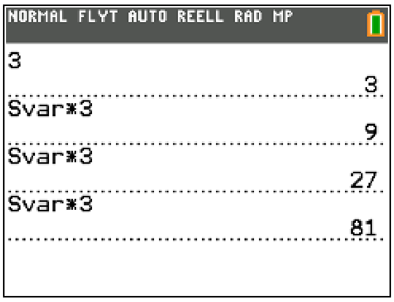
En berömd följd av tal

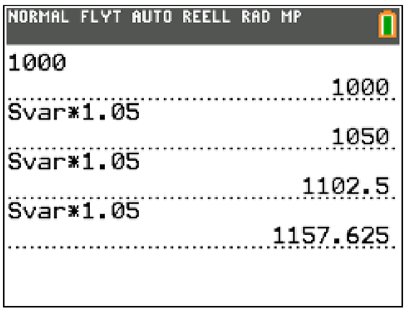
Vi ska i detta dokument studera en världsberömd talserie som kallas Fibonaccis talföljd. Den förekommer i många olika sammanhang i matematiken, naturen, konsten och arkitekturen. De som är intresserade av denna talföljd kan hitta otrolig mängd material. Bland annat förekommer den i boken Da Vinci-koden och den har fascinerat många människor under lång tid. Gör gärna en sökning på Google och se hur många träffar du får. Det finns otroligt mycket material.

Vi tror att många matematikintresserade elever på gymnasiet kan ha intresse denna aktivitet, även om man formellt studerar talföljder först i kurs 5. Där tar man ju upp begrepp som *rekursion*.

I matematiken har du säkert studerat sekvenser av tal, eller det vi kallar *talföljder*, som ganska enkla saker. Det är ju listor med tal som är ordnade i en viss ordning. Längden på dessa talföljder är oändligt eftersom vilken slumpmässig lista med siffror som helst duger. Men vissa typer av talföljder är inte slumpmässiga. Vi jan ta vanlig geometrisk talföljd. I en sådan erhålls varje element från det föregående genom att multiplicera det med samma bestämda tal. Ta till exempel talföljden: 3, 9, 27, 81, 243 är en geometrisk talföljd där varje element erhålls genom att multiplicera det föregående med 3.

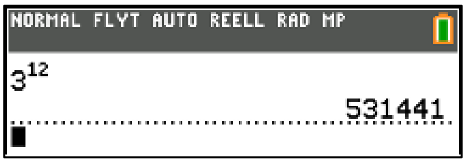


Samma sak gäller om du till exempel har 1000 kr som du sätter in på ett bankkonto till 5 % ränta. Efter ett år har 1050 kr och detta belopp förräntas nu med 5 % igen.



Låt oss säga att tillväxten 3, 9, 27 osv handlar om levande organismer och att tredubblingen sker på ett en månad så skulle resultatet efter ett år bli

3, 9, 27, 243, …. och till slut



Efter ytterligare någon tid kommer denna talföljd att växa sig mycket stor och det väldigt snabbt eller till och med mycket snabbt. Men beskriver den här typen av talföljder verkligen naturen?

Det beror på. Denna typ av tillväxt, som vi oftast kallar exponentiell tillväxt, kan faktiskt förekomma i många situationer. Men även om exponentiell tillväxt sker under en viss tid kan den inte pågå för evigt eftersom de organismer som snabbt förökar sig så småningom kommer att uttömma sina resurser. Det kan handla om mat eller tillgängligt livsutrymme. Kan det finnas andra förklaringar till att den exponentiella tillväxten inte kan löpa på?

Nej, inte riktigt. För att förklara det, låt oss gå tillbaka till början av 1200-talet. Då dyker det upp en ung världsvan man. *Fibonacci*, på scenen. Efter många utlandsvistelser återvände han tillsammans med sin familj till Italien och inspirerad av vad han lärt sig om matematik under sina resor skrev han en bok. Den här boken innehöll också en fundering över ett matematiskt problem som visade sig ha en mycket intressantare och mer hållbar lösning än man kunde föreställa sig. Hans matematiska fråga verkar ganska enkel. Se nästa sida.

Om två nyfödda kaniner placeras i en fålla, hur många kaniner kommer då att finns i fållan efter ett år? För att kunna besvara frågan antog Fibonacci följande:

- **När ett kaninpar förökar sig blir avkomman alltid en hane och en hona**
- **Kaniner förökar sig en gång i månaden**
- **Redan när de är en månad gamla kan de föröka sig.**
- **Sedan naturligtvis: de försvinner inte från fållan och de dör aldrig**.

För att börja besvara frågan kan vi tänka oss hur många kaninpar det finns i början av varje månad. Börja med det nyfödda par som finns i början av den första månaden. Dessa två första nyfödda är för unga för att reproducera sig den månaden, så vi börjar den andra månaden med 1 par också.

Hittills är talföljden alltså **1, 1.**

Vi fortsätter:

I början av den andra månaden är det ursprungliga paret tillräckligt moget för att para sig. Som ett resultat av detta föds ett nytt kaninpar i slutet av den andra månaden. I början av den tredje månaden har vi alltså totalt 2 par:

1, 1, 2

Det ursprungliga paret parar sig återigen i början av den månaden, men det nyfödda paret är fort-farande omoget. Det ursprungliga paret producerar ytterligare ett par avkommor, så i början av den fjärde månaden har vi totalt 3 par kaniner. Så här blir nu sekvensen räknat från första månaden

1, 1, 2, 3,

Vi fortsätter!

I början av den fjärde månaden parar sig två par (det ursprungliga paret och det första paret som föddes) och ett par är fortfarande omoget. De två paren som parade sig producerar vardera ett nytt par, vilket ger oss fem par i början av den femte månaden. Nu har vi sekvensen

1, 1, 2, 3, 5

Vi går vidare med ytterligare en månad. I början av den femte månaden parar sig tre par, men de två senaste paren som just har fötts är fortfarande omogna. Efter att de tre nya paren med avkommor har fötts flyttar vår total till 8 par.

Nu är vår sekvens denna:

1, 1, 2, 3, 5, 8

Man börjar ana ett mönster! Om vi säger att nästa term är 13 och termen därefter 21. Så här alltså:

Tricket är att varje tal i Fibonacciföljden erhålls genom att addera de två föregående:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, …

Det här betyder ju at vi kan räkna ut hur många par vi har efter 12 månader:

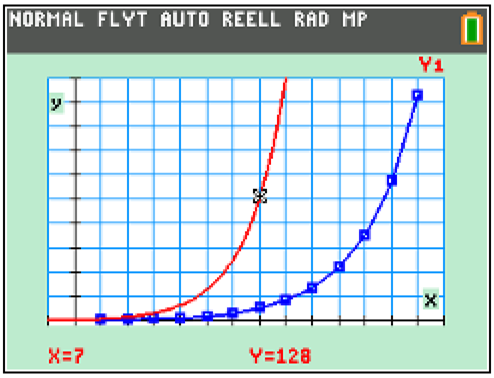
1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144

Nu måste vi lägga till ett tal till eftersom alla tal representerar antalet vid början av månaden. I början av månad 13 finns det då 89 + 144 = 233 kaninpar.

Om vi som nu tar hänsyn till att organismer, till exempel kaniner, inte kan föröka sig omedelbart efter att de har fötts så har detta faktum en nästan dramatisk effekt på befolkningstillväxten. Efter 12 månatliga fördubblingar förutspår exponentiell tillväxt **8192** (2^{13} kaniner)!

Det är ett tal som är mer än 17 gånger så stort som 233.

Så här ser tillväxten ut grafiskt. Vi jämför alltså Fibonacciserien med månatliga fördubblingar. Den röda kurvan drar snabbt ifrån den blå Fibonacci-kurvan.

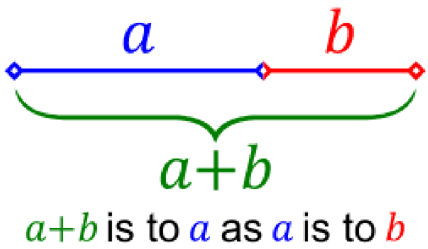


Fibonacciföljden är ju också en förenklad modell. Levande varelser dör ju så småningom.

Nu kommer vi inte att ta upp hur Fibonaccitalen förekommer i naturen. Detta är ju ett matematiskt dokument och vi koncentrerar oss på matematiken i denne talserie.

Det blev en lång utläggning om kaniner. Men det var ju så det startade för ca 900 år sedan! Vi ska nu ta upp någonting som heter. *Gyllene snittet* och som har starkt samband med Fibonacciföljden.

Gyllene snittet eller ϕ (grekiska bokstaven fi), är det förhållande som erhålls när en sträcka delas i en längre del *a* och en kortare del *b* så att hela sträckan a + *b* förhåller sig till *a* som *a* förhåller sig till b. Se figur.



Vi kan ställa upp detta som en ekvation:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$$

Detta ger att

$$(a+b)\cdot b=a^2$$

Om den kortare sträckan, *b* till exempel, är 1 så får vi ekvationen

$$(a+1)\cdot 1=a^2$$

Det här är en vanlig andragradsekvation och den kan vi lösa. Vi skriver först om den på den form vi är vana vid:

$$a^2-a-1=0$$

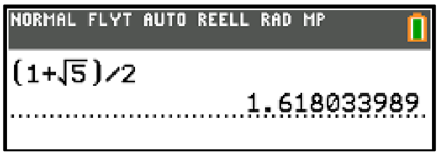
$a=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$ som kan förenklas till

$$a=\frac{\pm 1+\sqrt{5}}{2}$$

Vi är nu bara intresserade av den positiva roten så det värde på *a* vi vill åt är:

$$a=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

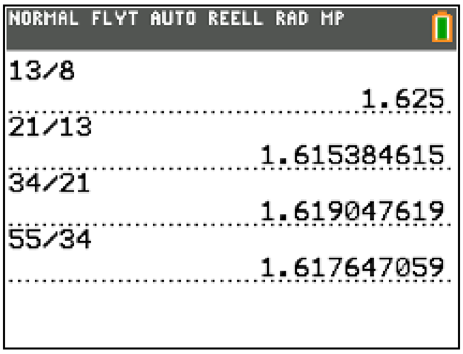
Ett närmevärde på detta tal får vi på räknaren:



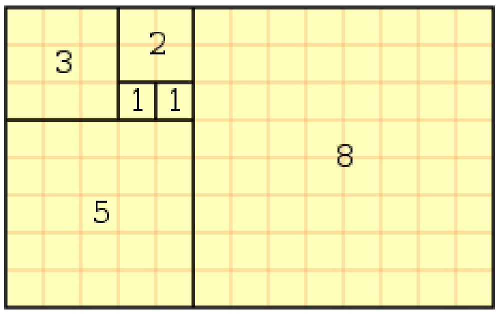
En rektangel med proportionerna 1,61803:1 får vi om vi bygger på rektangeln nedan med nya kvadrater. Vi ser talen 1, 1, 2, 3, 5, 8. Om vi fortsätter får vi talen 13, 21, dvs. nästa tal är summan av de två föregående. De här talen känner du igen från kaninerna.

Det visar sig att kvoten mellan två på varandra följande tal i denna talserie just närmar sig lösningen till ekvationen.

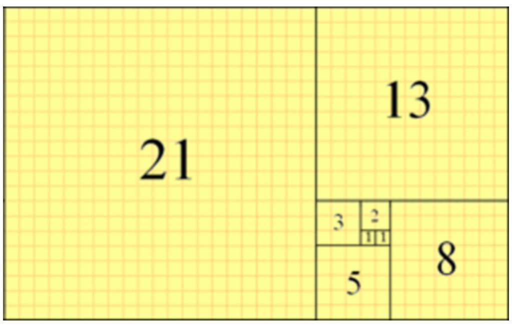
Se skärmbilden här:



En rektangel med proportionerna 1,61803:1 får vi om vi bygger på rektangeln nedan med nya kvadrater. Vi ser nedan talen 1, 1, 2, 3, 5, 8. Om vi fortsätter får vi talen 13, 21, dvs. nästa tal är summan av de två föregående**.**



Här är bredd/höjd-förhållandet 1,625



Här är bredd/höjd-förhållandet 1,619

Nu kommer vi till den punkt i aktiviteten där vi ska få räknaren att beräkna dessa Fibonaccital med en enkel formel. Vi ska använda en *rekursiv* metod. Vi definierar här vad en rekursiv talföljd är:

En talföljd är *rekursiv* om nästa tal i talföljden följer från tidigare tal enligt en bestämd regel. Tal som behövs för att sätta i gång följden kallas *start-värden.*

Vi tar ett enkelt exempel:

Du sparar 1000 kr i månaden i en fond som växer med 6 procent i månaden. Hur mycket har du i fonden efter 6 månader?

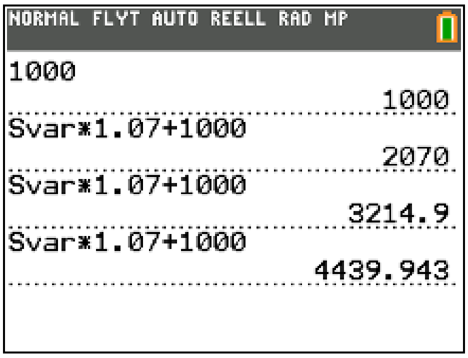
Skriv in 1000 i grundfönstret och tryck på [enter]. Skriv sedan direkt

[×]1.07+1000

och tryck på [enter] igen. Upprepa nu detta genom att tryck på [enter] flera gånger.

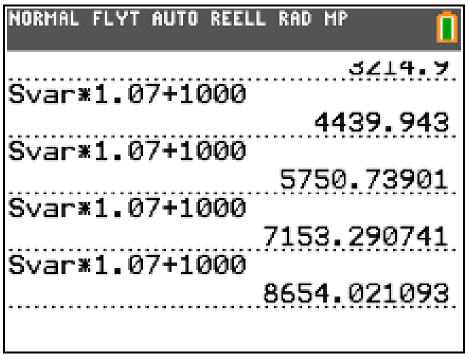
Startvärdet är 1000 och regeln för beräkningarna är att multiplicera med 1,07 och sedan lägga till 1000.

Vi tittar på hur det ser ut på räknaren.



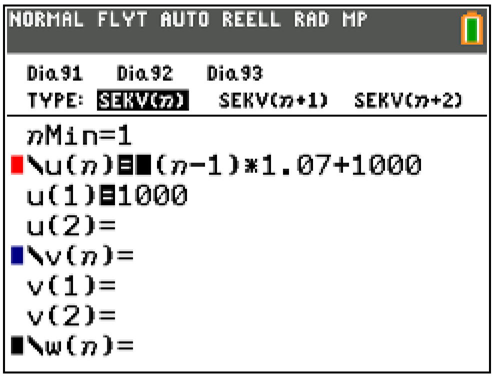
Från början har vi 1000 kr. Efter en månad så har detta belopp förräntats med 7 % och sedan lägger vi till det månatliga sparandet på 1000 kr. Detta upprepas sedan gång på gång!

Nu ser vi bara vad du har efter 3 månader på skärmen. Vi trycker på [enter] tre gånger till:



Nu behöver vi inte hålla på så här och trycka på [enter] en massa gånger. Tryck på inställnings-tangenten [mode] och ställ in graf- och funktionsläget till **SEKV** på femte raden. Man kan ju på räknaren arbeta med många olika former av matematiska relationer.

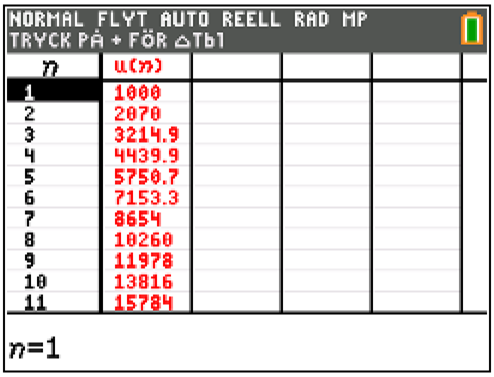
Tryck nu på tangenten [y=] och skriv in så här:



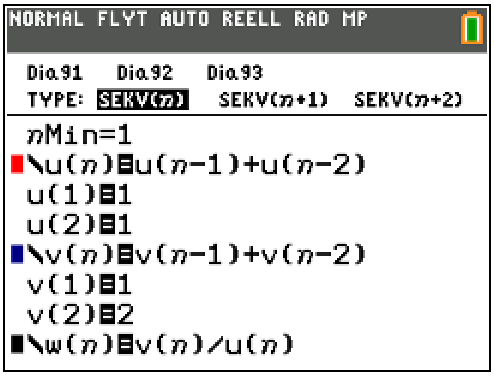
Vi har här en talföljdsformel och den heter **u**. För att komma åt tangenterna och kunna skriva in **u** så ser du att den är [2nd]-funktion till tangenten [7]. För att skriva ***n*** så trycker du på [X,T,θ,n].

När du är klar så trycker du på [2nd] [table] för att få en tabell. Se till att du har en tabellinställning som börjar på 1 och steget mellan varje värde är 1. Man trycker då på [2nd] [tablset]och göra sina inställningar.

Så här blir tabellen:



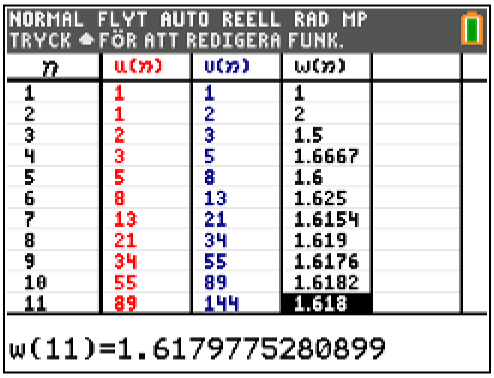
Nun är du redo att skriva in uttrycken för Fibonaccíföljden. Se nedan.



Vi har här två talföljdsformler och de heter **u** och **v**. För att komma åt tangenterna och kunna skriva in u och v så ser du att de är [2nd]-funktioner till tangenterna [7] och [8]. För att skriva ***n*** så trycker du på [X,T,θ,n].

Om du tittar på de röda och blå uttrycken på skärmbilden ovan så har vi skrivit in att vi ska beräkna summan av två startvärden u(1) och u(2) respektive v(1) och v(2). Uttrycket med u är det riktiga Fibonacciuttrycket med startvärden 1 och 1 medan för talföljden v så börjar vi med startvärdena 1 och 2. Vi hoppar alltså över en term 1. Anledningen ser du i den tredje talföljden w där vi ska beräkna kvoten av två på varandra följande tal (kallas *konsekutiva* tal).

Så här blir det då.


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK ♠ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

n	u(n)	v(n)	w(n)
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	3	1.5
4	3	5	1.6667
5	5	8	1.6
6	8	13	1.625
7	13	21	1.6154
8	21	34	1.619
9	34	55	1.6176
10	55	89	1.6182
11	89	144	1.618

w(11)=1.6179775280899

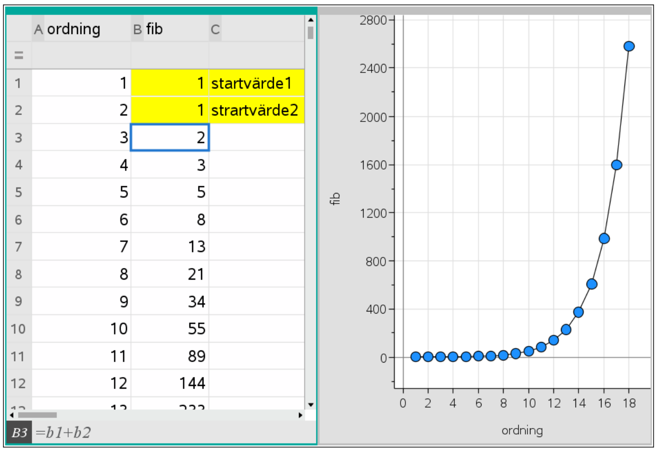
Nu kan du bläddra dig ner och se nya Fibonaccital. När får du ett Fibonaccital som är större än en miljon?

Man kan faktiskt åstadkomma en formel för Fibonaccitalen i *sluten form*. Den här formeln kallas Binets formel. Den kan skrivas så här på räknaren

$$u(n)=\frac{(1+\sqrt{5})^n-(1-\sqrt{5})^n}{2^n\cdot\sqrt{5}}$$

Pröva nu att skriva in denna formel och ta sedan fram en tabell.

Ett alternativ till att rita talföljderna i grafdelen på räknaren är att göra det med ett kalkylprogram. Vi visar här hur det ser ut med kalkylbladsappen hos TI-Nspire.


	A ordning	B fib	C
=			
1	1	1	startvärde1
2	2	1	strartvärde2
3	3	2	
4	4	3	
5	5	5	
6	6	8	
7	7	13	
8	8	21	
9	9	34	
10	10	55	
11	11	89	
12	12	144	

B3 =b1+b2

Då skriver man i kolumn A in 1 och 1 i de två första cellerna. I cell A3 skriver man =a1+a2. Sedan kopierar man denna cell och markerar nedåt ett antal rader i cellen och väljer klistra in.