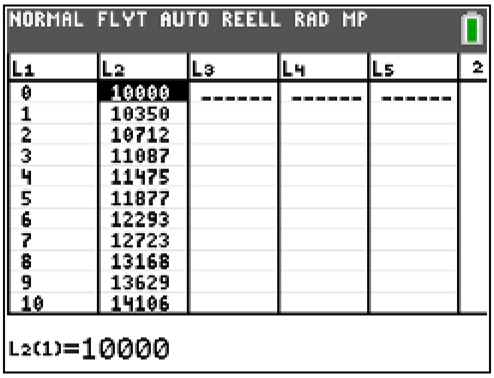
Exponentiella förlopp -från sparande till virusspridning

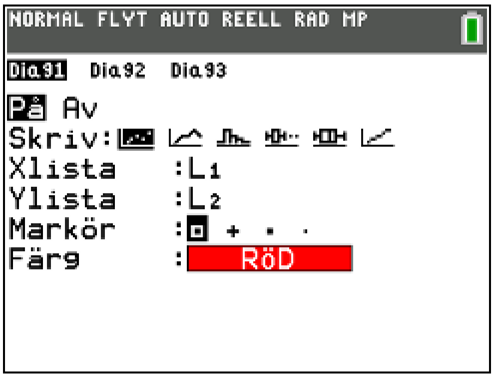


L1	L2	L3	L4	L5
0	10000	------	------	------
1	10350			
2	10712			
3	11087			
4	11475			
5	11877			
6	12293			
7	12723			
8	13168			
9	13629			
10	14106			

När Mia föddes satte hennes föräldrar in 10 000 kr på ett sparkonto som de skulle ge henne i present på 20-årsdagen. I skärmbilden ovan ser du hur kapitalet utvecklats under ett antal år. Data i L2 har vi skapat genom en formel. Du bör kunna lista ut vilken formel som har använts.

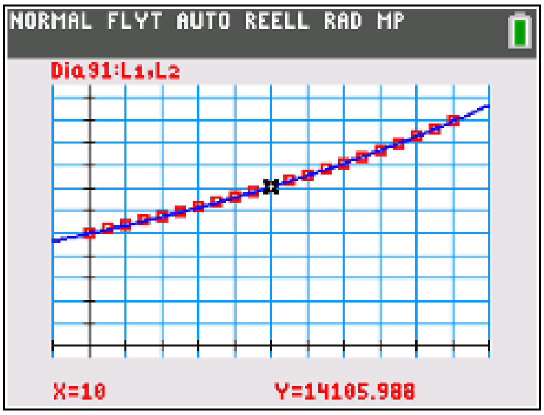
Vilken formel har vi använt och vad är spar-beloppet efter 20 år.

Du ska nu plotta ett spridningsdiagram över hur kapitalet utvecklats under 20 år. Nedan ser du inställningarna. Du når dem genom att trycka på [2nd] [stat plot].



Om du vill visa spridningsdiagrammet på ett bra sätt så kan du trycka du på [zoom] och väljer 9:ZoomStat. Det kan vara nödvändigt att ändra visningsfönstret om du vill ha ett rutnät för att få en bra avläsning.

Med kunskap om exponentiell tillväxt och sammansatt ränta så bör du alltså kunna bestämma en formel som visar hur sparkapitalet utvecklas. Skriv också in formeln i funktionseditorn under Y1. Har du gjort rätt så bör din skärm se ut ungefär så här:



Om man som här sätter in 10 000 kronor till 3,5 % årsränta och inte sätter in eller tar ut pengar så kan sambandet mellan tiden och det kapital man har på kontot beskrivas med formeln

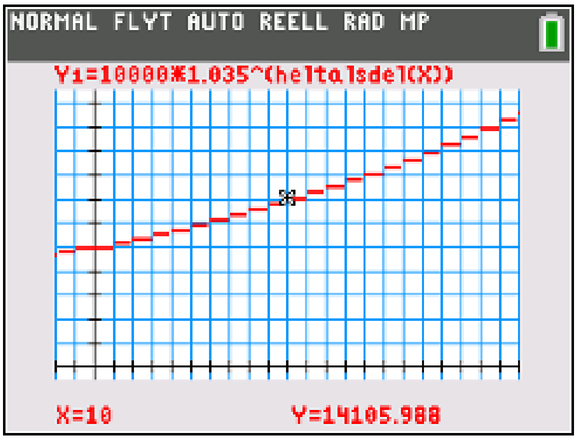
$y = 10\,000 \cdot 1{,}035^{x}$

där *y* är det innestående beloppet och *x* den tid i år som det stått inne på kontot. Den här formeln stämmer dock inte med det konto-besked som man får. Räntan läggs på vid varje årsskifte, och sedan har man det beloppet på kontot fram till nästa årsskifte. Man säger att ränteperioden är ett år och att räntan *kapitaliseras* en gång om året.

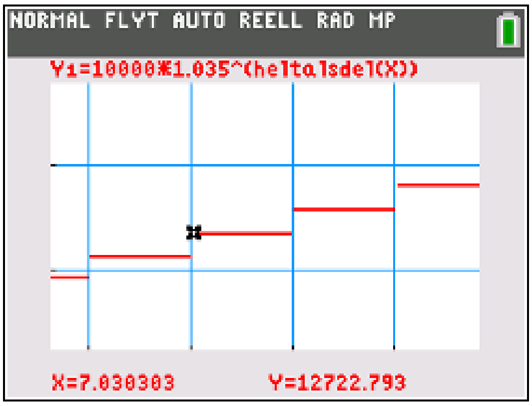
Om vi med *k* betecknar det belopp som står på kontobeskedet så gäller sambandet

$k = 10\,000 \cdot 1{,}035^{\lfloor x \rfloor}$,

där $\lfloor x \rfloor$ betecknar *heltalsdelen* av *x*, dvs. x avrundat neråt. Det här är en funktion som hoppar upp i varje heltalspunkt. Grafen ser alltså ut som en trappa med trappsteg som blir högre och högre. Du hittar funktionen *heltalsdel* om du trycker på [math] och väljer NUM i menyn högst upp på skärmen.



Så ser en förstoring av kurvan ut.



Men man kan också lägga räntan till kapitalet *oftare* än en gång om året. Om man får räntan en gång i halvåret så blir sambandet

$k = 10\,000 \cdot (1 + 0{,}035/2)^{\lfloor 2x \rfloor}$.

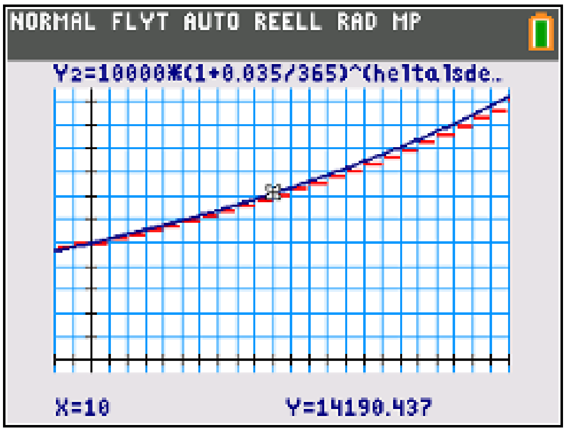
Om x mäter antalet år så är ju 2x antalet halvår.

Efter ett år har man här

$10\,000 \cdot (1 + 0{,}035/2)^{\lfloor 2 \cdot 1 \rfloor} \approx 10353$ kr.

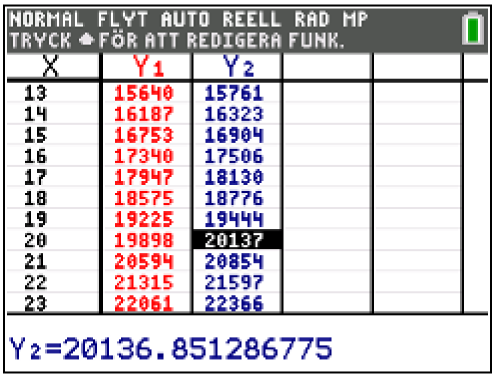
Halvårsräntan 1,75 % motsvarar alltså en årsränta på 3,53 %. Det är alltså inte så som att helårsräntan är dubbla halvårsräntan! Man skulle alltså "tjäna" 3 kronor på att ta ut pengarna med ränta efter ett halvår och låta dem sitta inne på kontot ett halvår till.

Om vi nu räknar med helårsränta och *dagsränta* i samma graffönster blir det så här. Vi ser att den hackiga kurvan blir nästan helt jämn.



Du kan säkert lista ut vilken formel man ska ha när man räknar med dagsränta (1 år=365 dagar).

Här ser vi också resultatet i tabellform. Du trycker då på [2nd] [table].


NORMAL FLYT AUTO REELL RAD MP
TRYCK ♦ FÖR ATT REDIGERA FUNK.

X	Y1	Y2
13	15640	15761
14	16187	16323
15	16753	16904
16	17340	17506
17	17947	18130
18	18575	18776
19	19225	19444
20	19898	20137
21	20594	20854
22	21315	21597
23	22061	22366

Y2=20136.851286775

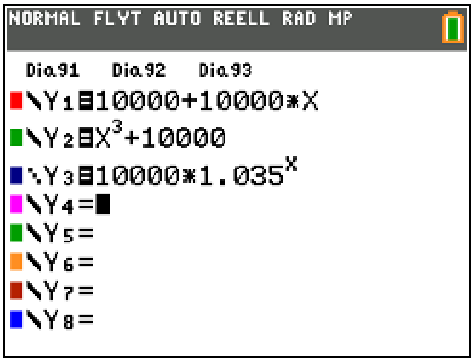
Efter 20 år så har man alltså bara tjänat 239 kr!

Vad händer om vi tar allt kortare ränteperioder?

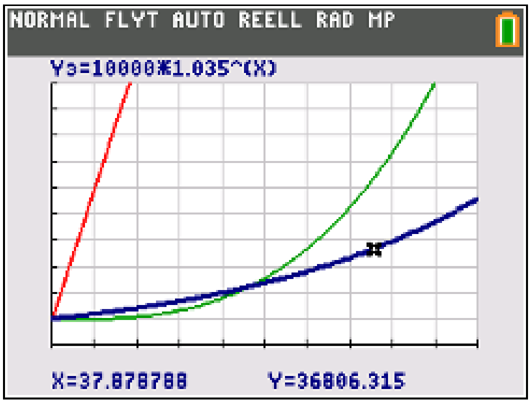
Det visar sig att om man avrundat så kommer man inte upp i mer än 20138 kr. I kurs 3 så visar vi hur man kommer fram till ett svar på frågan! Man kommer då fram till en matematisk konstant som har namnet ***e***.

Hur växer exponentialfunktioner?

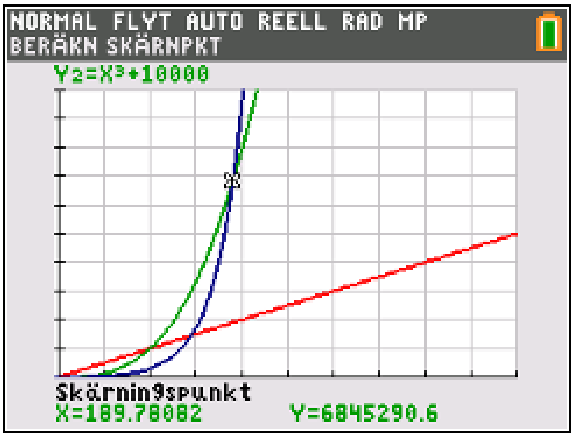
Titta på de tre funktionerna nedan. Vi har en linjär funktion, en tredjegradsfunktion och den exponentialfunktion som vi studerat tidigare.



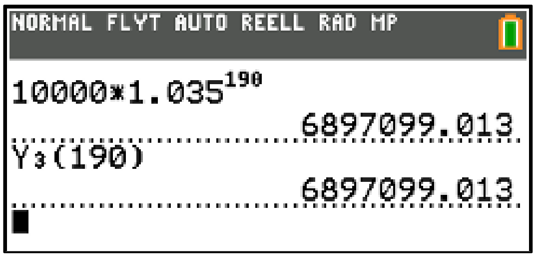
Vi ser att den linjära funktionen drar i väg ordentligt för stigande x. Värdet på tredjegradsfunktionen blir klart större (ungefär dubbelt så stort) när *x*-värdet är ungefär 50. I botten har vi exponentialfunktionen.



Vi låter nu x växa ytterligare. Här har vi ett fönster där x-max är 500. Vi ser att exponentialfunktionen nu växer allt snabbare. För *x*-värdet ca 190 har den samma värde som tredjegradsfunktionen. *Y*-värdet är då knappt 7 miljoner!

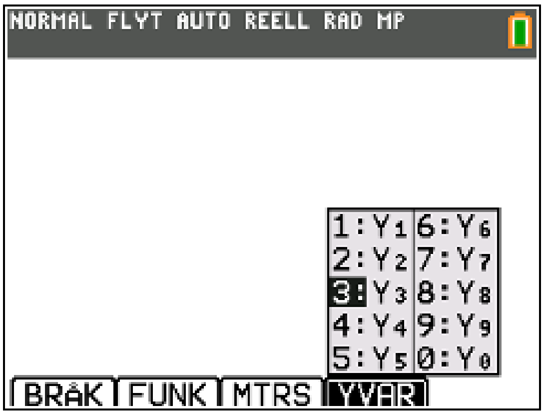


Det här visar lite av kraften i exponentialfunktioner. Det är faktiskt så att de växer ifrån alla andra funktioner. Våra 10000 kr har alltså vuxit till nästan 7 miljoner på 190 år.



När man har lagrat ett uttryck i funktionseditorn (i detta fall Y1 till Y3) kan man ta fram värdet genom att skriva enligt skärmen ovan. Tryck då först på tangenten [vars], sedan Y-VAR och där väljer du funktion.

Det finns också ett *snabbval* (genväg), Tryck då på [alpha] och sedan [y=] och välj sedan YVAR.



Hur snabbt sker en fördubbling?

Vi såg tidigare i det inledande exemplet att kapitalet på 10 000 kr i sort sett fördubblades på 20 år:

$10\,000 \cdot 1{,}035^{20}\,\text{kr} \approx 19\,898$ kr

VI ska ny räkna ut vad fördubblingstiden blir exakt. Det ger oss ekvationen:

$20000 = 10000 \cdot 1.035^x$

Vi får efter division med 10000 i båda leden

$2 = 1{,}035^x$

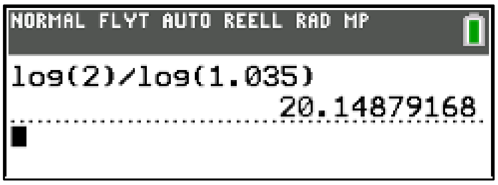
Vi *logaritmerar* nu båda leden

$\log 2 = \log 1{,}035^x$

Tredje logaritmlagen ger nu

$\log 2 = x \cdot \log 1{,}035$

Vi kan nu lösa ut x



Vi kan också beräkna vilken procentsats man ska ha för att fördubblingstiden ska bli exakt 20 år.

Vi får då analogt med beräkningarna ovan:

$$20 = \frac{\log 2}{\log x}$$

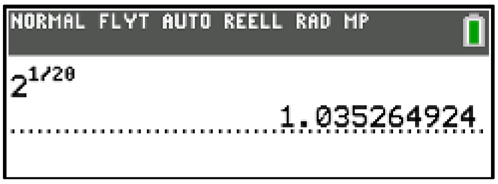
som ger

$$\log x = \frac{\log 2}{20}$$

$$10^{\log x} = 10^{\frac{\log 2}{20}}$$

$$x = 2^{\frac{1}{20}} = 1{,}03526\ldots$$

Här har vi alltså beräknat både ett exakt värde och ett närmevärde på räntefaktorn.



I stället för att skriva formeln för exponentiell på det vanliga sättet som

$y = K \cdot a^x$

Där *K* är startvärde och *a* förändringsfaktor

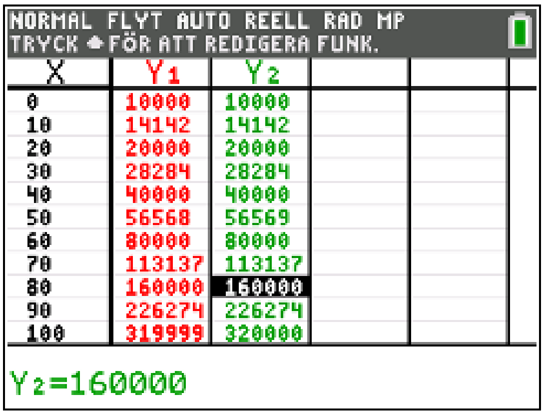
Så kan man skriva så här

$y = K \cdot 2^{\frac{x}{T}}$

Där *T* är fördubblingstiden. Vi beräknade att fördubblingstiden skulle bli "exakt" 20 år om man justerade räntan till 3,52649 %. Se beräkningar på förra sidan.

Om man nu matar in det mer traditionella uttrycket och uttrycket med fördubblingstid i funktionseditorn ser det ut så här:

Om vi nu tar fram värdetabeller (tryck på 2nd [table]) ser det ut så här:



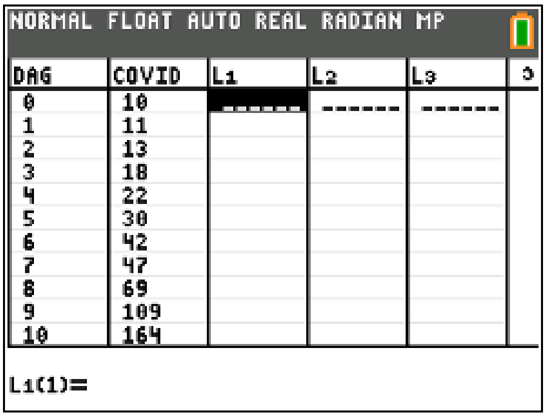
Du ser att man får samma värden i tabellerna och du ser också fördubblingstiden 20 år ordentligt. Ofta är det mer praktiskt att ange fördubblingstiden i stället för förändrings-faktorn. Man får du en större känsla för hur det kan gå på längre sikt.

I den verkliga världen kan exponentiell tillväxt inte fortsätta i all oändlighet. Ändå stämmer den ofta bra överens med saker som händer i den verkliga världen på kortare sikt. Man skulle kunna säga att i statistik är alla modeller fel-aktiga, men många modeller är oerhört använd-bara.

Med modell menar vi en matematisk modell, och med matematisk modell menar vi att en matematisk formulering kan motsvara något som händer i verkligheten. Vi avslutar med ett exempel från covid-19-pandemin i Storbritannien. Data är antalet bekräftade fall varje dag på sjukhus från den 23 mars och en månad framåt 2020. Man har här beräknat att fördubblingsgstiden var ca 2,7 dagar. *(https://coronavirus.data.gov.uk/details/cases)*

Date	Cases to date	New cases reported	Cumulative cases
23/02/2020	10	1	11
24/02/2020	11	2	13
25/02/2020	13	5	18
26/02/2020	18	4	22
27/02/2020	22	8	30
28/02/2020	30	12	42
29/02/2020	42	5	47
01/03/2020	47	22	69
02/03/2020	69	40	109
03/03/2020	109	55	164
04/03/2020	164	56	220
05/03/2020	220	51	271
06/03/2020	271	81	352
07/03/2020	352	60	412
08/03/2020	412	57	469
09/03/2020	469	148	617
10/03/2020	617	259	876
11/03/2020	876	406	1282
12/03/2020	1282	484	1766
13/03/2020	1766	478	2244
14/03/2020	2244	361	2605
15/03/2020	2605	442	3047
16/03/2020	3047	610	3657
17/03/2020	3657	770	4427
18/03/2020	4427	999	5426
19/03/2020	5426	1053	6479
20/03/2020	6479	1259	7738
21/03/2020	7738	1196	8934
22/03/2020	8934	1378	10312
23/03/2020	10312	2335	12647

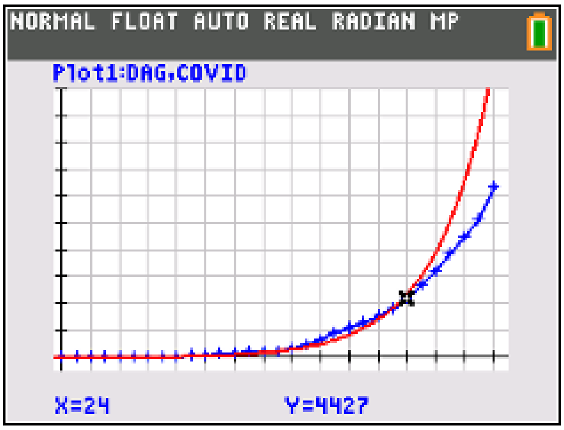
Data från tabellen på förra sidan har vi laddat ner till Microsoft Excel i filformatet csv och sedan importerat till räknaren som listor. Räknarlistorna heter **DAG** och **COVID**.


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

DAG	COVID	L1	L2	L3
0	10	------	------	------
1	11			
2	13			
3	18			
4	22			
5	30			
6	42			
7	47			
8	69			
9	109			
10	164			

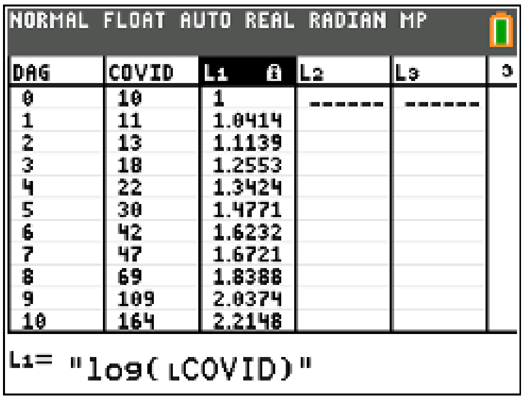
L1(1)=

Vi plottar nu ett spridningsdiagram på data och lägger samtidigt in plottning av en matematisk modell som innehåller fördubblingstiden 2,7 dagar.



Vi ser att modellen stämmer bra fram till dag 24 ungefär. Man lyckas sedan begränsa smittspridningen.

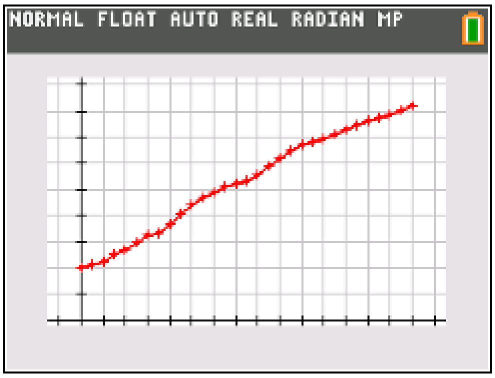
Vi tar nu till ett knep som statistiker ofta gör-man logaritmerar data. Eftersom logaritmer är inversen till exponentialfunktioner så bör logaritmerade data följa en rät linje.


NORMAL FLOAT AUTO REAL RADIAN MP

DAG	COVID	L1	L2	L3
0	10	1	------	------
1	11	1.0414		
2	13	1.1139		
3	18	1.2553		
4	22	1.3424		
5	30	1.4771		
6	42	1.6232		
7	47	1.6721		
8	69	1.8388		
9	109	2.0374		
10	164	2.2148		

L1= "log(ʟCOVID)"

Nu plottar vi L1 mot L3:



Det verkar i detta fall som logaritmerade data följer en rät linje väldigt bra. Man kan analysera detta närmare med linjär regression. Verktyg för detta finns på räknaren.