Modellera en avkylningsprocess

En avkylningsprocess hos en vätska är ett klassiskt exempel på en tillämpning på en differentialekvation av första ordningen. Newtons lag säger att avkylningen kan modelleras av ekvationen

$$\frac{dT}{dt} = k \cdot (T - T_0)$$

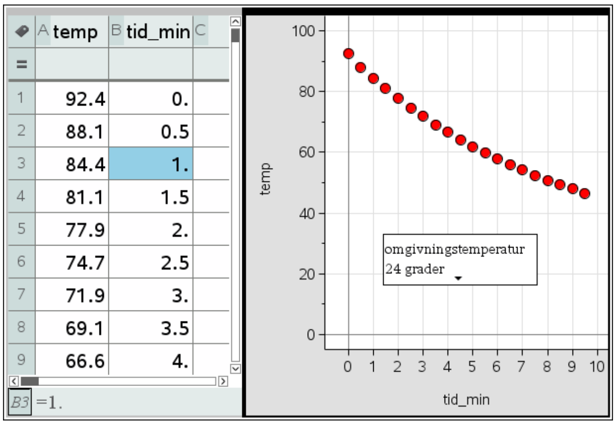
där T är temperaturen hos vätskan, T_0 är temperaturen hos omgivningen, som antas vara konstant, och den är i detta fall 24 °C. k är en parameter vars värde beror på hur snabbt vätskan kallnar.

Lösningen till denna differentialekvation är

$$T(t) = T_0 + C \cdot e^{kt}$$

där C är differensen mellan begynnelsetemperaturen (när t=0) och omgivningens temperatur.

I experimentet mättes temperaturen var 30:e sekund under ca 10 minuter. Omgivningens temperatur var som tidigare nämnts 24 grader.

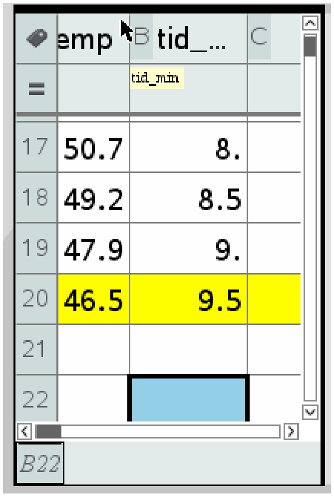


Beräkning av parametrarna C och k i uttrycket

$$T(t) = T_0 + C \cdot e^{kt}$$

kan göras på olika sätt Vi kan börja med att lösa ett ekvationssystem med två obekanta. Vi använder då data vid tiden 0 minuter och 9.5 minuter. Vi kan välja andra mätpunkter om vi vill. Vi får då ungefär samma värden på C och k. Det intressanta här att vi bara behöver två mätpunkter. För ett andragrads-uttryck skulle du behöva tre mätpunkter.

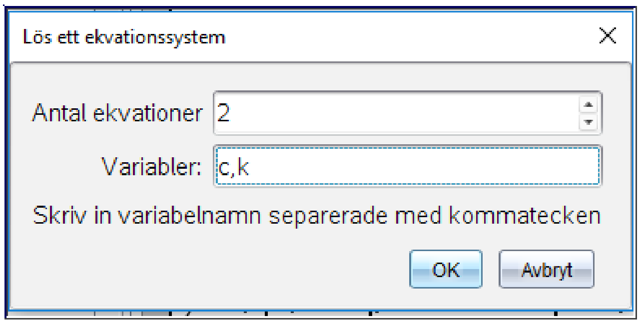
Vi använder här beteckningen tp för temperatur och tp(0)= 92,4 och tp(9.5)= 46,5. Se tabell nästa spalt.

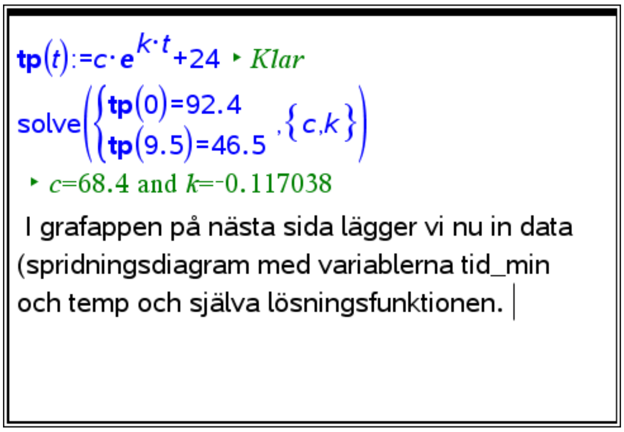


Först definierar vi ekvationen tp(t) med två okända konstanter. Vi skriver då

$$tp(t) := c \cdot e^{k \cdot t} + 24$$

Vi använder sedan algebraverktyget ”Lös ekvations-system.

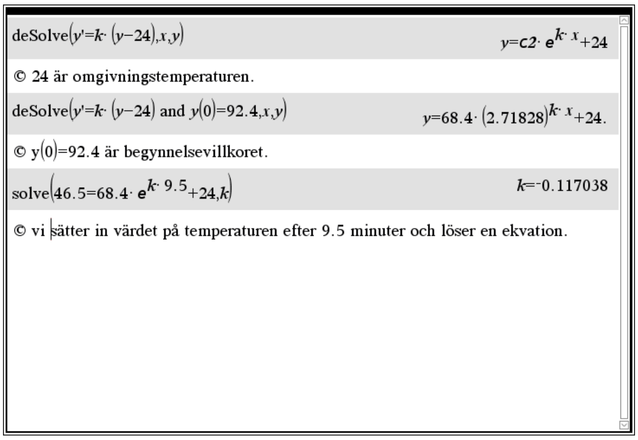




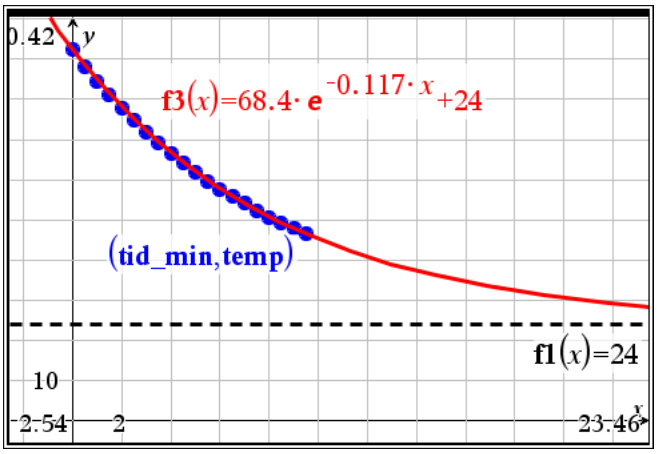
Vi får nu parametrarna beräknade. Vi hade kunnat göra detta på ett annat sätt också. Om t=0 så får vi ju:

$$92.4 = 24 + C \cdot e^{k \cdot 0}$$

Då $e^{k \cdot 0} = 1$ så får vi ju direkt att C = 92.4 - 24= 68.4. Det stämmer med vad som sagts tidigare om Newtons avsvalningslag: ” där C är *differensen* mellan begynnelsetemperaturen (när t=0) och omgivningens temperatur.”



Vi kan nu plotta datapunkterna från mätningarna och exponentialfunktionen med de beräknade värdena på *c* och *k*. Vi ser att modellkurvan följer mätpunkterna nästan perfekt. Kurvan närmar sig asymptotiskt linjen f1(x)=24.



Man kan naturligtvis också hitta en lösningskurva numeriskt med t.ex. Eulers stegmetod. Här har vi lagt in konstanten *k* som en parameter och använt skjut-reglaget för att se hur lösningskurvan förändras när k-värdet ändras.