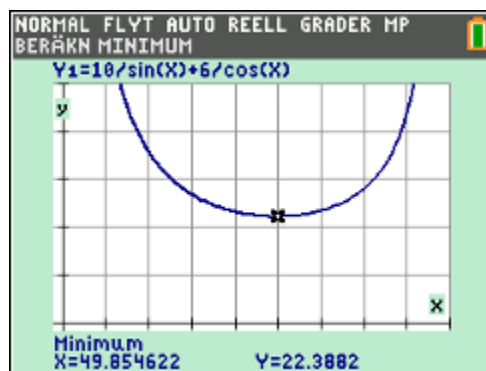
Vi ser att längden av AC beror på vinkeln v . Den *minsta* längden av AC om vinkeln är mellan 0 och 90 grader anger hur lång bussen *högst* får vara. Vi kan nu ställa upp ett uttryck för bussens längd, som vi kallar L .

$$\text{I figuren gäller: } \sin(v) = \frac{10}{AB} \quad \cos(v) = \frac{6}{BC}$$

Detta ger att längden L av bussen är

$$L(v) = AB + BC = \frac{10}{\sin(v)} + \frac{6}{\cos(v)}$$

Vi matar nu in uttrycket ovan som en funktion och gör en plottning. Med $\boxed{2nd}[calc]$ bestämmer vi sedan funktionens minsta värde.

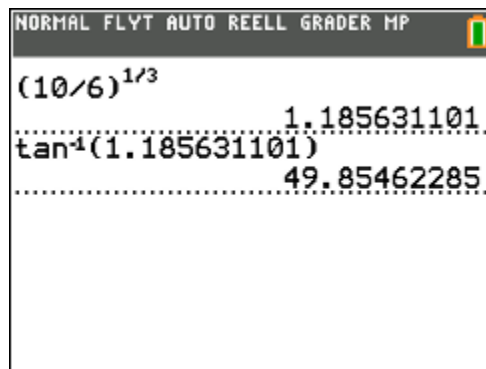


Vi ser att det minsta värdet blir ca 22,4 m. Då är vinkeln v ca 50 grader.

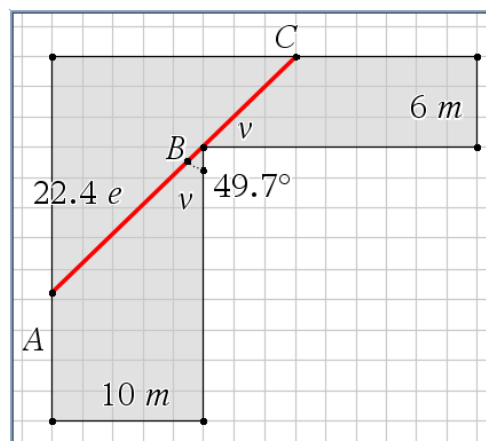
Genomför nu en exakt beräkning med derivata. Om du gör rätt bör du komma fram till uttrycket

$$\tan(v) = \sqrt[3]{\frac{10}{6}}$$

Se skärmbilden nedan.

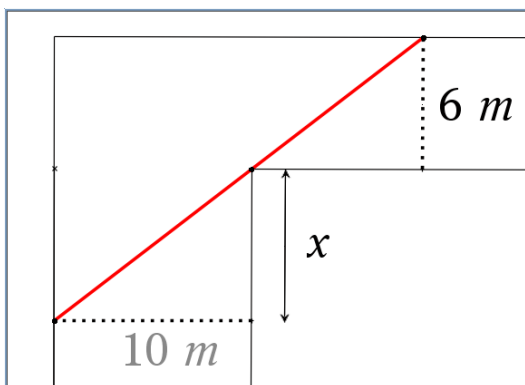


Här en skiss av lösningen. Vi ser längden 22,4 m och vinkeln ca 50 grader.



Kan man göra den här beräkningen utan att använda trigonometri?

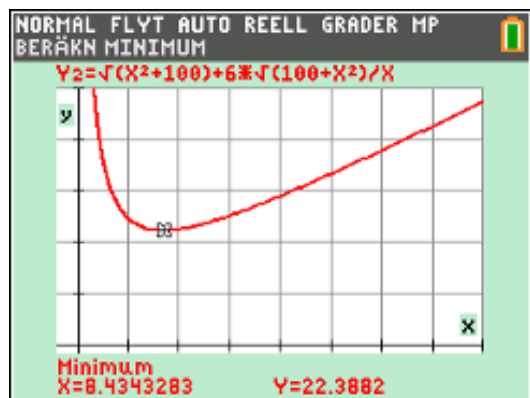
Här har vi infört variabeln x .



Likformighet och Pythagoras sats ger följande uttryck för bussens längd:

$$L = \sqrt{x^2 + 10^2} + \frac{6 \cdot \sqrt{x^2 + 100}}{x}$$

Om vi nu plottar ser vi att minimivärdet blir detsamma ($Y = 22,4$) som med första metoden



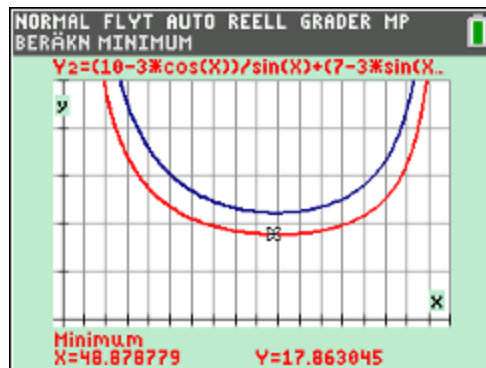
Vi ser att det är ett minimivärde. Man skulle kunna uttrycka det så att vi har räknat ut den kortaste buss som snuddar hörnet. När vi tagit reda på det så kan vi säga att en buss som är kortare än så kommer att kunna passera hörnet. Fundera över detta en stund!

Det *exakta* uttrycket för lastbilens längd är

Nu är det ju så att bussar utan bredd inte finns. Det vi beräknat gäller ju om vi skulle ha en 22,38 m lång och smal pinne. Vi antar nu att bussens bredd är 3 m. Då kan vi ställa upp följande uttryck för längden:

$$L = \frac{10 - 3 \cdot \cos(v)}{\sin(v)} + \frac{7 - 3 \cdot \sin(v)}{\cos(v)}$$

Om vi nu plottar både de trigonometriska funktionerna (utan och med bredd) så ser det ut så här:



Vi får att den maximala längden blir ca 17,9 m.

Använd nu den sista formeln för att beräkna maximala längden på en soffa som ska baxas in i en lägenhet med två korridorer. Försök att använda realistiska mått.

